PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD RESUELTOS
MUESTREO E INTERVALOS DE CONFIANZA

1) En una población normal con varianza conocida se ha tomado una muestra de tamaño 49 y se ha calculado su media: $\bar{x}$=4,2. Determine la varianza de la población sabiendo que el intervalo de confianza al 95% para la media poblacional es (3.64, 4.76).

   El intervalo de confianza al 100(1–α)% de la media poblacional si la población es normal, o si la muestra es suficientemente grande (n≥30) es:

$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

   El centro de este intervalo es $\bar{x}$, y el radio $z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

   El centro de un intervalo se obtiene sumando los extremos y dividiendo entre 2. Por tanto, el centro de (3.64, 4.76) es $\frac{3,64+4,76}{2}$ = 4,2. Este valor coincide con la media muestral, luego el problema tiene sentido.

   El radio del intervalo es E = 4,76–4,2 = 0,56, que debe coincidir con el radio teórico $z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Como 1–α = 0,95, según nos dicen, entonces α=0,05 ⇒ $\frac{\alpha}{2}$=0,025 ⇒ 1–$\frac{\alpha}{2}$=0,075 ⇒ $z_{\alpha/2}$=1,96 (mirando en las tablas de la N(0,1)). Como n=49:

$$1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{49}}=0{,}56 \;\Rightarrow\; \sigma=2 \;\Rightarrow\; \sigma^2=4$$

2) En una población, una variable aleatoria sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 3.

   a) A partir de una muestra de tamaño 30 se ha obtenido una media muestral igual a 7. Halle un intervalo de confianza, al 96%, para la media de la población.

      Datos: $X\in N(\mu;3)$, es decir, σ = 3; además, n = 30, $\bar{x}$ = 7, 1–α = 0.96. Por tanto:

$$1-\alpha = 0.96 \;\Rightarrow\; \alpha = 1-0.96 = 0.04 \;\Rightarrow\; \alpha/2 = 0.02 \;\Rightarrow\; 1-\frac{\alpha}{2} = 0.98$$

$$\Rightarrow\; z_{\alpha/2} = 2.055 \text{ (buscando en las tablas)}$$

      Sustituyendo en la fórmula conocida del intervalo de confianza de la media poblacional μ, lo que puede hacerse porque el tamaño muestral es mayor o igual que 30 y, adicionalmente, la población de origen es *Normal* (basta una de las dos condiciones):

$$\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\; \bar{x}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \left(7-2.055\frac{3}{\sqrt{30}}, 7+2.055\frac{3}{\sqrt{30}}\right) = (5.87,\ 8.13)$$

   b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra con la cual se estime la media, con un nivel de confianza del 99% y un error máximo admisible de 2?

$$1-\alpha = 0.99 \;\Rightarrow\; \alpha = 1-0.99 = 0.01 \;\Rightarrow\; \alpha/2 = 0.005 \;\Rightarrow\; 1-\frac{\alpha}{2} = 0.995$$

$$\Rightarrow\; z_{\alpha/2} = 2.575 \text{ (buscando en las tablas)}$$

      El error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Despejando:

$$E=\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E\sqrt{n}=z_{\alpha/2}\sigma \Rightarrow \sqrt{n}=\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{E} \Rightarrow n=\left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{E}\right)^2$$

O sea: $n=\left(\frac{2.575\cdot 3}{2}\right)^2$ = 14.92. Cuanto mayor es n, menor es el error (porque dividimos entre un número mayor). Por tanto, para garantizar que E es, como máximo, 2, debemos tomar, como mínimo n = 15.

3) Tomada una muestra aleatoria de 300 personas mayores de edad de una gran ciudad, se obtuvo que 105 habían votado a un determinado partido X. Halle, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo de confianza que permita estimar la proporción de votantes del partido X en esa ciudad.

