12 INFERENCIA ESTADÍSTICA. ESTIMACIÓN DE LA MEDIA

Páginas 274-275

Lanzamiento de varios dados

■ **Comprobación de que:**

Desviación típica de n dados = (Desv. típica para un dado) / $\sqrt{n}$

$n = 2 \rightarrow \dfrac{1,71}{\sqrt{2}} \simeq 1,21$

$n = 3 \rightarrow \dfrac{1,71}{\sqrt{3}} \simeq 0,98$

$n = 4 \rightarrow \dfrac{1,71}{\sqrt{4}} = \dfrac{1,71}{2} \simeq 0,86$

■ **Justificación de las afirmaciones mirando la gráfica:**

— Observamos que, al aumentar el número de dados, n, la forma de la curva se parece cada vez más a la de la normal.

— Son todas curvas simétricas. La media de todas ellas coincide, 3,5.

— A medida que aumenta n, hay más resultados en la parte central (próxima a la media) y menos en los extremos; por tanto, menor es la desviación típica.

Página 277

1. Halla las siguientes probabilidades en una distribución $N(0, 1)$:

a) $P[z > 2,8]$ **b) $P[z \le -1,8]$** **c) $P[z > -1,8]$**

d) $P[1,62 \le z < 2,3]$ **e) $P[1 \le z \le 2]$** **f) $P[-0,61 \le z \le 1,4]$**

g) $P[-1 \le z \le 2]$ **h) $P[-2,3 < z < -1,7]$** **i) $P[-2 \le z \le -1]$**

a) $P[z > 2,8] = 1 - P[z \le 2,8] = 1 - 0,9974 = 0,0026$

b) $P[z \le -1,8] = P[z \ge 1,8] = 1 - P[z < 1,8] = 1 - 0,9641 = 0,0359$

c) $P[z > -1,8] = P[z < 1,8] = 0,9641$

d) $P[1,62 \le z < 2,3] = P[z < 2,3] - P[z \le 1,62] = 0,9893 - 0,9474 = 0,0419$

e) $P[1 \le z \le 2] = P[z \le 2] - P[z \le 1] = 0,9772 - 0,8413 = 0,1359$

f) $P[-0,61 \le z \le 1,4] = P[z \le 1,4] - P[z \le -0,61] = P[z \le 1,4] - P[z \ge 0,61] =$

$= P[z \le 1,4] - (1 - P[z \le 0,61]) = 0,9192 - (1 - 0,7291) = 0,6483$

g) $P[-1 \le z \le 2] = P[z \le 2] - P[z \le -1] = P[z \le 2] - P[z \ge 1] =$

$= P[z \le 2] - (1 - P[z \le 1]) = 0{,}9772 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}8185$

h) $P[-2{,}3 < z < -1{,}7] = P[1{,}7 < z < 2{,}3] = P[z < 2{,}3] - P[z < 1{,}7] =$

$= 0{,}9893 - 0{,}9554 = 0{,}0339$

i) $P[-2 \le z \le -1] = P[1 \le z \le 2] = P]z \le 2] - P[z \le 1] = 0{,}9772 - 0{,}8413 = 0{,}1359$

2. Calcula el valor de *k* (exacta o aproximadamente) en cada uno de los siguientes casos:

a) $P[z \le k] = 0{,}5$ **b)** $P[z \le k] = 0{,}8729$

c) $P[z \le k] = 0{,}9$ **d)** $P[z \le k] = 0{,}33$

e) $P[z \le k] = 0{,}2$ **f)** $P[z > k] = 0{,}12$

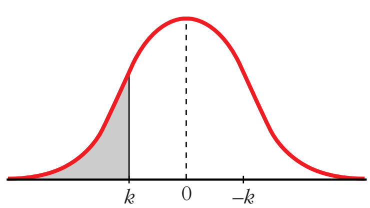
g) $P[z \ge k] = 0{,}9971$ **h)** $P[z \ge k] = 0{,}6$

a) $P[z \le k] = 0{,}5 \rightarrow k = 0$

b) $P[z \le k] = 0{,}8729 \rightarrow k = 1{,}14$

c) $P[z \le k] = 0{,}9 \rightarrow k \approx 1{,}28$

d) $P[z \le k] = 0{,}33$



$P[z \ge -k] = 0{,}33 \rightarrow P[z \le -k] = 1 - 0{,}33 = 0{,}67$

$\rightarrow -k = 0{,}44 \rightarrow k = -0{,}44$

e) $P[z \le k] = 0{,}2$

$P[z \le -k] = 1 - 0{,}2 = 0{,}8 \rightarrow -k \approx 0{,}84 \rightarrow k \approx -0{,}84$

f) $P[z > k] = 0{,}12$

$P[z \le k] = 1 - 0{,}12 = 0{,}88 \rightarrow k \approx 1{,}175$

g) $P[z \ge k] = 0{,}9971$

$P[z \le -k] = 0{,}9971 \rightarrow -k = 2{,}76 \rightarrow k = -2{,}76$

h) $P[z \ge k] = 0{,}6$

$P[z \le -k] = 0{,}6 \rightarrow -k \approx 0{,}25 \rightarrow k \approx -0{,}25$

Página 278

3. **En una distribución $N(18, 4)$, halla las siguientes probabilidades:**

a) $P[x \le 20]$ **b)** $P[x \ge 16{,}5]$ **c)** $P[x \le 11]$

d) $P[19 \le x \le 23]$ **e)** $P[11 \le x < 25]$

a) $P[x \le 20] = P\left[z \le \dfrac{20-18}{4}\right] = P[z \le 0{,}5] = 0{,}6915$

b) $P[x \ge 16{,}5] = P\left[z \ge \dfrac{16{,}5-18}{4}\right] = P[z \ge -0{,}38] = P[z \le 0{,}38] = 0{,}6480$

c) $P[x \le 11] = P\left[z \le \dfrac{11-18}{4}\right] = P[z \le -1{,}75] = P[z \ge 1{,}75] = 1 - P[z \le 1{,}75] =$

$= 1 - 0{,}9599 = 0{,}0401$

d) $P[19 \le x \le 23] = P\left[\dfrac{19-18}{4} \le z \le \dfrac{23-18}{4}\right] = P[0{,}25 \le z \le 1{,}25] =$

$= P[z \le 1{,}25] - P[z \le 0{,}25] = 0{,}8944 - 0{,}5987 = 0{,}2957$

e) $P[11 \le x < 25] = P\left[\dfrac{11-18}{4} \le z \le \dfrac{25-18}{4}\right] = P[-1{,}75 \le z \le 1{,}75] =$

$= P[z \le 1{,}75] - P[z \le -1{,}75] = P[z \le 1{,}75] - P[z \ge 1{,}75] =$

$= 2P[z \le 1{,}75] - 1 = 2 \cdot 0{,}9599 - 1 = 0{,}9198$

4. **En una distribución $N(6; 0{,}9)$, calcula k para que se den las siguientes igualdades:**

a) $P[x \le k] = 0{,}9772$ **b)** $P[x \le k] = 0{,}8$

c) $P[x \le k] = 0{,}3$ **d)** $P[x \ge k] = 0{,}6331$

a) $P[x \le k] = 0{,}9772$

$P[x \le k] = P\left[z \le \dfrac{k-6}{0{,}9}\right] = 0{,}9772 \;\rightarrow\; \dfrac{k-6}{0{,}9} = 2 \;\rightarrow\; k = 7{,}8$

b) $P[x \le k] = 0{,}8$

$P[x \le k] = P\left[z \le \dfrac{k-6}{0{,}9}\right] = 0{,}8 \;\rightarrow\; \dfrac{k-6}{0{,}9} \approx 0{,}84 \;\rightarrow\; k \approx 6{,}756$

c) $P[x \le k] = 0{,}3$

$P[x \le k] = P\left[z \le \dfrac{k-6}{0{,}9}\right] = 0{,}3 \;\rightarrow\; -\left(\dfrac{k-6}{0{,}9}\right) \approx 0{,}52 \;\rightarrow\; k \approx 5{,}532$

