

12

INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES

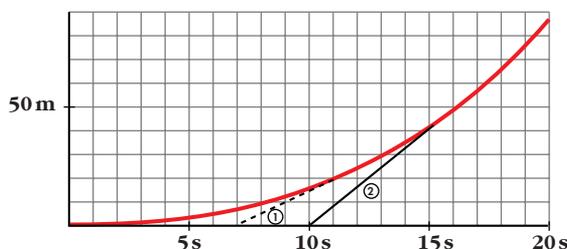
Página 302

PARA EMPEZAR, REFLEXIONA Y RESUELVE

Tomar un autobús en marcha

En la gráfica siguiente, la línea roja representa el movimiento de un autobús que arranca de la parada y va, poco a poco, ganando velocidad.

① y ② corresponden a pasajeros que llegan tarde y corren para coger el autobús en marcha.



a) Al viajero ② lo acercan en bicicleta. Describe su movimiento y halla la velocidad a la que corre.

b) ¿Cuál es la velocidad aproximada del autobús en el momento que lo alcanza el pasajero ②? ¿Entra este pasajero suavemente en el autobús?

a) El pasajero 2 llega a la parada 10 s después de que saliera el autobús, y lo alcanza 6 s después, 50 m más allá.

$$\text{Corrió, por tanto, a } \frac{50}{6} = 8,33 \text{ m/s. Es decir: } 8,33 \cdot 3,6 = 30 \text{ km/h}$$

b) En el instante 15 s está a 43 m de la parada. En el instante 17 s está a 59 m de la parada.

$$\text{Velocidad media} = \frac{16 \text{ m}}{2 \text{ s}} = 8 \text{ m/s} = 28,8 \text{ km}$$

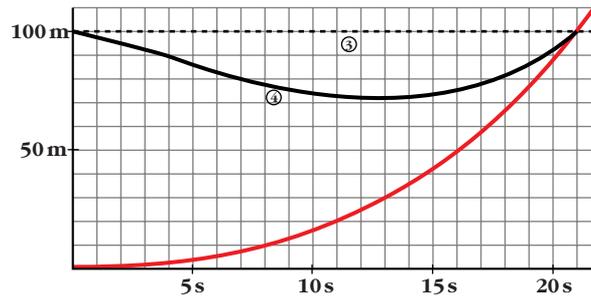
Las velocidades del pasajero 2 y del autobús son, aproximadamente, iguales en el momento en el que el pasajero accede al autobús; por tanto, accederá suavemente.

Página 303

¿Es preferible esperar o correr tras el autobús?

Los viajeros ③ y ④, en el momento de la salida del autobús, estaban a 100 m de la parada. El ③ decide esperarlo y entrar en él cuando pase por allí.

El ④ tiene un extraño comportamiento. ¿Extraño?



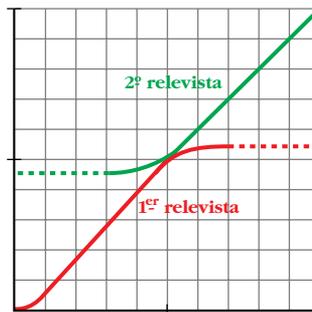
a) Describe el movimiento del pasajero ④.

b) Explica por qué el comportamiento del pasajero ④ es mucho más sensato que el del ③, quien tendrá muy difícil la entrada en el autobús.

- a) Intenta alcanzar aproximadamente la velocidad que lleva el autobús para acceder a él suavemente.
- b) El pasajero 4 accede suavemente al autobús (con la misma velocidad, aproximadamente); sin embargo, el 3 no.

Carrera de relevos

La siguiente gráfica refleja el comportamiento de dos atletas, del mismo equipo, durante una carrera de relevos:



a) ¿Por qué en las carreras de relevos 4×100 m cada relevista echa a correr antes de que llegue su compañero?

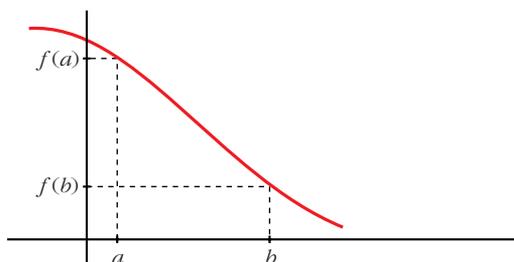
b) ¿Qué pasaría si esperara quieto la llegada del otro?

c) ¿Es razonable que las gráficas de sus movimientos sean tangentes? ¿Cómo son sus velocidades en el momento de la entrega del “testigo”?

- a) Para que el “testigo” pase sin brusquedades del que llega al que se va.
- b) El intercambio sería muy brusco y se perdería tiempo.
- c) Sí, así llevarán los dos la misma velocidad, aproximadamente.

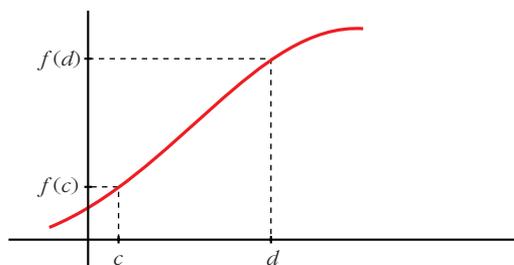
Página 304

1. Dibuja una función y señala dos puntos en ella $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ tales que $a < b$ y $f(b) < f(a)$. Observa en ella que la T.V.M. es negativa.



