15 Contraste de hipótesis

ACTIVIDADES INICIALES

15.I. Para una normal $Z = N(0, 1)$, halla las siguientes probabilidades.

a) $P(Z < 1{,}84)$

b) $P(Z > 0{,}47)$

c) $P(Z = 1)$

d) $P(1{,}2 < Z \leq 1{,}9)$

a) $P(Z < 1{,}84) = 0{,}9671$

b) $P(Z > 0{,}47) = 1 - P(Z > 0{,}47) = 1 - 0{,}6808 = 0{,}3192$

c) $P(Z = 1) = 0$

d) $P(1{,}2 < Z < 1{,}9) = P(Z < 1{,}9) - P(Z < 1{,}2) = 0{,}9713 - 0{,}8849 = 0{,}0864$

15.II. Para una variable normal $X = N(10; 3{,}8)$, halla las siguientes probabilidades.

a) $P(X < 12{,}5)$

b) $P(X > 8)$

c) $P(X = 10)$

d) $P(9{,}54 < X \leq 10{,}1)$

a) $P(X < 12{,}5) = P\left(Z < \dfrac{12{,}5 - 10}{3{,}8}\right) = P(Z < 0{,}66) = 0{,}7454$

b) $P(X > 8) = P\left(Z > \dfrac{8 - 10}{3{,}8}\right) = P(Z > -0{,}53) = P(Z < 0{,}53) = 0{,}7019$

c) $P(X = 10) = 0$

d) $P(9{,}54 < X < 10{,}1) = P\left(\dfrac{9{,}54 - 10}{3{,}8} < Z < \dfrac{10{,}1 - 10}{3{,}8}\right) = P(-0{,}12 < Z < 0{,}03) = P(Z < 0{,}03) - P(Z \leq -0{,}12) =$

$= P(Z < 0{,}03) - P(Z \geq 0{,}12) = 0{,}5120 - 1 + P(Z < 0{,}12) = 0{,}5120 - 1 + 0{,}5478 = 0{,}0598$

EJERCICIOS PROPUESTOS

15.1. Un banco quiere estudiar si al eliminar la comisión anual que cobra por el uso de una tarjeta de pago aumenta la cantidad total de pagos que los clientes cargan en dicha tarjeta.

Diseña el contraste de hipótesis que hay que realizar para responder a la pregunta de la entidad bancaria.

H_0: “Sin comisión, los clientes realizan más pagos con la tarjeta”

H_a: “Con comisión, los clientes no realizan más pagos con la tarjeta”

15.2. Una empresa farmacéutica asegura que cada cápsula de cierto medicamento contiene 10 miligramos de una sustancia analgésica.

Diseña un contraste de hipótesis que permita decidir si la afirmación que hace la empresa puede ser aceptable o no.

H_0: "Cada cápsula contiene 10 miligramos de la sustancia"

H_a: "Cada cápsula no contiene 10 miligramos de la sustancia"

15.3. (PAU) La empresa de transportes urgentes El Rápido afirma en su publicidad que al menos el 70% de sus envíos llega al día siguiente a su destino. Para contrastar la calidad de este servicio, la asociación de consumidores selecciona aleatoriamente 100 envíos y observa que 39 no llegaron al día siguiente a su destino.

a) Con una significación del 1%, ¿se puede aceptar la afirmación de la empresa?

b) ¿Se concluiría lo mismo con un nivel de significación del 8%?

a) H_0: $p_0 \geq 0{,}7$; H_a: $p_0 < 0{,}7 \Rightarrow$ Contraste unilateral de la proporción

Estadístico del contraste: $Z = \dfrac{\hat{p} - p_o}{\sqrt{\dfrac{p_o\,(1 - p_o)}{n}}}$

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_\alpha = 2{,}3 \Rightarrow (-2{,}33; +\infty)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{\dfrac{61}{100} - 0{,}7}{\sqrt{\dfrac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{100}}} = -1{,}96$.

Como $-1{,}96 \in (-2{,}33; +\infty)$, se acepta la hipótesis nula.
Por tanto, se acepta con un nivel de confianza del 99% que al menos el 70% de los envíos de esa compañía llegan a su destino al día siguiente.

b) H_0: $p_0 \geq 0{,}7$; H_a: $p_0 < 0{,}7 \Rightarrow$ Contraste unilateral de la proporción

El estadístico del contraste es el mismo del apartado anterior: $Z = \dfrac{\hat{p} - p_o}{\sqrt{\dfrac{p_o\,(1 - p_o)}{n}}} = -1{,}96$

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}92 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}41 \Rightarrow (-1{,}41; +\infty)$

Como $-1{,}96 \notin (-1{,}41; +\infty)$, se rechaza la hipótesis nula.

Luego no se concluiría lo mismo que en el apartado anterior con un nivel de significación del 98%.

15.4. El Ayuntamiento de una ciudad hace un estudio en fin de semana y afirma que el 60% de los jóvenes asiste a discotecas. Una plataforma juvenil afirma que el porcentaje de jóvenes es menor. Para verlo se hace una encuesta a 600 jóvenes y se obtiene que 330 van a discotecas. ¿Se puede aceptar la afirmación del Ayuntamiento si se toma un nivel de confianza del 95%?

H_0: $p_0 = 0{,}6$; H_a: $p_0 \neq 0{,}6 \Rightarrow$ Contraste bilateral para la proporción.

Estadístico del contraste: $\dfrac{\hat{p} - p_o}{\sqrt{\dfrac{p_o\,(1 - p_o)}{n}}}$

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96 \Rightarrow (-1{,}96; 1{,}96)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{\dfrac{330}{600} - 0{,}6}{\sqrt{\dfrac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{600}}} = 2{,}5$

Como $2{,}5 \notin (-1{,}96; 1{,}96)$, se rechaza la hipótesis nula.
Por tanto, se acepta que el porcentaje de jóvenes que asisten a discotecas es distinto del 60% con un nivel de confianza del 95%.

15.5. (PAU) Una marca de nueces afirma que, como máximo, el 6% de las nueces están vacías. Se eligieron 300 nueces al azar y se detectaron 21 vacías. Con un nivel de significación del 1%, ¿se puede aceptar la afirmación de la marca?

H_0: $p_0 \le 0{,}06$; H_a: $p_0 > 0{,}06 \Rightarrow$ Contraste unilateral para la proporción

El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\hat{p} - p_o}{\sqrt{\dfrac{p_o\,(1-p_o)}{n}}}$.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_\alpha = 2{,}33 \Rightarrow (-\infty;\ 2{,}33)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{\dfrac{21}{300} - 0{,}06}{\sqrt{\dfrac{0{,}06 \cdot 0{,}94}{1300}}} = 0{,}73$

Como $0{,}73 \in (-\infty;\ 2{,}33)$, se acepta la hipótesis nula. Luego se acepta la afirmación de la fábrica a un nivel de confianza del 99%.

15.6. (PAU) En los últimos meses, una cadena comercial ha intentado potenciar con precios más atractivos y publicidad la venta de productos con la marca genérica de la cadena, frente a los de otras marcas más conocidas por los consumidores. Antes, un 15% de los productos que vendía eran de la marca de la cadena. Recientemente, en una muestra de 200 productos vendidos, 36 eran de dicha marca.

Plantea un test para contrastar que las medidas no han surtido efecto frente a que sí lo han hecho, como parecen indicar los datos. ¿A qué conclusión se llega con una significación del 10%?

H_0: $p_0 = 0{,}15$; H_a: $p_0 \ne 0{,}15 \Rightarrow$ Contraste bilateral para la proporción

El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\hat{p} - p_o}{\sqrt{\dfrac{p_o\,(1-p_o)}{n}}}$.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}9 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645 \Rightarrow (-1{,}645;\ 1{,}645)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{\dfrac{36}{200} - 0{,}15}{\sqrt{\dfrac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{200}}} = 1{,}188$

Como $1{,}188 \in (-1{,}645;\ 1{,}645)$, se acepta la hipótesis nula. Por tanto, se acepta que el porcentaje del 15% de los productos de la marca de la cadena fue efectivo con un nivel de confianza del 90%.

15.7. (PAU) Un informe de la Asociación de Compañías Aéreas indica que el precio medio del billete de avión entre Canarias y la península Ibérica es, como máximo, de 120 € con una desviación típica de 40 €. Se toma una muestra de 100 viajeros Canarias-península Ibérica y se obtiene que la media de los precios de sus billetes es de 128 €.

a) ¿Se puede aceptar, con un nivel de significación igual a 0,1, la afirmación de partida?

b) ¿Se concluiría lo mismo si el nivel de significación fuera del 1%?

a) H_0: $\mu_0 \le 120$; H_a: $\mu_0 > 120 \Rightarrow$ Contraste unilateral para la media poblacional

El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\overline{x} - \mu_o}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}9 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}28 \Rightarrow (-\infty;\ 1{,}28)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{128 - 120}{\dfrac{40}{\sqrt{100}}} = 2$

Como $2 \notin (-\infty;\ 1{,}28)$, se rechaza la hipótesis nula.

Por tanto, no se puede aceptar, con un nivel de significación del 10%, la afirmación de partida.

b) Si $\alpha = 0{,}01 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_\alpha = 2{,}33$

Como $2 \in (-\infty;\ 2{,}33)$, sí se puede aceptar, con un nivel de significación del 1%, la afirmación de partida.

15.8. (PAU) Se sabe que la renta anual de los individuos de una ciudad sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 2000 €. Se ha observado la renta anual de 35 individuos de esa localidad escogidos al azar y se ha obtenido un valor medio de 20 000 €.

Contrasta, a un nivel de significación del 5%, si la media de la distribución es de 18 000 €.

H_0: μ_0 = 18 000; H_a: $\mu_0 \neq 18000 \Rightarrow$ Contraste bilateral para la media poblacional

El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\overline{x} - \mu_o}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96 \Rightarrow (-1{,}96;\ 1{,}96)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{20000 - 18000}{\dfrac{2000}{\sqrt{35}}} = 5{,}92$

Como $5{,}92 \notin (-1{,}96,\ 1{,}96)$, se rechaza la hipótesis nula.

Por tanto, no se puede aceptar, con un nivel de significación del 5%, la afirmación de partida.

15.9. Hace diez años, el consumo medio mensual de electricidad por vivienda en una localidad era de 320 kW. Este año se ha tomado una muestra aleatoria de 25 viviendas y se ha obtenido un consumo medio de mensual 370 kW con una desviación típica de 80 kW.

¿Puede aceptarse, con un nivel de significación del 10%, que el consumo medio ha aumentado?