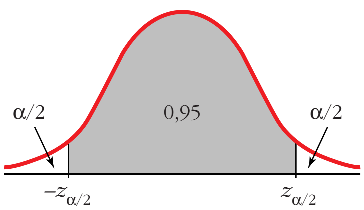
d) $P[x \ge k] = 0{,}6331$

$P[x \ge k] = P\left[z \ge \dfrac{k-6}{0{,}9}\right] = 0{,}6331 \;\rightarrow\; -\left(\dfrac{k-6}{0{,}9}\right) = 0{,}34 \;\rightarrow\; k = 5{,}694$

Página 280

1. Calcula razonadamente los valores críticos correspondientes a las probabilidades 0,95 y 0,99.

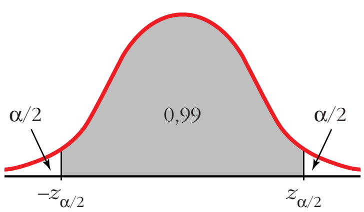
- Para una probabilidad de 0,95:



$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1-0{,}95}{2} = 0{,}025; \quad 0{,}95 + 0{,}025 = 0{,}975$$

$$P[z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}975 \quad \to \quad z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

- Para una probabilidad de 0,99:



$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1-0{,}99}{2} = 0{,}005; \quad 0{,}99 + 0{,}005 = 0{,}995$$

$$P[z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}995 \quad \to \quad z_{\alpha/2} = 2{,}575$$

2. Calcula los valores críticos correspondientes:

a) α **= 0,09** **b)** α **= 0,21** **c)** α **= 0,002**

a) $\alpha = 0{,}09 \quad \to \quad 1 - \alpha = 0{,}91$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}09}{2} = 0{,}045; \quad 0{,}91 + 0{,}045 = 0{,}955$$

$$P[z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}955 \quad \to \quad z_{\alpha/2} \approx 1{,}70$$

b) $\alpha = 0{,}21 \quad \to \quad 1 - \alpha = 0{,}79$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}21}{2} = 0{,}105; \quad 0{,}79 + 0{,}105 = 0{,}895$$

$$P[z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}895 \quad \to \quad z_{\alpha/2} \approx 1{,}25$$

c) $\alpha = 0{,}002 \quad \to \quad 1 - \alpha = 0{,}998$

$$\frac{\alpha}{2} = 0{,}001; \quad 0{,}998 + 0{,}001 = 0{,}999$$

$$P[z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}999 \quad \to \quad z_{\alpha/2} = 3{,}08$$

Página 281

3. En una distribución $N(173, 6)$ halla los intervalos característicos para el 90%, el 95% y el 99%.

Para el 90%: $(173 - 1{,}645 \cdot 6;\ 173 + 1{,}645 \cdot 6) = (163{,}13;\ 182{,}87)$

Para el 95%: $(173 - 1{,}96 \cdot 6;\ 173 + 1{,}96 \cdot 6) = (161{,}24;\ 184{,}76)$

Para el 99%: $(173 - 2{,}575 \cdot 6;\ 173 + 2{,}575 \cdot 6) = (157{,}55;\ 188{,}45)$

4. En una distribución $N(18, 4)$ halla los intervalos característicos para el 95% y el 99,8%.

Para el 95%: $(18 - 1{,}96 \cdot 4;\ 18 + 1{,}96 \cdot 4) = (10{,}16;\ 25{,}84)$

Para el 99,8%: $1 - \alpha = 0{,}998 \ \rightarrow\ \alpha = 0{,}002 \ \rightarrow\ \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}001$

$0{,}998 + 0{,}001 = 0{,}999 \ \rightarrow\ z_{\alpha/2} = 3{,}08$

$(18 - 3{,}08 \cdot 4;\ 18 + 3{,}08 \cdot 4) = (5{,}68;\ 30{,}32)$

Página 283

1. Los parámetros de una variable son: $\mu = 16{,}4$, $\sigma = 4{,}8$. Nos disponemos a extraer una muestra de $n = 400$ individuos:

a) Halla el intervalo característico para las medias muestrales correspondientes a una probabilidad $p = 0{,}99$.

b) Calcula $P[16 < \bar{x} < 17]$.

Como $n > 30$, las medias muestrales se distribuyen según una normal de media $\mu = 16{,}4$ y de desviación típica $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{4{,}8}{\sqrt{400}} = \dfrac{4{,}8}{20} = 0{,}24$; es decir:

$\bar{x}$ es $N(16{,}4;\ 0{,}24)$

a) Para $p = 0{,}99 \ \rightarrow\ z_{\alpha/2} = 2{,}575$

El intervalo característico es:

$(16{,}4 - 2{,}575 \cdot 0{,}24;\ 16{,}4 + 2{,}575 \cdot 0{,}24)$; es decir: $(15{,}78;\ 17{,}02)$

b) $P[16 < \bar{x} < 17] = P\left[\dfrac{16 - 16{,}4}{0{,}24} < z < \dfrac{17 - 16{,}4}{0{,}24}\right] = P[-1{,}67 < z < 2{,}5] =$

$= P[z < 2{,}5] - P[z < -1{,}67] = P[z < 2{,}5] - P[z > 1{,}67] =$

$= P[z < 2{,}5] - (1 - P[z \le 1{,}67]) = 0{,}9938 - (1 - 0{,}9525) = 0{,}9463$

2. **Los sueldos, en euros, de los empleados de una fábrica se distribuyen $N(1\,200, 400)$. Se elige al azar una muestra de 25 de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de sus sueldos sea superior a 35 000 €?**

Halla el intervalo característico para las sumas de 25 individuos, correspondientes a una probabilidad del 0,9.

La suma de los sueldos sigue una distribución normal de media $n\mu = 25 \cdot 1\,200 = 30\,000$ € y de desviación típica $\sigma\sqrt{n} = 400 \cdot \sqrt{25} = 400 \cdot 5 = 2\,000$ €; es decir:

Σx es $N(30\,000;\ 2\,000)$

Por tanto:

$$P[\Sigma x > 35\,000] = P\left[z > \frac{35\,000 - 30\,000}{2\,000}\right] = P[z > 2{,}5] =$$
$$= 1 - P[z \le 2{,}5] = 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062$$

Intervalo característico:

Para una probabilidad del 0,9 es:

$(30\,000 - 1{,}645 \cdot 2\,000;\ 30\,000 + 1{,}645 \cdot 2\,000)$; es decir: $(26\,710;\ 33\,290)$

Página 287

1. **De una variable estadística conocemos la desviación típica, $\sigma = 8$, pero desconocemos la media, μ. Para estimarla, extraemos una muestra de tamaño $n = 60$ cuya media obtenemos: $\bar{x} = 37$. Estima μ mediante un intervalo de confianza del 99%.**

Para un nivel de confianza del 99% tenemos que $z_{\alpha/2} = 2{,}575$.

El intervalo de confianza para μ será:

$$\left(37 - 2{,}575 \cdot \frac{8}{\sqrt{60}};\ 37 + 2{,}575 \cdot \frac{8}{\sqrt{60}}\right);\ \text{es decir, } (34{,}34;\ 39{,}66)$$

Por tanto, tenemos una confianza del 99% de que μ esté comprendida entre 34,34 y 39,66.

