14 Intervalos de confianza

ACTIVIDADES INICIALES

14.I. Calcula $z_{\frac{\alpha}{2}}$ tal que $P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,87$.

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) - P\left(Z < -z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 2P\left(Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) - 1 = 0,87 \Rightarrow 2P\left(Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1,87 \Rightarrow$$

$\Rightarrow P\left(Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,935$. Buscando en el interior de la tabla de la $N(0, 1)$ se observa que el valor

$P\left(Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,935$ se obtiene si $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,51$.

14.II. Calcula z_α tal que $P(Z \le z_\alpha) = 0,867$.

Buscando 0,867 en el interior de las tablas de la $N(0, 1)$ se obtiene $P(Z \le z_\alpha) = 0,867$ para $z_\alpha = 1,115$.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

14.1. (PAU) Se hizo una encuesta a 325 personas mayores de 16 años y se encontró que 120 iban al teatro regularmente.

Halla, con un nivel de confianza del 94%, un intervalo para estudiar la proporción de los ciudadanos que van al teatro regularmente.

$n = 325 \qquad \hat{p} = \dfrac{120}{325} \qquad \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\dfrac{0,38 \cdot 0,62}{325}} = 0,027$

El valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}}$ es tal que: $P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 2P\left(Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) - 1 = 0,94 \Rightarrow 2P\left(Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1,94 \Rightarrow$

$\Rightarrow P\left(Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,97$

Buscando en el interior de la tabla de la $N(0, 1)$ se observa que el valor $P\left(Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,97$ se obtiene si

$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,88$.

Sustituyendo estos valores en la expresión del intervalo de confianza, se tiene:

$$IC = \left(\hat{p} \mp z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = (0,38 \mp 1,88 \cdot 0,027) = (0,329;\ 0,431)$$

14.2. (PAU) Tomada al azar una muestra de 500 personas de una determinada comunidad, se encontró que 300 leían la prensa regularmente. Halla, con una confianza del 90%, un intervalo para estimar la proporción de lectores entre las personas de esa comunidad.

n = 500, $\hat{p} = \frac{300}{500} = \frac{3}{5}$ = 0,6, $\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0,6 \cdot 0,4}{500}}$ = 0,0024

El valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}}$ es tal que: $P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 2P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) - 1 = 0,90 \Rightarrow P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645$.

Por tanto: $IC = \left(\hat{p} \mp z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = (0,6 \mp 1,645 \cdot 0,0024)$ = (0,596; 0,604)

14.3. (PAU) Sabemos que una variable estadística se comporta como una $N(\mu, 10)$. Para estimar μ extraemos una muestra de tamaño 100, cuya media resulta ser igual a 37. Estima μ mediante un intervalo de confianza del 90% y del 95%.

a) Los intervalos de confianza para la media tienen la forma: $IC = \left(\overline{x} \mp z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

El valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}}$ es tal que: $P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 2P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) - 1 = 0,90 \Rightarrow P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645$.

El intervalo pedido es: $\left(37 \mp 1,645 \cdot \frac{10}{\sqrt{100}}\right)$ = (35,355; 38,645).

b) Si la confianza es del 95%, $z_{\frac{\alpha}{2}}$ = 1,96.

El intervalo de confianza es: $\left(37 \mp 1,96 \cdot \frac{10}{\sqrt{100}}\right)$ = (35,04; 38,96).

14.4. (PAU) El peso de los alumnos de Bachillerato de cierta ciudad tiene una media desconocida y una desviación típica σ = 5,4 kg. Tomamos una muestra aleatoria de 100 alumnos de Bachillerato de esa ciudad. Si la media de la muestra es de 60 kg, calcula con un nivel de confianza del 99% el intervalo de confianza para el peso medio de todos los alumnos de Bachillerato de la ciudad.

A una confianza del 99% le corresponde $z_{\frac{\alpha}{2}}$ = 2,575.

El intervalo pedido: $\left(60 \mp 2,575 \cdot \frac{5,4}{\sqrt{100}}\right)$ = (58,6095; 61,3905).

14.5. (PAU) Un fabricante de pilas alcalinas sabe que el tiempo de duración, en horas, de las pilas que fabrica sigue una distribución normal de media desconocida y varianza 3600.
Con una muestra de su producción elegida al azar y un nivel de confianza del 95% ha obtenido para la media el intervalo de confianza (372,6; 392,2).

a) Calcula el valor que obtuvo para la media de la muestra y el tamaño muestral utilizado.

b) ¿Cuál sería el error de su estimación si hubiese utilizado una muestra de tamaño 225 y un nivel de confianza del 86,9%?

a) $\sigma^2 = 3600 \Rightarrow \sigma = 60$ $N(\mu, 60)$. Los intervalos de confianza para la media tienen la forma:

$$IC = \left(\overline{x} \mp z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{60}{\sqrt{n}}\right) = (372,6;\ 392,2)$$

El valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}}$ es tal que: $P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 2P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) - 1 = 0,95 \Rightarrow P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

Por tanto, se pueden establecer las ecuaciones: $\begin{cases} \overline{x} - 1,96 \cdot \frac{60}{\sqrt{n}} = 372,6 \\ \overline{x} + 1,96 \cdot \frac{60}{\sqrt{n}} = 392,2 \end{cases}$

Sumando las dos ecuaciones: $2\overline{x} = 764,8 \Rightarrow \overline{x} = 382,4$. Restando: $2 \cdot 1,96 \cdot \frac{60}{\sqrt{n}} = 19,6 \Rightarrow n = 144$.

b) $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{60}{\sqrt{144}}$ = 9,8

14.6. La altura media de los alumnos de un centro se distribuye según una normal con desviación típica de 15 cm, y la de las alumnas sigue una normal con desviación típica de 18 cm. Para estimar la diferencia de altura media de los chicos y las chicas se elige una muestra al azar de 40 alumnos y 35 alumnas. Las alturas medias muestrales son:

$$\bar{x}_H = 170 \text{ cm} \qquad \bar{x}_M = 160 \text{ cm}$$

Halla el intervalo de confianza para la diferencia de alturas medias al nivel del 90%.

Chicos: $n_H = 40$ $\bar{x}_H = 170$ $\hat{s}_H = 15$ Chicas: $n_M = 35$ $\bar{x}_M = 160$ $\hat{s}_M = 18$

Para el nivel de confianza del 90%: $IC = \left(170 - 160 \mp 1{,}64 \cdot \sqrt{\frac{15^2}{40} + \frac{18^2}{35}}\right) = (3{,}67;\ 16{,}33)$

14.7. Con el fin de hacer un estudio comparativo, se ha tomado una muestra aleatoria de dos variables que se distribuyen según una normal. Dicha muestra está formada por 50 individuos del tipo *A* y 30 del tipo *B*. Las medias y cuasivarianzas muestrales son:

$$\bar{x}_A = 3{,}2 \qquad \bar{x}_B = 4 \qquad \hat{s}_A^2 = 1{,}5 \qquad \hat{s}_B^2 = 2{,}3$$

Halla un intervalo de confianza para la diferencia de medias poblacionales para el nivel de confianza del 95%.

Tipo *A*: $n_A = 50$ $\bar{x}_A = 3{,}2$ $\hat{s}_A^2 = 1{,}5$ Tipo *B*: $n_B = 30$ $\bar{x}_B = 4$ $\hat{s}_B^2 = 2{,}3$

Para el nivel de confianza del 95%: $IC = \left(3{,}2 - 4 \mp 1{,}96\sqrt{\frac{1{,}5}{50} + \frac{2{,}3}{30}}\right) = (-1{,}12;\ -0{,}47)$

14.8. (PAU) En una población, una variable aleatoria sigue una ley normal de media desconocida y desviación típica 2. Observada una muestra de tamaño 400, tomada al azar, se ha obtenido una media muestral igual a 50. Con un nivel de confianza del 97%, ¿qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que la amplitud del intervalo que se obtenga sea, como máximo, 1?

