INFERENCIA ESTADÍSTICA

(MUESTREO Y DISTRIBUCIONES MUESTRALES)

(SOLUCIONARIO LIBRO)

2º DE BACHILLERATO LETRAS

COLEGIO MARAVILLAS

Recopilados por: Teresa González

1.-

Dada la población {1, 3, 5, 7}, forma las muestras posibles de tamaño 2.

a) Sin reposición. b) Con reposición.

a) Las muestras posibles son: {1, 3}, {1, 5}, {1, 7}, {3, 5}, {3, 7}, {5, 7}

b) Las muestras posibles son:
{1, 1}, {1, 3}, {1, 5}, {1, 7}, {3, 3}, {3, 5}, {3, 7}, {5, 5}, {5, 7}, {7, 7}

2.-

Halla la población formada por las medias de todas las muestras de tamaño 2 de {1, 3, 5, 7} y, después, calcula su media.

a) Sin reposición. b) Con reposición.

a) La población formada por las medias es: {2, 3, 4, 4, 5, 6}
Su media es: $\overline{x} = 4$

b) La población formada por las medias es: {1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7}
Su media es: $\overline{x} = 4$

3.-

De una población de 280 hombres y 320 mujeres se desea seleccionar una muestra estratificada, con afijación proporcional de tamaño 60, distribuida en los dos estratos. ¿Cuál será la composición de la muestra?

Elegimos los estratos de la población: hombres y mujeres.

Calculamos el número de elementos que debe tener cada muestra aleatoria simple extraída de los estratos:

$$\frac{n_1}{280} = \frac{n_2}{320} = \frac{60}{600} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 28 \\ n_2 = 32 \end{cases}$$

La muestra debe estar formada por 28 hombres y 32 mujeres.

4.-

Tenemos 1.133 yogures de tres marcas diferentes, y queremos hallar una muestra estratificada con afijación igual de tamaño 81, para estudiar su contenido en grasas. ¿Cómo lo harías?

Elegimos como estratos de la población los tres tipos de yogures según cada marca.

Tomamos una muestra aleatoria simple dentro de cada estrato de tamaño: $\frac{81}{3} = 27$; es decir, seleccionamos 27 yogures de cada marca.

5.-

Un IES se compone de 4 clases de 1.º de ESO, 4 de 2.º de ESO, 4 de 3.º de ESO y 4 de 4.º de ESO. En cada una de las 4 plantas que tiene el centro, hay una clase de cada curso.

Di cómo se extrae una muestra estratificada y otra por conglomerados.

Para la muestra estratificada, segmentamos la población en estratos eligiendo 4 estratos formados por los alumnos de cada curso; de esta manera los estratos son diferentes entre sí, los alumnos de 1.º son diferentes de los de 2.º, 3.º o 4.º, y dentro de cada estrato los alumnos son más homogéneos, y el comportamiento de los alumnos de un mismo curso es similar entre ellos.

Para la muestra por conglomerados, segmentamos la población en conglomerados eligiendo 4 conglomerados formados por los alumnos de cada planta del instituto; de esta manera los conglomerados son muy parecidos entre sí y, sin embargo, el comportamiento de los alumnos dentro de un mismo conglomerado es muy diferente entre ellos.

6.-

Pon un ejemplo de situación en la que la muestra más conveniente se obtenga mediante muestreo por conglomerados y otro en que se obtenga por muestreo estratificado con afijación proporcional. Explica en qué se diferencian.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Aplicaríamos un muestreo por conglomerados si deseáramos conocer la opinión de los profesores de una ciudad ante cierta medida educativa sobre la Enseñanza Secundaria y el Bachillerato; cada IES se puede considerar un conglomerado puesto que la opinión no diferirá mucho del resto de institutos y la variación se presenta entre los distintos profesores del mismo instituto. Este sistema permite recoger la información con facilidad visitando un número adecuado de centros de enseñanza.

Aplicaríamos un muestreo estratificado con afijación proporcional si deseáramos conocer la opinión de los profesores de una ciudad ante cierta medida educativa sobre la Enseñanza Secundaria y el Bachillerato, diferenciando entre los distintos tipos de enseñanza: privada, pública y concertada. Cada tipo de enseñanza segmentaría la población en estratos que, a priori, deberían ser muy diferentes entre sí.

La diferencia entre ambos tipos de muestreo es que, mientras que los estratos son diferentes entre ellos, los individuos de un mismo estrato son muy parecidos; en el caso de los conglomerados sucede al revés, son muy parecidos a otros conglomerados y, sin embargo, los individuos dentro de cada conglomerado son muy heterogéneos.

7.-

Si la variable aleatoria X sigue una distribución normal $X \equiv N(2, 2)$, calcula las siguientes probabilidades.

a) $P(X < 3)$ c) $P(X = 4)$ e) $P(X < 5)$

b) $P(X > 1)$ d) $P(X = 6)$ f) $P(X = 8)$

a) $P(X < 3) = P\left(\frac{X-2}{2} < \frac{3-2}{2}\right) = P(Z < 0{,}5) = 0{,}6915$

b) $P(X > 1) = P\left(\frac{X-2}{2} > \frac{1-2}{2}\right) = P(Z > -0{,}5) = P(Z \le 0{,}5) = 0{,}6915$

c) $P(X = 4) = 0$

d) $P(X = 6) = 0$

e) $P(X < 5) = P\left(\frac{X-2}{2} < \frac{5-2}{2}\right) = P(Z < 1{,}5) = 0{,}9332$

f) $P(X = 8) = 0$

8.-

El peso de los habitantes de una ciudad tiene una media de 67 kg y una desviación típica de 5 kg. ¿Cuál es la probabilidad de que la media del peso de 100 personas supere los 68,5 kg? ¿Y de que sea menor que 68 kg?