Página 288

1. **La desviación típica de las estaturas de los soldados es de 5,3 cm.**

¿Qué tamaño ha de tener la muestra para estimar la estatura media, μ, de la población con un error menor de 0,5 cm y con un nivel de confianza del 95%?

Para un nivel de confianza del 95% ($\alpha = 0{,}05$), tenemos que $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. El error máximo admisible es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Queremos que $E < 0{,}5$ cm. Despejamos n:

$$1{,}96 \cdot \frac{5{,}3}{\sqrt{n}} < 0{,}5 \quad \to \quad \sqrt{n} > \frac{1{,}96 \cdot 5{,}3}{0{,}5} = 20{,}776 \quad \to \quad n > 431{,}64$$

La muestra ha de ser de, al menos, 432 soldados.

Página 289

2. Sabemos que la desviación típica de los pesos de los pollos adultos es 300 g. Queremos estimar el peso medio de los pollos adultos de una granja con un error menor que 100 g y para ello tomamos una muestra de 50 individuos. ¿Con qué nivel de confianza podremos realizar la estimación?

Despejamos $z_{\alpha/2}$ en la fórmula del error:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \to \quad 100 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{300}{\sqrt{50}} \quad \to \quad z_{\alpha/2} = \frac{100 \cdot \sqrt{50}}{300} \quad \to \quad z_{\alpha/2} = 2{,}36$$

Hallamos el nivel de confianza:

$$P[z < z_{\alpha/2}] = P[z < 2{,}36] = 0{,}9909$$

$$\frac{\alpha}{2} = P[z \geq 2{,}36] = 1 - 0{,}9909 = 0{,}0091$$

$$\alpha = 2 \cdot 0{,}091 = 0{,}0182 \quad \to \quad 1 - \alpha = 0{,}9818$$

El nivel de confianza es del 98,18%.

Páginas 294

Intervalos característicos

Distribución de medias y proporciones muestrales

1 En las distribuciones normales cuyos parámetros se dan, halla el intervalo característico que en cada caso se indica:

	a)	b)	c)	d)	e)
MEDIA, μ	0	0	0	0	112
DESV. TÍPICA, σ	1	1	1	1	15
PROBAB. $1 - \alpha$	95	99	90	80	95

	f)	g)	h)	i)
MEDIA, μ	3 512	3 512	3 512	3 512
DESV. TÍPICA, σ	550	550	550	550
PROBAB. $1 - \alpha$	99	95	90	80

El intervalo característico es de la forma:

$$(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma;\ \mu + z_{\alpha/2} \cdot \sigma)$$

a) $z_{\alpha/2} = 1{,}96$; $\mu = 0$; $\sigma = 1$

Intervalo $(-1{,}96;\ 1{,}96)$

b) $z_{\alpha/2} = 2{,}575$; $\mu = 0$; $\sigma = 1$

Intervalo $(-2{,}575;\ 2{,}575)$

c) $z_{\alpha/2} = 1{,}645$; $\mu = 0$; $\sigma = 1$

Intervalo $(-1{,}645;\ 1{,}645)$

d) $z_{\alpha/2} = 1{,}28$; $\mu = 0$; $\sigma = 1$

Intervalo $(-1{,}28;\ 1{,}28)$

e) $z_{\alpha/2} = 1{,}96$; $\mu = 112$; $\sigma = 15$

Intervalo $(82{,}6;\ 141{,}4)$

f) $z_{\alpha/2} = 2{,}575$; $\mu = 3\,512$; $\sigma = 550$

Intervalo $(2\,095{,}75;\ 4\,928{,}25)$

g) $z_{\alpha/2} = 1{,}96$; $\mu = 3\,512$; $\sigma = 550$

Intervalo $(2\,434;\ 4\,590)$

h) $z_{\alpha/2} = 1{,}645$; $\mu = 3\,512$; $\sigma = 550$

Intervalo $(2\,607{,}25;\ 4\,416{,}75)$

i) $z_{\alpha/2} = 1{,}28$; $\mu = 3\,512$; $\sigma = 550$

Intervalo $(2\,808;\ 4\,216)$

2 **En una distribución normal con media $\mu = 25$ y desviación típica $\sigma = 5{,}3$; obtén un intervalo centrado en la media, $(\mu - k, \mu + k)$, de forma que el 95% de los individuos estén en ese intervalo.**

El intervalo será de la forma:

$$(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma;\ \mu + z_{\alpha/2} \cdot \sigma)$$

Como $1 - \alpha = 0{,}95$, entonces $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Así, el intervalo será:

$(25 - 1{,}96 \cdot 5{,}3;\ 25 + 1{,}96 \cdot 5{,}3)$; es decir: $(14{,}612;\ 35{,}388)$

3 **En una distribución $N(10, 4)$, obtén un intervalo centrado en la media $(\mu - k, \mu + k)$, tal que:**

$$P[\mu - k < x < \mu + k] = 0{,}90$$

El intervalo será de la forma:

$$(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma;\ \mu + z_{\alpha/2} \cdot \sigma)$$

Como $1 - \alpha = 0{,}90$, entonces $z_{\alpha/2} = 1{,}645$. Así, el intervalo será:

$(10 - 1{,}645 \cdot 4;\ 10 + 1{,}645 \cdot 4)$; es decir: $(3{,}42;\ 16{,}58)$

4 **En una distribución normal de media $\mu = 9{,}5$ y varianza $\sigma^2 = 1{,}44$, halla el intervalo característico para el 99%.**

Para el 99% $\to$ $1 - \alpha = 0{,}99$ $\to$ $z_{\alpha/2} = 2{,}575$

El intervalo será de la forma:

$$(\mu - 2{,}575 \cdot \sigma, \mu + 2{,}575 \cdot \sigma)$$

En este caso, como $\mu = 9{,}5$ y $\sigma = \sqrt{1{,}44} = 1{,}2$, queda:

$$(9{,}5 - 2{,}575 \cdot 1{,}2;\ 9{,}5 + 2{,}575 \cdot 1{,}2), \text{ es decir: } (6{,}41;\ 12{,}59)$$

Teorema central del límite

5 **De una variable aleatoria x de distribución desconocida, media $\mu = 23$ y desviación típica $\sigma = 3{,}5$ se extraen muestras de tamaño n. ¿Qué se puede decir de la distribución de las medias muestrales, $\bar{x}$:**

a) en el caso de que $n = 49$?

b) en el caso de que $n = 25$?

a) Por el teorema central del límite, como $n = 49 > 30$, sabemos que $\bar{x}$ se distribuye según una normal de media $\mu = 23$ y de desviación típica

$\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{3{,}5}{\sqrt{49}} = \dfrac{3{,}5}{7} = 0{,}5$; es decir, $\bar{x}$ es $N(23;\ 0{,}5)$.

b) Como $n = 25 < 30$, solo podemos decir que $\bar{x}$ se distribuye con media $\mu = 23$ y desviación típica $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{3{,}5}{\sqrt{25}} = \dfrac{3{,}5}{5} = 0{,}7$. Si la población de partida, x, fuera normal, entonces $\bar{x}$ también sería normal.

6 **Una variable aleatoria x se distribuye normal $N(120, 30)$. ¿Qué se puede afirmar de la distribución de las medias $\bar{x}$ de las muestras de tamaño n:**

a) si $n = 36$? **b) si $n = 16$?**

Como la población de partida es normal, $N(120, 130)$, por el teorema central del límite, sabemos que $\bar{x}$ es $N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ para cualquier valor de n. Por tanto:

a) Si $n = 36$, $\bar{x}$ es normal con $\mu = 120$; $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{30}{\sqrt{36}} = \dfrac{30}{6} = 5$; es decir, $\bar{x}$ es $N(120, 5)$.

b) Si $n = 16$, $\bar{x}$ es normal con $\mu = 120$; $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{30}{\sqrt{16}} = \dfrac{30}{4} = 7{,}5$; es decir, $\bar{x}$ es $N(120, 7{,}5)$.