H_0: $\mu_0 \geq 320$; H_a: $\mu_0 < 320 \Rightarrow$ Contraste unilateral para la media poblacional

El estadístico del contraste es el mismo del ejercicio anterior.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}9 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}28 \Rightarrow (-1{,}28,\ +\infty)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{320 - 370}{\dfrac{80}{\sqrt{25}}} = -3{,}125$

Como $-3{,}125 \notin (-1{,}28,\ +\infty)$, se rechaza la hipótesis nula.

Por tanto, no se puede aceptar, con un nivel de significación del 10%, que el consumo medio ha aumentado.

15.10. (PAU) Antes de la puesta en marcha del carné por puntos, la velocidad en cierta carretera seguía una normal de media 80 kilómetros por hora y desviación típica 10. Pasados unos meses de la introducción de dicha medida, sobre 40 vehículos observados a diferentes horas del día se obtuvo una media de 75 kilómetros por hora. La velocidad sigue siendo una normal con la misma desviación típica.

Plantea un test para contrastar la hipótesis de que con dicha media la situación sigue igual, frente a que, como parece, ha mejorado. ¿A qué conclusión se llega con un nivel de significación del 5%?

H_0: μ_0 = 80; H_a: $\mu_0 \leq 80 \Rightarrow$ Contraste bilateral para la media poblacional
El estadístico del contraste es el mismo del ejercicio anterior.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}645 \Rightarrow (-1{,}645,\ +\infty)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{75 - 80}{\dfrac{10}{\sqrt{40}}} = -3{,}16$

Como $-3{,}16 \notin (-1{,}645,\ +\infty)$, se rechaza la hipótesis nula.

Por tanto, se puede aceptar, con un nivel de significación del 5%, que la situación ha mejorado.

15.11. Se quieren probar dos tipos de alimentos para los 50 pingüinos de un zoológico cuyo peso se distribuye normalmente. Se separan en dos grupos, uno formado por 30 pingüinos y otro por 20. Son pesados después de un mes, y se obtiene para el primer grupo un peso medio de 12 kg y desviación típica de 0,5, y para el segundo, un peso medio de 10 kg y desviación típica de 0,8.

¿Se puede afirmar, con el nivel de confianza del 99%, que están mejor alimentados los del primer grupo que los del segundo?

Los datos son: $n_1 = 30$; $\overline{x}_1 = 12$ kg; $s_1 = 0{,}5$; $n_2 = 20$; $\overline{x}_2 = 10$ kg; $s_2 = 0{,}8$.

H_0: $\mu_1 - \mu_2 \geq 0$; H_a: $\mu_1 < \mu_2 \Rightarrow$ Contraste unilateral para la diferencia de medias

El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\hat{s}_1^2}{n_1} + \dfrac{\hat{s}_2^2}{n_2}}}$.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}96 \Rightarrow (-2{,}33; +\infty)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{12 - 10}{\sqrt{\dfrac{0{,}5^2}{30} + \dfrac{0{,}8^2}{20}}} = 9{,}96$

Como $9{,}96 \in (-2{,}33; +\infty)$, se acepta la hipótesis nula. Luego se puede aceptar, con un nivel de confianza del 99%, que los del primer grupo están mejor alimentados que los del segundo.

15.12. Un hospital está probando dos tipos de medicamentos, *A* y *B*. Se toman dos grupos de pacientes de 40 y 30 individuos para probar los tipos *A* y *B*, respectivamente. El número medio de efectos secundarios en el primer grupo fue de 3 con una desviación típica de 1,5, y para los del segundo fue de 2 con desviación de 2.

¿Se puede afirmar con el nivel de confianza del 90% que el primer medicamento provoca menos efectos que el segundo?

Datos: $n_1 = 40$; $\overline{x}_1 = 3$; $s_1 = 1{,}5$; $n_2 = 30$; $\overline{x}_2 = 2$; $s_2 = 2$

H_0: $\mu_1 < \mu_2$; H_a: $\mu_1 \geq \mu_2 \Rightarrow$ Contraste unilateral para la diferencia de medias
El estadístico del contraste es el mismo del ejercicio anterior.
Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}28 \Rightarrow (-\infty; 1{,}28)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{3 - 2}{\sqrt{\dfrac{1{,}5^2}{40} + \dfrac{2{,}0^2}{30}}} = 2{,}3$.

Como $2{,}3 \notin (-\infty; 1{,}28)$, se rechaza la hipótesis nula. Luego se rechaza que el primer medicamento provoca menos efectos que el segundo con un nivel de confianza del 90%

15.13. El porcentaje de níquel que debe contener una aleación es del 5,8%. Se toma una muestra de 40 piezas de dicha aleación y se obtiene un valor medio de 5,3. Si la desviación típica del porcentaje de níquel es de 3,1:

a) Plantea un contraste de hipótesis para decidir si la aleación es la correcta.

b) Contrasta las hipótesis con un $\alpha = 0{,}05$.

c) ¿Cuál es el error de tipo I en ese contraste? ¿Con qué probabilidad se comete este error?

a) H_0: $\mu_0 = 5{,}8$; H_a: $\mu_0 \neq 5{,}8 \Rightarrow$ Contraste bilateral para la media poblacional

b) El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\overline{x} - \mu_o}{\dfrac{\hat{s}}{\sqrt{n}}}$, siendo $\hat{s} = \sqrt{\dfrac{n}{n-1}} \cdot s = \sqrt{\dfrac{40}{39}} \cdot 3{,}1 = 3{,}14$.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96 \Rightarrow (-1{,}96; 1{,}96)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{5{,}8 - 5{,}3}{\dfrac{3{,}14}{\sqrt{40}}} = 1{,}01$

Como $1{,}01 \in (-1{,}96; 1{,}96)$, se acepta la hipótesis nula. Por tanto, se acepta, con un nivel de significación del 5%, la afirmación de partida.

c) Aceptar que la aleación es errónea siendo correcta. La probabilidad con que se comete este error es de 0,05.

EJERCICIOS

Contraste para una proporción de una binomial

15.14. (PAU) Un experto, basado en los anteriores comicios, sostiene que si se celebrasen elecciones generales en este momento, tan solo acudiría a votar el 48% de entre 1500 personas; 800 tienen intención de votar.

¿Supone esto, con un nivel de confianza del 99%, que el experto se equivoca y que la participación sería mayor?

H_0: $p_0 = 0{,}48$; H_a: $p_0 > 0{,}48 \Rightarrow$ Contraste unilateral para la proporción

El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\hat{p} - p_o}{\sqrt{\dfrac{p_o(1 - p_o)}{n}}}$.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_\alpha = 2{,}33 \Rightarrow (-\infty;\ 2{,}33)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{\dfrac{800}{1\,500} - 0{,}48}{\sqrt{\dfrac{0{,}48 \cdot 0{,}52}{1\,500}}} = 4{,}13$

Como $4{,}13 \notin (-\infty;\ 2{,}33)$, se rechaza la hipótesis nula. Se deduce que la intención de voto es mayor del 48%, por lo que se equivoca el experto.

15.15. (PAU) De una muestra aleatoria de 225 habitantes de una población hay 18 que hablan alemán. A un nivel de significación de 0,05, ¿hay suficiente evidencia para refutar la afirmación de que al menos el 10% de los habitantes de la población hablan alemán?

H_0: $p_0 \geq 0{,}1$; H_a: $p_0 < 0{,}1 \Rightarrow$ Contraste unilateral para la proporción

El estadístico es el mismo que el del ejercicio anterior.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}645 \Rightarrow (-1{,}65;\ +\infty)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{\dfrac{18}{225} - 0{,}1}{\sqrt{\dfrac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{225}}} = -1.$

Como $-1 \in (-1{,}65;\ +\infty)$, se acepta la hipótesis nula. Por tanto, no existe suficiente evidencia para refutar la afirmación de que al menos el 10% de los habitantes de la población hablan alemán.

15.16. (PAU) Hace 10 años, el 52% de los ciudadanos estaban en contra de una ley. Recientemente se ha elaborado una encuesta a 400 personas, y 184 se mostraron contrarios a la ley. Con estos datos y con un nivel de significación del 0,01, ¿puede afirmarse que la proporción de contrarios a la ley ha disminuido?

H_0: $p_0 = 0{,}52$; H_a: $p_0 < 0{,}52 \Rightarrow$ Contraste unilateral para la proporción
El estadístico es el mismo que el del ejercicio anterior.
Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}645 \Rightarrow (-1{,}645;\ +\infty)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{\dfrac{184}{400} - 0{,}52}{\sqrt{\dfrac{0{,}52 \cdot 0{,}48}{400}}} = -2{,}4$

Como $-2{,}4 \notin (-2{,}333;\ +\infty)$, se rechaza la hipótesis nula.
Por tanto, se puede afirmar con un nivel de confianza del 95% que los contrarios a la ley han disminuido.

15.17. En el proceso de implantación del euro como moneda única, los asesores del Ministerio de Economía pronosticaron que a finales del año 2000, el 50% de los comercios mostraría los precios de sus productos en pesetas y euros. En diciembre de ese año se revisaron 300 comercios elegidos aleatoriamente. De ellos, solo 135 mostraban los precios también en euros. Basándote en estos datos, contrasta a un nivel del 5% si la predicción de los asesores puede considerarse cierta.

H_0: $p_0 = 0{,}5$; H_a: $p_0 \neq 0{,}5 \Rightarrow$ Contraste bilateral para la proporción

Estadístico del contraste: $Z = \dfrac{\hat{p} - p_o}{\sqrt{\dfrac{p_o\,(1 - p_o)}{n}}}$. Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645 \Rightarrow (-1{,}65;\ 1{,}65)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{\dfrac{135}{300} - 0{,}5}{\sqrt{\dfrac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{300}}} = -1{,}73$

Como $-1{,}734 \notin (-2{,}333;\ +\infty)$, se rechaza la hipótesis nula. Por tanto, la predicción de los asesores no puede considerarse cierta.

15.18. (PAU) Los servicios de deportes de una ciudad afirman que el 25% de los jóvenes con edades entre los 14 y los 20 años practica algún tipo de deporte. Sin embargo, el concejal responsable afirma que la proporción de practicantes es menor. Para tratar de comprobarlo, encargó realizar una encuesta a 450 jóvenes con edades entre los 14 y 20 años, y resultó que 345 no practicaban ningún deporte.

a) ¿Se puede aceptar la afirmación del concejal si se toma un nivel de significación del 6%?

b) ¿Se daría la misma respuesta si el estudio se hace con un nivel de confianza del 99%?

a) H_0: $p_0 \geq 0{,}25$; H_a: $p_0 < 0{,}25 \Rightarrow$ Contraste unilateral para la proporción

El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\hat{p} - p_o}{\sqrt{\dfrac{p_o\,(1 - p_o)}{n}}}$. La proporción poblacional: $p_0 = 0{,}25$.