$$\overline{X} \equiv N\left(67;\ \frac{5}{\sqrt{100}}\right) = N(67;\ 0{,}5)$$

$$P(\overline{X} > 68{,}5) = P\left(\frac{\overline{X}-67}{0{,}5} > \frac{68{,}5-67}{0{,}5}\right) = P(Z > 3) =$$
$$= 1 - P(Z \le 3) = 1 - 0{,}9987 = 0{,}0013$$

$$P(\overline{X} < 68) = P\left(\frac{\overline{X}-67}{0{,}5} < \frac{68-67}{0{,}5}\right) = P(Z < 2) = 0{,}9772$$

9.-

Una variable aleatoria sigue una distribución normal de parámetros $\mu = 22$ y $\sigma = 4$. Halla las distribuciones de las medias muestrales de muestras de tamaño 9, 16, 25, 36 y 100. ¿Podrías hacerlo si la población no siguiera una distribución normal?

$$n = 9 \rightarrow \overline{X} \equiv N\left(22;\ \frac{4}{\sqrt{9}}\right) = N(22;\ 1{,}33)$$

$$n = 16 \rightarrow \overline{X} \equiv N\left(22;\ \frac{4}{\sqrt{16}}\right) = N(22,\ 1)$$

$$n = 25 \rightarrow \overline{X} \equiv N\left(22;\ \frac{4}{\sqrt{25}}\right) = N(22;\ 0{,}8)$$

$$n = 36 \rightarrow \overline{X} \equiv N\left(22;\ \frac{4}{\sqrt{36}}\right) = N(22;\ 0{,}67)$$

$$n = 100 \rightarrow \overline{X} \equiv N\left(22;\ \frac{4}{\sqrt{100}}\right) = N(22;\ 0{,}4)$$

Se podrían hallar las distribuciones de las medias muestrales en los dos últimos casos, cuando $n > 30$.

10.-

El 10 % de los yogures de fruta contienen menos fruta de lo que se anuncia en su publicidad. Se ha seleccionado una muestra de 900 yogures.

¿Cuál es la distribución que sigue la proporción de envases incompletos de la muestra?

$$\widehat{P} \equiv N\left(0{,}1;\ \sqrt{\frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{900}}\right) = N(0{,}1;\ 0{,}01)$$

11.-

El 10 % de los yogures de fresa contienen menos fruta de lo que se anuncia en su publicidad. Se ha seleccionado una muestra de 900 yogures.

Halla la probabilidad de que en la muestra se encuentren 100 yogures con menos fruta.

$$\widehat{P} \equiv N\left(0,1;\ \sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,9}{900}}\right) = N(0,1;\ 0,01)$$

$$P\left(\widehat{P} \geq \frac{100}{900}\right) = P(\widehat{P} \geq 0,11) = P\left(\frac{\widehat{P} - 0,1}{0,01} \geq \frac{0,11 - 0,1}{0,01}\right) = P(Z \geq 1) =$$

$$= 1 - P(Z < 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$$

12.-

Un dado tetraédrico está numerado del 1 al 4.

a) Calcula la media y la desviación típica de la población formada por los cuatro números.

b) Forma todas las muestras posibles de tamaño 2 que podemos obtener con repetición de esta población.

c) Halla la media y la desviación típica de la distribución de las medias de las muestras.

a) $\overline{x} = \dfrac{1+2+3+4}{4} = 2,5$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}{4} - 2,5^2} = 1,12$$

b) Las muestras posibles son:
{1, 1}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 2}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 3}, {3, 4}, {4, 4}

c) La población formada por las medias es: {1; 1,5; 2; 2,5; 2; 2,5; 3; 3; 3,5; 4}

$\overline{x} = 2,5$ $\qquad$ $\sigma = 0,87$

13.-

Dada la población {1, 2, 3}, forma las muestras posibles de tamaño 2 sin reemplazamiento.

a) Calcula la media y la desviación típica de la población.

b) Halla la media y la desviación típica de la distribución de las medias muestrales.

c) ¿Qué relación hay entre ellas?

Las muestras posibles son: {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}

a) $\overline{x} = 2$ $\qquad$ $\sigma = 0,82$

b) La población formada por las medias es: {1,5; 2; 2,5}

$\overline{x} = 2$ $\qquad$ $\sigma = 0,41$

c) Las medias coinciden, pero la desviación típica es menor en la distribución de las medias.

14.-

Sea la población de elementos {22, 24, 26}.

a) Escriba todas las muestras posibles de tamaño 2, escogidas mediante muestreo aleatorio simple.

b) Calcule la varianza de la población.

c) Calcule la varianza de las medias muestrales.

(Andalucía. Año 2005. Modelo 2. Opción B. Ejercicio 3)

a) Las muestras posibles son: $\{22, 24\}$, $\{22, 26\}$, $\{24, 26\}$

b) $\sigma^2 = 2{,}67$

c) La población formada por las medias es: $\{23, 24, 25\}$ $\sigma^2 = 0{,}67$

15.-

Un distribuidor de frutas tiene 3.000 manzanas de distintas clases: 1.224 de tipo *A*, 857 de tipo *B*, 495 de tipo *C* y 424 de tipo *D*.

Se quiere extraer una muestra de 150 manzanas, ¿cuántas hay que elegir de cada clase para que el muestreo sea estratificado con reparto proporcional?

$$\frac{n_1}{1.224} = \frac{n_2}{857} = \frac{n_3}{495} = \frac{n_4}{424} = \frac{150}{3.000} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 61 \\ n_2 = 43 \\ n_3 = 25 \\ n_4 = 21 \end{cases}$$

La muestra debe estar formada por 61 manzanas de tipo *A*, 43 de tipo *B*, 25 de tipo *C* y 21 de tipo *D*.