7 **Di cómo se distribuyen las medias muestrales en cada uno de los siguienes casos:**

		a)	b)	c)
POBLACIÓN	DISTRIBUCIÓN	Normal	Desc.	Normal
	MEDIA, μ	20	20	3,75
	DESV. TÍPICA, σ	4	4	1,2
TAM. MUESTRA, n		16	100	4

		d)	e)	f)	g)
POBLACIÓN	DISTRIBUCIÓN	Desc.	Norm.	Desc.	Desc.
	MEDIA, μ	3,75	112	112	3 512
	DESV. TÍPICA, σ	1,2	15	15	550
TAM. MUESTRA, n		50	100	100	40

Recordemos que si la población se distribuye según una normal $N(\mu, \sigma)$, o bien seleccionamos una muestra de tamaño $n \geq 30$ en una población cualquiera (no necesariamente normal) con media μ y desviación típica σ, entonces, las medias muestrales siguen una distribución $N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Aplicamos este resultado en cada uno de los casos propuestos:

a) $N\left(20, \dfrac{4}{\sqrt{16}}\right)$; es decir, $N(20, 1)$

b) $N\left(20, \dfrac{4}{\sqrt{100}}\right)$; es decir, $N(20; 0,4)$

c) $N\left(3,75; \dfrac{1,2}{\sqrt{4}}\right)$; es decir, $N(3,75; 0,6)$

d) $N\left(3,75; \dfrac{1,2}{\sqrt{50}}\right)$; es decir, $N(3,75; 0,17)$

e) $N\left(112, \dfrac{15}{\sqrt{100}}\right)$; es decir, $N(112; 1,5)$

f) $N\left(112, \dfrac{15}{\sqrt{100}}\right)$; es decir, $N(112; 1,5)$

g) $N\left(3\,512, \dfrac{550}{\sqrt{40}}\right)$; es decir, $N(3\,512; 86,96)$

8 **Una variable aleatoria se distribuye $N(\mu, \sigma)$. Si se extraen muestras de tamaño n:**

a) ¿Qué distribución tiene la variable aleatoria media muestral, $\bar{x}$?

b) Si se toman muestras de tamaño $n = 4$ de una variable aleatoria x con distribución $N(165, 12)$, calcula $P[\bar{x} > 173,7]$.

a) $\bar{x}$ sigue una distribución normal de media μ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, es decir, $\bar{x}$ es $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

b) Las medias muestrales en muestras de tamaño $n = 4$ se distribuyen según una normal de media $\mu = 165$ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{4}} = \frac{12}{2} = 6$; es decir, $\bar{x}$ es $N(165, 6)$. Así:

$$P[\bar{x} > 173{,}7] = P\left[z > \frac{173{,}7 - 165}{6}\right] = P[z > 1{,}45] =$$

$$= 1 - P[z \le 1{,}45] = 1 - 0{,}9265 = 0{,}0735$$

9 S **En una distribución $N(20, 6)$, tomamos muestras de tamaño 64.**

a) ¿Cuál es la distribución de las medias de las muestras?

b) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una muestra cuya media esté comprendida entre 19 y 21?

a) Las medias muestrales, $\bar{x}$, se distribuyen según una normal de media $\mu = 20$ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6}{\sqrt{64}} = \frac{6}{8} = 0{,}75$; es decir:

$\bar{x}$ es $N(20; 0{,}75)$

b) $P[19 < \bar{x} < 21] = P\left[\frac{19 - 20}{0{,}75} < z < \frac{21 - 20}{0{,}75}\right] = P[-1{,}33 < z < 1{,}33] =$

$$= P[z < 1{,}33] - P[z < -1{,}33] = P[z < 1{,}33] - (1 - P[z < 1{,}33]) =$$

$$= 2P[z < 1{,}33] - 1 = 2 \cdot 0{,}9082 - 1 = 0{,}8164$$

10 S **Se sabe que el cociente intelectual de los alumnos de una universidad se distribuye según una ley normal de media 100 y varianza 729.**

a) Halla la probabilidad de que una muestra de 81 alumnos tenga un cociente intelectual medio inferior a 109.

b) Halla la probabilidad de que una muestra de 36 alumnos tenga un cociente intelectual medio superior a 109.

El cociente intelectual sigue una distruibución normal de media $\mu = 100$ y de desviación típica $\sigma = \sqrt{729} = 27$; es decir, x es $N(100, 27)$.

a) Las medias en muestras de 81 alumnos se distribuirán según una normal de media $\mu = 100$ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{27}{\sqrt{81}} = \frac{27}{9} = 3$; es decir, $\bar{x}$ es $N(100, 3)$. Así:

$$P[\bar{x} < 109] = P\left[z < \frac{109 - 100}{3}\right] = P[z < 3] = 0{,}9987$$

b) Las medias en muestras de 36 alumnos se distribuyen según una normal de media $\mu = 100$ y de desviación típica $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{27}{\sqrt{36}} = \dfrac{27}{6} = 4{,}5$; es decir, $\bar{x}$ es $N(100;\ 4{,}5)$. Así:

$$P[\bar{x} > 109] = P\left[z > \frac{109 - 100}{4{,}5}\right] = P[z > 2] = 1 - P[z \le 2] = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

11 S **El tiempo de espera, en minutos, de los pacientes en un servicio de urgencias, es $N(14, 4)$.**

a) ¿Cómo se distribuye el tiempo medio de espera de 16 pacientes?

b) En una media jornada se ha atendido a 16 pacientes. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de su espera esté comprendido entre 10 y 15 minutos?

a) El tiempo medio de espera, $\bar{x}$, de 16 pacientes se distribuye según una normal de media $\mu = 14$ y de desviación típica $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{4}{\sqrt{16}} = \dfrac{4}{4} = 1$; es decir $\bar{x}$ es $N(14, 1)$.

b) $P[10 < \bar{x} < 15] = P\left[\dfrac{10 - 14}{1} < z < \dfrac{15 - 14}{1}\right] = P[-4 < z < 1] =$

$$= P[z < 1] - P[z < -4] = 0{,}8413 - 0 = 0{,}8413$$

12 S **Se sabe que el peso en kilogramos de los alumnos de Bachillerato de Madrid es una variable aleatoria, x, que sigue una distribución normal de desviación típica igual a 5 kg. En el caso de considerar muestras de 25 alumnos, ¿qué distribución tiene la variable aleatoria media muestral, $\bar{x}$?**

La variable aleatoria media muestral, $\bar{x}$, sigue una distribución normal con la misma media que la población, llamémosla μ, y con desviación típica $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{5}{\sqrt{25}} = \dfrac{5}{5} = 1$; es decir, $\bar{x}$ es $N(\mu, 1)$.