Vemos que la T.V.M. es negativa, puesto que $T.V.M. = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, siendo en este caso $f(b) - f(a) < 0$ y $b - a > 0$.

2. Dibuja una función en la que puedas señalar dos puntos $(c, f(c))$ y $(d, f(d))$ tales que $c < d$ y $f(c) < f(d)$. ¿Cómo es T.V.M. $[c, d]$?



$T.V.M. [c, d] = \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \rightarrow$
 \rightarrow positiva, ya que $f(d) - f(c) > 0$
y $d - c > 0$.

Página 305

3. Halla la T.V.M. de la función $y = x^2 - 8x + 12$ en los intervalos $[1, 2]$, $[1, 3]$, $[1, 4]$, $[1, 5]$, $[1, 6]$, $[1, 7]$, $[1, 8]$.

$$T.V.M. [1, 2] = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{0 - 5}{1} = -5$$

$$T.V.M. [1, 3] = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-3 - 5}{2} = -4$$

$$T.V.M. [1, 4] = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{-4 - 5}{3} = -3$$

$$T.V.M. [1, 5] = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{-3 - 5}{4} = -2$$

$$T.V.M. [1, 6] = \frac{f(6) - f(1)}{6 - 1} = \frac{0 - 5}{5} = -1$$

$$T.V.M. [1, 7] = \frac{f(7) - f(1)}{7 - 1} = \frac{5 - 5}{6} = 0$$

$$T.V.M. [1, 8] = \frac{f(8) - f(1)}{8 - 1} = \frac{12 - 5}{7} = 1$$

4. Halla la T.V.M. de $y = x^2 - 8x + 12$ en el intervalo variable $[1, 1 + h]$. Comprueba, dando a h los valores adecuados, que se obtienen los resultados del ejercicio anterior.

$$\begin{aligned} \text{T.V.M. } [1, 1 + h] &= \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{(1 + h)^2 - 8(1 + h) + 12 - 5}{h} = \\ &= \frac{h^2 - 6h}{h} = \frac{h(h - 6)}{h} = h - 6 \end{aligned}$$

Dando a h los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 se obtienen los resultados del ejercicio anterior.

Página 308

1. Halla la derivada de $y = 5x - x^2$ en los puntos de abscisas 4 y 5.

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4 + h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(4 + h) - (4 + h)^2 - 4}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{20 + 5h - 16 - h^2 - 8h - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - 3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-h - 3)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (-h - 3) = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(5) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5 + h) - f(5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(5 + h) - (5 + h)^2 - 0}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(5 + h)(5 - 5 - h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-5 - h) = -5 \end{aligned}$$

2. Halla la derivada de $y = \frac{3}{x - 2}$ en los puntos de abscisas 1, -1 y 5.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3/(1 + h - 2)] - (-3)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3/(h - 1)] + 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 + 3h - 3}{(h - 1)h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{h - 1} = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3/(-1 + h - 2)] - (-1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3/(h - 3)] + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 + h - 3}{h(h - 3)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h - 3} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(5) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5 + h) - f(5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3/(5 + h - 2)] - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3/(h + 3)] - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 - h - 3}{h(h + 3)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{h + 3} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

3. Halla la derivada de $y = \frac{1}{x}$ en los puntos de abscisas $-2, -1, 1$ y 2 .

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[1/(-2+h)] - (-1/2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h/(-4-2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h-4} = \frac{-1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[1/(-1+h)] - (-1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h/(h-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h-1} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[1/(1+h)] - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1-1-h)}{h(1+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{1+h} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[1/(2+h)] - (1/2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2-2-h)/2 \cdot (2+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h \cdot (4+2h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{4+2h} = \frac{-1}{4} \end{aligned}$$

4. Halla la derivada de $y = x^2 - 2x$ en los puntos de abscisas $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ y 4 .

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)^2 - 2(-2+h) - 8}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + h^2 - 4h + 4 - 2h - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 6h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h-6)}{h} = -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h)^2 - 2(-1+h) - 3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + h^2 - 2h + 2 - 2h - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h-4)}{h} = -4 \end{aligned}$$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 2h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h-2)}{h} = -2$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 2(1+h) - (-1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + h^2 + 2h - 2 - 2h + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h} = 0 \end{aligned}$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 2(2+h) - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + h^2 + 4h - 4 - 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+2)}{h} = 2$$

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 2(3+h) - 3}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + h^2 + 6h - 6 - 2h - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+4)}{h} = 4$$

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h)^2 - 2(4+h) - 8}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{16 + h^2 + 8h - 8 - 2h - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 6h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+6)}{h} = 6$$

Página 309

1. Halla la derivada de $f(x) = 5x - x^2$ y comprueba que, a partir de ella, se pueden obtener los valores concretos hallados en el ejercicio resuelto 1 y en el ejercicio 1 de la página anterior.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(x+h) - (x+h)^2 - (5x - x^2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5x + 5h - x^2 - h^2 - 2xh - 5x + x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - 2xh + 5h}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-h - 2x + 5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-h - 2x + 5) = -2x + 5$$

Sustituyendo x por los valores indicados, obtenemos:

$$f'(1) = 3 \quad f'(0) = 5 \quad f'(3) = -1 \quad f'(4) = -3 \quad f'(5) = -5$$

2. Halla la derivada de $f(x) = x^3$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 3xh^2 + 3x^2h}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h^2 + 3xh + 3x^2)}{h} = 3x^2$$