Se trata de un intervalo de confianza para la proporción poblacional p. Nos dan la proporción muestral $\hat{p}=\frac{105}{300}$, el tamaño de la muestra $n = 300$ y el nivel de confianza 1–α = 0.90 ⇒ α = 1–0.9 = 0.1 ⇒ α/2 = 0.05 ⇒ $1-\frac{\alpha}{2}$ = 0.95 ⇒ $z_{\alpha/2}$ = 1.645. Sustituyendo en la fórmula del intervalo de confianza para proporciones, que puede usarse porque $n = 300 \geq 30$:

$$\left(\hat{p}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

Queda:

$$\left(\frac{105}{300}-1.645\sqrt{\frac{\frac{105}{300}\left(1-\frac{105}{300}\right)}{300}},\ \frac{105}{300}+1.645\sqrt{\frac{\frac{105}{300}\left(1-\frac{105}{300}\right)}{300}}\right)=(0.305,\ 0.395)$$

4) Se supone que la puntuación obtenida por cada uno de los tiradores participantes en la sede de Gádor de los “Juegos Mediterráneos Almería 2005”, es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica 6 puntos. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 36 que da una media de 35 puntos.

a) Obtenga un intervalo, con un 95% de confianza, para la puntuación media del total de tiradores.

Nos dicen: $X\in N(\mu;6)$, es decir, σ = 6; además, n = 36, $\bar{x}$ = 35. Y también:

$$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 1-0.95 = 0.05 \Rightarrow \alpha/2 = 0.025 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975$$

$$\Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96 \text{ (por las tablas)}$$

Entonces, el intervalo de confianza de la media poblacional μ, que puede usarse porque el tamaño muestral es mayor o igual que 30 y, adicionalmente, la población de origen es *Normal* (basta una de las dos condiciones), nos da:

$$\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\Rightarrow\left(35-1.96\frac{6}{\sqrt{36}}, 35+1.96\frac{6}{\sqrt{36}}\right)=(33.04,\ 36.96)$$

b) Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la puntuación media del total de tiradores, con un error inferior a 1 punto y con un nivel de confianza del 99%.

$$1-\alpha = 0.99 \;\Rightarrow\; \alpha = 1-0.99 = 0.01 \;\Rightarrow\; \alpha/2 = 0.005 \;\Rightarrow\; 1-\frac{\alpha}{2} = 0.995$$

$$\Rightarrow\; z_{\alpha/2} = 2.575 \text{ (según las tablas)}$$

El error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Despejando:

$$\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}} \le 1 \;\Rightarrow\; \sqrt{n} \ge z_{\alpha/2}\sigma \;\Rightarrow\; n \ge \left(z_{\alpha/2}\sigma\right)^2 \;\Rightarrow\; n \ge (2.575\cdot 6)^2 = 238.7025$$

Como el tamaño muestral n no puede tener decimales, debemos tomar, como mínimo $n = 239$.

5) Para estimar, por medio de un intervalo de confianza, la proporción p de individuos miopes de una población, se ha tomado una muestra de 80 individuos con la que se ha obtenido un porcentaje de individuos miopes del 35%. Determine, usando un nivel de confianza del 99%, el correspondiente intervalo de confianza para la proporción de miopes de toda la población.

Se trata de un intervalo de confianza para la proporción poblacional p. Podemos construirlo porque $n = 80 \ge 30$. Nos dan la proporción muestral $\hat{p} = 0.35$, el tamaño de la muestra $n = 80$ y el nivel de confianza $1-\alpha = 0.99 \;\Rightarrow\; z_{\alpha/2} = 2.575$. Sustituyendo en la fórmula del intervalo de confianza para proporciones, que puede usarse porque $n = 80 \ge 30$:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\;\; \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

Queda:

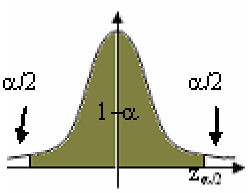
$$\left(0.35 - 2.575\sqrt{\frac{0.35(1-0.35)}{80}},\; 0.35 + 2.575\sqrt{\frac{0.35(1-0.35)}{80}}\right) = (0.213,\, 0.487)$$

6) (Selectividad 2005) En una población una variable aleatoria sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 2.

a) **(1 punto)** Observada una muestra de tamaño 400, tomada al azar, se ha obtenido una media muestral igual a 50. Calcule un intervalo, con el 97% de confianza, para la media de la población.