Si la amplitud del intervalo ha de ser como máximo 1, el error máximo admisible será 0,5.

Entonces: $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2{,}17 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = 0{,}5 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2{,}17 \cdot 2}{0{,}5} = 8{,}68 \Rightarrow n = 75{,}34$

Por tanto, el tamaño de la muestra ha de ser, como mínimo, 76.

14.9. (PAU) Se sabe que una variable estadística se comporta como una $N(\mu, 10)$. Para estimar μ se extrae una muestra de tamaño 100, cuya media resulta ser igual a 37. Determina el tamaño de la muestra si se desea que el error cometido al estimar μ con un nivel de confianza del 99% no exceda de 0,2575.

Al nivel de confianza del 99% le corresponde un $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}575$.

Entonces: $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2{,}575 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} = 0{,}2575 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2{,}575 \cdot 10}{0{,}2575} = 100 \Rightarrow n = 10\,000$

Luego el tamaño de la muestra ha de ser, como mínimo, 10 000.

EJERCICIOS

Intervalo de confianza para el parámetro p de una binomial

14.10. (PAU) Se quiere conocer la permanencia media de los pacientes de un hospital, con el fin de estudiar una posible ampliación del mismo. Se tienen datos referidos a las estancias, expresadas en días, de 800 pacientes, con los siguientes resultados: $\bar{x}$ = 8,1 días; s = 9 días. Se pide obtener un intervalo de confianza del 95% para la estancia media.

Datos: $n = 800$; $\bar{x} = 8{,}1$ días; $s = 9$ días; $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

Sustituyendo en la expresión del intervalo de confianza para la media poblacional, $IC = \left(\bar{x} \mp z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$,

se obtiene:

$IC = \left(8{,}1 - 1{,}96\frac{9}{\sqrt{800}};\ 8{,}1 + 1{,}96\frac{9}{\sqrt{800}}\right) = (7{,}5;\ 8{,}7)$. Por tanto, la estancia media está entre 7,5 y 8,7 días.

14.11. (PAU) El Ministerio de Educación, Política Social y Deporte desea conocer el interés de los padres por la introducción de la primera Lengua Extranjera en el primer curso de Primaria. Encuestados 1024 padres elegidos al azar, el 80% está a favor.
¿Cuál es el intervalo de confianza para el porcentaje de los padres que están a favor de esta medida, con un nivel de confianza del 0,99?

Datos: $n = 1024$; $\hat{p} = 0{,}8$; $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}575$

Sustituyendo en la expresión del intervalo de confianza para una proporción, $IC = \left(\hat{p} \mp z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$, se obtiene:

$IC = \left(0{,}80 - 2{,}575\sqrt{\frac{0{,}80 \cdot 0{,}20}{1\,024}};\ 0{,}80 + 2{,}575\sqrt{\frac{0{,}80 \cdot 0{,}20}{1\,024}}\right) = (0{,}768;\ 0{,}832)$

14.12. (PAU) Si al lanzar 80 veces una moneda se obtienen 45 caras, ¿se puede aceptar que la moneda está trucada, con un nivel de significación del 5%?

Datos: $n = 80$; $\hat{p} = \frac{45}{80} = 0{,}5625$; $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

Se obtiene el intervalo de confianza: $IC = \left(0{,}5625 \mp 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}5625 \cdot 0{,}4375}{80}}\right) = (0{,}4538;\ 0{,}6712)$.

Como 0,5 cae dentro del intervalo hallado, no puede aceptarse que la moneda está trucada.

14.13. (PAU) Se selecciona aleatoriamente una muestra de 600 personas en una ciudad y se les pregunta si consideran que el tráfico en la misma es aceptablemente fluido. Responden afirmativamente 250 personas.

¿Cuál es el intervalo de confianza para la proporción de ciudadanos que en esa ciudad consideran aceptable la fluidez del tráfico, con un nivel de confianza del 90%?

Datos: $n = 600$; $\hat{p} = \dfrac{250}{600} = \dfrac{5}{12}$; $1 - \alpha = 0{,}90 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645$

Intervalo de confianza obtenido: $IC = \left(\dfrac{5}{12} \mp 1{,}645\sqrt{\dfrac{\dfrac{5}{12}\cdot\dfrac{7}{12}}{600}} \right) = (0{,}3836;\ 0{,}4498)$.

14.14. (PAU) En una encuesta realizada a 800 personas elegidas al azar del censo electoral, 240 declararon su intención de votar al partido *A*.

a) Estima con un nivel de confianza del 95,45% entre qué valores se encuentra la intención de voto a dicho partido en todo el censo.

b) Discute razonadamente el efecto que tendría sobre el intervalo de confianza el aumento o la disminución del nivel de confianza.

a) Datos: $n = 800$; $\hat{p} = \dfrac{240}{800} = 0{,}3$; $1 - \alpha = 0{,}9545 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2$

Sustituyendo en la expresión del intervalo de confianza para una proporción, $IC = \left(\hat{p} \mp z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$,

se obtiene:

$$IC = \left(0{,}3 - 2\sqrt{\frac{0{,}3\cdot 0{,}7}{800}},\ 0{,}3 + 2\sqrt{\frac{0{,}3\cdot 0{,}7}{800}} \right) = (0{,}268;\ 0{,}332)$$

b) Si se quiere aumentar el nivel de confianza, el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ aumentará también.

Por tanto, la amplitud del intervalo se hace mayor.

Intervalo de confianza para la media poblacional

14.15. (PAU) El peso medio de una muestra de 64 jóvenes de 18 años ha sido de 70 kg. Sabiendo que los pesos de los jóvenes de 18 años se distribuyen con una desviación típica de 12 kg, encuentra el intervalo de confianza para la media de los pesos de la población de jóvenes de 18 años, con un nivel de confianza del 95%.

Datos: $n = 64$; $\bar{x} = 70$ kg; $\sigma = 12$ kg; $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

Sustituyendo en la expresión del intervalo de confianza para la media poblacional, $IC = \left(\bar{x} \mp z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$,

se obtiene:

$$IC = \left(70 - 1{,}96\,\frac{12}{\sqrt{64}},\ 70 + 1{,}96\,\frac{12}{\sqrt{64}} \right) = (67{,}06;\ 72{,}94)$$

Por tanto, la media de pesos de la población estará entre 67 y 73 kg, aproximadamente.

14.16. (PAU) La vida media de una muestra tomada al azar de 121 bombillas es de 3000 horas, y la desviación típica, de 220 horas. Calcula el intervalo de confianza aproximado para la media poblacional para un nivel de confianza del 99%.

Datos: n = 121; $\bar{x}$ = 3000 horas; σ = 220 horas; $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}575$

$$IC = \left(3\ 000 - 2{,}575\ \frac{220}{\sqrt{121}};\ 3\ 000 + 2{,}575\frac{220}{\sqrt{121}}\right) = (2948{,}5;\ 3051{,}5)$$

Por tanto, la media de horas estará entre 2948,5 y 3051,5.