3. Halla la derivada de $f(x) = \frac{3}{x-2}$ y comprueba que, a partir de ella, se pueden obtener los valores concretos calculados en el ejercicio resuelto 2 y en el ejercicio 2 de la página anterior.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3/(x+h-2) - 3/(x-2)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x-2) - 3(x+h-2)}{h(x-2)(x+h-2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x-6-3x-3h+6}{h(x-2)(x+h-2)} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h}{h(x-2)(x+h-2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3}{(x-2)(x+h-2)} = \frac{-3}{(x-2)^2}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo x por los valores indicados, obtenemos:

$$f'(4) = -\frac{3}{4} \quad f'(1) = -3 \quad f'(-1) = -\frac{1}{3} \quad f'(5) = -\frac{1}{3}$$

4. Halla la función derivada de $y = x^3 + x^2$.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 + (x+h)^2 - (x^3 + x^2)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + x^2 + 2xh + h^2 - x^3 - x^2}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 + 2x + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2 + 2x + h) = 3x^2 + 2x
 \end{aligned}$$

Página 311

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

$$f'(x) = 6x - 6$$

2. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

3. $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt[3]{5x}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{5}{3\sqrt[3]{5x}}$$

4. $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

$$f(x) = x^{-3/2} \rightarrow f'(x) = -\frac{3}{2} x^{-5/2} = \frac{-3}{2\sqrt{x^5}} = \frac{-3}{2x^2\sqrt{x}}$$

5. $f(x) = \text{sen } x \cos x$

$$f'(x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$$

6. $f(x) = \operatorname{tg} x$

$$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

7. $f(x) = x e^x$

$$f'(x) = e^x + x e^x = e^x(1 + x)$$

8. $f(x) = x \cdot 2^x$

$$f'(x) = 2^x + x \cdot 2^x \cdot \ln 2 = 2^x(1 + x \ln 2)$$

9. $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \log_2 x$

$$f'(x) = 2x \log_2 x + (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 2} = 2x \log_2 x + \frac{(x^2 + 1)}{x \ln 2}$$

10. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1) 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

11. $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 5x + 3}{x}$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 6x - 5)x - (x^3 + 3x^2 - 5x + 3)}{x^2} = \frac{2x^3 + 3x^2 - 3}{x^2} = 2x + 3 - \frac{3}{x^2}$$

12. $f(x) = \frac{\log x}{x}$

$$f'(x) = \frac{[1/(\ln 10)] - \log x}{x^2} = \frac{1 - \ln 10 \log x}{x^2 \ln 10}$$

Página 312

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

13. $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 - 5x + 7)$

$$f'(x) = (2x - 5) \cos(x^2 - 5x + 7)$$

14. $f(x) = \sqrt[3]{(5x + 3)^2} = (5x + 3)^{2/3}$

$$f'(x) = \frac{2}{3} (5x + 3)^{-1/3} \cdot 5 = \frac{10}{3 \sqrt[3]{5x + 3}}$$

15. $f(x) = \text{sen}(3x + 1) \cdot \cos(3x + 1)$

$$f'(x) = 3 [\cos^2(3x + 1) - \text{sen}^2(3x + 1)]$$

16. $f(x) = \frac{\log x^2}{x}$

$$f(x) = \frac{2 \log x}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{2(1 - \ln 10 \log x)}{x^2 \ln 10}$$

17. $f(x) = \cos(3x - \pi)$

$$f'(x) = -3 \text{sen}(3x - \pi)$$

18. $f(x) = \sqrt{1 + 2x}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2x}}$$

19. $f(x) = x e^{2x+1}$

$$f'(x) = e^{2x+1} + x e^{2x+1} \cdot 2 = e^{2x+1} (1 + 2x)$$

20. $f(x) = \frac{\text{sen}(x^2 + 1)}{\sqrt{1 - x^2}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x \sqrt{1 - x^2} \cos(x^2 + 1) + [x \text{sen}(x^2 + 1)] / \sqrt{1 - x^2}}{1 - x^2} = \\ &= \frac{2x(1 - x^2) \cos(x^2 + 1) + x \text{sen}(x^2 + 1)}{\sqrt{(1 - x^2)^3}} \end{aligned}$$

Página 313

1. Calcula la función derivada de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$ y halla:

a) Las pendientes de las rectas tangentes en las abscisas -1 , 1 y 3 .

b) Las ecuaciones de dichas rectas tangentes.

c) Las abscisas de los posibles máximos y mínimos relativos.

d) ¿Es $f(x)$ creciente o decreciente en $x = 2$?

$$f'(x) = 3x^2 - 8x$$

a) 11 , -5 y 3

b) $y = 11(x + 1) - 4$; $y = -5(x - 1) - 2$; $y = 3(x - 3) - 8$

c) $f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$, $x = 8/3$

d) $f'(2) = -4 < 0 \rightarrow$ decreciente

Página 315

1. Representa estas funciones:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$

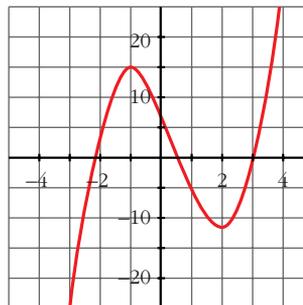
b) $y = -3x^4 + 4x^3 + 36x^2 - 90$

c) $y = x^4 + 4x^3$

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2$

Máximo en $(-1, 15)$.