El tamaño de la muestra: $n = 450$. Y la muestral: $\hat{p} = 1 - \dfrac{345}{450} = 0{,}2333\ldots$

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}94 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}555 \Rightarrow (-1{,}55;\ +\infty)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{\left(1 - \dfrac{345}{450}\right) - 0{,}25}{\sqrt{\dfrac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{450}}} = -\,0{,}82$

Como $-\,0{,}82 \in (-1{,}55;\ +\infty)$, se acepta la hipótesis nula. Por tanto, se acepta que el 25% de los jóvenes son deportistas.

b) Para un nivel de confianza del 99%, $z_\alpha = 2{,}33$, y la región de aceptación es $(-2{,}33;\ +\infty)$.
Como $-\,0{,}82 \in (-2{,}33;\ +\infty)$, se acepta la hipótesis nula.
Se sigue aceptando que el 25% de los jóvenes son deportistas.

15.19. (PAU) Según un estudio realizado hace 10 años en una comunidad autónoma, los habitantes con grupo sanguíneo 0 eran el 20% del total. En una muestra reciente de 800 individuos de esa comunidad elegidos al azar, 144 tenían el grupo 0.

a) ¿Puede decirse, con un 95% de confianza, que ha variado la proporción de habitantes con el mencionado grupo sanguíneo?

b) ¿Y con un 99% de confianza?

a) H_0: $p_0 = 0{,}2$; H_a: $p_0 \neq 0{,}2 \Rightarrow$ Contraste unilateral para la proporción
El estadístico del contraste es el mismo que el de los ejercicios anteriores.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96 \Rightarrow (-1{,}96;\ +1{,}96) \Rightarrow Z = \dfrac{\dfrac{144}{800} - 0{,}2}{\sqrt{\dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{800}}} = -1{,}414$

Como $-1{,}414 \in (-1{,}96;\ 1{,}96)$, se acepta la hipótesis nula. Por tanto, se acepta que la proporción de habitantes con el mencionado grupo sanguíneo no ha variado.

b) Si $\alpha = 0,99 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575$. La región de aceptación es (–2,575; 2,575).

Como $-1,414 \in (-2,575; 2,575)$, se acepta la hipótesis nula.
La proporción de habitantes con el mencionado grupo sanguíneo no ha variado, como era de esperar, ya que al aumentar el nivel de confianza del 95% al 99%, también aumenta la región de aceptación. Y si se aceptaba la hipótesis nula para el nivel del 95%, con mayor razón se aceptará para el 99%.

15.20. (PAU) Una fábrica de muebles se encarga también del transporte y montaje de los pedidos a sus clientes. Sin embargo, recibía aproximadamente un 16% de reclamaciones por dicho servicio. En los últimos meses se ha contratado a una empresa especializada. De 250 servicios realizados por esta, 30 han tenido reclamación.

a) Plantea un test para contrastar la hipótesis de que con la empresa contratada la situación sigue igual, frente a que, como parece, ha mejorado. ¿A qué conclusión se llega para un nivel de significación del 5%?

b) Calcula un intervalo de confianza del 95% para la proporción de servicios reclamados con la empresa contratada.

a) H_0: $p_0 \geq 0,16$; H_a: $p_0 < 0,16 \Rightarrow$ Contraste unilateral para la proporción
El estadístico del contraste es el mismo que el de los ejercicios anteriores.
Región de aceptación: $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_\alpha = 1,645 \Rightarrow (-1,645; +\infty)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{\frac{30}{250} - 0,16}{\sqrt{\dfrac{0,16 \cdot 0,84}{250}}} = -1,725$

Como $-1,725 \notin (-1,645; +\infty)$, se rechaza la hipótesis nula.
Al nivel de significación del 5%, se acepta la hipótesis de que la empresa contratada ha mejorado.

b) El intervalo de confianza para la proporción es $\left(\hat{p} \mp z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\dfrac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}\right)$.

$\hat{p} = \dfrac{30}{250} = 0,12$. Como $\alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96 \Rightarrow IC$: $\left(0,12 - 1,96 \sqrt{\dfrac{0,16 \cdot 0,84}{250}}\right) = (0,0746; 0,1654)$

15.21. (PAU) Según la ley electoral de cierto país, para obtener representación parlamentaria, un partido político ha de conseguir en las elecciones correspondientes al menos el 5% de los votos. Próximas a celebrarse tales elecciones, una encuesta realizada a 1000 ciudadanos elegidos al azar revela que 36 de ellos votarán al partido Pueblo Democrático.

a) ¿Puede estimarse, con un nivel de significación del 5%, que Pueblo Democrático tendrá representación parlamentaria?

b) ¿Y con un nivel de significación del 1%?

a) H_0: $p_0 \geq 0,05$ (obtiene representación); H_a: $p_0 < 0,05$ (no obtiene representación) $\Rightarrow$ Contraste unilateral para la proporción. El estadístico del contraste es el mismo que el de los ejercicios anteriores.
Región de aceptación: $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_\alpha = 1,645 \Rightarrow (-1,645; +\infty)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{\frac{36}{1000} - 0,05}{\sqrt{\dfrac{0,05 \cdot 0,95}{1\,000}}} = -2,03$.

Como $-2,03 \notin (-1,645; +\infty)$, se rechaza la hipótesis nula. Por tanto, se puede afirmar con una confianza del 95% que el partido Pueblo Democrático no obtendrá representación parlamentaria.

b) Si $\alpha = 0,01 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,99 \Rightarrow z_\alpha = 2,33$, la región de aceptación es $(-2,33; +\infty)$.
Como $-2,03 \in (-2,33; +\infty)$, se puede afirmar que el partido Pueblo Democrático puede obtener representación parlamentaria.

15.22. (PAU) Hace una década, la proporción poblacional de personas que leían el periódico *La Ciudad* era del 35%. Para comprobar si dicha proporción se mantiene tomamos una muestra de 225 personas de las cuales solo 65 leen *La Ciudad*.

a) Si α = 0,05, ¿podemos aceptar que la proporción de personas que leen dicho periódico es mayor o igual al 35% frente a que ha disminuido?

b) ¿Se concluiría lo mismo si el nivel de significación fuera del 1%?

a) H_0: $p_0 \geq 0{,}35$; H_a: $p_0 < 0{,}35$ (la proporción disminuyó) $\Rightarrow$ Contraste unilateral para la proporción

El estadístico del contraste es el mismo que el de los ejercicios anteriores.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}645 \Rightarrow (-1{,}645; +\infty) \Rightarrow Z = \dfrac{\frac{65}{225} - 0{,}35}{\sqrt{\frac{0{,}35 \cdot 0{,}65}{225}}} = -1{,}92$

Como $-1{,}92 \notin (-1{,}645; +\infty)$, se rechaza la hipótesis nula. Y, en consecuencia, no se puede aceptar con un nivel de significación del 5% que la proporción de personas que leen dicho periódico ha aumentado.

b) Si $\alpha = 0{,}01 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_\alpha = 2{,}33$, y la región de aceptación es $(-2{,}33; +\infty)$.
Como $-1{,}92 \in (-2{,}33; +\infty)$, se acepta la hipótesis nula. Luego, con el nivel de significación del 1%, se puede aceptar que la proporción de personas que leen el periódico ha aumentado.

Contraste para la media poblacional de una distribución normal

15.23. (PAU) Las tensiones de ruptura de los cables fabricados por una empresa tienen media de 1800 N y una desviación típica de 100 N. Se desea comprobar si un nuevo proceso de fabricación modifica dicha tensión media de ruptura. Para ello se toma una muestra de 50 cables y se encuentra que su tensión media de ruptura es de 1850 N. ¿Se puede afirmar que el nuevo proceso ha modificado la tensión media de ruptura al nivel de significación del 5%?

H_0: $\mu_0 = 1800$ N; H_a: $\mu_0 \neq 1800$ N $\Rightarrow$ Contraste bilateral para la media poblacional

El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\overline{x} - \mu_o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$. Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96 \Rightarrow (-1{,}96; 1{,}96)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{1\,850 - 1\,800}{\frac{100}{\sqrt{50}}} = 3{,}54$

Como $3{,}54 \notin (-1{,}96; 1{,}96)$, se rechaza la hipótesis nula. Por tanto, el nuevo proceso ha modificado la tensión media de ruptura.

15.24. (PAU) El estudio de un test de satisfacción de usuario que rellenan todos los demandantes de servicios de una gran empresa revela que la nota media que otorgan es de 5,70 puntos con una desviación típica de 0,5. Posteriormente se ha realizado un muestreo a 100 usuarios de la zona de influencia *A* y a 49 usuarios de la zona *B*, y se han obtenido puntuaciones medias respectivas de 5,6 y 5,85.

Con una confianza del 95%, ¿se puede afirmar que las diferencias entre las medias de cada muestra y de la población son debidas al azar, o que son diferentes la nota media de la población y la de cada muestra? Formula las hipótesis nula y alternativa.

Se construirán dos estadísticos de contraste, uno para cada zona.

$\mu_0 = 5{,}70$ puntos; $\sigma = 0{,}5$ puntos; $n_A = 100$; $n_B = 49$; $\overline{x}_A = 5{,}6$ puntos; $\overline{x}_B = 5{,}85$ puntos

H_0: $\mu_0 = 5{,}7$ puntos; H_a: $\mu_0 \neq 5{,}7$ puntos $\Rightarrow$ Contraste bilateral para la media poblacional

El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\overline{x} - \mu_o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$. Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96 \Rightarrow (-1{,}96; 1{,}96)$

Al sustituir los datos en los dos estadísticos: $Z_A = \dfrac{5{,}6 - 5{,}7}{\frac{0{,}5}{\sqrt{100}}} = -2$; $Z_B = \dfrac{5{,}6 - 5{,}85}{\frac{0{,}5}{\sqrt{49}}} = -3{,}5$

Como $-2 \notin (-1{,}96; 1{,}96)$, se rechaza la hipótesis nula para la zona de influencia *A*.
Como $-3{,}5 \notin (-1{,}96; 1{,}96)$, se rechaza la hipótesis nula para la zona de influencia *B*. Por tanto, se puede afirmar que en ambas zonas son diferentes la nota media de la población y la nota media muestral.