14.17. (PAU) Se ha aplicado una prueba para medir el cociente intelectual a una muestra de 100 universitarios españoles elegida de forma aleatoria. Calculada la media de esta muestra se han obtenido 98 puntos. Sabiendo que las puntuaciones de la prueba siguen una distribución normal de desviación típica de 15:

a) Calcula, con una probabilidad del 98%, entre qué valores se encontrará la media de la población universitaria española.

b) Interpreta el significado del intervalo obtenido.

a) Datos: n = 100; $\bar{x}$ = 98 puntos; σ = 15 puntos; $1 - \alpha = 0{,}98 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}33$

$$IC = \left(98 - 2{,}33\ \frac{15}{\sqrt{100}};\ 98 + 2{,}33\frac{15}{\sqrt{100}}\right) = (94{,}505;\ 101{,}495) > (94{,}5;\ 101{,}5)$$

b) Esto significa que el cociente intelectual de los universitarios españoles está entre 94,5 y 101,5, con una probabilidad del 98%.

14.18. (PAU) Un experto en gestión de la calidad quiere estudiar el tiempo promedio que se necesita para hacer tres perforaciones en una pieza metálica. Se calcula el tiempo promedio de una muestra aleatoria de 36 trabajadores, resultando 2,6 segundos. Suponiendo que el tiempo de perforación se distribuye según una normal con desviación típica de 0,3 segundos:

a) Encuentra un intervalo de confianza del 99,4% para dicho tiempo promedio de perforación.

b) Interpreta el significado del intervalo obtenido.

a) Datos: n = 36; $\bar{x}$ = 2,6 segundos; σ = 0,3 segundos; $1 - \alpha = 0{,}994 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}75$

$$IC = \left(2{,}6 - 2{,}75\ \frac{0{,}3}{\sqrt{36}};\ 2{,}6 + 2{,}75\frac{0{,}3}{\sqrt{36}}\right) = (2{,}4625;\ 2{,}7375)$$

b) Esto significa que el tiempo promedio del 94% de las muestras de tamaño 36 estará entre 2,4625 y 2,7375 segundos.

14.19. (PAU) La duración de la batería de cierto modelo de teléfono móvil se puede aproximar por una distribución normal con una desviación típica de 5 meses. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 baterías y se obtienen las siguientes duraciones (en meses):

33, 34, 26, 37, 30, 39, 26, 31, 36, 19

Halla un intervalo de confianza al 95% para la duración media de ese modelo de batería.

Datos: n = 10; $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{10}$ = 31,1 meses; σ = 5 meses; $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

$$IC = \left(31{,}1 - 1{,}96\ \frac{5}{\sqrt{10}},\ 31{,}1 + 1{,}96\frac{5}{\sqrt{10}}\right) = (28;\ 34{,}2)$$

Por tanto, la duración media para esta muestra estará entre 28 y 34,2 meses.

14.20. (PAU) Se desea hacer un estudio de mercado para conocer el precio medio de los libros de texto. Para ello se elige una muestra aleatoria de 121 libros de texto, encontrando que tienen un precio medio de 23 euros. Si se sabe que los precios de los libros de texto siguen una distribución normal con desviación típica de 5 euros:

a) Encuentra un intervalo de confianza al 98,8% para el precio medio de los libros de texto.

b) Interpreta el significado del intervalo obtenido.

a) Datos: n = 121; $\overline{x}$ = 23 €; σ = 5 €; $1 - \alpha = 0{,}988 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}51$

$$IC = \left(23 - 2{,}51\frac{5}{\sqrt{121}}; 23 + 2{,}51\frac{5}{\sqrt{121}}\right) = (21{,}86; 24{,}14)$$

b) Esto significa que el precio promedio del 98,8% de las muestras de tamaño 121 libros estará entre 21,86 y 24,14 euros.

14.21. (PAU) Un estudio realizado sobre 144 usuarios de automóviles revela que la media anual de kilómetros recorridos es de 18 000. Si el número de km recorridos anualmente sigue una distribución normal con desviación típica de 2000 km:

a) Calcula, con una probabilidad del 97%, entre qué valores estará la media del número de km recorridos anualmente por la población total de usuarios de automóviles.

b) Interpreta el significado del intervalo obtenido.

a) Datos: n = 144; $\overline{x}$ = 18 000 km; σ = 2000 km; $1 - \alpha = 0{,}97 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}17$

$$IC = \left(18\,000 - 2{,}17\frac{2\,000}{\sqrt{144}}; 18\,000 + 2{,}17\frac{2\,000}{\sqrt{144}}\right) = (17\,638{,}3; 18\,361{,}7)$$

b) Esto significa que la media de km recorridos por la población de usuarios de esos coches estará entre 17 638,3 y 18 361,7 km, con una probabilidad de 0,97.

Intervalo de confianza para la diferencia de medias

14.22. Se sabe que los pesos medios de los caballos de carreras se distribuyen normalmente, los de la cuadra *A* con una desviación típica de 45 kg, y los de la cuadra *B* con una desviación típica de 51 kg. Se desea estimar la diferencia de pesos medios de los caballos de ambas cuadras; para ello se elige una muestra de 50 caballos de la cuadra *A* y 38 caballos de la cuadra *B*. Se calculan los pesos medios muestrales y se obtiene:

$$\overline{x}_A = 490 \text{ kg} \quad \overline{x}_B = 475 \text{ kg}$$

Halla el intervalo de confianza para la diferencia de medias de pesos al nivel del 95%.

Ganadería *A*: n_1 = 50 caballos; $\overline{x}_1$ = 490 kg; σ_1 = 45 kg

Ganadería *B*: n_2 = 38 caballos; $\overline{x}_2$ = 475 kg; σ_2 = 51 kg

El intervalo de confianza para la diferencia de medias poblacionales con σ_1 y σ_2 conocidas del nivel del 95% viene dado por la expresión: $IC = \left(\overline{x}_1 - \overline{x}_2 \mp 1{,}96\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$.

Sustituyendo los datos se obtiene: $IC = \left(490 - 475 \mp 1{,}96\sqrt{\frac{45^2}{50} + \frac{51^2}{38}}\right) = (-5{,}46; 35{,}46)$.

Por tanto, al nivel del 95%, la diferencia de pesos medios poblacionales de ambas ganaderías se encuentra en el intervalo (–5,5; 35,5) kg.

14.23. Halla el intervalo de confianza al nivel del 90% para la diferencia de salarios medios de los trabajadores y las trabajadoras de una gran empresa:

a) Cuando se ha elegido una muestra de 40 hombres y 35 mujeres, siendo el salario medio de los hombres 1051 €, y el de las mujeres, 1009, y las desviaciones típicas, de 90 y 78 €, respectivamente.

b) Suponiendo que no se conocen las desviaciones típicas poblacionales y se calculan las cuasivarianzas muestrales, que valen $\hat{s}_1^2$ = 87² y $\hat{s}_2^2$ = 76².

a) Datos: Trabajadores: n_1 = 40 personas; $\bar{x}_1$ = 1051 €; σ_1 = 90 €
Trabajadoras: n_2 = 35 personas; $\bar{x}_2$ = 1009 €; σ_2 = 78 €

Al sustituir los datos en el intervalo de confianza para la diferencia de medias poblacionales con σ_1 y σ_2 conocidas del nivel del 90% se obtiene:

$$IC = \left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \mp 1{,}64\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) = \left(1\,051 - 1\,009 \mp 1{,}64\sqrt{\frac{90^2}{40} + \frac{78^2}{35}}\right) = (10{,}19;\ 73{,}81).$$

b) Como σ_1 y σ_2 son desconocidas, el intervalo de confianza para la diferencia de medias viene dado por la expresión: $IC = \left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \mp z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{s}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{s}_2^2}{n_2}}\right)$.

Sustituyendo resulta: $IC = \left(1\,051 - 1\,009 \mp 1{,}64\sqrt{\frac{87^2}{40} + \frac{76^2}{35}}\right)$ = (11,13; 72,87).