16.-

En una población hay 100 personas: 60 mujeres y 40 hombres. Se desea seleccionar una muestra de tamaño 5 mediante muestreo estratificado con afijación proporcional.

¿Qué composición tendrá dicha muestra?

(Andalucía. Año 2005. Modelo 1. Opción B. Ejercicio 3)

$$\frac{n_1}{60} = \frac{n_2}{40} = \frac{5}{100} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 3 \\ n_2 = 2 \end{cases}$$

La muestra debe estar formada por 3 mujeres y 2 hombres.

17.-

De una población de 3.500 hombres y 2.700 mujeres se desea seleccionar, mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, una muestra de tamaño 100 distribuida en los dos estratos. ¿Cuál será la composición de la muestra?

La población está formada por 6.200 individuos.

$$\frac{n_1}{3.500} = \frac{n_2}{2.700} = \frac{100}{6.200} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 56 \\ n_2 = 44 \end{cases}$$

La muestra debe estar formada por 56 hombres y 44 mujeres.

18.-

De una población de 3.500 hombres y 2.700 mujeres se desea seleccionar, mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación igual, una muestra de tamaño 100 distribuida en los dos estratos. ¿Cuál será la composición de la muestra?

Discute si sería mejor que el muestreo fuera con afijación proporcional o con afijación igual.

Si la muestra se selecciona por afijación igual debe estar formada por:

$\frac{100}{2} = 50$ individuos; es decir, 50 hombres y 50 mujeres.

Para que la muestra se ajustara más a la composición de la población sería mejor utilizar el muestreo por afijación proporcional.

19.-

En un centro juvenil tienen una colección de videojuegos organizada en cinco bloques: 500 clásicos, 860 de estrategia, 1.200 deportivos, 700 de ciencia-ficción y 740 históricos.

Se desea estimar el porcentaje de juegos europeos presentes en la colección, y para ello se selecciona una muestra del 10 % del número total de videojuegos a través de un muestreo aleatorio estratificado. Determina el número de juegos de cada tipo que hay que seleccionar si se considera:

a) Afijación igual.

b) Afijación proporcional.

El número total de videojuegos es: $500 + 860 + 1.200 + 700 + 740 = 4.000$

10 % de $4.000 = 400$ es el tamaño de la muestra seleccionada.

a) Si la muestra se selecciona por afijación igual debe estar formada por:

$\frac{400}{5} = 80$ videojuegos de cada tipo

b) Si la muestra se selecciona con afijación proporcional en cada estrato varía el número de juegos elegidos.

$$\frac{n_1}{500} = \frac{n_2}{860} = \frac{n_3}{1.200} = \frac{n_4}{700} = \frac{n_5}{740} = \frac{400}{4.000} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 50 \\ n_2 = 86 \\ n_3 = 120 \\ n_4 = 70 \\ n_5 = 74 \end{cases}$$

La muestra debe estar formada por 50 juegos clásicos, 86 de estrategia, 120 deportivos, 70 de ciencia-ficción y 74 históricos.

20.-

En una nueva urbanización viven 800 hombres, 900 mujeres y 400 niños. Selecciona una muestra de 80 personas, utilizando muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional. ¿Cuál debe ser la composición que debe tener dicha muestra?

$$\frac{n_1}{800}=\frac{n_2}{900}=\frac{n_3}{400}=\frac{80}{2.100}\rightarrow\begin{cases}n_1=31\\ n_2=34\\ n_3=15\end{cases}$$

La muestra debe estar compuesta por 31 hombres, 34 mujeres y 15 niños.

21.-

En un centro de idiomas se imparten clases de inglés, francés y alemán y se ofrece un total de 2.000 plazas. Mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional se ha seleccionado una muestra formada por 28 estudiantes de inglés, 32 de francés y 20 de alemán. Determina cuál es la distribución de estudiantes de cada idioma en el centro.

$$\frac{28}{x}=\frac{32}{y}=\frac{20}{z}=\frac{80}{2.000}\rightarrow\begin{cases}x=700\\ y=800\\ z=500\end{cases}$$

En el centro hay 700 estudiantes de inglés, 800 de francés y 500 de alemán.

22.-

Una variable aleatoria sigue una distribución normal de parámetros $\mu=9$ y $\sigma=3$. Halla las distribuciones de las medias muestrales para muestras de tamaño 25, 36 y 100.

$$n=25\rightarrow\overline{X}\equiv N\left(9;\ \frac{3}{\sqrt{25}}\right)=N(9;\ 0{,}6)$$

$$n=36\rightarrow\overline{X}\equiv N\left(9;\ \frac{3}{\sqrt{36}}\right)=N(9;\ 0{,}5)$$

$$n=100\rightarrow\overline{X}\equiv N\left(9;\ \frac{3}{\sqrt{100}}\right)=N(9;\ 0{,}3)$$

23.-

El gasto mensual de los jóvenes de una región durante los fines de semana sigue una distribución normal de media 25 € y desviación típica 3 €.

¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de 64 jóvenes tenga un gasto medio comprendido entre 23,85 € y 26,15 €?

$$\overline{X}\equiv N\left(25;\ \frac{3}{\sqrt{64}}\right)=N(25;\ 0{,}375)$$

$$P(23{,}85<\overline{X}<26{,}15)=P\left(\frac{23{,}85-25}{0{,}375}<\frac{\overline{X}-25}{0{,}375}<\frac{26{,}15-25}{0{,}375}\right)=$$

$$=P(-3{,}07<Z<3{,}07)=2P(Z<3{,}07)-1=$$

$$=2\cdot 0{,}9989-1=0{,}9978$$

24.-

Un fabricante produce tabletas de chocolate cuyo peso en gramos sigue una distribución normal de media 125 g y desviación típica 4 g.

a) Si las tabletas se empaquetan en lotes de 25, ¿cuál es la probabilidad de que el peso medio de las tabletas de un lote se encuentre entre 124 y 126 gramos?

b) Si los lotes fuesen de 64 tabletas, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de las tabletas del lote superase los 124 gramos?