15.25. (PAU) En una máquina en la que se ha roto el indicador de la longitud de las piezas que fabrica se sabe que la desviación típica de la longitud de las piezas que produce es de 0,2 cm. Un trabajador cree que la máquina estaba regulada para fabricar piezas de una longitud media de 5 cm.

a) Si se toma una muestra de 16 piezas y se obtiene una media de 5,12 cm, con un nivel de significación del 5%, ¿se acepta la hipótesis del trabajador frente a la hipótesis de que la máquina estaba regulada para fabricar piezas de una longitud mayor?

b) Si la media muestral del apartado anterior se hubiese obtenido de una muestra de tamaño 36 y el nivel de significación fuera del 1%, ¿podría aceptarse la hipótesis del trabajador frente a la hipótesis de que la máquina está regulada para fabricar piezas de una longitud mayor?

a) H_0: $\mu_0 \le 5$ cm; H_a: $\mu_0 > 5$ cm (la longitud media aumenta) $\Rightarrow$ Contraste unilateral para la media poblacional.

El estadístico del contraste es el mismo que en el ejercicio anterior.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}645 \Rightarrow (-\infty; 1{,}645)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{5{,}12-5}{\dfrac{0{,}2}{\sqrt{16}}} = 2{,}4$. Como $2{,}4 \notin (-\infty; 1{,}645)$, se rechaza la hipótesis nula. Por tanto, no se acepta la hipótesis del trabajador al nivel de significación del 5%.

b) Si $\alpha = 0{,}01 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}33$. La región de aceptación es $(-\infty; 2{,}33)$.

Al sustituir los datos en el estadístico del contraste: $Z = \dfrac{5{,}12-5}{\dfrac{0{,}2}{\sqrt{36}}} = 3{,}6$. Como $3{,}6 \notin (-\infty; 2{,}33)$, se rechaza la hipótesis nula. Luego tampoco en este caso se acepta la hipótesis del trabajador.

15.26. (PAU) Un estudio realizado en el ámbito de la Unión Europea concluye que la edad de los propietarios de un vehículo marca El Veloz en el momento de su compra tiene un comportamiento normal con media 38 años y varianza 16. Un concesionario de dicha marca instalado recientemente en España ha vendido solo 150 vehículos y ha comprobado que la media de edad de sus clientes es de 38,3 años. Aceptando para los clientes españoles la varianza obtenida para los clientes europeos, ¿se puede aceptar que la edad media al adquirir un vehículo de esa marca es la misma en España que en Europa, para un nivel de significación del 5%?

H_0: $\mu_0 = 38$; H_a: $\mu_0 \neq 38 \Rightarrow$ Contraste bilateral para la media poblacional

El estadístico del contraste es el mismo que en los ejercicios anteriores.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96 \Rightarrow (-1{,}96; 1{,}96)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{38{,}3-38}{\dfrac{4}{\sqrt{150}}} = 0{,}92$.

Como $0{,}92 \in (-1{,}96; 1{,}96)$, se acepta la hipótesis nula.

Por tanto, al nivel de significación del 5% se puede aceptar que la edad media al adquirir un automóvil El Veloz en España es la misma que en Europa.

15.27. (PAU) Un establecimiento vende paquetes de carbón para barbacoa de peso teórico 10 kg. Se supone que el peso de los paquetes sigue una distribución normal con desviación típica de 1 kg. Para contrastar la citada hipótesis, frente a que el peso teórico sea distinto de 10 kg, se escogen al azar 4 paquetes que pesan, respectivamente, 8, 10, 9 y 8 kg. Se desea que la probabilidad de aceptar la hipótesis nula, cuando esta es cierta, sea 0,95.

a) Halla la región crítica de contraste.

b) ¿Se debe rechazar la hipótesis nula?

a) $1 - \alpha = 0{,}95$, $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$. La región de aceptación es $(-1{,}96; 1{,}96)$, y la región crítica, $(-\infty; -1{,}96] \cup [1{,}96; +\infty)$.

b) H_0: $\mu_0 = 10$ kg; H_a: $\mu_0 \neq 10$ kg $\Rightarrow$ Contraste bilateral para la media poblacional

$\overline{x} = \dfrac{8+10+9+8}{4} = 8{,}75$. El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\overline{x}-\mu_o}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{8{,}75-10}{\dfrac{1}{\sqrt{4}}} = -2{,}5$.

Como $-2{,}5 \notin (-1{,}96; 1{,}96)$, se rechaza la hipótesis nula. Es decir, no se acepta la hipótesis de que el peso medio de los paquetes de carbón para barbacoa es de 10 kg.

15.28. (PAU) Los depósitos mensuales, en euros, de una entidad bancaria siguen una distribución normal de media μ y desviación típica σ = 5,1. Con el fin de contrastar si la media de los depósitos mensuales es de 20 euros, se toma una muestra de tamaño 16, resultando ser la media muestral de 22,40 euros. ¿Se puede aceptar la hipótesis de que la media es de 20 a un nivel de significación del 5%?

H_0: μ_0 = 20 €; H_a: $\mu_0 \neq$ 20 € $\Rightarrow$ Contraste bilateral para la media poblacional

El estadístico del contraste es el mismo que en el ejercicio anterior.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96 \Rightarrow (-1{,}96;\ 1{,}96)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{22{,}4 - 20}{\dfrac{5{,}1}{\sqrt{16}}} = 1{,}88$

Como 1,88 $\in$ (–1,96; 1,96), se acepta la hipótesis nula, es decir, que la media de los depósitos mensuales es de 20 €.

15.29. (PAU) Una máquina de llenado está diseñada para llenar bolsas con 300 g de cereales. Con el objeto de comprobar el buen funcionamiento de la misma se eligen al azar 100 bolsas llenadas en un día y se pesa su contenido. El valor de la media muestral es de 297 gramos. Suponiendo que la variable peso tiene una distribución normal con varianza 16, ¿es aceptable el funcionamiento de la máquina al nivel 0,5?

H_0: μ_0 = 297 g; H_a: $\mu_0 \neq$ 297 g $\Rightarrow$ Contraste bilateral para la media poblacional

El estadístico del contraste es el mismo que en los ejercicios anteriores.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96 \Rightarrow (-1{,}96;\ 1{,}96)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{300 - 297}{\dfrac{4}{\sqrt{100}}} = 7{,}5$

Como 7,5 $\notin$ (–1,96; 1,96), se rechaza la hipótesis nula y se admite que la máquina funciona mal con un nivel de 0,5.

15.30. (PAU) El peso medio de una muestra aleatoria de 100 naranjas de una determinada variedad es de 272 g. Se sabe que la desviación típica poblacional es de 20 g. A un nivel de significación de 0,05, ¿hay suficiente evidencia para refutar la afirmación de que el peso medio de la población es de 275 g?

H_0: μ_0 = 272 g; H_a: $\mu_0 \neq$ 272 g $\Rightarrow$ Contraste bilateral para la media poblacional.

El estadístico del contraste sigue siendo el mismo que en los ejercicios anteriores.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96 \Rightarrow (-1{,}96;\ 1{,}96)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{272 - 275}{\dfrac{20}{\sqrt{100}}} = -1{,}5$

Como –1,5 $\notin$ (–1,96; 1,96), se rechaza la hipótesis nula y se admite que el peso medio de las naranjas es de 275 g con un nivel de significación de 0,05.

15.31. La producción de las bodegas de una determinada denominación de origen se puede considerar normal con desviación típica de 0,30 millones de botellas. Se toma una muestra de 25 bodegas y se obtiene una producción media de 1,56 millones de botellas. ¿Se puede mantener para un nivel de significación de 0,05 que la producción media es de 1,65 millones de botellas?

H_0: μ_0 = 1,65 millones; H_a: $\mu_0 \neq$ 1,65 millones $\Rightarrow$ Contraste bilateral para la media poblacional

El estadístico del contraste es el mismo que en los ejercicios anteriores.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96 \Rightarrow (-1{,}96;\ 1{,}96)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{1{,}56 - 1{,}65}{\dfrac{0{,}3}{\sqrt{256}}} = -4{,}8$

Como –4,8 $\notin$ (–1,96; 1,96), no se acepta la hipótesis nula.

15.32. (PAU) Se quiere comprobar si una máquina destinada al llenado de envases de agua mineral ha sufrido un desajuste. Una muestra aleatoria de 10 envases de esta máquina ha proporcionado los siguientes resultados:

0,49; 0,52; 0,51; 0,48; 0,53;

0,55; 0,49; 0,50; 0,52; 0,49

Suponiendo que la cantidad de agua mineral que este tipo de máquinas deposita en cada envase sigue una distribución normal de media 0,5 litros y desviación típica de 0,02 litros, se desea contrastar si el contenido medio de los envases de esta máquina es de 0,5 litros, con un nivel de significación del 5%.

a) Plantea la hipótesis nula y alternativa del contraste.

b) Determina la región crítica del contraste.

c) Realiza el contraste.

a) Hipótesis nula: H_0: $\mu_0 = 0{,}5$ litros. Hipótesis alternativa: H_a: $\mu_0 \neq 0{,}5$ litros.

Es un contraste bilateral para la media poblacional.

b) Como $\alpha = 0{,}05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

La región de aceptación es (–1,96; 1,96), y la región crítica, $(-\infty; -1{,}96] \cup [1{,}96; +\infty)$.

c) $\overline{x} = \dfrac{0{,}48 + 0{,}49 \cdot 3 + 0{,}50 + 0{,}51 + 0{,}52 \cdot 2 + 0{,}53 + 0{,}55}{10}$ = 0,508 litros

El estadístico de contraste es $Z = \dfrac{\overline{x} - \mu_o}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{0{,}508 - 0{,}5}{\dfrac{0{,}02}{\sqrt{10}}} = 1{,}26$.

Como $1{,}26 \in (-1{,}96; 1{,}96)$, se acepta la hipótesis nula, por lo que se concluye que la máquina no ha sufrido desajustes con un nivel de significación del 5%.

Contraste para la diferencia de medias

15.33. Se sabe que la duración de una determinada enfermedad sigue la ley normal. Para la curación de dicha enfermedad se aplica un determinado antibiótico. Se desea comparar la duración de la enfermedad según que al enfermo se le haya aplicado o no en otra ocasión dicho antibiótico. Observamos a 36 enfermos a los que no se había aplicado anteriormente el antibiótico y la duración media de la enfermedad ha sido de 12 días, y a 35 enfermos a los que sí se había aplicado y que han permanecido enfermos 15 días. La estimación común de la varianza es 16.

¿Qué podemos afirmar acerca de la duración de la enfermedad para un nivel de significación *a* = 0,01?