Mínimo en $(2, -12)$.



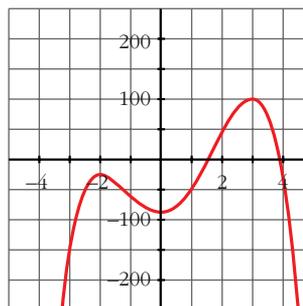
b) $f'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 72x = -12x(x^2 - x - 6) = 0$

$x = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Máximo en $(-2, -26)$ y en $(3, 99)$.

Mínimo en $(0, -90)$.



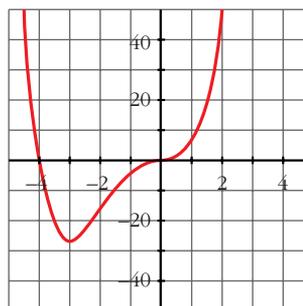
c) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x + 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$

Mínimo en $(-3, -27)$.

Punto de inflexión en $(0, 0)$.

$$f(x) = 0 \rightarrow x^3(x + 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$$

Puntos de corte con los ejes: $(0, 0)$ y $(-4, 0)$



Página 317

1. Representa las siguientes funciones racionales, siguiendo los pasos de la página anterior:

a) $y = \frac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$

b) $y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$

c) $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

$$d) y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$e) y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$$

$$f) y = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

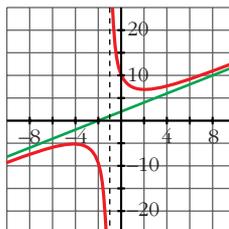
$$a) f'(x) = \frac{(2x + 3)(x + 1) - (x^2 + 3x + 11)}{(x + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2x + 3x + 3 - x^2 - 3x - 11}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 8}{(x + 1)^2} = 0 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -4$$

Máximo en $(-4, -5)$.

Mínimo en $(2, 7)$.

Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntota oblicua: $y = x + 2$

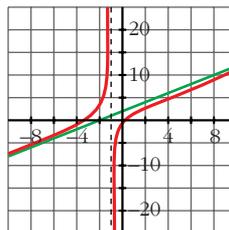


$$b) f'(x) = \frac{(2x + 3)(x + 1) - (x^2 + 3x)}{(x + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2x + 3x + 3 - x^2 - 3x}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x + 1)^2} \neq 0$$

Puntos de corte con los ejes: $(0, 0)$ y $(-3, 0)$

Asíntota vertical: $x = -1$

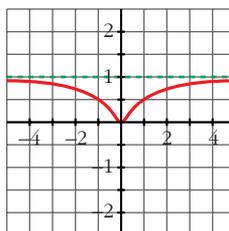
Asíntota oblicua: $y = x + 2$



$$c) f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \rightarrow x = 0$$

Mínimo en $(0, 0)$.

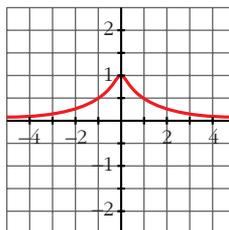
Asíntota horizontal: $y = 1$



$$d) f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} \rightarrow x = 0$$

Máximo en $(0, 1)$.

Asíntota horizontal: $y = 0$



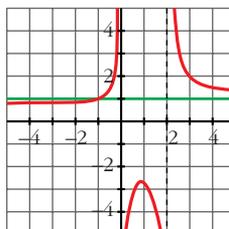
$$\begin{aligned}
 e) f'(x) &= \frac{2x(x^2 - 2x) - (x^2 + 2)(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{2x^3 - 4x^2 - 2x^3 + 2x^2 - 4x + 4}{(x^2 - 2x)^2} = \\
 &= \frac{-2x^2 - 4x + 4}{(x^2 - 2x)^2} = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \begin{cases} x_1 = 0,73 \\ x_2 = -2,73 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Máximo en $(0,73; -2,73)$.

Mínimo en $(-2,73; 0,73)$.

Asíntotas verticales: $x = 0$, $x = 2$

Asíntota horizontal: $y = 1$



f) • Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$

• Asíntota vertical:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{x^2} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x^2} &= -\infty \end{aligned} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

• Asíntota horizontal:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2}; \quad y = 1 \text{ es asíntota horizontal}$$

Cuando $x \rightarrow -\infty$, $y < 1$; y cuando $x \rightarrow +\infty$, $y < 1$.

Por tanto, la curva está por debajo de la asíntota.

• Puntos singulares:

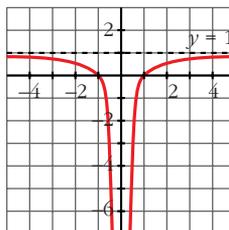
$$f'(x) = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^3 - 2x^3 + 2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$$f'(x) \neq 0 \rightarrow f(x) \text{ no tiene puntos singulares}$$

Observamos que $f'(x) < 0$ si $x < 0$; y que $f'(x) > 0$ si $x > 0$. Luego la función es decreciente en $(-\infty, 0)$ y es creciente en $(0, +\infty)$.