(Andalucía. Año 2006. Modelo 5. Opción A. Ejercicio 3)

a) $\overline{X} \equiv N\left(125;\ \dfrac{4}{\sqrt{25}}\right) = N(125;\ 0{,}8)$

$$P(124 < \overline{X} < 126) = P\left(\frac{124-125}{0{,}8} < \frac{\overline{X}-125}{0{,}8} < \frac{126-125}{0{,}8}\right) =$$
$$= P(-1{,}25 < Z < 1{,}25) = 2P(Z < 1{,}25) - 1 =$$
$$= 2 \cdot 0{,}8944 - 1 = 0{,}7888$$

b) $\overline{X} \equiv N\left(125;\ \dfrac{4}{\sqrt{64}}\right) = N(125;\ 0{,}5)$

$$P(\overline{X} > 124) = P\left(\frac{\overline{X}-125}{0{,}5} > \frac{124-125}{0{,}5}\right) = P(Z > -2) = P(Z < 2) = 0{,}9772$$

25.-

En un estudio realizado por la empresa en una autopista se han recogido las siguientes velocidades en un mismo tramo:

95	108	97	112
99	106	105	100
99	98	104	110
107	111	103	110

Si la velocidad en este tramo sigue una distribución normal de varianza 25, ¿cuáles son los parámetros de la distribución de la media muestral?

En la muestra: $\overline{x} = 104$

Así, tenemos que: $\overline{X} \equiv N\left(104;\ \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}}\right) = N(104;\ 1{,}25)$

26.-

Sea X una variable aleatoria normal de media 50 y desviación típica 4.

a) Para muestras de tamaño 4, ¿cuál es la probabilidad de que la media muestral supere el valor 54?

b) Si $\overline{X}_{16}$ indica la variable aleatoria «Media muestral para muestras de tamaño 16», calcule el valor de a para que $P(50 - a \leq \overline{X}_{16} \leq 50 + a) = 0{,}9876$.

(Andalucía. Año 2005. Modelo 3. Opción B. Ejercicio 3)

a) $\overline{X} \equiv N\left(50, \dfrac{4}{\sqrt{4}}\right) = N(50,\ 2)$

$$P(\overline{X} > 54) = P\left(\frac{\overline{X} - 50}{2} > \frac{54 - 50}{2}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) =$$
$$= 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

b) $\overline{X}_{16} \equiv N\left(50, \dfrac{4}{\sqrt{16}}\right) = N(50,\ 1)$

$$P(50 - a \leq \overline{X}_{16} \leq 50 + a) = P\left(\frac{50 - a - 50}{1} \leq \frac{\overline{X}_{16} - 50}{1} \leq \frac{50 + a - 50}{1}\right) =$$
$$= P(-a \leq Z \leq a) = 2P(Z \leq a) - 1 = 0{,}9876 \rightarrow P(Z \leq a) = 0{,}9938 \rightarrow a = 2{,}5$$

27.-

La edad a la que contraen matrimonio los hombres de una ciudad es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de media 30 años y desviación típica de 4 años. Se elige aleatoriamente una muestra de 200 hombres de dicha ciudad.

Sea $\overline{X}$ la media muestral de la edad de casamiento.

a) ¿Cuáles son la media y la varianza de $\overline{X}$?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la edad media de casamiento de la muestra esté comprendida entre 36 y 37 años?

a) $\overline{X} \equiv N\left(30;\ \dfrac{4}{\sqrt{200}}\right) = N(30;\ 0{,}28) \rightarrow \begin{cases} \mu = 30 \\ \sigma^2 = 0{,}08 \end{cases}$

b) $P(36 < \overline{X} < 37) = P\left(\dfrac{36 - 30}{0{,}28} < \dfrac{\overline{X} - 30}{0{,}28} < \dfrac{37 - 30}{0{,}28}\right) = P(21{,}43 < Z < 25) = 0$

28.-

Se supone que el peso de las chicas de una determinada región sigue una distribución normal de media 64 kg y desviación típica 6 kg. Se toma una muestra al azar de 144 de estas chicas y se calcula su media. ¿Cuál es la probabilidad de que esta media sea al menos de 63 kg?

(Baleares. Junio 2007. Opción A. Cuestión 4)

$$\overline{X} \equiv N\left(64;\ \frac{6}{\sqrt{144}}\right) = N(64;\ 0{,}5)$$

$$P(\overline{X} \geq 63) = P\left(\frac{\overline{X} - 64}{0,5} \geq \frac{63 - 64}{0,5}\right) = P(Z \geq -2) = P(Z \leq 2) = 0,9772$$

29.-

El sueldo de los trabajadores de una multinacional sigue una distribución normal de media $\mu = 2.500$ € y desviación típica $\sigma = 600$ €.

Si se toma una muestra de 64 trabajadores:

a) ¿De qué tipo es la distribución de las medias de las muestras que pueden extraerse?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media de la muestra sea menor que 2.350 €?

(La Rioja. Junio 2008. Parte C. Problema 2)

a) La distribución de las medias es una distribución normal:

$$\overline{X} \equiv N\left(2.500,\ \frac{600}{\sqrt{64}}\right) = N(2.500,\ 75)$$

b) $$P(\overline{X} < 2.350) = P\left(\frac{\overline{X} - 2.500}{75} < \frac{2.350 - 2.500}{75}\right) = P(Z < -2) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

30.-

Se han tomado las tallas de 16 bebés elegidos al azar, entre los nacidos en un cierto hospital, y se han obtenido los siguientes resultados, en centímetros:

50	49	49	50	52	49	47	46
48	50	49	50	50	48	47	50

La talla de los bebés sigue una distribución normal tal que:

- Su desviación típica es conocida y vale 3 centímetros.
- Su media coincide con la media de la muestra.