14.24. En un estudio sobre hábitos de alimentación en palomas se sabe que la distancia que recorren volando en una pasada en busca de alimento sigue una distribución normal tanto en los machos como en las hembras. Las desviaciones típicas poblacionales son de 80 y 75 metros, respectivamente. Con el fin de estimar la diferencia de medias de distancias recorridas, se toma una muestra formada por 40 machos y 35 hembras, y se determinan las medias muestrales, que son, respectivamente, 230 y 140 metros.

Halla un intervalo de confianza para la diferencia de medias poblacionales al nivel del 95%.

Datos: Machos: n_1 = 40 palomas; $\bar{x}_1$ = 230 palomas; σ_1 = 80 palomas
Hembras: n_2 = 35 palomas; $\bar{x}_2$ = 140 palomas; σ_2 = 75 palomas

Sustituyendo los datos en el intervalo de confianza: $\left(230 - 140 \mp 1{,}96\sqrt{\frac{80^2}{40} + \frac{75^2}{35}}\right)$ = (54,9; 125,1)

14.25. Para el consumo de bombillas se puede elegir entre las marcas *A* y *B*. De una muestra de 120 bombillas de la marca *A* se determinó que la vida media era de 1500 horas, y la desviación típica, de 110 horas. De una muestra de 180 bombillas de la marca *B* se determinó que la vida media era de 1300 horas, y la desviación típica, de 90 horas.

Halla un intervalo de confianza para la diferencia de las vidas medias en las poblaciones de las marcas *A* y *B*.

Datos: Marca *A*: n_1 = 120 bombillas; $\bar{x}_1$ = 1500 horas; σ_1 = 110 horas
Marca *B*: n_2 = 180 palomas; $\bar{x}_2$ = 1300 horas; σ_2 = 90 horas

El enunciado no indica a qué nivel de confianza hay que calcular el intervalo. Si fuera al 95%:

$$IC = \left(1\,500 - 1\,300 \mp 1{,}96\sqrt{\frac{110^2}{120} + \frac{90^2}{180}}\right) = (176{,}33;\ 223{,}67)$$

14.26. Los tiempos de reacción ante la palabra *sorpresa* se distribuyen normalmente tanto entre los adolescentes como entre los adultos. La desviación típica poblacional de dichos tiempos en el caso de los adolescentes es de 6 segundos, y en el de los adultos, de 7 segundos. Con el fin de estimar la diferencia de medias poblacionales, se escoge una muestra formada por 40 adolescentes y 38 adultos, obteniéndose tiempos medios de reacción de 15 y 14 segundos, respectivamente.

Halla un intervalo de confianza para la diferencia de medias al nivel del 90%.

Datos: Adolescentes: $n_1 = 40$; $\bar{x}_1 = 15$ segundos; $\sigma_1 = 6$ segundos
Adultos: $n_2 = 38$; $\bar{x}_2 = 14$ segundos; $\sigma_2 = 7$ segundos

Sustituyendo los datos en el intervalo de confianza para la diferencia de las medias con desviaciones conocidas se obtiene: $IC = \left(15 - 14 \pm 1{,}64\sqrt{\frac{6^2}{40} + \frac{7^2}{38}}\right) = (-1{,}427;\ 3{,}427)$.

Tamaño de una muestra

14.27. (PAU) Para estimar la proporción de habitantes de una ciudad que poseen ordenador personal se toma una muestra de tamaño *n*. Calcula el valor mínimo de *n* para garantizar, con un nivel de confianza del 95%, que el error de estimación no supera el 2%. (Como se desconoce la proporción, se ha de partir del caso más desfavorable, que será 0,5.)

Datos: $\hat{p} = 0{,}5$; $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

Si $E < 0{,}02 \Rightarrow E = z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}} = 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{n}} < 0{,}02 \Rightarrow n > \left(\frac{1{,}96\cdot}{0{,}02}\right)^2\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5 = 2401$

El tamaño muestral debe ser de más de 2401 habitantes.

14.28. (PAU) Se va a realizar una encuesta entre la población española mayor de edad. Si se admite un margen de error del 2%, ¿a cuántas personas habrá que entrevistar con un nivel de confianza del 95%?

Como no se conoce p, se toma $\hat{p} = 0{,}5$.

Para $\alpha = 0{,}05$, $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

El tamaño de la muestra que se obtiene para esta situación es: $n = z_{\frac{\alpha}{2}}^2\,\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{E^2} = (1{,}96)^2\,\frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{0{,}02^2} = 2401$

La muestra debe tener un tamaño superior a 2401 personas.

14.29. (PAU) El tiempo de conexión a internet de los alumnos de cierta universidad sigue una distribución normal con desviación típica de 15 minutos. Para estimar la media del tiempo de conexión, se quiere calcular un intervalo de confianza que tenga una amplitud menor o igual a 6 minutos, con un nivel de confianza del 95%. Determina cuál es el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar.

Se sabe que $\sigma = 15$ minutos.
Para $1 - \alpha = 0{,}95$, $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

Como la amplitud del intervalo de confianza es $2\,z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y es menor o igual que 6, entonces

$E = z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ debe ser menor o igual que 3.

Al sustituir en la expresión del error, resulta: $E = 1{,}96\,\frac{15}{\sqrt{n}} \le 3 \Rightarrow \sqrt{n} \ge 9{,}8 \Rightarrow n \ge 96{,}04$

El tamaño muestral mínimo debe ser 97.

14.30. (PAU) Se estima que el tiempo de reacción de un conductor ante un obstáculo imprevisto tiene una distribución normal con desviación típica de 0,05 segundos. Si se quiere conseguir que el error de estimación de la media no supere los 0,01 segundos con un nivel de confianza del 99%, ¿qué tamaño mínimo ha de tener la muestra de tiempos de reacción?

Datos: σ = 0,05 segundos; E < 0,01 segundos

Para una confianza del 99%, $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}575$.

Sustituyendo en la expresión del error máximo admisible todos los datos, se obtiene:

$$E = 2{,}575\,\frac{0{,}05}{\sqrt{n}} < 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n} > 12{,}875 \quad \Rightarrow \quad n > 165{,}77$$

El tamaño muestral mínimo debe ser 166 conductores.

14.31. (PAU) En una prueba ciclista contrarreloj, la variable aleatoria "tiempo que tarda un corredor en recorrer la distancia de 22 kilómetros" se distribuye normalmente con una desviación típica de 3 minutos. Queremos estimar la media de la población. ¿Cuál es el tamaño mínimo que debería tener la muestra que hemos de tomar si queremos que el nivel de confianza sea del 94% y el error admisible no supere el valor de 0,8?

Datos: σ = 3 minutos; E < 0,8 segundos.

Para una confianza del 94%, $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}88$.

Como $E = z_{\frac{\alpha}{2}}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0{,}8 \Rightarrow E = 1{,}88\,\frac{3}{\sqrt{n}} < 0{,}8 \Rightarrow n > 49{,}7$

Por tanto, el tamaño de la muestra debe ser de 50 o más ciclistas.

14.32. (PAU) Para estimar la proporción de familias de una determinada ciudad que poseen microondas, se quiere utilizar una muestra aleatoria de medida *n*.

Calcula el valor mínimo de *n* para garantizar que, a un nivel de confianza del 95%, el error en la estimación sea menor que 0,05. (Como se desconoce la proporción, se ha de tomar el caso más desfavorable, que será 0,5.)

El error máximo admisible para estimar la proporción, E, viene dado por la expresión:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}05.$$

De ella se deduce que: $n = z^2_{\frac{\alpha}{2}}\,\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{E^2}$

Como se desconoce la proporción de la población, se toma $\hat{p}$ = 0,5.