El intervalo de confianza para la media poblacional μ, que puede usarse porque el tamaño muestral es mayor o igual que 30 y, adicionalmente, la población de origen es *Normal* (basta una de las dos condiciones), es:

$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



Sabemos que $\sigma = 2$, $n = 400$, $\bar{x} = 50$. Nos piden que:

$$P\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0{,}97$$

Es decir, $1–\alpha = 0{,}97 \Rightarrow \alpha = 1–0{,}97 = 0{,}03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}015 \Rightarrow 1–\frac{\alpha}{2} = 0{,}985 \Rightarrow$ $z_{\alpha/2}$=2,17 (buscando en las tablas de la Normal). Luego el intervalo de confianza pedido es, sustituyendo:

$$50–2{,}17\frac{2}{\sqrt{400}} \le \mu \le 50+2{,}17\frac{2}{\sqrt{400}} \Leftrightarrow 50–2{,}17\frac{2}{20} \le \mu \le 50+2{,}17\frac{2}{20}$$

$$\Leftrightarrow 50–0{,}217 \le \mu \le 50+0{,}217 \Leftrightarrow 49{,}783 \le \mu \le 50{,}217$$

b) **(1 punto)** Con el mismo nivel de confianza, ¿qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que la amplitud del intervalo que se obtenga sea, como máximo, 1?

La amplitud es el doble del error máximo $E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Así:

$$2\cdot 2{,}17\frac{2}{\sqrt{n}} \le 1 \Leftrightarrow \frac{8{,}68}{\sqrt{n}} \le 1 \Leftrightarrow$$

Como la raíz es positiva, se puede pasar multiplicando al otro miembro sin que cambie el sentido de la desigualdad:

$$\Leftrightarrow 8{,}68 \le \sqrt{n} \Rightarrow \text{Elevando al cuadrado: } 75{,}3424 \le n$$

Es decir, $n \ge 76$ (no es posible que n valga 75,3424, pues es el tamaño de la muestra, que es un número natural, sin decimales).

7) (Selectividad 2006) **(2 puntos)** En una población, una variable aleatoria sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 9.
¿De qué tamaño, como mínimo, debe ser la muestra con la cual se estime la media poblacional con un nivel de confianza del 97% y un error máximo admisible igual a 3?

$$1–\alpha = 0.97 \Rightarrow \alpha = 1–0.97 = 0.03 \Rightarrow \alpha/2 = 0.015 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.985$$

$$\Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17 \text{ (según las tablas)}$$

El error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Despejando:

$$\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}} \le 3 \Rightarrow 3\sqrt{n} \ge z_{\alpha/2}\sigma \Rightarrow \sqrt{n} \ge \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{3} \Rightarrow n \ge \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{3}\right)^2$$

O sea: $n \ge \left(\frac{2.17\cdot 9}{3}\right)^2 = 42.3801$. El tamaño muestral debe ser un número natural. Cuanto mayor es n, menor es el error (pues en la expresión de E se está dividiendo entre un número mayor). Por tanto, para garantizar que E es como máximo 3, debemos tomar, como mínimo $n = 43$.

8) (Selectividad 2006) **(2 puntos)** Se ha lanzado un dado 400 veces y se ha obtenido 80 veces el valor cinco. Estime, mediante un intervalo de confianza al 95%, el valor de la probabilidad de obtener un cinco.
La probabilidad de obtener un 5 coincide con la proporción de veces que sale 5 en la población completa, es decir, en los infinitos lanzamientos teóricamente posibles del dado.

Se trata, entonces, de un intervalo de confianza para la proporción poblacional *p*. Nos dan la proporción muestral $\hat{p}$ =80/400 = 0.2, el tamaño de la muestra *n* = 400 y el nivel de confianza 1–α = 0.95 $\Rightarrow$ $z_{\alpha/2}$ = 1.96. Sustituyendo en la fórmula del intervalo de confianza para proporciones, utilizable porque n = 400 ≥ 30:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \ \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

Queda:

$$\left(0.2 - 1.96\sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{400}},\ 0.2 + 1.96\sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{400}}\right) = (0.1608,\ 0.2392)$$

9) (Selectividad 2006) a) **(1 punto)** Los valores:

52, 61, 58, 49, 53, 60, 68, 50, 53

Constituyen una muestra aleatoria de una variable aleatoria Normal, con desviación típica 6.

a) Obtenga un intervalo de confianza para la media de la población, con un nivel de confianza del 92%.