¿Cuál es la distribución de las medias de las muestras de tamaño 16?

En la muestra: $\overline{x} = 49$

Así tenemos que: $\overline{X} \equiv N\left(49;\ \frac{3}{\sqrt{16}}\right) = N(49;\ 0,75)$

31.-

El número de horas semanales que los adolescentes dedican a ver la televisión se distribuye según una ley normal de media 9 horas y desviación típica 4.

Para muestras de 64 adolescentes:

a) Indique cuál es la distribución de las medias muestrales.

b) Calcule la probabilidad de que la media de una de las muestras esté comprendida entre 7,8 y 9,5 horas.

(Andalucía. Año 2005. Modelo 5. Opción B. Ejercicio 3)

a) $\overline{X} \equiv N\left(9;\ \frac{4}{\sqrt{64}}\right) = N(9;\ 0,5)$

b) $P(7{,}8 < \overline{X} < 9{,}5) = P\left(\frac{7{,}8-9}{0{,}5} < \frac{\overline{X}-9}{0{,}5} < \frac{9{,}5-9}{0{,}5}\right) = P(-2{,}4 < Z < 1) =$

$= P(Z < 1) - P(Z \leq -2{,}4) = P(Z < 1) - [1 - P(Z < 2{,}4)] =$

$= 0{,}8413 - 1 + 0{,}9918 = 0{,}8331$

32.-

El tiempo, en horas mensuales, que los jubilados dedican a pasear se distribuye según una normal de media 60 horas y desviación típica 20.

Para muestras de 36 jubilados:

a) Indica cuál es la distribución de las medias muestrales.

b) Halla la probabilidad de que la media de una de las muestras elegida esté comprendida entre 59 y 62 horas.

a) $\overline{X} \equiv N\left(60;\ \frac{20}{\sqrt{36}}\right) = N(60;\ 3{,}33)$

b) $P(59 < \overline{X} < 62) = P\left(\frac{59-60}{3{,}33} < \frac{\overline{X}-60}{3{,}33} < \frac{62-60}{3{,}33}\right) = P(-0{,}3 < Z < 0{,}6) =$

$= P(Z < 0{,}6) - P(Z \leq -0{,}3) = P(Z < 0{,}6) - [1 - P(Z < 0{,}3)] =$

$= 0{,}7257 - 1 + 0{,}6179 = 0{,}3436$

33.-

Se supone que la distribución de la temperatura del cuerpo humano en la población tiene de media 37 °C y de desviación típica 0,85 °C.

Se elige una muestra de 105 personas y se pide:

a) Calcular la probabilidad de que la temperatura media sea menor de 36,9 °C.

b) Calcular la probabilidad de que la temperatura media esté comprendida entre 36,5 °C y 37,5 °C.

(Murcia. Junio 2005. Bloque 5. Cuestión 2)

$\overline{X} \equiv N\left(37;\ \frac{0{,}85}{\sqrt{105}}\right) = N(37;\ 0{,}08)$

a) $P(\overline{X} < 36{,}9) = P\left(\frac{\overline{X}-37}{0{,}08} < \frac{36{,}9-37}{0{,}08}\right) = P(Z < -1{,}25) =$

$= 1 - P(Z \leq 1{,}25) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056$

b) $P(36{,}5 < \overline{X} < 37{,}5) = P\left(\frac{36{,}5-37}{0{,}08} < \frac{\overline{X}-37}{0{,}08} < \frac{37{,}5-37}{0{,}08}\right) =$

$= P(-6{,}25 < Z < 6{,}25) = 1$

34.-

Se sabe que las puntuaciones de un test siguen una ley normal de media 36 y desviación típica 4,8.

a) Si se toma una muestra aleatoria de 16 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que la media de esta muestra sea superior a 35 puntos?

b) ¿Qué porcentaje de muestras de tamaño 25 tiene una media muestral comprendida entre 34 y 36?

(Andalucía. Septiembre 2007. Opción A. Ejercicio 3)

a) $\overline{X} \equiv N\left(36;\ \dfrac{4,8}{\sqrt{16}}\right) = N(36;\ 1,2)$

$$P(\overline{X} > 35) = P\left(\frac{\overline{X}-36}{1,2} > \frac{35-36}{1,2}\right) = P(Z > -0,83) = P(Z < 0,83) = 0,7967$$

b) $\overline{X} \equiv N\left(36;\ \dfrac{4,8}{\sqrt{25}}\right) = N(36;\ 0,96)$

$$P(34 < \overline{X} < 36) = P\left(\frac{34-36}{0,96} < \frac{\overline{X}-36}{0,96} < \frac{36-36}{0,08}\right) = P(-2,08 < Z < 0) =$$
$$= P(Z < 0) - P(Z \leq -2,08) = P(Z < 0) - [1 - P(Z < 2,08)] =$$
$$= 0,5 - 1 + 0,9812 = 0,4812$$

35.-

La tabla indica la estatura de una muestra formada por 40 chicas de una localidad donde la altura media sigue una distribución normal con desviación típica 0,12 m.