Para una confianza del 95%, $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

Sustituyendo en la expresión para el tamaño muestral: $n = (1{,}96)^2\,\frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{0{,}05^2} = 384{,}16$.

El tamaño muestral será: n = 385 familias.

PROBLEMAS

14.33. (PAU) Un estudio realizado sobre 100 usuarios revela que un automóvil recorre anualmente un promedio de 15 200 km con una desviación típica de 2250 km.

a) Determina un intervalo de confianza, al 99%, para la cantidad promedio de kilómetros recorridos.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido no sea superior a 500 km, con igual confianza?

a) Datos: $n = 100$; $\overline{x} = 15\ 200$ km; $\sigma = 2250$ km; $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}575$

La expresión del intervalo de confianza para la media poblacional es:

$$IC = \left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Sustituyendo en ella, se obtiene:

$$IC = \left(15\ 200 - 2{,}575 \frac{2\ 250}{\sqrt{100}},\ 15\ 200 + 2{,}575 \frac{2\ 250}{\sqrt{100}} \right) = (14\ 620{,}63;\ 15\ 779{,}38)$$

b) Si el error máximo admisible, E, viene dado por $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y no debe superar los 500 km:

$$E = 2{,}575 \frac{2\ 250}{\sqrt{n}} < 500 \Rightarrow \sqrt{n} > 11{,}5875 \Rightarrow n > 134{,}27$$

Por tanto, la muestra deberá estar compuesta, al menos, por 135 usuarios.

14.34. (PAU) Un psicólogo escolar quiere estimar la media de tiempo de reacción de los alumnos de 1.º de Primaria. Para ello ha elegido una muestra de 35 niños y ha obtenido los siguientes tiempos de reacción, en minutos:

1,3; 0,8; 1,1; 1,0; 1,2; 0,9; 1,5; 0,6; 1,2; 1,4; 1,3; 1,1; 1,2; 1,5; 1,3; 0,9; 1,2; 1,3; 1,1;1,5; 0,8; 0,9; 1,1; 1,2; 1,4; 1,2; 0,9; 1,0; 1,1; 1,0; 1,2; 0,9; 0,8; 1,1; 1,1.

Halla el intervalo de confianza para la media de tiempo de reacción al nivel del 90%.

Se calcula la media y la varianza muestral: $\overline{x} = 1{,}117$ y $\hat{s}^2 = \frac{\sum (x_1 - \overline{x})^2}{n-1} = 0{,}048 \Rightarrow \hat{s} = \sqrt{0{,}048} = 0{,}216$

Como $1 - \alpha = 0{,}90 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}64$

Al ser σ desconocida y $n = 35$ grande, se aproxima mediante $\hat{s}$.

Sustituyendo estos valores en la expresión del intervalo de confianza:

$$IC = \left(1{,}117 \mp 1{,}64 \frac{0{,}216}{\sqrt{35}} \right) = (1{,}057;\ 1{,}177)$$

Por tanto, el tiempo de reacción está entre 1,057 y 1,177 minutos, con una confianza del 90%.

14.35. (PAU) En una encuesta se pregunta a 10 000 personas cuántos libros leen al año, y se obtiene una media de 5 libros. Se sabe que la población tiene una distribución normal con desviación típica 2.

a) Halla un intervalo de confianza al 80% para la media poblacional.

b) Para garantizar un error de estimación de la media poblacional no superior a 0,25 con un nivel de confianza del 95%, ¿a cuántas personas como mínimo sería necesario entrevistar?

a) Datos: n = 10 000; $\bar{x}$ = 5 libros; σ = 2 libros

Para $1 - \alpha = 0{,}80 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}28$

Sustituyendo en la expresión del intervalo de confianza: $IC = \left(5 \mp 1{,}28\,\dfrac{2}{\sqrt{10\ 000}}\right) = (4{,}9744;\ 5{,}0256)$.

b) El error máximo admisible, E, viene dado por $E = z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y es menor que 0,25.

Para una confianza del 95%, $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

Al sustituir en E se obtiene: $E = 1{,}96\,\dfrac{2}{\sqrt{n}} < 0{,}25 \Rightarrow \sqrt{n} > 15{,}68 \Rightarrow n \geq 15{,}68^2 = 245{,}9$

El tamaño muestral mínimo debe ser de 246 personas.

14.36. (PAU) Una muestra aleatoria extraída de una población normal de varianza igual a 100 presenta una media muestral de 160. Sabiendo que el tamaño de la muestra es de 144, se pide:

a) Calcular un intervalo de confianza del 95% para la media poblacional.

b) Calcular un intervalo de confianza del 90% para la media poblacional.

c) Si se quiere tener una confianza del 95% de que el error máximo es de 1,2, ¿cuántas observaciones adicionales deben tomarse?

a) Datos: $n = 144$; $\bar{x} = 160$; $\sigma = 10$

Para $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

Sustituyendo en la expresión del intervalo de confianza: $IC = \left(160 \mp 1{,}96\,\dfrac{10}{\sqrt{144}}\right) = (158{,}37;\ 161{,}63)$

b) Para $1 - \alpha = 0{,}90 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}64$

Sustituyendo en la expresión del intervalo de confianza: $IC = \left(160 \mp 1{,}64\,\dfrac{10}{\sqrt{144}}\right) = (158{,}63;\ 161{,}37)$

c) El error máximo admisible, E, viene dado por $E = z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y es menor que 1,2.

Para una confianza del 95% se obtiene: $E = 1{,}96\,\dfrac{10}{\sqrt{n}} < 1{,}2$

Despejando de la expresión el tamaño muestral se obtiene: $\sqrt{n} > 16{,}33 \Rightarrow n \geq 16{,}33^2 = 266{,}77$

Se deben realizar 267 – 144 = 123 observaciones adicionales.

14.37. Se quiere estudiar el efecto del tratamiento con un medicamento para estabilizar el ritmo cardíaco. Para ello se mide el número de pulsaciones en 40 personas que han seguido el tratamiento y se obtiene que $\bar{x}$ = 65,2, y en 30 personas que no se han sometido al tratamiento, teniéndose $\bar{x}$ = 70,2. La varianza de las personas no tratadas es 5,1, y la de las tratadas, 4,3. Calcula el intervalo de confianza con un 95% de confianza para la diferencia de las medias.

Datos: Con tratamiento: $n_1 = 40$; $\bar{x}_1 = 65,2$; $\sigma_1 = 4,3$; Sin tratamiento: $n_2 = 30$; $\bar{x}_2 = 70,2$; $\sigma_2 = 5,1$

Para una confianza del 95%, $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$. El intervalo de confianza para la diferencia de medias poblacionales

con σ_1 y σ_2 conocidas del nivel del 95% viene dado por la expresión $IC = \left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \mp 1,96\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$.

Al sustituir en ella se obtiene: $IC = \left(65,2 - 70,2 \mp 1,96\sqrt{\frac{4,3}{40} + \frac{5,1}{30}}\right)$ = (–8,73; 136,43)

14.38. (PAU) Las ausencias en días de un empleado de una empresa para un determinado año se aproximan por una distribución normal de media μ días y desviación típica σ = 2 días. Se pretende estimar μ usando la media $\bar{x}$ de las ausencias en ese año de *n* trabajadores seleccionados de forma aleatoria en la empresa.

a) Si suponemos que μ = 6,3 y n = 25, ¿cuál es la probabilidad de que la media muestral $\bar{x}$ esté comprendida entre 6,1 y 6,5 días?

b) ¿Qué tamaño n debería tener la muestra aleatoria para poder estimar μ usando la media muestral $\bar{x}$ con un error máximo (diferencia entre μ y X) de $\pm$0,2 días con una confianza del 95%?

a) La media de las muestras de tamaño *n* obtenidas en una población de media μ y desviación típica σ,

se distribuye según una normal $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.Entonces, la media de las muestras $\bar{X}$ sigue una normal

$N(6,3; 0,4)$.