• Corta al eje x en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

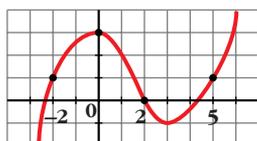
• Gráfica:



EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 **Calcula la tasa de variación media de esta función en los intervalos:**



a) $[-2, 0]$

b) $[0, 2]$

c) $[2, 5]$

a) T.V.M. $[-2, 0] = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{3 - 1}{2} = 1$

b) T.V.M. $[0, 2] = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{0 - 3}{2} = -\frac{3}{2}$

c) T.V.M. $[2, 5] = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{1 - 0}{3} = \frac{1}{3}$

2 **Halla la tasa de variación media de estas funciones en el intervalo $[1, 3]$ e indica si dichas funciones crecen o decrecen en ese intervalo:**

a) $f(x) = 1/x$

b) $f(x) = (2 - x)^3$

c) $f(x) = x^2 - x + 1$

d) $f(x) = 2^x$

• Si la T.V.M. es positiva, la función crece.

T.V.M. $[1, 3] = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{f(3) - f(1)}{2}$

a) T.V.M. $[1, 3] = \frac{1/3 - 1}{2} = -\frac{1}{3} \rightarrow$ Decrece

b) T.V.M. $[1, 3] = \frac{-1 - 1}{2} = -1 \rightarrow$ Decrece

c) T.V.M. $[1, 3] = \frac{7 - 1}{2} = 3 \rightarrow$ Crece

d) T.V.M. $[1, 3] = \frac{8 - 2}{2} = 3 \rightarrow$ Crece

3 **Dada la función $f(x) = x^2 - 1$, halla la tasa de variación media en el intervalo $[2, 2 + h]$.**

T.V.M. $[2, 2 + h] = \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{4 + h^2 + 4h - 1 - 3}{h} = h + 4$

- 4** Comprueba que la T.V.M. de la función $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ en el intervalo $[1, 1 + h]$ es igual a $-h + 3$.

Calcula la T.V.M. de esa función en los intervalos $[1, 2]$, $[1; 1,5]$, utilizando la expresión anterior.

$$\begin{aligned} \text{T.V.M. } [1, 1 + h] &= \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{-(1 + h)^2 + 5(1 + h) - 3 - (-1 + 5 - 3)}{h} = \\ &= 3 - h = -h + 3 \end{aligned}$$

$$\text{T.V.M. } [1, 2] = 2$$

$$\text{T.V.M. } [1; 1,5] = 2,5$$

- 5** Compara la T.V.M. de las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3^x$ en los intervalos $[2, 3]$ y $[3, 4]$ y di cuál de las dos crece más en cada intervalo.

$$\text{Para } f(x): \text{ T.V.M. } [2, 3] = 19$$

$$\text{T.V.M. } [3, 4] = 37$$

$$\text{Para } g(x): \text{ T.V.M. } [2, 3] = 18$$

$$\text{T.V.M. } [3, 4] = 54$$

En $[2, 3]$ crece más $f(x)$.

En $[3, 4]$ crece más $g(x)$.

- 6** Aplicando la definición de derivada, calcula $f'(-2)$ y $f'(3)$, siendo:

$$f(x) = \frac{2x - 3}{5}$$

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} = \frac{\frac{2(-2 + h) - 3}{5} - \frac{7}{5}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4 + 2h - 3 - 7}{5h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \frac{\frac{2(3 + h) - 3}{5} - \frac{3}{5}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6 + 2h - 3 - 3}{5h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

- 7** Halla la derivada de las siguientes funciones en $x = 1$, utilizando la definición de derivada:

a) $f(x) = 3x^2 - 1$

b) $f(x) = (2x + 1)^2$

c) $f(x) = 3/x$

d) $f(x) = 1/(x + 2)$

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(1+h)^2 - 1 - 2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(1+h^2+2h) - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 + 3h^2 + 6h - 3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3h+6)}{h} = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2(1+h)+1)^2 - 9}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2h+3)^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h^2 + 9 + 12h - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4h+12)}{h} = 12 \end{aligned}$$

$$\text{c) } f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3/(1+h) - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 - 3 - 3h}{h(1+h)} = -3$$

$$\begin{aligned} \text{d) } f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+h+2} - \frac{1}{3}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 - h - 3}{3(h+3)h} = -\frac{1}{9} \end{aligned}$$

- 8** Halla el valor del crecimiento de $f(x) = (x-3)^2$ en los puntos $x = 1$ y $x = 3$.

$$f'(x) = 2(x-3)$$

$$f'(1) = -4; \quad f'(3) = 0$$

- 9** Halla la pendiente de la tangente a la curva $y = x^2 - 5x + 1$ en el punto de abscisa $x = -2$.

$$f'(x) = 2x - 5; \quad m = f'(-2) = -9$$

- 10** Halla la pendiente de la tangente a la curva $y = 4x - x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$.

$$f'(x) = 4 - 2x; \quad f'(2) = 0$$

- 11** Comprueba que la función $y = x^2 - 5x + 1$ tiene un punto de tangente horizontal en $x = 2,5$.