El intervalo de confianza para la media poblacional μ, que podemos usar porque, aunque n < 30, la población de origen es *Normal*, es:

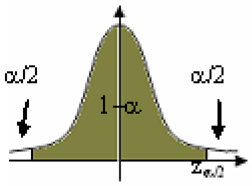
$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Sabemos que σ = 6, *n* = 9 y tendremos que calcular $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{52+61+58+49+53+60+68+50+53}{9} = 56$$

Las calculadoras científicas realizan este cálculo con sólo introducir los valores.
Nos piden que:

$$P\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0{,}92$$



Es decir, 1–α = 0,92 $\Rightarrow$ α = 1–0,92 = 0,08 $\Rightarrow$ $\frac{\alpha}{2}$ = 0,04

$\Rightarrow$ $1-\frac{\alpha}{2}$ = 0,96 Es decir, $z_{\alpha/2}$ es tal que $P(Z \le z_{\alpha/2})$=0,96 $\Rightarrow$ $z_{\alpha/2}$=1,75 (buscando en las tablas de la Normal). Luego el intervalo de confianza pedido es, sustituyendo:

$$56–1{,}75\frac{6}{\sqrt{9}} \le \ \mu \le \ 56+1{,}75\frac{6}{\sqrt{9}} \quad \Leftrightarrow \quad 56–1{,}76\cdot 2 \le \ \mu \le \ 56+1{,}75\cdot 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 56–3{,}5 \le \ \mu \le 56+3{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad 52{,}5 \le \ \mu \le 59{,}5$$

b) **(1 punto)** Se desea estimar la media poblacional de otra variable aleatoria Normal, con varianza 49, mediante la media de una muestra aleatoria. Obtenga el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo de la estimación, mediante un intervalo de confianza al 97%, sea menor o igual que 2.

$$1–\alpha = 0.97 \ \Rightarrow \ \alpha = 1–0.97 = 0.03 \ \Rightarrow \ \alpha/2 = 0.015 \ \Rightarrow \ 1-\frac{\alpha}{2} = 0.985 \ \Rightarrow$$

$$z_{\alpha/2} = 2.17 \text{ (según las tablas)}$$

El error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, donde σ es la desviación típica, es decir, la raíz cuadrada de la varianza, y como ésta vale 49, entonces σ = 7. Despejando:

$$\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}} \le 2 \;\Rightarrow\; \sqrt{n} \ge \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{2} \;\Rightarrow\; n \ge \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{2}\right)^2 \;\Rightarrow\; n \ge \left(\frac{2.17\cdot 7}{2}\right)^2 = 57.684025$$

Como n no puede tener decimales (es el tamaño de la muestra y no tendría sentido), el mínimo valor válido es $n = 58$.

10) (Selectividad 2006) **(2 puntos)** En una muestra aleatoria de 1000 personas de una ciudad, 400 votan a un determinado partido político.
Calcule un intervalo de confianza al 96% para la proporción de votantes de ese partido en la ciudad

Dicho intervalo es: $\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$. Es utilizable porque $n = 1000 \ge 30$.

Debe ser: 1–α = 0.96 ⇒ α = 1–0.96 = 0.04 ⇒ α/2 = 0.02 ⇒ $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.98$

$\Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.055$ (según las tablas)

Como $\hat{p} = \frac{400}{1000} = 0.4$ porque es la proporción muestral, y n = 1.000, el intervalo es:

$$\left(0.4 - 2.055\sqrt{\frac{0.4\cdot 0.6}{1000}},\ 0.4 + 2.055\sqrt{\frac{0.4\cdot 0.6}{1000}}\right) =$$

$$= \left(0.4 - 2.055\sqrt{\frac{0.4\cdot 0.6}{1000}},\ 0.4 + 2.055\sqrt{\frac{0.4\cdot 0.6}{1000}}\right) = (0.4\text{–}0.0318,\ 0.4+0.0318) =$$

$$= (0.3682,\ 0.4318)$$

11) (Selectividad 2007) En una muestra aleatoria de 256 individuos se ha obtenido una edad media de 17.4 años. Se sabe que la desviación típica de la población Normal de la que procede esa muestra es de 2 años.