13 S **En una ciudad, la altura media de sus habitantes tiene una desviación típica de 8 cm. Si la altura media de dichos habitantes fuera de 175 cm, ¿cuál sería la probabilidad de que la altura media de una muestra de 100 individuos tomada al azar fuera superior a 176 cm?**

La altura en la población, x, sigue una distribución normal $N(175, 8)$. Si consideramos muestras de tamaño $n = 100$, las medias muestrales se distribuyen según una normal de media $\mu = 175$ y de desviación típica $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{8}{\sqrt{100}} = \dfrac{8}{10} = 0{,}8$; es decir, $\bar{x}$ es $N(175;\ 0{,}8)$. Así:

$$P[\bar{x} > 176] = P\left[z > \frac{176 - 175}{0{,}8}\right] = P[z > 1{,}25] = 1 - P[z \le 1{,}25] =$$

$$= 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056$$

PARA PROFUNDIZAR

14 **La desviación típica de una variable estadística es $\sigma = 5$. Para estimar la media de dicha variable, extraemos una muestra aleatoria de tamaño $n = 100$ y obtenemos $\bar{x} = 28$. Obtén un intervalo de confianza del 95% para estimar la media de la población, μ.**

Para el 95% $\rightarrow$ $1 - \alpha = 0,95$ $\rightarrow$ $z_{\alpha/2} = 1,96$

El intervalo de confianza para μ al 95% es:

$$\left(28 - 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{100}};\ 28 + 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{100}}\right);\ \text{ es decir: } (27,02;\ 28,98)$$

15 **Los estudiantes de Bachillerato de una cierta comunidad autónoma duermen un número de horas diarias que se distribuye según una ley normal de media μ desconocida y de desviación típica 3. A partir de una muestra de tamaño 30 se ha obtenido una media muestral igual a 7 horas.**

Halla un intervalo de confianza al 90% para la media de horas de sueño, μ.

Para $1 - \alpha = 0,9$ sabemos que $z_{\alpha/2} = 1,645$.

El intervalo de confianza para μ será:

$$\left(7 - 1,645 \cdot \frac{30}{\sqrt{30}};\ 7 + 1,645 \cdot \frac{30}{\sqrt{30}}\right);\ \text{es decir, } (6,099;\ 7,901)$$

16 **En una muestra de 50 jóvenes encontramos que la dedicación media diaria de ocio es de 400 minutos y su desviación típica de 63 minutos. Calcula el intervalo de confianza de la media de la población al 95% de nivel de confianza.**

Para el 95% $\rightarrow$ $1 - \alpha = 0,95$ $\rightarrow$ $z_{\alpha/2} = 1,96$

El intervalo de confianza para μ al 95% es:

$$\left(400 - 1,96 \cdot \frac{63}{\sqrt{50}};\ 400 + 1,96 \cdot \frac{63}{\sqrt{50}}\right);\ \text{ es decir: } (382,54;\ 417,46)$$

17 **Las notas en un cierto examen se distribuyen normal con media $\mu = 5,3$ y desviación típica $\sigma = 2,4$.**

Halla la probabilidad de que un estudiante tomado al azar tenga una nota:

a) Superior a 7.

b) Inferior a 5.

c) Comprendida ente 5 y 7.

Tomamos al azar 16 estudiantes.

Halla la probabilidad de que la media de las notas de estos 16 estudiantes:

d) Sea superior a 7.

e) Sea inferior a 5.

f) Esté comprendida entre 5 y 7.

g) Halla *k* para que el intervalo (5,3 – *k*; 5,3 + *k*) contenga al 95% de las notas.

h) Halla *b* para que el intervalo (5,3 – *b*; 5,3 + *b*) contenga al 95% de las notas medias de las muestras de 16 individuos.

x es $N(5{,}3;\ 2{,}4)$ $\rightarrow$ z es $N(0,\ 1)$

a) $P[x > 7] = P\left[z > \dfrac{7 - 5{,}3}{2{,}4}\right] = P[z > 0{,}71] = 1 - P[z \le 0{,}71] = 1 - 0{,}7612 = 0{,}2388$

b) $P[x < 5] = P\left[z < \dfrac{5 - 5{,}3}{2{,}4}\right] = P[z < -0{,}13] = P[z > 0{,}13] = 1 - P[z \le 0{,}13] =$

$= 1 - 0{,}5517 = 0{,}4483$

c) $P[5 < x < 7] = P\left[\dfrac{5 - 5{,}3}{2{,}4} < x < \dfrac{7 - 5{,}3}{2{,}4}\right] = P[-0{,}13 < z < 0{,}71] =$

$= P[z < 0{,}71] - P[z < -0{,}013] = 0{,}7612 - 0{,}4483 = 0{,}3129$

Las medias de las notas de 16 estudiantes se distribuyen $N\left(5{,}3;\ \dfrac{2{,}4}{\sqrt{16}}\right)$; es decir, $\bar{x}$ es $N(5{,}3;\ 0{,}6)$.

d) $P[\bar{x} > 7] = P\left[z > \dfrac{7 - 5{,}3}{0{,}6}\right] = P[z > 2{,}83] = 1 - P[z \le 2{,}83] = 1 - 0{,}9977 = 0{,}0023$

e) $P[\bar{x} < 5] = P\left[z < \dfrac{5 - 5{,}3}{0{,}6}\right] = P[z < -0{,}5] = P[z > 0{,}5] = 1 - P[z \le 0{,}5] =$

$= 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$

f) $P[5 < \bar{x} < 7] = P\left[\dfrac{5 - 5{,}3}{0{,}6} < z < \dfrac{7 - 5{,}3}{0{,}6}\right] = P[-0{,}5 < z < 2{,}83] =$

$= P[z < 2{,}83] - P(z < -0{,}5] = 0{,}9977 - 0{,}3085 = 0{,}6892$

g) Es un intervalo característico para la media de la población, por tanto:

$k = z_{\alpha/2} \cdot \sigma$

Como $1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Así:

$k = 1{,}96 \cdot 2{,}4 = 4{,}704$

h) Es un intervalo característico para las medias muestrales, en muestras de tamaño 16, por tanto:

$b = z_{\alpha/2} \cdot 0{,}6$

Como $1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Así:

$b = 1{,}96 \cdot 0{,}6 = 1{,}176$

18 **S** **La estatura de los jóvenes de una ciudad sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$. Si el 90% de las medias de las muestras de 81 jóvenes están en (173,4; 175,8), halla μ y σ.**

Para el 90% $\rightarrow$ $1 - \alpha = 0{,}90$ $\rightarrow$ $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

El intervalo característico para las medias de las muestras de 81 jóvenes (para el 90%) es:

$$\left(\mu - 1{,}645 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \mu + 1{,}645 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El centro del intervalo es μ:

$$\mu = \frac{173{,}4 + 175{,}8}{2} = 174{,}6 = \mu$$

La semiamplitud del intervalo es:

$$1{,}645 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{81}} = \frac{175{,}8 - 173{,}4}{2}$$

$$1{,}645 \cdot \frac{\sigma}{9} = 1{,}2 \quad \rightarrow \quad \sigma = \frac{1{,}2 \cdot 9}{1{,}645} = 6{,}57$$

19 **S** **Si la distribución de la media de las alturas en muestras de tamaño 49 de los niños de 10 años tiene como media 135 cm y como desviación típica 1,2 cm, ¿cuánto valen la media y la varianza de la altura de los niños de esa ciudad?**

Si la media en la población es μ y la desviación típica es σ, entonces, la distribución de las medias muestrales es $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Así, tenemos que:

$$\mu = 135 \text{ cm}$$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{49}} = \frac{\sigma}{7} = 1{,}2 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad \sigma = 1{,}2 \cdot 7 = 8{,}4 \text{ cm}$$

Por tanto, la media es $\mu = 135$ cm y la varianza es $\sigma^2 = 8{,}4^2 = 70{,}56$.