Datos: $n_1 = 36$; $\overline{x}_1 = 12$ días; $n_2 = 35$; $\overline{x}_2 = 15$ días; $s_1 = s_2 = 16$ días

H_0: $\mu_1 - \mu_2 \Rightarrow \mu_1 - \mu_2 = 0$

H_a: $\mu_1 \neq \mu_2 \Rightarrow$ Contraste bilateral para la media poblacional

El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\dfrac{\hat{s}_1^2}{n_1} + \dfrac{\hat{s}_2^2}{n_2}}} = \dfrac{12 - 15}{\sqrt{\dfrac{16^2}{36} + \dfrac{16^2}{35}}}$ –0,79

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_\alpha = 2{,}33 \Rightarrow (-2{,}33; 2{,}33)$

Como $-0{,}79 \in (-2{,}33; 2{,}33)$, se acepta la hipótesis nula.

Por tanto, la duración media de la enfermedad es la misma para los enfermos a los que se les ha aplicado anteriormente el antibiótico que para los que no.

15.34. Un laboratorio farmacéutico fabrica dos tipos de somníferos, *A* y *B*. Se toman dos grupos análogos de enfermos de insomnio formados por 80 y 100 individuos, respectivamente, y se suministra a los del primer grupo el somnífero *A*, y a los del segundo grupo, el *B*. El número medio de horas de sueño para los enfermos del primer grupo es de 7,84 con una desviación típica de 0,90, y para los del segundo grupo es de 6,90 y 1,30, respectivamente.

a) ¿Se puede decir que la diferencia entre los números medios de horas de sueño es significativa?

b) ¿Qué hipótesis debemos formular?

a) Datos: $n_1 = 80$; $\bar{x}_1 = 7{,}84$ h; $s_1 = 0{,}90$; $\hat{s}_1 = \sqrt{\frac{80}{79}} = 0{,}90$

$n_2 = 100$; $\bar{x}_2 = 6{,}90$ h; $s_2 = 1{,}30$; $\hat{s}_2 = \sqrt{\frac{100}{99}} = 1{,}30$

H_0: $\mu_1 - \mu_2 \Rightarrow \mu_1 - \mu_2 = 0$

H_a: $\mu_1 \neq \mu_2 \Rightarrow$ Contraste bilateral para la media poblacional

El estadístico del contraste es el mismo del ejercicio anterior.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96 \Rightarrow (-1{,}96;\ 1{,}96)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{7{,}84 - 6{,}90}{\sqrt{\dfrac{0{,}81}{80} + \dfrac{1{,}69}{100}}} = 5{,}72$

Como $5{,}72 \notin (-1{,}96;\ 1{,}96)$, se rechaza la hipótesis nula.

Luego existe una diferencia significativa entre los números medios de horas de sueño con ambos somníferos.

b) La conclusión anterior no es válida si no se cumple que la duración del sueño con ambos somníferos es una variable aleatoria normal.

15.35. Noventa enfermos con problemas motrices son ingresados en centros de rehabilitación. De ellos, 50 en el centro *A*, donde consiguieron su recuperación en un plazo medio de 150 días, con una desviación típica de 30 días. Los 40 restantes fueron ingresados en otro centro, *B*, donde se recuperaron en 160 días con una desviación típica de 25 días.

a) ¿Se puede concluir que hay diferencias entre los centros para conseguir una recuperación más rápida?

b) ¿Bajo qué hipótesis?

a) Datos: $n_A = 50$; $\bar{x}_A = 150$ días; $s_A = 30$ días; $\hat{s}_A = s_A\sqrt{\frac{n}{n-1}} \Rightarrow \hat{s}_A = 30\sqrt{\frac{50}{49}} = 30{,}3$ días

$n_B = 40$; $\bar{x}_B = 160$ días; $s_B = 25$ días; $\hat{s}_B = s_B\sqrt{\frac{n}{n-1}} \Rightarrow \hat{s}_B = 25\sqrt{\frac{40}{39}} = 25{,}32$ días

H_0: $\mu_A = \mu_B \Rightarrow \mu_A - \mu_B = 0$

H_a: $\mu_A \neq \mu_B \Rightarrow$ Contraste bilateral para la media poblacional

El estadístico del contraste es el mismo del ejercicio anterior.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96 \Rightarrow (-1{,}96;\ 1{,}96)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{150 - 160}{\sqrt{\dfrac{30{,}3^2}{50} + \dfrac{25{,}32^2}{40}}} = -1{,}71$

Como $-1{,}71 \in (-1{,}96;\ 1{,}96)$, se acepta la hipótesis nula. Por tanto, se puede considerar el centro *A* más adecuado para la rehabilitación que el centro *B* con un nivel de significación del 5%.

b) Lo anterior es cierto si la variable objeto de estudio se distribuye según la ley normal.

PROBLEMAS

15.36. (PAU) Se está calibrando una balanza. Para ello se pesa una *pesa de prueba* de 1000 g 60 veces y se obtiene un peso medio de 1000,6 g. Si la desviación típica de la población es de 2 gramos, ¿podemos aceptar la hipótesis nula H_0: μ = 1000 frente a la alternativa H_a: μ ≠ 1000 con una confianza del 99%?

H_0: $\mu_0 = 1000$; H_a: $\mu_0 \neq 1000 \Rightarrow$ Contraste bilateral para la media poblacional

El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\overline{x} - \mu_o}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$. Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}58 \Rightarrow (-2{,}58;\ 2{,}58)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{1000{,}6 - 1000}{\dfrac{2}{\sqrt{60}}} = 3{,}23$.

Como $3{,}23 \notin (-2{,}58;\ 2{,}58)$, no se puede aceptar la hipótesis nula.

15.37. (PAU) El director de recursos humanos de una compañía afirma que las edades de sus empleados tienen una media de 40 años y una varianza de 25 años. Si se pregunta la edad a 25 empleados elegidos al azar y se observa que la media de las edades de esta muestra es de 41,35 años, ¿se puede aceptar la hipótesis de que la edad media de los empleados es de 40 años con un nivel de significación del 5%, o más bien nos debemos inclinar por aceptar que la edad media es de más de 40 años?

H_0: $\mu_0 = 40$ años; H_a: $\mu_0 > 40$ años $\Rightarrow$ Contraste unilateral para la media poblacional

El estadístico del contraste es el mismo del ejercicio anterior.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}645(-\infty;\ 1{,}645)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{41{,}35 - 40}{\dfrac{5}{\sqrt{25}}} = 1{,}35$

Como $1{,}35 \in (-\infty;\ 1{,}645)$, se acepta la hipótesis nula. Con un nivel de significación del 5%, se acepta que la edad media de los empleados es de 40 años.

15.38. (PAU) Un 43% de la población adulta de cierta ciudad sabía realizar el cambio entre euros y pesetas correctamente. Mediante una campaña informativa se ha pretendido elevar ese porcentaje y parece que se han cumplido sus objetivos a la vista del resultado de una encuesta a 110 personas: de ellas, 55 sabían realizar bien tales operaciones. Sin embargo, hay quien duda de la efectividad de la campaña.

a) Plantea un test para contrastar que la campaña no ha surtido efecto frente a que sí lo ha hecho. Si se concluye que el porcentaje se mantuvo y realmente subió, ¿cómo se llama el error cometido?

b) ¿A qué conclusión se llega en el test planteado en el apartado anterior a un nivel de significación del 1%?

a) H_0: $p_0 \leq 0{,}43$ (el porcentaje sigue igual o baja); H_a: $p_0 > 0{,}43$ (el porcentaje sube)

Es un contraste unilateral para la proporción.

El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\hat{p} - p_o}{\sqrt{\dfrac{p_o\,(1 - p_o)}{n}}}$.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_\alpha = 2{,}33 \Rightarrow (-\infty;\ 2{,}33)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{\dfrac{55}{110} - 0{,}43}{\sqrt{\dfrac{0{,}43 \cdot 0{,}53}{110}}} = 1{,}54$

Como $1{,}54 \in (-\infty;\ 2{,}33)$, se acepta la hipótesis nula.

Por tanto, el porcentaje sigue igual (la situación no ha mejorado).

Si esta conclusión fuera falsa, se diría que se comete un error de tipo II.

b) Con un nivel de significación del 1%, se concluye que el porcentaje es menor o igual a 0,43, por lo que la situación parece que no ha mejorado.

15.39. (PAU) En un hospital se observó que los pacientes abusaban del servicio de urgencias, de forma que un 30% de las consultas podían perfectamente haber esperado a concertar una cita con el médico de cabecera, porque no eran realmente urgentes. Puesto que esta situación ralentizaba el servicio, se realizó una campaña intensiva de concienciación.

Transcurridos unos meses se ha recogido información de 60 consultas al servicio, de las cuales solo 15 no eran realmente urgencias.

a) Hay personal del hospital que defiende que la campaña no ha mejorado la situación. Plantea un test para contrastar esta hipótesis frente a que sí la mejoró. Si se concluye que la situación no ha mejorado y realmente sí lo hizo, ¿cómo se llama el error cometido?

b) ¿A qué conclusión se llega en el test planteado en el apartado anterior con un nivel de significación del 1%?

a) H_0: $p_0 \geq 0{,}30$ (la proporción sigue igual o subió)

H_a: $p_0 < 0{,}30$ (la proporción disminuyó)

Es un contraste unilateral para la proporción.

b) El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\hat{p} - p_o}{\sqrt{\dfrac{p_o\,(1 - p_o)}{n}}}$.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_\alpha = 2{,}33 \Rightarrow (-2{,}33;\ +\infty)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{\dfrac{15}{60} - 0{,}30}{\sqrt{\dfrac{0{,}30 \cdot 0{,}70}{60}}} = -0{,}845$

Como $-0{,}845 \in (-2{,}33;\ +\infty)$, se acepta la hipótesis nula.

Por tanto, la proporción es igual o superior a 0,30; en consecuencia, la situación ha mejorado.