a) **(1 punto)** Obtenga un intervalo de confianza al 95% para la edad media de la población.
El intervalo de confianza para la media poblacional es, que podemos usar porque $n = 256 \ge 30$ y la muestra, además, procede de una población *Normal* (bastaba sólo una de las dos condiciones):

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El nivel de confianza es 1 – α = 0,95 ⇒ α = 0,05 ⇒ α/2 = 0,025 ⇒ 1 – α/2 = 0,975 ⇒ Buscando en las tablas de la normal el valor tal que $P(z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 0{,}975$, resulta que $Z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Por tanto, el intervalo pedido es:

$$\left(17.4 - 1.96\frac{2}{\sqrt{256}},\ 17.4 + 1.96\frac{2}{\sqrt{256}}\right) = (17.155,\ 17.645)$$

b) **(1 punto)** ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el correspondiente intervalo de confianza, al 90%, tenga de amplitud a lo sumo 0.5?

La amplitud del intervalo de confianza es $2\,z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, que nos piden que sea, como máximo, 0,5.

El nivel de confianza es $1-\alpha=0{,}90 \Rightarrow \alpha=0{,}10 \Rightarrow \alpha/2=0{,}05 \Rightarrow 1-\alpha/2=0{,}95 \Rightarrow$ Buscando en las tablas de la normal el valor tal que $P(z\leq Z_{\alpha/2})=1-\alpha/2=0{,}95$, resulta que $Z_{\alpha/2}=1{,}645$. Entonces:

$$2\,z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=0{,}5 \quad\Rightarrow\quad 2\cdot1{,}645\cdot\frac{2}{\sqrt{n}}=0{,}5 \quad\Rightarrow\quad \frac{6{,}58}{0{,}5}=\sqrt{n} \quad\Rightarrow$$

$$n=13{,}16^2=173{,}1856$$

Este valor no es posible como tamaño muestral. A medida que n es mayor, la amplitud del intervalo es menor (en la fórmula de la amplitud del intervalo, n está en el denominador: si n es mayor, dividimos entre un número mayor, por lo que el resultado es más pequeño). Por tanto, el mínimo valor necesario es $n=174$.

12) **(Selectividad 2007)** En una granja avícola se ha tomado una muestra aleatoria de 200 polluelos de pato, entre los cuales se encontraron 120 hembras.

a) **(1.5 puntos)** Halle un intervalo de confianza, con un nivel del 98%, para la proporción de hembras entre estos polluelos.

Lo que hay que saberse es que el intervalo de confianza de nivel $1-\alpha$ para la proporción poblacional, siendo $\hat{p}$ la proporción muestral, es:

$$\left(\hat{p}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\;\; \hat{p}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

Y que podemos crearlo siempre que $n\geq30$, lo que se da en este caso, pues $n=200$. Por el enunciado, sabemos que $\hat{p}=120/200=3/5=0{,}6$ y que $n=200$. Además se tiene que $1-\hat{p}=0{,}4$.

El nivel de confianza es $1-\alpha=0{,}98 \Rightarrow \alpha=0{,}02 \Rightarrow \alpha/2=0{,}01 \Rightarrow 1-\alpha/2=0{,}99 \Rightarrow$ Buscando en las tablas de la normal el valor tal que $P(z\leq Z_{\alpha/2})=1-\alpha/2=0{,}99$, resulta que $Z_{\alpha/2}=2{,}33$. Por tanto, el intervalo pedido es:

$$\left(0.6-2.33\sqrt{\frac{0.6\cdot0.4}{200}},\;\; 0.6+2.33\sqrt{\frac{0.6\cdot0.4}{200}}\right)=(0.519,\,0.681)$$

b) **(0.5 puntos)** Razone, a la vista del intervalo encontrado, si a ese nivel de confianza puede admitirse que la verdadera proporción de hembras de pato en esa granja es 0.5.