Estatura (m)	Chicas
[1,50; 1,55)	2
[1,55; 1,60)	5
[1,60; 1,65)	10
[1,65; 1,70)	12
[1,70; 1,75)	6
[1,75; 1,80)	10

¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral de un grupo de 36 chicas, elegidas al azar, de la misma localidad tenga una media de estatura mayor que 1,64 m?

$$\overline{x} = \frac{1,525 \cdot 2 + 1,575 \cdot 5 + 1,625 \cdot 10 + 1,675 \cdot 12 + 1,725 \cdot 6 + 1,775 \cdot 5}{40} = 1,6625$$

Entonces, resulta que: $\overline{X} \equiv N\left(1,66;\ \dfrac{0,12}{\sqrt{40}}\right) = N(1,66;\ 0,02)$

$$P(\overline{X} > 1,64) = P\left(\frac{\overline{X}-1,66}{0,02} > \frac{1,64-1,66}{0,02}\right) = P(Z > -1) = P(Z < 1) = 0,8413$$

36.-

El consumo medio de carne de los leones de la sabana es de 10 kg con una desviación típica de 3 kg. Elegida una muestra al azar de 49 leones, ¿cuál es la probabilidad de que su consumo medio diario de carne sea inferior a 8,5 kg?

$$\overline{X} \equiv N\left(10;\ \frac{3}{\sqrt{49}}\right) = N(10;\ 0{,}43)$$

$$P(\overline{X} < 8{,}5) = P\left(\frac{\overline{X}-10}{0{,}43} < \frac{8{,}5-10}{0{,}43}\right) = P(Z < -3{,}49) = 1 - P(Z \le 3{,}49) =$$

$$= 1 - 0{,}9998 = 0{,}0002$$

37.-

En una determinada población se sabe que el valor de la tasa diaria de consumo de calorías sigue una distribución normal con desviación típica $\sigma = 400$ calorías. Si la media poblacional es $\mu = 1.600$ calorías y se elige al azar una muestra aleatoria de 100 personas de esa población, determinar la probabilidad de que el consumo medio diario de calorías en esa muestra esté comprendido entre 1.550 y 1.660 calorías.

(Galicia. Junio 2008. Bloque 3. Ejercicio 2)

$$\overline{X} \equiv N\left(1.600,\ \frac{400}{\sqrt{100}}\right) = N(1.600,\ 40)$$

$$P(1.550 < \overline{X} < 1.660) = P\left(\frac{1.550-1.600}{40} < \frac{\overline{X}-1.600}{40} < \frac{1.660-1.600}{40}\right) =$$

$$= P(-1{,}25 < Z < 1{,}5) = P(Z < 1{,}5) - P(Z \le -1{,}25) =$$

$$= P(Z < 1{,}5) - [1 - P(Z < 1{,}25)] =$$

$$= 0{,}9332 - 1 + 0{,}8944 = 0{,}8276$$

38.-

Para una población determinada, la proporción dada por una variable aleatoria es de 0,8. Determina las distribuciones muestrales de la proporción en las muestras de tamaño:

a) 20 b) 64 c) 400

a) $\widehat{P} \equiv N\left(0{,}8;\ \sqrt{\frac{0{,}8\cdot 0{,}2}{20}}\right) = N(0{,}8;\ 0{,}09)$

b) $\widehat{P} \equiv N\left(0{,}8;\ \sqrt{\frac{0{,}8\cdot 0{,}2}{64}}\right) = N(0{,}8;\ 0{,}05)$

c) $\widehat{P} \equiv N\left(0{,}8;\ \sqrt{\frac{0{,}8\cdot 0{,}2}{400}}\right) = N(0{,}8;\ 0{,}02)$

39.-

El 4 % de los envases de un determinado producto contiene menos elementos de los que anuncia en su publicidad. Se ha seleccionado al azar una muestra de 400 envases.

a) ¿Cuál es la distribución que sigue la proporción de envases incompletos de la muestra?

b) Halla la probabilidad de que en la muestra se encuentren 88 envases con menos elementos de los anunciados.

a) $\widehat{P} \equiv N\left(0{,}04;\ \sqrt{\dfrac{0{,}04 \cdot 0{,}96}{400}}\right) = N(0{,}04;\ 0{,}01)$

b) $P\left(\widehat{P} \geq \dfrac{88}{400}\right) = P(\widehat{P} \geq 0{,}22) = P\left(\dfrac{\widehat{P} - 0{,}04}{0{,}01} \geq \dfrac{0{,}22 - 0{,}04}{0{,}01}\right) = P(Z \geq 18) = 0$

40.-

En un sondeo electoral, uno de los partidos obtiene una proporción de 0,56 de los posibles votos.

Calcula la probabilidad de que, de 1.000 votantes elegidos aleatoriamente, 480 tengan intención de votar a este partido.

$$\widehat{P} \equiv N\left(0{,}56;\ \sqrt{\dfrac{0{,}56 \cdot 0{,}44}{1.000}}\right) = N(0{,}56;\ 0{,}016)$$

$$P\left(\widehat{P} \geq \dfrac{480}{1.000}\right) = P(\widehat{P} \geq 0{,}48) = P\left(\dfrac{\widehat{P} - 0{,}56}{0{,}016} \geq \dfrac{0{,}48 - 0{,}56}{0{,}016}\right) = P(Z \geq -5) = 1$$

41.-

En una página web se ha realizado una encuesta para conocer la opinión de los internautas sobre la calidad de sus contenidos. Han participado 2.400 personas y 1.150 se han mostrado satisfechas con los mismos. Si se selecciona aleatoriamente una muestra de 50 internautas:

a) ¿Cuál es la distribución de la proporción de internautas satisfechos?

b) Halla la probabilidad de que en la muestra más de 27 personas se manifiesten satisfechas con sus contenidos.

c) Si se toman 100 muestras del mismo tamaño, ¿en cuántas de ellas se puede esperar que haya entre 28 y 30 internautas satisfechos?