15.40. (PAU) La Concejalía de Juventud de un Ayuntamiento maneja el dato de que la edad a la que los hijos se independizan de sus padres es una variable normal con media de 29 años y desviación típica de 3 años. Aunque la desviación típica no plantea dudas, se sospecha que la media ha descendido, sobre todo por la política de ayuda al empleo que ha llevado a cabo el Ayuntamiento. Así, de un estudio reciente sobre 100 jóvenes que se acaban de independizar se ha obtenido una media de 28,1 años de edad.

a) Con un nivel de significación del 1%, ¿puede defenderse que la edad media no ha disminuido, frente a que sí lo ha hecho como parecen indicar los datos? Plantea el contraste o test de hipótesis y resuélvelo.

b) Explica, en el contexto del problema, en qué consiste cada uno de los errores de los tipos I y II.

a) H_0: $\mu_0 \leq 29$ años (ha descendido); H_a: $\mu_0 > 29 \Rightarrow$ Contraste unilateral para la media poblacional

El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\overline{x} - \mu_o}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_\alpha = 2{,}33 \Rightarrow (-\infty;\ 2{,}33)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{28{,}1 - 29}{\dfrac{3}{\sqrt{100}}} = -3$

Como $-3 \in (-\infty;\ 2{,}33)$, se acepta la hipótesis nula. Luego la edad media de que los hijos se independicen ha disminuido.

b) El error de tipo I consiste en admitir que la edad media a la que se independizan los hijos ha disminuido si realmente no lo hubiese hecho. Eso es lo que se ha aceptado, y es, por tanto, el error que se asume.

El error de tipo II consiste en no admitir que la edad media a la que se independizan los hijos ha disminuido si realmente lo ha hecho.

15.41. (PAU) El 42% de los escolares de cierto país suelen perder al menos un día de clases a causa de gripes y catarros. Sin embargo, un estudio sobre 1000 escolares revela que en el último curso hubo 450 en tales circunstancias. Las autoridades sanitarias defienden que el porcentaje del 42% para toda la de población escolares se ha mantenido.

a) Construye con un nivel de significación del 5% la hipótesis defendida por las autoridades sanitarias, frente a que el porcentaje ha aumentado como parecen indicar los datos, explicando claramente a qué conclusión se llega.

b) ¿Cómo se llama la probabilidad de concluir erróneamente que el porcentaje se ha mantenido?

a) H_0: $p_0 = 0{,}42$; H_a: $p_0 > 0{,}42 \Rightarrow$ Contraste unilateral para la proporción

El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\hat{p} - p_o}{\sqrt{\dfrac{p_o(1-p_o)}{n}}}$.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}645 \Rightarrow (-\infty; 1{,}645)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{\dfrac{450}{1000} - 0{,}42}{\sqrt{\dfrac{0{,}42 \cdot 0{,}58}{1\,000}}} = 1{,}92$

Como $1{,}92 \notin (-\infty; 1{,}645)$, se rechaza la hipótesis nula. Por tanto, hay que admitir que el porcentaje ha aumentado al nivel de confianza del 95%

b) Al admitir la hipótesis alternativa se asume un riesgo de error del 5%. Esto es, la probabilidad de error es 0,05. Este error se llama de tipo I.

15.42. (PAU) Una empresa de automóviles está estudiando las mejoras que ha incluido en la nueva generación de su gama de utilitarios. Hasta ahora, los kilómetros que uno de estos automóviles podía recorrer –con un uso normal– sin que fueran necesarias reparaciones importantes seguían una normal con media 220 (en miles de kilómetros) y desviación típica 15 (en miles de kilómetros). Las mejoras parecen haber surtido efecto, puesto que con 100 automóviles de la nueva generación se ha obtenido una media de 225 (en miles de kilómetros) sin ningún tipo de problema grave. Suponiendo que la desviación típica se ha mantenido:

a) Plantea un test para contrastar la hipótesis de que las mejoras no han surtido efecto o incluso que han empeorado la situación, frente a que sí han surtido efecto, como parecen indicar los datos. Si se concluye que la media sigue igual o incluso bajó, y sin embargo esta conclusión fuera falsa, ¿cómo se llama el error cometido?

b) Con un nivel de significación del 1%, ¿a qué conclusión se llega?

a) Hipótesis nula: H_0: $\mu_0 \le 220$ (la media sigue igual o incluso bajó).

Hipótesis alternativa: H_a: $\mu_0 > 220$ (la media aumentó).

Es un contraste unilateral para la media poblacional. Si se concluye que la media sigue igual y, sin embargo, esta conclusión fuera falsa, se comete un error de tipo II.

b) El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\overline{x} - \mu_o}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_\alpha = 2{,}33 \Rightarrow (-\infty; 2{,}33)$

El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{225 - 220}{\dfrac{15}{\sqrt{100}}} = 3{,}33$

Como $3{,}33 \notin (-\infty; 2{,}33)$, se rechaza la hipótesis nula. Por tanto, se acepta que la media ha aumentado.

15.43. (PAU) Una de las entradas a cierta ciudad sufría constantemente retenciones de tráfico, de forma que el tiempo de espera en la cola formada por el semáforo allí instalado seguía una normal de media 10 minutos y desviación típica de 4 minutos. Con el fin de descongestionar ese punto y bajar la media de tiempo de espera, se habilitó una vía de acceso auxiliar. Transcurrida una semana se hizo un pequeño estudio sobre 36 vehículos y se obtuvo que el tiempo medio de espera en el citado semáforo fue de 8,5 minutos. Las autoridades municipales mostraron su satisfacción y dijeron que la medida había funcionado, pero la opinión pública, sin embargo, defiende que la situación sigue igual.

Suponiendo que la desviación típica se ha mantenido:

a) Plantea un test para contrastar la hipótesis defendida por la opinión pública frente a la de los responsables municipales.

b) Si se concluye que la media de tiempo de espera bajó y realmente no lo hizo, ¿cómo se llama el error cometido?

c) ¿A qué conclusión se llega a un nivel de significación del 5%?

a) H_0: μ_0 = 10 minutos; H_a: μ_0 < 10 minutos. Es un contraste unilateral para la media poblacional.

b) Si se acepta la hipótesis alternativa, es decir, que la media de tiempo de espera bajó y realmente no fue así, se comete un error de tipo I.

c) El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\overline{x} - \mu_o}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$. Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}645 \Rightarrow (-1{,}645; +\infty)$.

El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{8{,}5 - 10}{\dfrac{4}{\sqrt{36}}} = -2{,}25$.

Como $-2{,}25 \notin (-1{,}645; +\infty)$, se rechaza la hipótesis nula. Por tanto, se acepta que la media de tiempo de espera bajó.

15.44. (PAU) Se cree que el comportamiento de ciertos microorganismos marinos se ha visto afectado por un vertido de residuos, reduciéndose en particular el tiempo de vida de dichos microorganismos. Antes del vertido, ese tiempo seguía una normal de media 45 días y desviación típica 4 días. Unas semanas después del vertido se contabilizó el tiempo de vida de una muestra de 50 microorganismos, y se obtuvo una media de 43 días de vida. Suponiendo que el tiempo de vida sigue siendo aproximadamente normal y que la desviación típica se ha mantenido:

a) Plantea un test para contrastar la hipótesis de que el vertido de residuos no les ha afectado frente a que ha influido en la forma en que se cree. Si se concluye que sí afectó y esta conclusión fuera falsa, ¿cómo se llama el error cometido?

b) Explica claramente a qué conclusión se llega en el test planteado en el apartado anterior para un nivel de significación del 3%.

a) Hipótesis nula: H_0: $\mu_0 \geq 45$ (la media sigue igual o subió).

Hipótesis alternativa: H_a: $\mu_0 < 45$ (la media bajó).

Se trata de un contraste unilateral izquierdo para la media poblacional.

Si se concluye que la media ha bajado (aceptándose H_a) y, sin embargo, esta conclusión fuera falsa, se dice que se comete un error de tipo I.

b) Se determina la región de aceptación para el nivel de significación dado:

$\alpha = 0{,}03 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}97 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}82$. Región de aceptación: $(-1{,}82; +\infty)$

Se elige el estadístico del contraste cuya distribución en el muestreo es conocida:

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu_o}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad \frac{43 - 45}{\dfrac{4}{\sqrt{50}}} = -3{,}54 \text{ sigue una } N(0, 1).$$

Se acepta o se rechaza la hipótesis nula según que el estadístico del contraste obtenido, después de tipificarlo, caiga dentro o fuera de la región de aceptación:

Como $-3{,}54 \notin (-1{,}82; +\infty)$, se rechaza la hipótesis nula.

Se interpreta la decisión: la media de vida de dichos organismos ha disminuido.

15.45. (PAU) El control de calidad de una fábrica de pilas y baterías sospecha que hubo defectos en la de un producción modelo de batería para teléfonos móviles, bajando su tiempo de duración. Hasta ahora, el tiempo de duración en conversación seguía una normal con media de 300 minutos y desviación típica de 30 minutos. Sin embargo, en la inspección del último lote producido, antes de enviarlo al mercado, se obtuvo que de una muestra de 60 baterías el tiempo medio de duración en conversación fue de 290 minutos. Suponiendo que ese tiempo sigue siendo normal con la misma desviación típica:

a) Plantea un test para contrastar que la duración no se ha visto afectada frente a que las sospechas son falsas y realmente no lo son. ¿Cómo se llama el error cometido?

b) ¿Se puede concluir que las sospechas del control de calidad son ciertas a un nivel de significación del 2%?

a) H_0: $\mu_0 \geq 300$; H_a: $\mu_0 < 300 \Rightarrow$ Contraste unilateral para la media poblacional

Si se concluye que las sospechas son falsas y realmente no lo son, se comete un error del tipo II, pues la hipótesis nula es falsa y como consecuencia del contraste se acepta.

b) Si $\alpha = 0{,}02 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}98 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$.

La región de aceptación es $(-1{,}96; +\infty)$, y la región crítica es $(-\infty; -1{,}96]$.

El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\overline{x} - \mu_o}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{290 - 300}{\dfrac{30}{\sqrt{60}}} = -2{,}58$

Como $-2{,}58 \in$ región crítica, se rechaza la hipótesis nula.

Por tanto, se puede decir que las sospechas son ciertas a un nivel de significación del 2%.

PROFUNDIZACIÓN

15.46. (PAU) Dos estudiantes quieren contrastar si el consumo medio en teléfono móvil entre los estudiantes es como máximo de 10 euros frente a si es mayor. El primero, en una muestra de 36 estudiantes, obtuvo una media de 10,40 euros con una desviación típica de 2 euros. El segundo, en una muestra de 49 estudiantes, obtuvo una media de 10,39 con una desviación típica de 2 euros. ¿Qué decisión toma cada uno con un nivel de significación del 10%?

Se construyen dos estadísticos de contraste, uno para cada estudio.

$\mu_0 = 10$ €; $\sigma = 2$ €

$n_A = 32$; $\overline{x}_A = 10{,}40$ €

$n_B = 49$; $\overline{x}_B = 10{,}39$ €

H_0: $\mu_0 \leq 10$ €; H_a: $\mu_0 > 10$ €

Es un contraste unilateral para la media poblacional.