La probabilidad de que el valor verdadero de p esté en el intervalo anterior es del 98%. Como 0.5 no pertenece al intervalo, concluiremos que no es admisible que sea el valor verdadero de la proporción de hembras, con el nivel de confianza mencionado.

13) (Selectividad 2007) Se sabe que las puntuaciones de un test siguen una ley Normal de media 36 y desviación típica 4.8.

a) **(1 punto)** Si se toma una muestra aleatoria de 16 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que la media de esta muestra sea superior a 35 puntos?

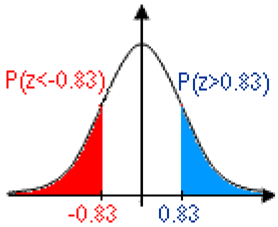
Nos piden $P(\bar{x}>35)$. Sabemos que, según el *Teorema Central del Límite*, si los datos proceden de una población *Normal* o la muestra es mayor o igual que 30 (esto no sucede, pero sí que la población es *Normal*), se tiene: $\bar{x} \in N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(36; \frac{4.8}{\sqrt{16}}\right) = N(36;\ 1.2)$. Tipificamos la normal, puesto que sabemos que si $X \in N(\mu;\sigma) \;\Rightarrow\; z = \frac{X-\mu}{\sigma} \in N(0;1)$:

$$P(\bar{x}>35) = P\left(\frac{\bar{x}-36}{1.2} > \frac{35-36}{1.2}\right) = P(z > -0.83) =$$

Según la probabilidad del suceso contrario:

$$= 1 - P(z \leq -0.83) =$$

Como la gráfica de la función de densidad de la $N(0;\ 1)$ es simétrica respecto al eje OY (ver gráfico):



$$= 1 - P(z > 0.83) =$$

Usando, nuevamente, la probabilidad del suceso contrario:

$$= 1 - [1 - P(z \leq 0.83)] = P(z \leq 0.83) = 0.7967$$

valor que hemos encontrado en las tablas de la N(0;1).

b) **(1 punto)** ¿Qué porcentaje de muestras de tamaño 25 tiene una media muestral comprendida entre 34 y 36?

Consiste en multiplicar por 100 el valor $P(34 \leq \bar{x} \leq 36)$. En este caso, $\bar{x} \in N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(36; \frac{4.8}{\sqrt{25}}\right) = N(36;\ 0.96)$. Tipificando:

$$P(34 \leq \bar{x} \leq 36) = P\left(\frac{34-36}{0.96} \leq z \leq \frac{36-36}{0.96}\right) = P(-2.08 \leq z \leq 0) =$$

$$= P(z \leq 0) - P(z < -2.08) =$$

Por la simetría de la Normal y, en el paso siguiente, por la probabilidad del suceso contrario:

$$= 0.5 - P(z > 2.08) = 0.5 - [1 - P(z \leq 2.08)] = -0.5 + 0.9812 = 0.4812$$

14) **(Selectividad 2007)** Se sabe que (45.13, 51.03) es un intervalo de confianza, al 95%, para la media de una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica 15.

a) **(0.5 puntos)** ¿Cuál es el error cometido?

La amplitud del intervalo de confianza es el doble del error. Por tanto

$$E = \frac{51.03 - 45.13}{2} = 2.95$$

No se nos pide, pero señalemos que el centro del intervalo es la media de la muestra usada para construirlo:

$$\bar{x} = \frac{51.03 + 45.13}{2} = 48.08$$

b) **(1.5 puntos)** Calcule, con el mismo nivel de confianza, el tamaño muestral mínimo necesario para que el error no sea superior a 1.8.

$$z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le 1.8 \;\Rightarrow\; n \ge \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{1.8}\right)^2$$

El nivel de confianza es del 95% $\Rightarrow$ 1 – α = 0,95 $\Rightarrow$ α = 0,05 $\Rightarrow$ α/2 = 0,025 $\Rightarrow$ 1 – α/2 = 0,975 $\Rightarrow$ Buscando en las tablas de la normal el valor tal que $P(z\le Z_{\alpha/2}) = 1-\alpha/2 = 0{,}975$, resulta que $Z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Por tanto:

$$n \ge \left(\frac{1.96\cdot 15}{1.8}\right)^2 = 266.78 \;\Rightarrow\; n = 267$$

Pues no podemos tener un tamaño muestral con decimales.