a) $P = \dfrac{1.150}{2.400} = 0,48$

$$\hat{P} \equiv N\left(0,48;\ \sqrt{\frac{0,48 \cdot 0,52}{50}}\right) = N(0,48;\ 0,07)$$

b) $P\left(\hat{P} > \dfrac{27}{50}\right) = P(\hat{P} > 0,54) = P\left(\dfrac{\hat{P} - 0,48}{0,07} > \dfrac{0,54 - 0,48}{0,07}\right) =$

$$= P(Z > 0,86) = 1 - P(Z \le 0,86) = 1 - 0,8051 = 0,1949$$

c) $P\left(\dfrac{28}{50} < \hat{P} < \dfrac{30}{50}\right) = P(0,56 < \hat{P} < 0,6) =$

$$= P\left(\frac{0,56 - 0,48}{0,07} < \frac{\hat{P} - 0,48}{0,07} < \frac{0,6 - 0,48}{0,07}\right) =$$

$$= P(1,14 < Z < 1,71) = P(Z < 1,71) - P(Z < 1,14) =$$

$$= 0,9564 - 0,8729 = 0,0835$$

$100 \cdot 0,0835 = 8,35 \rightarrow$ Se puede esperar que en 8 muestras haya entre 28 y 30 internautas satisfechos.

42.-

Una agencia de viajes ha comprobado que el 4 % de sus clientes prefieren los paquetes vacacionales que incluyen un crucero.

Para la elaboración de los próximos catálogos publicitarios se han publicado 500 ejemplares de muestra distribuidos al azar entre los clientes habituales de la agencia.

a) ¿Cuál es el número esperado de clientes que solicitarán un paquete vacacional con crucero?

b) Determina la distribución de la proporción de clientes que elegirán un paquete vacacional que incluya un crucero.

a) $0,04 \cdot 500 = 20$ clientes se espera que soliciten un paquete vacacional con crucero.

b) $\hat{P} \equiv N\left(0,04;\ \sqrt{\dfrac{0,04 \cdot 0,96}{500}}\right) = N(0,04;\ 0,0087)$

43.-

Un jugador de baloncesto encesta seis de cada diez de sus lanzamientos a canasta.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 120 tiros a canasta consiga encestar más de 84?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el número de aciertos sea menor que 60?

c) Halla la probabilidad de que la proporción de aciertos sea el doble que la proporción de fallos.

d) ¿Cuál es la distribución de la proporción muestral de la variable que cuenta los errores al lanzar en lugar de los aciertos?

$$\widehat{P} \equiv N\left(0,6;\ \sqrt{\frac{0,6\cdot 0,4}{120}}\right) = N(0,6;\ 0,045)$$

a) $P\left(\widehat{P} > \frac{84}{120}\right) = P(\widehat{P} > 0,7) = P\left(\frac{\widehat{P}-0,6}{0,045} > \frac{0,7-0,6}{0,045}\right) = P(Z > 2,22) =$

$= 1 - P(Z \leq 2,22) = 1 - 0,9868 = 0,0132$

b) $P\left(\widehat{P} < \frac{60}{120}\right) = P(\widehat{P} < 0,5) = P\left(\frac{\widehat{P}-0,6}{0,045} > \frac{0,5-0,6}{0,045}\right) = P(Z > -2,22) =$

$= P(Z < 2,22) = 0,9868$

c) $P\left(\widehat{P} \geq \frac{80}{120}\right) = P(\widehat{P} \geq 0,67) = P\left(\frac{\widehat{P}-0,6}{0,045} < \frac{0,67-0,6}{0,045}\right) = P(Z \geq 1,56) =$

$= 1 - P(Z < 1,56) = 1 - 0,9406 = 0,0594$

d) $\widehat{P} \equiv N\left(0,4;\ \sqrt{\frac{0,4\cdot 0,6}{120}}\right) = N(0,4;\ 0,045)$

44.-

Se ha realizado un estudio para conocer la efectividad de una vacuna, obteniéndose que en un 93 % de los casos la enfermedad no se contagió. Si se toma una muestra de 500 individuos vacunados, ¿cuál es la distribución de la proporción de personas inmunes a la enfermedad en dicha muestra? ¿Qué probabilidad hay de que se contagien más de 30 personas en la muestra anterior?

$$\widehat{P} \equiv N\left(0,93;\ \sqrt{\frac{0,93\cdot 0,07}{500}}\right) = N(0,93;\ 0,011)$$

$$P\left(\widehat{P} < \frac{470}{500}\right) = P(\widehat{P} < 0,94) = P\left(\frac{\widehat{P}-0,93}{0,011} < \frac{0,94-0,93}{0,011}\right) = P(Z < 0,91) = 0,8186$$

44.-

Una máquina produce componentes electrónicos para la fabricación de teléfonos móviles. Se ha comprobado que el 2 % son defectuosos. Determina la distribución de la proporción de componentes defectuosos que aparecerán en una caja de 250 unidades. ¿Cuál es la probabilidad de que haya entre 4 y 6 componentes defectuosos en una caja del mismo tamaño?

$$\widehat{P} \equiv N\left(0{,}02;\ \sqrt{\frac{0{,}02 \cdot 0{,}98}{250}}\right) = N(0{,}02;\ 0{,}0089)$$

$$P\left(\frac{4}{250} < \widehat{P} < \frac{6}{250}\right) = P(0{,}016 < \widehat{P} < 0{,}024) =$$

$$= P\left(\frac{0{,}016 - 0{,}02}{0{,}0089} < \frac{\widehat{P} - 0{,}02}{0{,}0089} < \frac{0{,}024 - 0{,}02}{0{,}0089}\right) =$$

$$= P(-0{,}45 < Z < 0{,}45) = 2P(Z < 0{,}45) - 1 =$$

$$= 2 \cdot 0{,}6736 - 1 = 0{,}3472$$

45.-

Para la realización de un cultivo se introducen 100.000 bacterias en un recipiente. De ellas, 87.500 son de un tipo y el resto de otro.