El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\overline{x} - \mu_o}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}90 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}28 \Rightarrow (-\infty; 1{,}28)$

Al sustituir los datos en los dos estadísticos: $Z_A = \dfrac{10 - 10{,}40}{\dfrac{2}{\sqrt{32}}} = -1{,}13$; $Z_B = \dfrac{10 - 10{,}39}{\dfrac{2}{\sqrt{49}}} = -1{,}365$

Como $-1{,}13 \in (-\infty; 1{,}28)$, se acepta la hipótesis nula para el estudiante *A*.

Como $-1{,}365 \in (-\infty; 1{,}28)$, se acepta la hipótesis nula para el estudiante *B*.

Por tanto, se puede afirmar que el consumo medio en teléfono móvil entre los estudiantes es como máximo de 10 euros.

15.47. (PAU) En los últimos tiempos, las ventas medias en un comercio rondaban los 720 € diarios. Sin embargo, hace unos meses abrió una superficie comercial cerca del mismo. El establecimiento defiende que las ventas medias se mantienen o incluso han aumentado, pero no han disminuido. Para contrastar estadísticamente este supuesto se ha seleccionado una muestra de las ventas diarias realizadas después de la apertura de la superficie comercial.

a) Establece las hipótesis nula y alternativa.

b) ¿Qué nombre recibe la probabilidad de que el establecimiento concluya erróneamente que las ventas medias han disminuido? Explica cómo se denomina y en qué consiste el otro error posible.

c) El establecimiento ha encargado el estudio a un especialista y en su informe afirma textualmente que "el valor obtenido al realizar el contraste es significativo", pero el establecimiento no entiende el significado de la frase. ¿Significa que el establecimiento debe concluir que sus ventas medias disminuyeron, o es lo contrario?

a) Hipótesis nula: H_0: las ventas no han variado.

Hipótesis alternativa: H_a: las ventas han disminuido.

b) Cuando se rechaza la hipótesis nula siendo verdadera, se comete un error de tipo I.

El nombre que recibe la probabilidad de que esto ocurra es el de *nivel de significación*, y se designa por α.

Esta probabilidad se suele fijar antes de tomar la muestra.

Por ejemplo, si $\alpha = 0{,}05$ indica que se asume un riesgo del 5% de cometer un error de tipo I. O, lo que es lo mismo, se tiene una confianza de acertar del 95%.

El otro error posible, llamado de tipo II, se comete cuando no se rechaza la hipótesis nula siendo falsa.

c) La expresión del experto no es muy clara, ya que afirmar que "el valor obtenido al realizar el contraste es significativo" puede dar lugar a pensar que la diferencia entre las medias antigua y nueva es tan grande que aconseja rechazar la hipótesis nula (que las ventas no han variado).

Si se elige $\alpha = 0{,}01 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}58$, entonces, la región de aceptación es $(-2{,}58; 2{,}58)$, y la región crítica, $(-\infty; -2{,}58] \cup [2{,}58; +\infty)$.

15.48. (PAU) Se quiere estimar la media de la nómina mensual que reciben los directivos de las compañías que multinacionales operan en Europa.

a) Si la varianza de la nómina en la población es de 1000 €, ¿cuál es la varianza de la media muestral cuando el tamaño de la muestra es de 100?

b) Si en las condiciones del apartado anterior la media muestral fuera de 4008 €, ¿se rechazaría con un nivel de confianza del 0,95 la hipótesis de que la nómina media es de 4000 €?

a) La media de las muestras de tamaño n extraídas de una población $N(\mu, \sigma)$ se distribuye según una $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Entonces, su varianza es: $s^2 = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1\,000}{100} = 10$.

b) H_0: $\mu_0 = 4000$ €; H_a: $\mu_0 \neq 4000$ € $\Rightarrow$ Contraste bilateral para la media poblacional

El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\overline{x} - \mu_o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96 \Rightarrow (-1{,}96; 1{,}96)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{4\,008 - 4\,000}{\frac{\sqrt{1\,000}}{\sqrt{100}}} = 2{,}53$

Como $2{,}53 \notin (-1{,}96; 1{,}96)$, se rechaza la hipótesis nula.

Por tanto, se acepta la hipótesis alternativa, por lo que se admite que la nómina media no es de 4000 €.

15.49. (PAU) Se ha llevado a cabo un estudio en diferentes países de la Unión Europea sobre el porcentaje de la población que accede a la enseñanza superior. En los países escogidos se han obtenido los valores siguientes (medidos en tantos por ciento):

23,5; 35; 29,5; 31; 23; 33,5; 27; 28; 30,5

Se supone que estos porcentajes siguen una distribución normal con desviación típica igual al 5%. Se desea contrastar con un nivel de significación del 90% si los datos anteriores son compatibles con un valor medio del porcentaje de la población que cursa estudios superiores igual al 28%.

a) Plantea en el contraste cuáles son las hipótesis nula y alternativa.

b) Determina la región crítica del contraste.

c) ¿Es posible aceptar la hipótesis con el nivel de significación indicado?

a) H_0: μ_0 = 28%; H_a: $\mu_0 \neq$ 28% $\Rightarrow$ Contraste bilateral para la media poblacional

b) $1 - \alpha = 0{,}90 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645$.

La región de aceptación es (–1,645; 1,645), y la región crítica, $(-\infty, 1{,}645] \cup [1{,}645, +\infty)$.

c) El estadístico del contraste es el mismo que en el ejercicio anterior.

$$\overline{x} = \frac{23{,}5+35+29{,}5+31+23+33{,}5+27+28+30{,}5}{9} = 29 \Rightarrow Z = \frac{29-28}{\frac{5}{\sqrt{9}}} = 0{,}6$$

Como $0{,}6 \in (-1{,}645; 1{,}645)$, se acepta la hipótesis nula con una probabilidad de error del 5%.

RESUELVE

15.1. Una encuesta realizada a 64 empleados de una fábrica concluyó que el tiempo medio de duración de un empleo en la misma era de 6,5 años, con una desviación típica de 4. ¿Sirve esta información para aceptar, con un nivel de significación del 5%, que el tiempo medio de empleo en esta fábrica es menor o igual que 6? Justifica adecuadamente la respuesta.

H_0: $\mu_0 \leq 6$; H_a: $\mu_0 > 6 \Rightarrow$ Contraste unilateral para la media poblacional

El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\overline{x}-\mu_o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}645 \Rightarrow (-\infty; 1{,}645)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{6{,}5-6}{\frac{4}{\sqrt{64}}} = 1$.

Como $1 \in (-\infty; 1{,}645)$, se acepta que el tiempo medio de empleo es menor o igual que 6 con un nivel de significación del 5%.

15.2. Los médicos chinos afirman que la acupuntura tiene una eficacia del 90% como anestesia para cirugía. Un médico español observó que, de 49 pacientes a los que sometió a acupuntura, solo 37 de ellos respondieron al efecto anestésico esperado.

¿Rechazarías la hipótesis de que la acupuntura es eficaz en el 90% a favor de que es eficaz en menos de un 90% de los casos, con un nivel de significación del 0,01?

H_0: $p_0 = 0{,}9$; H_a: $p_0 < 0{,}9 \Rightarrow$ Contraste unilateral de la proporción

El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\hat{p}-p_o}{\sqrt{\frac{p_o(1-p_o)}{n}}} = \dfrac{\frac{37}{49}-0{,}9}{\sqrt{\frac{0{,}9\cdot 0{,}1}{49}}} = -3{,}38$.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_\alpha = 2{,}33 \Rightarrow (-2{,}33; +\infty)$

Como $-3{,}38 \notin (-2{,}33; +\infty)$, se acepta la hipótesis de que la acupuntura es eficaz en menos del 90% de los casos con un nivel de significación del 0,01.

15.3. En una conversación en un bar de una determinada población, Juan asegura que al menos el 20% de sus habitantes llevan gafas graduadas, y Pedro le contesta que no lo cree. Entonces, Pedro decide tomar una muestra aleatoria de 256 habitantes de la población y resulta que 48 llevan gafas graduadas.

¿A un nivel de significación de 0,05 tiene Pedro suficiente evidencia para refutar la afirmación de Juan?

H_0: $p_0 < 0{,}2$; H_a: $p_0 \geq 0{,}2 \Rightarrow$ Contraste unilateral de la proporción

El estadístico del contraste es el mismo del ejercicio anterior.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}645 \Rightarrow (-\infty; 1{,}645)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{\dfrac{48}{256} - 0{,}2}{\sqrt{\dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{256}}} = -0{,}5$.

Como $-0{,}5 \in (-\infty; 1{,}645)$, se acepta la hipótesis de que Pedro tiene suficiente evidencia para refutar la afirmación de Juan.

15.4. Se cree que el 30% de las piezas producidas por una máquina son defectuosas. Se toma una muestra aleatoria formada por 100 piezas y se observa que 28 de ellas son defectuosas. Contrasta la afirmación efectuada al nivel de significación del 5%.

H_0: $p_0 = 0{,}3$; H_a: $p_0 \neq 0{,}2 \Rightarrow$ Contraste bilateral de la proporción

El estadístico del contraste es el mismo de los ejercicios anteriores.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96 \Rightarrow (-1{,}96; 1{,}96)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{\dfrac{28}{100} - 0{,}3}{\sqrt{\dfrac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{100}}} = -0{,}44$

Como $-0{,}44 \in (-1{,}96; 1{,}96)$, se acepta la hipótesis de que el 30% de las piezas que produce la máquina son defectuosas con un nivel de significación del 5%.

15.5. Hace cinco años, el Ministerio de Educación hizo una encuesta sobre la distribución de las edades del profesorado de Educación Especial y obtuvo que se distribuían según una normal de media 39 años. Se cree que últimamente la edad media ha aumentado, para lo cual se ha tomado una muestra aleatoria formada por 38 profesores, cuyas edades han sido:

35, 37, 39, 42, 40, 39, 41, 40, 39, 38, 38, 47, 43, 41, 40, 39, 38, 32, 39, 41, 45, 41, 38, 42, 29, 32, 45, 46, 29, 37, 40, 41, 43, 39, 41, 43, 32.

Contrasta la hipótesis apuntada sobre el aumento de la edad media al nivel del 5%.