15) (Selectividad 2008) El número de días de permanencia de los enfermos en un hospital sigue una ley Normal de media μ días y desviación típica 3 días.

a) **(1 punto)** Determine un intervalo de confianza para estimar μ, a un nivel del 97%, con una muestra aleatoria de 100 enfermos cuya media es 8.1 días.

El intervalo de confianza para la media poblacional, que podremos construir siempre que la población de partida sea *Normal*, lo que se da en este caso, o que la muestra sea de tamaño mayor o igual que 30, que también se cumple, es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\; \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El nivel de confianza es del 97%, por lo que: 1 – α = 0,97 $\Rightarrow$ α = 0,03 $\Rightarrow$ α/2 = 0,015 $\Rightarrow$ 1 – α/2 = 0,985 $\Rightarrow$ Buscando en las tablas de la normal el valor tal que $P(z \le Z_{\alpha/2}) = 1-\alpha/2 = 0{,}985$, resulta que $Z_{\alpha/2} = 2{,}17$. Por tanto, el intervalo pedido es:

$$\left(8.1 - 2.17\frac{3}{\sqrt{100}},\; 8.1 + 2.17\frac{3}{\sqrt{100}}\right) = \boxed{(7.449,\ 8.751)}$$

b) **(1 punto)** ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria para poder estimar μ con un error máximo de 1 día y un nivel de confianza del 92%?

El error máximo al estimar mediante un intervalo de confianza la media poblacional es $z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Y nos piden que sea, como máximo, 1.

El nivel de confianza es del 92%, es decir: 1 – α = 0.92 $\Rightarrow$ α = 0.08 $\Rightarrow$ α/2 = 0,04 $\Rightarrow$ 1 – α/2 = 0,96 $\Rightarrow$ Buscando en las tablas de la normal el valor tal que $P(z \le Z_{\alpha/2}) = 1-\alpha/2 = 0{,}96$, resulta que $Z_{\alpha/2} = 1.75$. Entonces:

$$z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le 1 \;\Rightarrow\; 1.75\cdot\frac{3}{\sqrt{n}} \le 1 \;\Rightarrow\; \frac{5{,}25}{1} \le \sqrt{n} \;\Rightarrow$$

$$n \ge 5.25^2 = 27{,}56$$

Este valor no es posible como tamaño muestral. Como n tiene que ser mayor o igual que dicho valor, el mínimo valor válido es $\boxed{n = 28}$.

16) (Selectividad 2008) Sea la población {1, 2, 3, 4}.

a) **(1 punto)** Construya todas las muestras posibles de tamaño 2, mediante muestreo aleatorio simple.

El muestreo aleatorio simple, según el documento de orientación elaborado por la Coordinación de la asignatura, se entiende siempre con reemplazamiento. Por tanto, consiste en formar todos los grupos posibles de 2 elementos con los 4 disponibles, teniendo en cuenta que, cada vez, elegimos el primero de los dos y, a continuación, lo reemplazamos, es decir, vuelve a estar disponible para cuando elijamos el segundo. Por lo tanto, los elementos que componen la muestra pueden estar repetidos. Influye, además, el orden de la elección, por lo que no es lo mismo la muestra {1, 2} que la {2, 1}.

El número de muestras posibles de tamaño 2 con los 4 elementos disponibles nos lo da el número de variaciones con repetición de 4 elementos tomados de 2 en 2 (se pueden repetir elementos en el mismo grupo, y un grupo se puede distinguir de otro por el orden de sus elementos). Esto es $VR_{4,\,2} = 4^2 = 16$. Y si la muestra formada por el elemento 1 en primer lugar y el 2 en segundo la designamos por 12, las muestras posibles son las siguientes:

11, 12, 13, 14,   21, 22, 23, 24,   31, 32, 33, 34,   41, 42, 43, 44

b) **(1 punto)** Calcule la varianza de las medias muestrales.