20 **S** **Los paquetes recibidos en un almacén tienen un peso medio de 300 kg y una desviación típica de 50 kg. ¿Cuál es la probabilidad de que 25 de los paquetes, elegidos al azar, excedan el límite de carga del montacargas donde se van a meter, que es de 8 200 kg?**

Sabemos que la suma de los pesos de n de esas bolsas tomadas al azar sigue una distribución normal de media $n\mu$ y de desviación típica $\sigma\sqrt{n}$, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ es } N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$$

En este caso:

$$\sum_{i=1}^{25} x_i \text{ es } N(25 \cdot 300;\ 50\sqrt{25});\ \text{ es decir } N(7\,500;\ 250)$$

Tenemos que calcular:

$$P\left[\sum_{i=1}^{25} x_i > 8\,200\right] = P\left[z > \frac{8\,200 - 7\,500}{250}\right] = P[z > 2{,}8] =$$

$$= 1 - P[z \le 2{,}8] = 1 - 0{,}9974 = 0{,}0026$$

21 **El peso de los perros adultos de una cierta raza es una variable aleatoria que se distribuye normalmente con una media de 7,4 kg y una desviación típica de 0,6 kg.**

Si consideramos muestras de 30 de estos animales

a) ¿Cuál es la distribución de la media muestral, $\bar{x}$?

b) Calcula $P[6{,}5 < \bar{x} < 7{,}5]$.

c) ¿Cuál es la distribución de la suma de los pesos de los 30 animales de las muestras?

d) Calcula $P\left[\sum_{i=1}^{30} x_i > 225\right]$.

Si llamamos X = "peso de los perros", tenemos que X es $N(7{,}4;\ 0{,}6)$.

a) $\bar{x}$ sigue una distribución normal de media $\mu = 7{,}4$ kg y de desviación típica

$\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{0{,}6}{\sqrt{30}} \simeq 0{,}11$; es decir, $\bar{x}$ es $N(7{,}4;\ 0{,}11)$.

b) $P[6{,}5 < \bar{x} < 7{,}5] = P\left[\dfrac{6{,}5 - 7{,}4}{0{,}11} < z < \dfrac{7{,}5 - 7{,}4}{0{,}11}\right] = P[-8{,}18 < z < 0{,}91] = P[z < 0{,}91]$ $= 0{,}8186$

c) $\sum_{i=1}^{30} x_i$ sigue una distribución normal de media $n\mu = 30 \cdot 7{,}4 = 222$ kg y desviación típica $\sigma\sqrt{n} = 0{,}6 \cdot \sqrt{30} \simeq 3{,}29$; es decir, $\sum_{i=1}^{30} x_i$ es $N(222;\ 3{,}29)$.

d) $P\left[\sum_{i=1}^{30} x_i > 225\right] P\left[z > \dfrac{225 - 222}{3{,}29}\right] = P[z > 0{,}91] = 1 - P[z \le 0{,}91] = 1 - 0{,}8186 =$

$= 0{,}1814$

22 **Se supone que el peso medio de las sandías de cierta variedad sigue una distribución normal con $\mu = 6$ kg y $\sigma = 1$ kg. Si empaquetamos las sandías en cajas de 8 unidades:**

a) Halla la probabilidad de que la media de los pesos de las sandías de una caja sea menor que 5,5 kg.

b) Calcula la probabilidad de que entre las 8 sandías de una de las cajas pesen más de 50 kg.

a) Si llamamos x = "peso de las sandías", tenemos que x es $N(6,\ 1)$. Si consideramos muestras de tamaño $n = 8$, tenemos que $\bar{x}$ sigue una distribución normal de media $\mu = 6$ kg y de desviación típica $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{8}} \simeq \quad \simeq 0{,}35$; es decir, $\bar{x}$ es $N(6;\ 0{,}35)$.

Por tanto:

$$P[\bar{x} < 5{,}5] = P\left[z < \frac{5{,}5 - 6}{0{,}35}\right] = P[z < -1{,}43] = P[z > 1{,}43] = 1 - P[z \le 1{,}43] =$$

$$= 1 - 0{,}9236 = 0{,}0764$$

b) Si $\sum_{i=1}^{8} x_i$ sigue una distribución normal de media $n\mu = 8 \cdot 6 = 48$ kg y desviación típica es $\sigma\sqrt{n} = 1 \cdot \sqrt{8} \simeq 2{,}83$; es decir, $\sum_{i=1}^{8} x_i$ es $N(48;\ 2{,}83)$.

Por tanto:

$$P\left[\sum_{i=1}^{8} x_i > 50\right] P\left[z > \frac{50 - 48}{2{,}83}\right] = P[z > 0{,}71] = 1 - P[z \le 0{,}71] = 1 - 0{,}7612 =$$

$$=0{,}2388$$

23 S **Para estimar la estatura media de los jóvenes entre 15 y 25 años de una localidad, se ha medido a 40 de estos jóvenes, obteniéndose los siguientes resultados:**

ESTATURA (cm)	[148, 153)	[153, 158)	[158, 163)
Nº JÓVENES	2	4	11

ESTATURA (cm)	[163, 168)	[168, 173)	[173, 178)
Nº JÓVENES	14	5	4

Estima, con un nivel de confianza del 99%, el valor de la estatura media de los jóvenes entre 15 y 25 años de dicha localidad.

Hallamos $\bar{x}$ y s para la muestra obtenida:

ESTATURA (cm)	[148, 153)	[153, 158)	[158, 163)	[163, 168)	[168, 173)	[173, 178)
MARCA DE CLASE (x_i)	150,5	155,5	160,5	165,5	170,5	175,5
FRECUENCIA (f_i)	2	4	11	14	5	4

$\bar{x} = 164$ y $s = 6{,}24$

Para un nivel de confianza del 99%, se tiene:

$$1 - \alpha = 0{,}99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}575$$

Así, el intervalo de confianza para estimar μ al 99% es:

$$\left(164 - 2{,}575 \cdot \frac{6{,}24}{\sqrt{40}};\ 164 + 2{,}575 \cdot \frac{6{,}24}{\sqrt{40}}\right);\ \text{es decir: } (161{,}46;\ 166{,}54)$$

24 **Se desea estudiar el gasto semanal de fotocopias, en céntimos de euro, de los estudiantes de bachillerato de cierta comunidad. Para ello, se ha elegido una muestra aleatoria de 9 de estos estudiantes, resultando los valores siguientes para estos gastos:**

100; 150; 90; 70; 75; 105; 200; 120; 80

Se supone que la variable objeto del estudio sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 12. Determina un intervalo de confianza al 95% para la media del gasto semanal en fotocopias por estudiante.

Para el 95% $\rightarrow$ $1 - \alpha = 0{,}95$ $\rightarrow$ $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Hallamos la media de la muestra:

$$\bar{x} = \frac{100 + 150 + 90 + \dots + 80}{9} = \frac{990}{9} = 110 \text{ céntimos de euro.}$$

El intervalo de confianza para μ será:

$$\left(110 - 1{,}96 \cdot \frac{12}{\sqrt{9}};\ 110 + 1{,}96 \cdot \frac{12}{\sqrt{9}}\right); \text{ es decir: } (102{,}16;\ 117{,}84)$$

25 S **Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 individuos a los que se ha medido el nivel de glucosa en sangre, obteniéndose una media muestral de 110 mg/cm^3. Se sabe que la desviación típica de la población es de 20 mg/cm^3.**

a) Obtén un intervalo de confianza, al 90%, para el nivel de glucosa en sangre en la población.

b) ¿Qué error máximo se comete con la estimación anterior?

a) Para el 90% $\rightarrow$ $1 - \alpha = 0{,}90$ $\rightarrow$ $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

El intervalo de confianza para μ al 90% es:

$$\left(110 - 1{,}645 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}};\ 110 + 1{,}645 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}}\right); \text{ es decir: } (106{,}71;\ 113{,}29)$$

b) El error máximo es la mitad de la longitud del intervalo de confianza, es decir:

$$E = 1{,}645 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} = 1{,}645 \cdot 2 = 3{,}29$$

26 **La duración de las bombillas fabricadas por una empresa sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 50 horas. Para estimar la duración se experimenta con una muestra de tamaño *n*.**

Calcular el valor de *n* para que, con un nivel de confianza del 95%, se consiga un error en la estimación inferior a 5 horas.