H_0: $\mu_0 > 39$; H_a: $\mu_0 \leq 39 \Rightarrow$ Contraste unilateral para la media poblacional

El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\overline{x} - \mu_o}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

$$\overline{x} = \frac{29 \cdot 2 + 32 \cdot 3 + 35 + 37 \cdot 2 + 38 \cdot 4 + 39 \cdot 7 + 40 \cdot 4 + 41 \cdot 6 + 42 \cdot 2 + 43 \cdot 3 + 45 \cdot 2 + 46 + 47}{38} = 39{,}21$$

$$s = \sqrt{\frac{29^2 \cdot 2 + 32^2 \cdot 3 + 35^2 + 37^2 \cdot 2 + 38^2 \cdot 4 + 39^2 \cdot 7 + 40^2 \cdot 4 + 41^2 \cdot 6 + 42^2 \cdot 6 + 43^2 \cdot 3 + 45^2 \cdot 2 + 46^2 + 47^2}{38} - 39{,}21^2} = 4{,}2$$

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}645 \Rightarrow (-1{,}645; +\infty)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{39{,}21 - 39}{4{,}1} = 0{,}051$

Como $0{,}051 \in (-1{,}645; +\infty)$, se acepta que la edad media de los profesores de Educación Especial ha aumentado con un nivel de significación del 5%.

15.6. El Ayuntamiento de una ciudad afirma que el 65% de los accidentes juveniles de los fines de semana son debidos al alcohol. Un investigador decide contrastar dicha hipótesis, para lo cual toma una muestra formada por 35 accidentes y observa que 24 de ellos han sido debidos al alcohol. ¿Qué podemos decir sobre la afirmación del Ayuntamiento?

H_0: p_0 = 0,65; H_a: $p_0 \neq$ 0,965 $\Rightarrow$ Contraste bilateral de la proporción

El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\hat{p} - p_o}{\sqrt{\dfrac{p_o\,(1 - p_o)}{n}}}$.

Región de aceptación: 1 – α = 0,9 $\Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}$ = 1,645 $\Rightarrow$ (–1,645; 1,645)

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{\dfrac{24}{35} - 0{,}65}{\sqrt{\dfrac{0{,}65 \cdot 0{,}35}{35}}} = 0{,}44$

Como 0,44 $\in$ (–1,645; 1,645), se acepta la hipótesis de que el 65% de los accidentes juveniles los fines de semana se deben al alcohol con un nivel de significación del 10%.

Como al aumentar el nivel de significación, aumenta el tamaño de la región de aceptación, se puede aceptar H_0 con un nivel de significación del 1%.

15.7. Cierta marca de bebidas refrescantes pone en sus envases una etiqueta que dice: "Contenido: 33 cl". En un departamento de defensa del consumidor han tomado una muestra aleatoria formada por 40 envases y han obtenido un medio muestral de 30 cl con una desviación típica de 2 cl. ¿Se puede afirmar que se está engañando al público al nivel de significación del 10%?

H_0: μ_0 = 33; H_a: $\mu_0 \neq$ 33 $\Rightarrow$ Contraste bilateral para la media poblacional
Región de aceptación: 1 – α = 0,90 $\Rightarrow$ $z_{\frac{\alpha}{2}}$ = 1,645 $\Rightarrow$ (–1,645; 1,645)

El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\overline{x} - \mu_o}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{30 - 33}{\dfrac{2}{\sqrt{40}}}$ = –9,49

Como –9,49 $\notin$ (–1,645; 1,645), se rechaza la hipótesis nula. Por tanto, se puede afirmar que se está engañando al público con un nivel de significación del 10%.

15.8. Un laboratorio farmacológico afirma que un analgésico que fabrica es efectivo en la eliminación del dolor de estómago durante 12 horas en un 95% de los casos. Se tomó una muestra de 150 individuos que padecían de dolor de estómago y se les suministró el analgésico citado, que resultó ser efectivo para 132 individuos.

¿Qué podemos opinar acerca de la afirmación del laboratorio para un nivel de significación α = 0,05?

H_0: p_0 = 0,95; H_a: $p_0 \neq$ 0,95 $\Rightarrow$ Contraste bilateral de la proporción

El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\hat{p} - p_o}{\sqrt{\dfrac{p_o\,(1 - p_o)}{n}}}$.

Región de aceptación: 1 – α = 0,95 $\Rightarrow$ $z_{\frac{\alpha}{2}}$ = 1,95 $\Rightarrow$ (–1,95; 1,95)

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{\dfrac{132}{150} - 0{,}95}{\sqrt{\dfrac{0{,}95 \cdot 0{,}05}{150}}} = -3{,}93$

Como –3,93 $\notin$ (–1,95; 1,95), no se acepta la hipótesis de que el medicamento elimine el dolor durante 12 horas en el 95% con un nivel de significación de 0,05.

15.9. Unos estudios sociológicos afirman que el gasto medio de los jóvenes en el fin de semana se distribuye según una normal de media 6,23 euros y desviación típica 1,02 euros. Debido a la crisis económica, se desea contrastar esta hipótesis, pues se tiene la sospecha de que los gastos medios son en la actualidad menores. Para ello se elige una muestra aleatoria formada por 55 jóvenes y se calcula el gasto medio de la muestra, que resulta ser 5,10 €. ¿Podemos creer que la crisis económica ha influido en el gasto medio de los jóvenes al nivel de significación del 10%?

H_0: $\mu_0 < 6{,}23$; H_a: $\mu_0 \geq 6{,}23 \Rightarrow$ Contraste unilateral para la media poblacional

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}90 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}28 \Rightarrow (-\infty; 1{,}28)$

El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\overline{x} - \mu_o}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{5{,}10 - 6{,}23}{\dfrac{1{,}02}{\sqrt{55}}} = -\,8{,}21$

Como $-\,8{,}21 \in (-\infty; 1{,}28)$, se acepta la hipótesis nula. Por tanto, se puede afirmar que la crisis económica ha influido disminuyendo el gasto medio de los jóvenes el fin de semana con un nivel de significación del 10%.

15.10. Se cree que la distancia media al instituto desde las casas de los alumnos se distribuye normalmente con media 2,8 km y desviación típica 0,6 km. Se ha producido un aumento de matrícula considerable en los últimos años y se desea saber si ha aumentado la distancia media de las casas de los alumnos al centro; para ello se ha escogido una muestra formada por 35 alumnos y se ha determinado que la distancia media muestral es de 3 km. ¿Es creíble la afirmación inicial al nivel del 5%?

H_0: $\mu_0 > 2{,}8$; H_a: $\mu_0 \leq 2{,}8 \Rightarrow$ Contraste unilateral para la media poblacional

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_\alpha = 1{,}645 \Rightarrow (-1{,}645; +\infty)$

El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\overline{x} - \mu_o}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{3 - 2{,}8}{\dfrac{10{,}6}{\sqrt{35}}} = -0{,}67$

Como $-8{,}21 \in (-1{,}645; +\infty)$, se acepta la hipótesis nula con un nivel de significación del 10%.

15.11. Se cree que el tiempo medio de ocio que dedican al día los estudiantes de Bachillerato sigue una distribución normal de media 350 minutos y desviación típica poblacional de 60 minutos. Para contrastar esta hipótesis se toma una muestra aleatoria formada por 100 alumnos y se observa que el tiempo medio es 320 minutos. ¿Qué se puede decir de esta afirmación al nivel del 10%?

H_0: $\mu_0 = 350$; H_a: $\mu_0 \neq 350 \Rightarrow$ Contraste bilateral para la media poblacional

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}95 \Rightarrow (-1{,}95; 1{,}95)$

El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\overline{x} - \mu_o}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{320 - 350}{\dfrac{60}{\sqrt{100}}} = -5$

Como $-5 \notin (-1{,}95; 1{,}95)$, no se acepta la hipótesis nula con un nivel de significación del 10%.

15.12. Se ha pasado una prueba a un grupo numeroso de alumnos de mañana y tarde y se ha visto que las calificaciones se distribuyen según una normal de media 5,5. Se sospecha que la calificación media de los alumnos de la tarde es algo inferior. Para contrastar esta hipótesis se ha elegido al azar a 40 alumnos del turno de tarde, obteniéndose que sus calificaciones tienen de media 5,2 y desviación típica 1,3. ¿Será cierta la sospecha al nivel del 10%?

H_0: $\mu_0 = 5{,}5$; H_a: $\mu_0 \neq 5{,}5 \Rightarrow$ Contraste bilateral para la media poblacional

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}90 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}90 \Rightarrow (-2{,}58;\ 2{,}58)$

El estadístico del contraste es $Z = \dfrac{\overline{x} - \mu_o}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{5{,}2 - 5{,}5}{\dfrac{1{,}3}{\sqrt{40}}} = -1{,}46$.

Como $-1{,}46 \in (-2{,}58;\ 2{,}58)$, se puede afirmar que la sospecha es cierta con un nivel de significación del 10%.

15.13. Una entidad financiera encarga durante dos meses consecutivos un estudio sobre los ingresos por comisiones para ver si existen diferencias significativas. Durante el primer mes se seleccionan 60 sucursales y se obtiene un ingreso medio de 11 375 euros, con una desviación típica de 850 euros. En el segundo mes se estudian 81 sucursales y resultan unos ingresos medios de 11 725 euros y una desviación típica de 1325 euros.

Plantea un contraste de hipótesis para decidir si existen diferencias significativas entre los ingresos por comisiones en ambos meses, y contrasta las hipótesis a un nivel de 0,10.

Datos: $n_A = 60$; $\overline{x}_A = 11\,375$ €; $s_A = 850$ €; $\hat{s}_A = s_A\sqrt{\dfrac{n}{n-1}} \Rightarrow \hat{s}_A = 850\sqrt{\dfrac{60}{59}} = 857{,}17$ €

$n_B = 81$; $\overline{x}_B = 11\,725$ €; $s_B = 1325$ €; $\hat{s}_B = s_B\sqrt{\dfrac{n}{n-1}} \Rightarrow \hat{s}_B = 1325\sqrt{\dfrac{81}{80}} = 1333{,}26$ €

H_0: $\mu_A - \mu_B = 0$; H_a: $\mu_A \neq \mu_B \Rightarrow$ Contraste bilateral para la media poblacional

El estadístico del contraste es el mismo del ejercicio anterior.

Región de aceptación: $1 - \alpha = 0{,}90 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645 \Rightarrow (-1{,}645;\ 1{,}645)$

Al sustituir los datos en el estadístico: $Z = \dfrac{11375 - 11725}{\sqrt{\dfrac{857{,}17^2}{60} + \dfrac{1333{,}26^2}{81}}} = -1{,}89$

Como $-1{,}89 \notin (-1{,}645;\ 1{,}645)$, no se acepta la hipótesis nula.

Por tanto, se puede considerar que existen diferencias significativas entre los ingresos por comisiones en ambos meses con un nivel de significación del 10%.