Tipificando la variable $Z = \frac{\bar{X} - 6,3}{0,4}$:

$P(6,1 < \bar{X} < 6,5) = P\left(\frac{6,1-6,3}{0,4} < Z < \frac{6,5-6,3}{0,4}\right) = P(-0,5 < Z < 0,5) = P(z < 0,5) - P(z < -0,5) =$

$= 2 \cdot 0,6915 - 1 = 0,383$

b) El error máximo admisible, *E*, viene dado por $E = z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, siendo σ la desviación típica poblacional; *n*, el

tamaño muestral, y $z_{\frac{\alpha}{2}}$, el valor crítico. Para una confianza del 95%, $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$, $\sigma = 2$ y $E < 0,2$, se tendrá:

$E = 1,96\frac{2}{\sqrt{n}} < 0,2 \Rightarrow \sqrt{n} > 19,6 \Rightarrow n > 384,16 \Rightarrow$ El tamaño muestral debe ser de al menos 385 días.

14.39. (PAU) Para hacer un estudio sobre el precio/día de una habitación doble en hoteles de cuatro estrellas en una ciudad costera, se elige una muestra de 64 de estos hoteles y se obtiene un precio/día medio de 56 € con una desviación típica de 6 €.

a) Determina el intervalo de confianza para el precio/día medio de una habitación doble en un hotel de cuatro estrellas en esa ciudad con un nivel de confianza del 97%.

b) Halla el tamaño de la muestra que se debe tomar para que el error máximo sea de 2 €, con un nivel de significación del 1%.

a) Datos: $n = 64$; $\bar{x} = 56$ €; $\sigma = 6$ €; para $1 - \alpha = 0,97 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,17$

Sustituyendo en la expresión del intervalo de confianza para la media poblacional, se obtiene:

$IC = \left(\bar{x} \mp z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(56 - 2,17\frac{6}{\sqrt{64}}, 56 + 2,17\frac{6}{\sqrt{64}}\right)$ = (54,3725; 57,6275).

b) Para una significación del 1% (confianza del 99%), $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575$, $\sigma = 6$ y $E < 2$:

$E = 2,575\frac{6}{\sqrt{n}} < 2 \Rightarrow \sqrt{n} > 7,725 \Rightarrow n > 59,7 \Rightarrow$ El tamaño muestral debe ser superior o igual a 60.

14.40. (PAU) Un laboratorio farmacéutico afirma que el número de horas que un medicamento de fabricación propia tarda en curar una determinada enfermedad sigue una variable normal con desviación típica igual a 8. Se toma una muestra de 100 enfermos a los que se les administra el medicamento y se observa que la media de horas que tardan en curarse es igual a 32.

a) Encuentra un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 99%, para la media del número de horas que tarda en curar el medicamento.

b) Si el nivel de significación es igual a 0,05, ¿cuál es el tamaño de la muestra que habría que considerar para estimar el valor de la media con un error menor de 3 horas?

a) Datos: n = 100; $\bar{x}$ = 32 horas; σ = 8 horas; $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}575$

Sustituyendo en la expresión del intervalo de confianza se obtiene:

$IC = \left(32 \mp 2{,}575 \dfrac{8}{\sqrt{100}}\right) = (29{,}94;\ 34{,}06)$.

b) Para una confianza del 95%, $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$, $\sigma = 8$ y $E < 3$: $E = 1{,}96 \dfrac{8}{\sqrt{n}} < 3 \Rightarrow \sqrt{n} > 5{,}2266 \Rightarrow n > 27{,}32$

El tamaño muestral debe ser superior a 27 enfermos.

14.41. (PAU) Un fabricante de electrodomésticos sabe que la vida media de estos sigue una distribución normal con media μ = 100 meses y desviación típica σ = 12 meses. Determina el mínimo tamaño muestral que garantiza, con una probabilidad de 0,98, que la vida media de los electrodomésticos en dicha muestra se encuentre entre 90 y 100 meses.

Como la probabilidad ha de ser 0,98, el nivel de confianza es del 98% y entonces, $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}33$.

La amplitud del intervalo de confianza es de 10 meses; por tanto, $E < 5$:

$E = 2{,}33 \dfrac{12}{\sqrt{n}} < 5 \Rightarrow \sqrt{n} > 5{,}592 \Rightarrow n > 31{,}27$

El tamaño muestral debe ser superior a 31 electrodomésticos.

14.42. (PAU) Se ha tomado una muestra de los precios de un mismo producto alimenticio en 16 comercios, elegidos al azar en un barrio de una ciudad, y se han encontrado los siguientes precios:

95, 108, 97, 112, 99, 106, 105, 100,

99, 98, 104, 110, 107, 111, 103, 110

Suponiendo que los precios de este producto se distribuyen según una normal de varianza 25 y media desconocida:

a) ¿Cuál es la distribución de la media muestral?

b) Determina el intervalo de confianza, al 95%, para la media poblacional.

a) Se calcula la media muestral: $\bar{x}$ = 104.

La media de las muestras $\bar{X}$ se distribuye según una normal $N\left(104, \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}}\right) = N(104;\ 1{,}25)$.

b) Para una confianza del 95%, $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$, y el intervalo es $IC = \left(\bar{x} \mp 1{,}96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Sustituyendo se obtiene: $IC = \left(104 - 1{,}96 \dfrac{5}{\sqrt{16}}; 104 + 1{,}96 \dfrac{5}{\sqrt{16}}\right) = (101{,}55;\ 106{,}45)$.

14.43. (PAU) Tomada al azar una muestra de 60 alumnos de la universidad, se encontró que un tercio hablaban el idioma inglés.

a) Halla, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo para estimar la proporción de alumnos que hablan el idioma inglés entre los alumnos de la universidad.

b) A la vista del resultado anterior se pretende repetir la experiencia para conseguir una cota de error del 0,01 con el mismo nivel de confianza del 90%. ¿Cuántos individuos ha de tener la muestra?

a) Datos: $n = 60$; $\hat{p} = \frac{1}{3}$; $1 - \alpha = 0,90 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645$

Sustituyendo en la expresión del intervalo de confianza:

$$IC = \left(\hat{p} \mp z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right), IC = \left(\frac{1}{3} - 1{,}645\sqrt{\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{60}},\ \frac{1}{3} + 1{,}645\sqrt{\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{60}}\right) = (0{,}23;\ 0{,}43)$$

b) De la expresión del error máximo admisible, $E = z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}$, se deduce: $n = z_{\frac{\alpha}{2}}^2 = \frac{pq}{E^2}$

Como se desea que $E = 0,01 \Rightarrow n = (1,645)^2 \cdot \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{0,01^2} \Rightarrow n = 6013,4$

El tamaño muestral ha de ser al menos de 6014 alumnos.

PARA PROFUNDIZAR

14.44. (PAU) Se desea obtener la media de una variable aleatoria que se distribuye normalmente con una desviación típica de 3,2. Para ello se toma una muestra de 64 individuos obteniéndose una media de 32,5. ¿Con qué nivel de confianza se puede afirmar que la media de la población está entre 31,5 y 33,5?