Para el 95% $\rightarrow$ $1 - \alpha = 0{,}95$ $\rightarrow$ $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El error máximo admisible es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.\ \text{Buscamos } n \text{ para que } E < 5 \text{ horas.}$$

Como $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ y $\sigma = 50$, queda:

$$1{,}96 \cdot \frac{50}{\sqrt{n}} < 5 \ \rightarrow\ \frac{98}{\sqrt{n}} < 5 \ \rightarrow\ \sqrt{n} > \frac{98}{5} = 19{,}6 \ \rightarrow\ n > 384{,}16$$

Debemos tomar una muestra de, al menos, 385 bombillas.

27 S **La media de las estaturas de una muestra aleatoria de 400 personas de una ciudad es 1,75 m. Se sabe que la estatura de las personas de esa ciudad es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con varianza $\sigma^2 = 0{,}16\ m^2$.**

a) Construye un intervalo, de un 95% de confianza, para la media de las estaturas de la población.

b) ¿Cuál sería el mínimo tamaño muestral necesario para que pueda decirse que la verdadera media de las estaturas está a menos de 2 cm de la media muestral, con una confianza del 90%?

a) $n = 400$; $\bar{x} = 1{,}75$ m; $\sigma^2 = 0{,}16 \ \rightarrow\ \sigma = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4$

Para el 95% $\rightarrow$ $1 - \alpha = 0{,}95 \ \rightarrow\ z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El intervalo de confianza es:

$$\left(1{,}75 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}4}{\sqrt{400}};\ 1{,}75 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}4}{\sqrt{400}}\right);\ \text{es decir: } (1{,}7108;\ 1{,}7892)$$

b) 90% de confianza $\rightarrow$ $1 - \alpha = 0{,}90 \ \rightarrow\ z_{\alpha/2} = 1{,}645$

El error máximo admisible es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Buscamos n para que $E < 0{,}02$ m:

$$1{,}645 \cdot \frac{0{,}4}{\sqrt{n}} < 0{,}02 \ \rightarrow\ \frac{0{,}658}{\sqrt{n}} < 0{,}02 \ \rightarrow\ \frac{\sqrt{n}}{0{,}658} > \frac{1}{0{,}02}$$

$$\sqrt{n} > \frac{0{,}658}{0{,}02} \ \rightarrow\ \sqrt{n} > 32{,}9 \ \rightarrow\ n > 1\,082{,}41$$

Debemos tomar una muestra de, al menos, 1 083 personas.

28 S **Las medidas de los diámetros de una muestra al azar de 200 cojinetes de bolas, hechos por una determinada máquina dieron una media de 2 cm y una desviación típica de 0,1 cm. Halla los intervalos de confianza del 68,26**

95,44% y 99,73%

para el diámetro medio de todos los cojinetes.

a) Para el 68,26% $\rightarrow$ $1 - \alpha = 0{,}6826 \ \rightarrow\ z_{\alpha/2} = 1$

El intervalo de confianza para μ es:

$$\left(2 - 1 \cdot \frac{0,1}{\sqrt{200}};\ 2 + 1 \cdot \frac{0,1}{\sqrt{200}}\right); \text{ es decir: } (1,993;\ 2,007)$$

b) Para el 95,44% $\rightarrow$ $1 - \alpha = 0,9544$ $\rightarrow$ $z_{\alpha/2} = 2$

El intervalo de confianza es:

$$\left(2 - 2 \cdot \frac{0,1}{\sqrt{200}};\ 2 + 2 \cdot \frac{0,1}{\sqrt{200}}\right); \text{ es decir: } (1,986;\ 2,014)$$

c) Para el 99,73% $\rightarrow$ $1 - \alpha = 0,9973$ $\rightarrow$ $z_{\alpha/2} = 3$

El intervalo de confianza es:

$$\left(2 - 3 \cdot \frac{0,1}{\sqrt{200}};\ 2 + 3 \cdot \frac{0,1}{\sqrt{200}}\right); \text{ es decir: } (1,979;\ 2,021)$$

29 El peso, en kg, de los jóvenes entre 16 y 20 años de una cierta ciudad es una variable aleatoria, x, que sigue una distribución normal con $\sigma^2 = 25$.

a) Si consideramos muestras de 25 jóvenes, ¿cuál es la distribución que tiene la variable aleatoria media muestral?

b) Si se desea que la media de la muestra no difiera en más de 1 kg de la media de la población, con probabilidad 0,95, ¿cuántos jóvenes se deberían tomar en la muestra?

a) Por el teorema central del límite sabemos que $\bar{x}$ sigue una distribución normal de media μ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$; es decir, $\bar{x}$ es $N(\mu, 1)$.

b) El error máximo admisible es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Sabemos que: $1 - \alpha = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$E = 1$ kg

$\sigma = 5$ kg

Por tanto:

$1 = 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{n} = 9,8 \rightarrow n = 96,04$

Se deberá tomar una muestra de, al memos, 97 jóvenes.

30 Una variable aleatoria, x, tiene una distribución normal, siendo su desviación típica igual a 3.

a) Si se consideran muestras de tamaño 16, ¿qué distribución sigue la variable aleatoria media muestral?

b) Si se desea que la media de la muestra no difiera en más de una unidad de la media de la población, con probabilidad 0,99, ¿cuántos elementos, como mínimo, se deberían tomar en la muestra?

a) Por el teorema central del límite, sabemos que $\bar{x}$ sigue una distribución normal de media μ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4} = 0,75$; es decir, $\bar{x}$ es $N(\mu;\ 0,75)$.

a) El error máximo admisible es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Sabemos que: $1 - \alpha = 0,99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$

$\sigma = 3$

$E = 1$

Por tanto:

$$1 = 2,575 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{n} = 7,725 \rightarrow n = 59,68$$

La muestra debería tener, al menos, 60 elementos.

31 El tiempo de vida de una clase de depuradoras de agua utilizadas en una planta industrial se distribuye normalmente, con una desviación típica de 2 000 horas. En un ensayo realizado con una muestra aleatoria de 9 depuradoras, se obtuvieron los siguientes tiempos de vida en miles de horas:

9,5 10 7,5 10,5 16,5 10 12 32 18

a) Halla un intervalo de confianza al 99% para la vida media de las depuradoras.

b) ¿Cuál es el error máximo que se comete con la estimación anterior para la media?

c) Calcula el tamaño mínimo que debería tener la muestra, en el caso de admitir un error máximo de 500 horas, con un grado de confianza del 95%.

a) El intervalo de confianza es de la forma:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Sabemos que:

$$\overline{x} = \frac{9,5 + 10 + 7,5 + 10,5 + 16,5 + 10 + 12 + 32 + 18}{9} = \frac{126}{9} = 14 \text{ miles}$$

de horas

$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$

$\sigma = 2\,000$ horas $= 2$ miles de horas

$n = 9$

Por tanto, el intervalo será (en miles de horas):

$$\left(14 - 2,575 \cdot \frac{2}{\sqrt{9}}; 14 + 2,575 \cdot \frac{2}{\sqrt{9}}\right); \text{ es decir, } (12,28; 15,72).$$

b) $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}575 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{9}} \simeq 1{,}72$ miles de horas

c) Si $E = 500$ horas $= 0{,}5$ miles de horas,

$1 - \alpha = 0{,}95 \;\rightarrow\; z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$\sigma =$ 2 miles de horas, entonces:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 0{,}5 = 1{,}95 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} \;\rightarrow\; \sqrt{n} = 7{,}84 \;\rightarrow\; n = 61{,}4656$$

La muestra debería tener, al menos, 62 elementos.