$$f'(x) = 2x - 5 = 0 \rightarrow x = 2,5$$

- 12** Comprueba, utilizando la definición, que la función derivada de las siguientes funciones es la que se indica en cada caso:

$$\text{a) } f(x) = 5x \rightarrow f'(x) = 5$$

$$\text{b) } f(x) = 7x^2 \rightarrow f'(x) = 14x$$

$$\text{c) } f(x) = x^2 + x \rightarrow f'(x) = 2x + 1$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{3}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{-3}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(x+h) - 5x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5x + 5h - 5x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5h}{h} = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7(x+h)^2 - 7x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7(x^2 + h^2 + 2xh) - 7x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7h^2 + 14xh}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(7h + 14x)}{h} = 14x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + (x+h) - (x^2 + x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh + x + h - x^2 - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2xh + h}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h + 2x + 1)}{h} = 2x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{x+h} - \frac{3}{x}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3x - 3(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3x - 3x - 3h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-3h}{x(x+h)}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3}{x(x+h)} = \frac{-3}{x^2} \end{aligned}$$

13 Sabiendo que la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ es $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, responde:

a) ¿Cuál es la ecuación de la tangente en $x = 1$?

b) ¿Tiene f puntos de tangente horizontal?

c) ¿Es creciente o decreciente en $x = 4$?

$$\text{a) } m = f'(1) = \frac{1}{2}; \quad g(1) = 1$$

$$\text{La recta es: } y = \frac{1}{2}(x-1) + 1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

b) No, puesto que $f'(x) \neq 0$

$$\text{c) } f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} > 0 \rightarrow \text{Es creciente en } x = 4.$$

- 14** Halla los puntos singulares de la función $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$, de la que conocemos su derivada $y' = 6x^2 - 6x$.

$y' = 0 \rightarrow x = 0, x = 1$. Puntos $(0, 1)$ y $(1, 0)$.

Reglas de derivación

Halla la función derivada de estas funciones y calcula su valor en los puntos que se indican:

- 15** $y = 2x^3 + 3x^2 - 6$; $x = 1$

$$y' = 6x^2 + 6x; \quad y'(1) = 12$$

- 16** $y = \cos(2x + \pi)$; $x = 0$

$$y' = -2 \operatorname{sen}(2x + \pi); \quad y'(0) = 0$$

- 17** $y = \frac{x}{3} + \sqrt{2}$; $x = -\frac{17}{3}$

$$y' = \frac{1}{3}; \quad y'\left(-\frac{17}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

- 18** $y = \frac{1}{7x + 1}$; $x = 0$

$$y' = \frac{-7}{(7x + 1)^2}; \quad y'(0) = -7$$

- 19** $y = \operatorname{sen} \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$; $x = \pi$

$$y' = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right); \quad y'(\pi) = -\frac{1}{2}$$

- 20** $y = \frac{2}{(x + 3)^3}$; $x = -1$

$$y = 2(x + 3)^{-3} \rightarrow y' = -6(x + 3)^{-4} = \frac{-6}{(x + 3)^4}$$

$$y'(-1) = \frac{-6}{16} = \frac{-3}{8}$$

- 21** $y = \frac{x^3}{2} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{2}$; $x = 2$

$$y' = \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}; \quad y'(2) = \frac{23}{2}$$

$$22 \quad y = \frac{1}{\sqrt{x-4}}; \quad x = 8$$

$$y' = \frac{-1}{2\sqrt{(x-4)^3}}; \quad y'(8) = -\frac{1}{16}$$

Página 323

$$23 \quad y = x \operatorname{sen}(\pi - x); \quad x = \frac{\pi}{2}$$

$$y' = \operatorname{sen}(\pi - x) + x \cos(\pi - x) \cdot (-1) = \operatorname{sen}(\pi - x) - x \operatorname{cox}(\pi - x)$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$24 \quad y = (5x - 2)^3; \quad x = \frac{1}{5}$$

$$y' = 15(5x - 2)^2; \quad y'\left(\frac{1}{5}\right) = 15$$

$$25 \quad y = \frac{x+5}{x-5}; \quad x = 3$$

$$y' = \frac{-10}{(x-5)^2}; \quad y'(3) = -\frac{5}{2}$$

Halla la función derivada de estas funciones:

$$26 \quad \text{a) } y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{a) } y' = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{b) } y = (x^2 - 3)^3$$

$$\text{b) } y' = 6x(x^2 - 3)^2$$

$$27 \quad \text{a) } y = \frac{x^3 - x^2}{x^2}$$

$$\text{a) } y' = 1 \quad (\text{si } x \neq 0)$$

$$\text{b) } y = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\text{b) } y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$28 \quad \text{a) } y = \sqrt[3]{(x+6)^2}$$

$$\text{a) } y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+6}}$$

$$\text{b) } y = \operatorname{sen} \sqrt{x}$$

$$\text{b) } y' = \frac{\operatorname{cos} \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

39 a) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

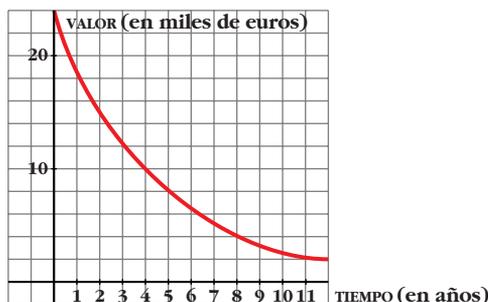
b) $y = \text{arc tg} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$

$$\begin{aligned} \text{a) } y' &= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \left(\frac{2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}}} = \\ &= \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x}(x + \sqrt{x})} = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x^2 + x\sqrt{x}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y' &= \frac{1}{1 + [(1-x)/(1+x)]^2} \cdot \frac{-1(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} = \\ &= \frac{1}{1 + [(1-x)^2/(1+x)^2]} \cdot \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = \\ &= \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2 + (1-x)^2} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2 + (1-x)^2} = \\ &= \frac{-2}{1 + x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x} = \frac{-2}{2x^2 + 2} = \frac{-2}{2(x^2 + 1)} = \frac{-1}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

PARA RESOLVER

40



Los coches, una vez que se compran, empiezan a perder valor: un 20% cada año, aproximadamente. Esta gráfica muestra el valor de un coche desde que se compró hasta 12 años más tarde. Calcula lo que se deprecia el coche en los dos primeros años, entre los años 4 y 6, y entre los años 8 y 10. ¿Es constante la depreciación?