Si la desviación típica de la población fuera 3, ¿qué tamaño mínimo debería tener la muestra con la cual estimamos la media poblacional si queremos que el nivel de confianza sea del 99%, y el error admisible no supere el valor de 0,75?

Para responder a la primera pregunta, puesto que la media de la población está entre 31,5 y 33,5, la amplitud es de 2 unidades, y el error máximo, de 1 unidad.

La expresión del error máximo admisible es: $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

En este caso, $n = 64$, $\sigma = 3,2$ y $E = 1$. Luego: $1 = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{3,2}{\sqrt{64}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,5$

Para $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,5$ se obtiene de la tabla $N(0, 1)$ el valor de probabilidad, que es 0,9938; entonces,

$\frac{\alpha}{2} = 1 - 0,9938 \Rightarrow \alpha = 0,0124$; $1 - \alpha = 0,9876$. Luego la confianza es del 98,76%.

Para responder a la segunda pregunta, teniendo en cuenta que $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = z_{\frac{\alpha}{2}}^2 \frac{\sigma^2}{E^2}$

Para $\sigma = 3$, $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575$, $1 - \alpha = 0,99$ y $E < 0,75$ se tendrá: $0,75 > 2,575 \frac{3}{\sqrt{n}} \Rightarrow n > (2,575)^2 \frac{3^2}{0,75^2} = 106,09$

Por tanto, el tamaño mínimo debe ser $n = 107$ individuos.

14.45. (PAU) En un instituto de investigaciones dermatológicas se está investigando una afección cutánea de tipo cancerígeno. Se eligen 40 ratas de una misma raza aleatoriamente y se les provoca el cáncer citado; a continuación se las frota con un medicamento. Se elige como variable de respuesta el número de horas que tarda el cáncer en desaparecer. Se obtienen los siguientes resultados: $\overline{x}$ = 10 horas y s = 101 horas. Se admite que la variable de respuesta sigue una distribución normal.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media de la variable de respuesta, al nivel del 90%.

b) Si σ = 99 horas, calcula el intervalo de confianza al 99% para la media de la variable de respuesta elegida.

c) ¿Qué tamaño de muestra se necesita para que, al nivel de confianza del 95%, la longitud del intervalo sea de 5 horas, supuesto σ = 99 horas?

a) Datos: n = 40; $\overline{x}$ = 10; $\hat{s}$ = 101

El intervalo de confianza para la media al nivel del 90% es:

$$IC = \left(\vec{x} \mp 1{,}64\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}\right) = \left(10 \mp 1{,}64\frac{101}{\sqrt{40}}\right) = (-16{,}19;\ 36{,}19)$$

b) El intervalo de confianza para la media al nivel del 99% es:

$$IC = \left(\vec{x} \mp 2{,}58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(10 \mp 2{,}58\frac{99}{\sqrt{40}}\right) = (-30{,}38;\ 50{,}38)$$

c) La longitud del intervalo de confianza da el margen de error. Como la amplitud del intervalo es 5, el error máximo admisible es E = 2,5.

La expresión del tamaño de la muestra es: $n = \left(\dfrac{z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma}{E}\right)^2$

Para $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96 \Rightarrow n = \left(\dfrac{1{,}96 \cdot 99}{2{,}5}\right)^2 = 6024{,}24$ ratas

Se necesitan, al menos, 6025 ratas.

14.46. (PAU) Una encuesta realizada sobre 40 aviones comerciales revela que la antigüedad media de estos es de 13,41 años con una desviación típica muestral de 8,28 años.

a) ¿Entre qué valores, con un 90% de confianza, se encuentra la auténtica media de la flota comercial?

b) Si se quiere obtener un nivel de confianza del 95% cometiendo el mismo error de estimación que en el apartado anterior y suponiendo también que s = 8,28 años, ¿cuántos elementos deberían componer la muestra?

a) La distribución de las medias muestrales de tamaño n obtenidas en una población normal se ajusta a la normal $N\left(\overline{x}, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. En este caso, $N\left(13{,}41; \dfrac{8{,}28}{\sqrt{40}}\right)$: $N(13{,}41;\ 1{,}31)$.

El intervalo de confianza para la media poblacional es: $IC = \left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Si $1 - \alpha = 0{,}90 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645$

Sustituyendo todos los datos se obtiene: $IC = (13{,}41 - 1{,}645 \cdot 1{,}31;\ 13{,}41 + 1{,}645 \cdot 1{,}31) = (11{,}26;\ 15{,}56)$

b) Despejando de $E = z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ se obtiene: $n = z_{\frac{\alpha}{2}}^{\ 2}\dfrac{s^2}{E^2}$

Si $\alpha = 0{,}05$, $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$. Como, además, $s = 8{,}28$ y $E = 2{,}15$, resulta: $n = (1{,}96)^2\dfrac{8{,}28^2}{2{,}15^2} = 56{,}98$

Se deberían revisar 57 aviones.

14.47. (PAU) Un fabricante de lámparas de bajo consumo sabe que el tiempo de duración, en horas, de las lámparas que fabrica sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 180 horas. Con una muestra de dichas lámparas elegida al azar y con un nivel de confianza del 97%, obtuvo para la media el intervalo de confianza (10 072,1; 10 127,9).

a) Calcula el valor que obtuvo para la media de la muestra y el tamaño de muestra utilizado.

b) Si se quiere que el error de su estimación sea como máximo de 24 horas y se utiliza una muestra de tamaño 225, ¿cuál será entonces el nivel de confianza?

a) La media muestral se encuentra en el centro del intervalo dado: $\bar{x} = \dfrac{10\ 072{,}1 + 10\ 127{,}9}{2} = 10\ 100$ horas.

Como $\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 10\ 072{,}1 \Rightarrow 10\ 100 - 2{,}17 \dfrac{180}{\sqrt{n}} = 10\ 072{,}1 \Rightarrow 2{,}17 \dfrac{180}{\sqrt{n}} = 27{,}9 \Rightarrow \sqrt{n} = 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 196$

b) El error viene dado por $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Como $E \leq 24$: $24 \geq z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{180}{\sqrt{225}} \Rightarrow \dfrac{24 \cdot 15}{180} \geq z_{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \dfrac{24 \cdot 15}{180} \geq z_{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} \leq 2$

Por tanto, para el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2$ se tiene que $\dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0{,}9772 \Rightarrow \alpha = 0{,}0456$.

Luego el nivel de confianza será de 1 – 0,0456 = 0,9544, es decir, del 95,44%.

14.48. (PAU) El sueldo, en euros, de los empleados de una fábrica sigue una distribución normal de media μ = 1500 € y desviación típica σ = 400 €. Se elige al azar una muestra de 25 empleados de esa fábrica.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la media de sus sueldos esté comprendida entre 1420 y 1600 euros?

b) Si solo se conoce la desviación típica, σ = 400 €, y desconocemos la media μ de los sueldos de los empleados de esa fábrica, ¿qué tamaño de la muestra deberíamos tomar para estimar μ con un nivel de confianza del 95%, si se admite un error máximo de 100 euros?

a) Sea X la variable que expresa el sueldo, en euros, de los empleados de la fábrica; entonces, X sigue una normal $N(1500, 400)$.

Si $\overline{X}$ es el sueldo medio de 25 empleados de la fábrica, entonces:

$\overline{X} \in N\left(1\ 500, \dfrac{400}{\sqrt{25}}\right) = N(1500, 80)$

$P1420 \leq \bar{x} \leq 1600) = P\left[\dfrac{1\ 420 - 1\ 500}{80} \leq Z \leq \dfrac{1600 - 1\ 500}{80}\right] = P(-1 \leq Z \leq 1{,}25) = 0{,}8413 + 0{,}8944 - 1 =$

$= 0{,}7357$

b) Si $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

Sustituyendo en la expresión del error, $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, se obtiene:

$100 = 1{,}96 \dfrac{400}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 7{,}84 \Rightarrow n = 61{,}47$

Luego hemos de tomar una muestra de, al menos, 62 empleados.