32 S **Al medir el tiempo de reacción, un psicólogo estima que la desviación típica del mismo es de 0,5 segundos. ¿Cuál será el número de medidas que deberá hacer para que sea del 95% la confianza de que el error de su estimación no excederá de 0,05 segundos?**

Para el 95% de confianza, $1 - \alpha = 0{,}95 \;\rightarrow\; z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El error máximo admisible es:

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Buscamos n para que $E \le 0{,}05$:

$$1{,}96 \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{n}} \le 0{,}05 \;\rightarrow\; \frac{0{,}98}{\sqrt{n}} \le 0{,}05 \;\rightarrow\; \sqrt{n} \ge \frac{0{,}98}{0{,}05} = 19{,}6 \;\rightarrow\; n \ge 384{,}16$$

Deberá hacer, al menos, 385 medidas.

33 **Al medir el diámetro de los cojinetes producidos por una empresa, se estima que la desviación típica de dicho diámetro es de 0,05 cm. Se han hecho 121 mediciones.**

¿Se puede afirmar, con el 99% de confianza, que el error en la estimación de la media no excederá a 0,01 cm?

Para el 99% $\rightarrow$ $1 - \alpha = 0{,}99 \;\rightarrow\; z_{\alpha/2} = 2{,}575$

El error máximo admisible es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}575 \cdot \frac{0{,}05}{\sqrt{121}} = 0{,}0117 > 0{,}01 \text{ cm}$$

Por tanto, no podemos afirmar que el error en la estimación no excederá a 0,01 cm.

34 S **Las ventas mensuales de una tienda de electrodomésticos se distribuyen según una ley normal, con desviación típica 900 €. En un estudio estadístico de las ventas realizadas en los últimos nueve meses, se ha encontrado un intervalo de confianza para la media mensual de las ventas, cuyos extremos son 4 663 € y 5 839 €.**

a) ¿Cuál ha sido la media de las ventas en estos nueve meses?

b) ¿Cuál es el nivel de confianza para este intervalo?

a) La media de las ventas es el punto medio del intervalo; es decir:

$$\bar{x} = \frac{4\,663 + 5\,839}{2} = 5\,251 \text{ €}$$

b) El estudio se ha realizado en los últimos 9 meses, es decir, se ha considerado una muestra de tamaño $n = 9$.

El error máximo admisible es la mitad de la longitud del intervalo, es decir:

$$E = \frac{5\,839 - 4\,663}{2} = 588$$

Así, sabemos que: $n = 9$; $\sigma = 900$; $E = 588$, y como:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 588 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{900}{\sqrt{9}} \rightarrow 588 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{900}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow 588 = z_{\alpha/2} \cdot 300 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{588}{300} = 1{,}96 \rightarrow$$

$$\rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

que corresponde a un nivel de confianza del 95%.

35 **Se supone que los gastos corrientes por empleado de los distintos departamentos de una empresa siguen una distribución normal con desviación típica 500 €. De los datos disponibles para 16 departamentos, se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza para estimar la media del gasto corriente por empleado de la empresa: (1 928,125; 2 571,875)**

¿Cuál es el nivel de confianza, $1 - \alpha$, con el que se ha hecho la estimación?

a) Sabemos que el error máximo admisible es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; y tenemos que:

$$E = \frac{2571{,}875 - 1928{,}124}{2} = 321{,}875$$

$\sigma = 500$ €

n = 16

Por tanto:

$$321{,}875 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{500}{\sqrt{16}} \rightarrow 321{,}875 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{599}{4}$$

$$321{,}875 = z_{\alpha/2} \cdot 125 \rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{321{,}875}{125} = 2{,}575 \rightarrow 1 - \alpha = 0{,}99$$

El nivel de confianza es $1 - \alpha = 0{,}99$; es decir, del 99%.

CUESTIONES TEÓRICAS

36 **Con una muestra de 500 individuos hemos estimado, con un nivel de confianza del 90%, que la estatura media de los soldados de un cierto reemplazo está entre 174,3 cm y 175,1 cm (problema de la página inicial, pág. 290).**

a) Si la desviación típica de la población era desconocida, averigua la media, $\bar{x}$, y la desviación típica, s, de la muestra.

b) ¿Cuál sería el intervalo si la muestra fuera de tamaño la cuarta parte (500 : 4 = 125) y mantuviéramos el nivel de confianza?

a) • La media muestral es el punto medio del intervalo de confianza:

$$\bar{x} = \frac{174{,}3 + 175{,}1}{2} = 174{,}7 \text{ cm}$$

• La semiamplitud del intervalo es:

$$\frac{175{,}1 - 174{,}3}{2} = 0{,}4, \text{ que coincide con:}$$

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 0{,}4 \quad \rightarrow \quad s = \frac{0{,}4 \cdot \sqrt{n}}{z_{\alpha/2}}$$

Para un 90% de confianza, tenemos que $z_{\alpha/2} = 1{,}645$. Por tanto, la desviación típica de la muestra es:

$$s = \frac{0{,}4 \cdot \sqrt{500}}{1{,}645} = 5{,}44$$

b) Si $z_{\alpha/2} = 1{,}645$, y mantenemos las condiciones del problema, salvo el tamaño muestral, que es $\frac{n}{4}$, el intervalo tendría el doble de amplitud que el anterior, pues:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{500/4}} = 2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{500}} = 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8$$

Es decir, el intervalo sería:

$$(174{,}7 - 0{,}8;\ 174{,}7 + 0{,}8); \quad \text{esto es:} \quad (173{,}9;\ 175{,}5)$$

37
S **Supongamos que, a partir de una muestra aleatoria de tamaño $n = 25$, se ha calculado el intervalo de confianza para la media de una población normal, obteniéndose una amplitud igual a ± 4. Si el tamaño de la muestra hubiera sido $n = 100$, permaneciendo invariables todos los demás valores que intervienen en el cálculo, ¿cuál habría sido la amplitud del intervalo?**

La semiamplitud del intervalo es igual al error máximo admisible:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad \text{Para } n = 25, \text{ sabemos que } E = 4.$$

Si $n = 100$, tendríamos que:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{100}} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{4 \cdot 25}} = \frac{1}{2}\left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{25}}\right) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

La amplitud del intervalo sería ±2.

38 **A partir de una muestra aleatoria, hemos estimado el peso de los toros de una manada mediante el intervalo (443, 528). ¿Cuál es la media de la muestra obtenida?**

La media muestral es el punto medio del intervalo de confianza, es decir:

$$\bar{x} = \frac{443 + 528}{2} = 485{,}5$$

39 **Mediante una muestra de 100 individuos estimamos la estatura de un colectivo de personas con un nivel de confianza del 95%. El error máximo admisible obtenido es $E = 1{,}274$. ¿Cuál es la desviación típica de la muestra obtenida?**

Para un nivel de confianza del 95%, tenemos que $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

El error máximo admisible es:

$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}}$. Como $E = 1{,}274$, $n = 100$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$, tenemos que:

$$1{,}274 = 1{,}96 \cdot \frac{s}{\sqrt{100}} \;\rightarrow\; s = \frac{12{,}74}{1{,}96} = 6{,}5 \;\rightarrow\; s = 6{,}5$$