Determina la distribución de la proporción de bacterias del primer tipo que se encontrarán en una muestra formada por la cuarta parte de las bacterias del cultivo inicial.

$$\widehat{P} \equiv N\left(0{,}875;\ \sqrt{\frac{0{,}875 \cdot 0{,}125}{25.000}}\right) = N(0{,}875;\ 0{,}002)$$

46.-

Se sabe que el 10 % de los habitantes de una determinada ciudad va regularmente al teatro.

Se toma una muestra al azar de 100 habitantes de esta ciudad, ¿cuál es la probabilidad aproximada de que al menos el 13 % de ellos vaya regularmente al teatro?

(Baleares. Junio 2005. Opción B. Cuestión 8)

$$\widehat{P} \equiv N\left(0{,}1;\ \sqrt{\frac{0{,}13 \cdot 0{,}87}{100}}\right) = N(0{,}1;\ 0{,}03)$$

$$P(\widehat{P} \geq 0{,}13) = P\left(\frac{\widehat{P} - 0{,}1}{0{,}03} \geq \frac{0{,}13 - 0{,}1}{0{,}03}\right) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z < 1) =$$

$$= 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$$

47.-

Se sabe que el 40 % de las mujeres embarazadas dan a luz antes de la fecha prevista. En un hospital, han dado a luz 125 mujeres en una semana.

a) ¿Cuál es el número esperado de mujeres a las que se les retrasó el parto?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que entre 45 y 60 mujeres se les haya adelantado el parto?

(Canarias. Septiembre 2004. Prueba B. Pregunta 2)

a) $0,6 \cdot 125 = 75$ mujeres se espera que tengan retraso en el parto.

b) $\widehat{P} \equiv N\left(0,4;\ \sqrt{\dfrac{0,4 \cdot 0,6}{125}}\right) = N(0,4;\ 0,044)$

$$P\left(\frac{45}{125} < \widehat{P} < \frac{60}{125}\right) = P(0,36 < \widehat{P} < 0,48) =$$

$$= P\left(\frac{0,36-0,4}{0,044} < \frac{\widehat{P}-0,4}{0,044} < \frac{0,48-0,4}{0,044}\right) =$$

$$= P(-0,91 < Z < 1,82) = P(Z < 1,82) - [1 - P(Z < 0,91)] =$$

$$= 0,9656 - 1 + 0,8186 = 0,7842$$

48.-

Se han tomado las tallas de 16 bebés, elegidos al azar, de entre los nacidos en un cierto hospital, y se han obtenido los siguientes resultados, en centímetros:

51	50	53	48
49	50	51	48
50	51	50	47
51	51	49	51

La talla de los bebés sigue una ley normal de desviación típica 2 centímetros y media desconocida.

¿Cuál es la distribución de las medias de las muestras de tamaño 16?

(Andalucía. Año 2006. Modelo 4. Opción B. Ejercicio 3)

En la muestra: $\overline{x} = 50$

Así tenemos que: $\overline{X} \equiv N\left(50;\ \dfrac{2}{\sqrt{16}}\right) = N(50;\ 0,5)$

49.-

Se sabe que las puntuaciones de un test siguen una ley normal de media 36 y desviación típica 4,8.

a) Si se toma una muestra aleatoria de 16 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que la media de esta muestra sea superior a 35 puntos?

b) ¿Qué porcentaje de muestras de tamaño 25 tiene una media muestral comprendida entre 34 y 36?

(Andalucía. Septiembre 2007. Opción A. Ejercicio 3)

a) $\overline{X} \equiv N\left(36;\ \dfrac{4{,}8}{\sqrt{16}}\right) = N(36;\ 1{,}2)$

$$P(\overline{X} > 35) = P\left(\frac{\overline{X}-36}{1{,}2} > \frac{35-36}{1{,}2}\right) = P(Z > -0{,}83) = P(Z < 0{,}83) = 0{,}7967$$

b) $\overline{X} \equiv N\left(36;\ \dfrac{4{,}8}{\sqrt{25}}\right) = N(36;\ 0{,}96)$

$$P(34 < \overline{X} < 36) = P\left(\frac{34-36}{1{,}2} < \frac{\overline{X}-36}{1{,}2} > \frac{36-36}{1{,}2}\right) = P(-1{,}67 < Z < 0) =$$

$$= P(Z < 1{,}67) - P(Z < 0) = 0{,}9525 - 0{,}5 = 0{,}4525$$

50.-

a) Sea la población {1, 5, 7}. Escriba todas las muestras de tamaño 2, mediante muestreo aleatorio simple, y calcule la varianza de las medias muestrales.

b) De una población de 300 hombres y 200 mujeres se desea seleccionar, mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, una muestra de tamaño 30 distribuida en los dos estratos, ¿cuál será la composición de la muestra?

(Andalucía. Año 2006. Modelo 4. Opción A. Ejercicio 3)

a) Hacemos un muestreo con reposición, es decir, es posible escoger el mismo elemento más de una vez.

Las muestras posibles son: {1, 1}, {1, 5}, {1, 7}, {5, 5}, {5, 7}, {7, 7}

La población formada por las medias muestrales es: {1, 3, 4, 5, 6, 7}

Su media es: $\overline{x} = 4{,}33$

Y su varianza es: $\sigma^2 = 3{,}92$

b) $\dfrac{n_1}{300} = \dfrac{n_2}{200} = \dfrac{30}{500} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 18 \\ n_2 = 12 \end{cases}$

Los estratos son, respectivamente: hombres y mujeres, y la muestra se compone de 18 hombres y 12 mujeres.