14.49. PAU) Se ha obtenido que el intervalo de confianza correspondiente al 95% de una variable es (6,66; 8,34). Calcula la media y el tamaño de la muestra que se ha estudiado para obtener el intervalo, sabiendo que la desviación típica es igual a 3. Explica cada uno de los pasos realizados.

Datos: $\sigma = 3$; $- \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

Por tanto, el intervalo de confianza para la media poblacional es:

$$IC = \left(\overline{x} - 1{,}96\,\frac{3}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + 1{,}96\,\frac{3}{\sqrt{n}} \right) = (6{,}66;\ 8{,}34)$$

Igualando los extremos de los intervalos, $\begin{cases} \overline{x} - 1{,}96 \cdot \dfrac{3}{\sqrt{n}} = 6{,}66 \\ \overline{x} + 1{,}96 \cdot \dfrac{3}{\sqrt{n}} = 8{,}34 \end{cases}$

Resolviendo este sistema se obtiene: $n = 49$, $\overline{x} = 7{,}5$

14.50. (PAU) En el juzgado de cierta ciudad se presentaron en el año 2005 un total de 5500 denuncias. Se seleccionó una muestra aleatoria de un 5% de ellas. Entre las denuncias seleccionadas se determinó que 55 habían sido producidas por violencia doméstica. Determina, justificando la respuesta:

a) La estimación puntual que podríamos dar por el porcentaje de denuncias por violencia doméstica en esa ciudad en el año 2005.

b) El error máximo que cometeríamos con dicha estimación puntual con un nivel de confianza del 99%.

a) El tamaño muestral fue de $5500 \cdot 0{,}05 = 275$ denuncias. De ellas, 55 habían sido producidas por violencia doméstica; luego la proporción de denuncias por violencia doméstica fue de $\frac{55}{275} = 0{,}20$, el 20%.

b) El error máximo admitido, E, viene dado por $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\,(1 - \hat{p})}{n}}$, siendo $\hat{p} = 20$, $n = 275$ y $z_{\frac{\alpha}{2}}$ el valor de la variable normal correspondiente a una confianza $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}575$

Sustituyendo, $E = 2{,}575 \sqrt{\frac{0{,}20 \cdot 0{,}80}{275}} = 0{,}062$.

Se puede cometer un error máximo del 6,2%. Esto es, el porcentaje de denuncias por violencia doméstica pertenece al intervalo $(0{,}2 - 0{,}062;\ 0{,}2 + 0{,}062) = (0{,}138;\ 0{,}262)$.

Por tanto, estará entre el 13,8% y el 26,2%.

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la única respuesta correcta en cada caso:

14.1. El peso de los bebés recién nacidos se distribuye según una ley normal con desviación típica de 312 gramos. En un estudio estadístico realizado a 169 niños se ha obtenido el intervalo de confianza (3152,96; 3247,04) para el peso medio. Calcula el nivel de confianza con el que se ha construido dicho intervalo.

A) 90%

B) 95%

C) 99%

D) 97%

E) Ninguno de los anteriores

La respuesta correcta es la B.

14.2. En una determinada población se toma una muestra al azar de 256 personas. De esta muestra, el 20% de las personas lleva gafas graduadas y el 80% restante no. Calcula el intervalo de confianza aproximado para la proporción poblacional de las personas que llevan gafas graduadas para un nivel de confianza del 95%.

A) (0,10; 0,30)

B) (0,151; 0,249)

C) (0,124; 0,284)

D) (0,179; 0,274)

E) Ninguno de los anteriores

La respuesta correcta es la B.

14.3. Se sabe que el contenido de fructosa de cierto alimento sigue una distribución normal cuya varianza es conocida teniendo un valor de 0,25. Se desea estimar el valor de la media poblacional mediante el valor de la media de una muestra, admitiéndose un error máximo de 0,2 con una confianza del 95%. ¿Cuál ha de ser el tamaño de la muestra?

A) 21

B) 22

C) 23

D) 24

E) 25

La respuesta correcta es la D.

14.4. Una marca de automóviles asegura que el consumo medio de uno de sus modelos de gasolina es de 9,36 litros por cada 100 kilómetros con una desviación típica de 1,4 litros. Determina el mínimo tamaño muestral que garantiza, con una probabilidad del 0,96, que el consumo medio en dicha muestra está comprendido entre 9,11 y 9,61 litros.

A) 125

B) 131

C) 132

D) 135

E) Ninguno de los anteriores

La respuesta correcta es la E, puesto que el tamaño mínimo muestral para esta situación es 97.

14.5. La media de las medidas de los diámetros de una muestra aleatoria de 200 bolas de rodamiento fabricadas por cierta máquina fue de 0,824 cm, y la desviación típica, de 0,042 cm. Halla los límites de confianza al 95% para el diámetro medio de las bolas fabricadas por esa máquina.

A) (0,7; 0,9)

B) (0,912; 0,993)

C) (0,75; 0,85)

D) (0,818; 0,830)

E) Ninguno de los anteriores

La respuesta correcta es la E.

Señala en cada caso las respuestas correctas:

14.6. Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 individuos a los que se ha medido el nivel de glucosa en sangre, obteniéndose una media muestral de 110 mg/cm^3. Se sabe que la desviación típica de la población es de 20 mg/cm^3 y que el nivel de confianza es del 90%.

a) Obtén un intervalo de confianza al 90% para el nivel de glucosa en sangre en la población.

b) ¿Qué error máximo se comete con la estimación anterior?

A) *IC* = (100, 110)

B) Error máximo *E* = 3,29

C) *IC* = (106,71; 113,29)

D) Error máximo *E* = 3,1

E) Ninguno de los anteriores

Las respuestas correctas son la B y la C.

14.7. Se ha estudiado una muestra formada por 40 niños de 6 años y se ha observado que 15 de ellos dan positivo en una prueba de falta de concentración. Halla el intervalo de confianza al nivel del 95% para el parámetro proporción de positivos ante el test de baja concentración para la población formada por todos los niños españoles de 6 años y el error máximo cometido.

A) *IC* = (0,225; 0,525)

B) Error máximo *E* = 0,15

C) *IC* = (0,342; 0,579)

D) Error máximo *E* = 0,1185

E) Ninguno de los anteriores

La respuesta correcta es la E. El intervalo de confianza es (0,187; 0,48), y el error máximo admisible, 0,293.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas:

14.8. Se tienen dos poblaciones, $N(\mu_1, \sigma_1)$ y $N(\mu_2, \sigma_2)$. Se eligen unas muestras de tamaños n_1 y n_2, siendo las medias muestrales $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$, respectivamente. Para el nivel de confianza de $1 - \alpha$ se tiene:

a) El intervalo de confianza para la diferencia de medias poblacionales con las desviaciones típicas muestrales conocidas es:

$$IC = \left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right)$$

b) El error máximo admitido es:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

A) a $\Leftrightarrow$ b

B) a $\Rightarrow$ b, pero b $\not\Rightarrow$ a

C) b $\Rightarrow$ a, pero a $\not\Rightarrow$ b

D) a y b son excluyentes entre sí.

E) Nada de lo anterior

La respuesta correcta es la B, puesto que el error máximo admitido es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza. Sin embargo, si se conoce el error, lo único que es posible saber es la amplitud del intervalo de confianza, no sus extremos.