Lo primero es calcular la media de cada una de las muestras. Para cada una, se obtiene sumando sus dos elementos y dividiendo el resultado entre 2. Los resultados son:

1, 1.5, 2, 2.5,   1.5, 2, 2.5, 3,   2, 2.5, 3, 3.5,   2.5, 3, 3.5, 4

Obtenemos la media de la muestra:

$$\bar{x} = \frac{1+1.5+2+2.5+1.5+2+2.5+3+2+2.5+3+3.5+2.5+3+3.5+4}{16} = 2.5$$

La varianza (cuadrado de la desviación típica) es:

$$\boxed{s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - \bar{x}^2 = \frac{1^2+1.5^2+2^2+\ldots+4^2}{16} - 2.5^2 = \frac{110}{16} - 2.5^2 = 0.625}$$

Dos puntualizaciones:

En primer lugar, los resultados podrían haberse agrupado. Por ejemplo, 1.5 aparece 2 veces, 2 aparece 3, etc. Se simplifica la suma de los numeradores. En la media, sería: 1 + 1.5·2 + 2·3 + 2.5·4 +… Y análogamente para la varianza.

En segundo lugar, para obtener los cálculos es más fácil y fiable utilizar el modo estadística de la calculadora. Hay que indicar el modo de obtener los resultados cuando se usa la calculadora, y eso hemos hecho en este texto; pero los resultados han sido obtenidos en modo estadística.

Para introducir los datos en la **calculadora en *modo estadística***, comentamos los métodos de las calculadoras más usuales.

En las **calculadoras básicas**, entramos en *modo estadística* pulsando *Mode* y eligiendo *SD*. Escribimos cada dato y pulsamos *M+* (la pantalla nos va mostrando el total de datos introducidos *n*). Si los datos están agrupados, podemos introducir el dato junto con su frecuencia, es decir, el número de veces que aparece. Y lo hacemos escribiendo el dato, pulsando "*Shift*" "," (aparece ; en pantalla) y la frecuencia, terminando pulsando *M+*. Al introducir el último dato, comprobar que n vale lo que debe y no olvidar pulsar *AC* antes de ninguna otra coas (esto es muy importante).

Podemos revisar los datos introducidos pulsando flecha abajo sucesivamente. No es mala idea hacerlo.

Pulsando *Shift 2* podemos obtener $\bar{x}$ y la desviación típica, que vendrá como σ, σ_n, ó $x\sigma n$. No confundir con s, σ_{n-1}, ó $x\sigma n{-}1$, que es la *cuasi-desviación* *típica*, que no usaremos nunca en estos problemas. Si necesitamos la *varianza*, habrá que elevar al cuadrado la *desviación típica*. El valor de n está en *Shift 1*. Por último, no olvidar *salir del modo estadística pulsando Mode COMP*.

En las **calculadoras *Natural Display***, primeramente hacemos que nos muestre la columna de frecuencias, pulsando *Shift SETUP STAT FREQUENCY-ON*. Entramos en modo estadística: *MODE STAT 1-VAR*. Introducimos los datos en la primera columna y dejamos la frecuencia de cada uno de ellos en uno o la cambiamos si es necesario. Tras cada dato, hay que pulsar =.
Es buena idea revisar los datos introducidos.
No olvidar pulsar AC tras introducir el último dato (muy importante).
Con *Shift STAT* podemos:

- Eligiendo *Data*, volver a ver los datos.
- Eligiendo *Sum*, revisar el valor de n (entre otras cosas).
- Eligiendo *Var*, consultar cuánto vale la media $\bar{x}$ y la desviación típica, que vendrá como σ, σ_n, ó $x\sigma n$. No confundir con s, σ_{n-1}, ó $x\sigma n{-}1$, que es la *cuasi-desviación típica*, que no usaremos nunca en estos problemas.

Si necesitamos la *varianza*, habrá que elevar al cuadrado la *desviación típica*.
Por último, no olvidar *salir del modo estadística pulsando Mode COMP*.