Depreciación: $[0, 2] \rightarrow 9000 \text{ €}$

$[4, 6] \rightarrow 3500 \text{ €}$

$[8, 10] \rightarrow 1500 \text{ €}$

La depreciación no es constante.

41 Halla los puntos en los que la derivada es igual a 0 en las siguientes funciones:

a) $y = 3x^2 - 2x + 1$

b) $y = x^3 - 3x$

a) $y' = 6x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$. Punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

b) $y' = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = -1, x = 1$. Puntos $(-1, 2)$ y $(1, -2)$

42 Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 5x + 6$ en el punto de abscisa $x = 2$.

$y' = 2x - 5$; $m = y'(2) = -1$, $y(2) = 0$

La recta es $y = -(x - 2) = 2 - x$

43 Escribe la ecuación de la tangente a $y = -x^2 + 2x + 5$ en el punto de abscisa $x = -1$.

$y' = -2x + 2$; $m = y'(-1) = 4$, $y(-1) = 2$

La recta es $y = 4(x + 1) + 2 = 4x + 6$

44 Escribe la ecuación de la tangente a $y = x^2 + 4x + 1$, cuya pendiente sea igual a 2.

$y' = 2x + 4 = 2 \rightarrow x = -1$; $y(-1) = -2$

La recta es $y = 2(x + 1) - 2 = 2x$

45 Halla la ecuación de la tangente a la curva $y = \sqrt{x + 1}$ en $x = 0$.

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x + 1}}$; $m = y'(0) = \frac{1}{2}$, $y(0) = 1$

La recta es $y = \frac{1}{2}x + 1$

46 La tasa de variación media de una función $f(x)$ en el intervalo $[3, 3 + h]$ es igual a $\frac{2 - 3h}{h + 1}$. ¿Cuál es el crecimiento de esa función en $x = 3$?

$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - 3h}{h + 1} = 2$

47 Escribe las ecuaciones de las tangentes a la curva $y = x^3 - 3x$ que sean paralelas a la recta $6x - y + 10 = 0$.

• La pendiente de la recta es el coeficiente de x cuando la y está despejada.

$y' = 3x^2 - 3 = 6 \rightarrow x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$. Puntos: $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$

Rectas: $y = 6(x + \sqrt{3})$, $y = 6(x - \sqrt{3})$

- 48** Escribe las ecuaciones de las tangentes a la función $y = 4 - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.

Puntos de corte con el eje de abscisas: $4 - x^2 = 0 \rightarrow x = 2, x = -2$

Puntos $(2, 0)$ y $(-2, 0)$

$$y' = -2x, \quad y'(2) = -4, \quad y'(-2) = 4$$

Las rectas son: • En $x = -2, y = 4x + 8$

• En $x = 2, y = -4x + 8$

Página 324

- 49** Halla los puntos de tangente horizontal de la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$.

$$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \rightarrow x = -1, x = 3.$$

Puntos $(-1, 4)$ y $(3, -28)$.

- 50** ¿En qué puntos de $y = 1/x$ la tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante? ¿Existe algún punto de tangente horizontal en esa función?

$$y' = -\frac{1}{x^2} = -1 \rightarrow x = -1, x = 1. \text{ Puntos } (-1, -1) \text{ y } (1, 1).$$

No existe ningún punto de tangente horizontal, pues $y' = \frac{1}{x^2} = 0$ no tiene solución.

- 51** a) ¿Cuál es la derivada de $y = 2x - 8$ en cualquier punto?
b) ¿Cuánto ha de valer x para que la derivada de $y = x^2 - 6x + 5$ sea igual a 2?
c) ¿En qué punto la recta tangente a la gráfica de la función $y = x^2 - 6x + 5$ es paralela a la recta $y = 2x + 8$?

a) $y' = 2$

b) $y' = 2x - 6 = 2 \rightarrow x = 4$

c) En el punto $(4, -3)$.

- 52** ¿En qué puntos la recta tangente a $y = x^3 - 4x$ tiene la pendiente igual a 8?

$$y' = 3x^2 - 4 = 8 \rightarrow x = -2, x = 2$$

Puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

- 53** Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \frac{2x}{x-1}$ que son paralelas a la recta $2x + y = 0$.

$$y' = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} = -2 \rightarrow (x-1)^2 = 1 \rightarrow x = 0, x = 2$$

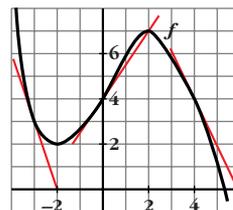
En $(0, 0), y = -2x$

En $(2, 4), y = -2(x-2) + 4 = -2x + 8$

- 54** Halla f' en los puntos de abscisas -3 , 0 y 4 .

• *Halla las pendientes de las tangentes trazadas en esos puntos.*

$$f'(-3) = -3, \quad f'(0) = \frac{3}{2}, \quad f'(4) = -2$$



- 55** Indica, en la gráfica del ejercicio anterior, los puntos en los que la derivada es cero.

En $x = 1$, ¿la derivada es positiva o negativa? ¿Y en $x = 3$?

$$f'(x) = 0 \text{ en } (-2, 2) \text{ y en } (2, 7).$$

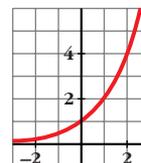
En $x = 1$ la derivada es positiva. En $x = 3$ es negativa.

- 56** ¿Existe algún punto en esta función en el que la derivada sea negativa?

Compara los valores de $f'(-2)$, $f'(2)$ y $f'(0)$.

No, pues es creciente.

$$f'(-2) < f'(0) < f'(2)$$



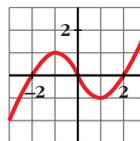
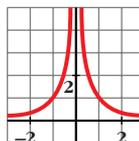
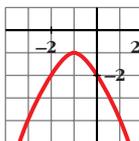
- 57** La ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ es $4x - 3y + 1 = 0$. ¿Cuál es el valor de $f'(2)$? ¿Y el de $f(2)$?

• *Halla la pendiente de esa recta y ten en cuenta su relación con la derivada.*

La recta tangente es $y = \frac{4x + 1}{3}$; su pendiente es $\frac{4}{3} = f'(2)$

$$f(2) = 3$$

- 58** Indica en cada una de estas funciones los valores de x en los que f' es positiva y en los que f' es negativa.



• *Observa su crecimiento y decrecimiento. La primera crece si $x < -1$.*

a) $f' > 0$ si $x < -1$

$$f' < 0 \text{ si } x > -1$$

b) $f' > 0$ si $x < 0$

$$f' < 0 \text{ si } x > 0$$

c) $f' > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$$f' < 0 \text{ si } x \in (-1, 1)$$

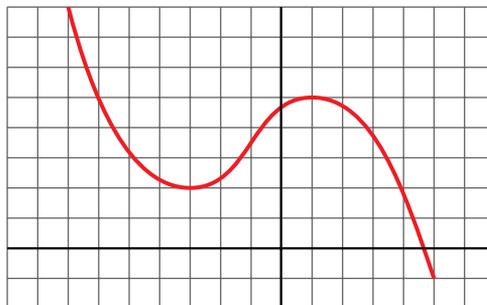
59 Representa una función $y = f(x)$ de la que sabemos:

- Es continua.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- Tiene tangente horizontal en $(-3, 2)$ y en $(1, 5)$.

Indica si los puntos de tangente horizontal son máximos o mínimos.

$(-3, 2)$ es un mínimo.

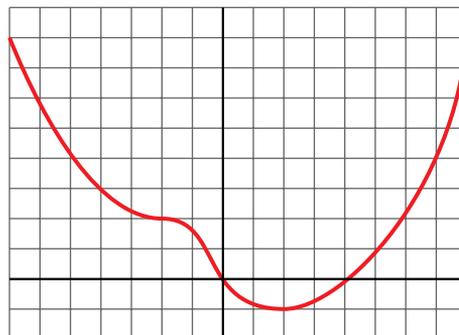
$(1, 5)$ es un máximo.



60 De una función polinómica sabemos que:

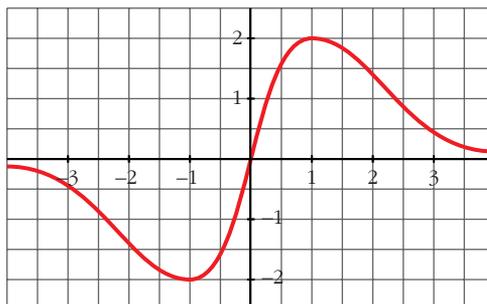
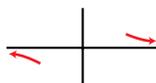
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- Su derivada es 0 en $(-2, 2)$ y en $(2, -1)$.
- Corta a los ejes en $(0, 0)$ y en $(4, 0)$.

Representala gráficamente.



61 Representa la función continua $y = f(x)$ de la que sabemos:

- En los puntos $(-1, -2)$ y $(1, 2)$ la tangente es horizontal.
- Sus ramas infinitas son así:



- 62** Comprueba que la función $y = (x - 1)^3$ pasa por los puntos $(0, -1)$, $(1, 0)$ y $(2, 1)$. Su derivada se anula en el punto $(1, 0)$. ¿Puede ser un máximo o un mínimo ese punto?

$$y'(x) = 3(x - 1)^2: y'(0) = -1 \rightarrow \text{pasa por } (0, -1)$$

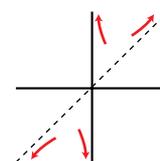
$$y'(1) = 0 \rightarrow \text{pasa por } (1, 0)$$

$$y'(2) = 1 \rightarrow \text{pasa por } (2, 1)$$

$$y'(1) = 0$$

El punto $(1, 0)$ no es ni máximo ni mínimo.

- 63** Comprueba que la función $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ tiene dos puntos de tangente horizontal, $(-1, -2)$ y $(1, 2)$; sus asíntotas son $x = 0$ e $y = x$ y la posición de la curva respecto de las asíntotas es la de la derecha. Representala.



$$y = x + \frac{1}{x}$$

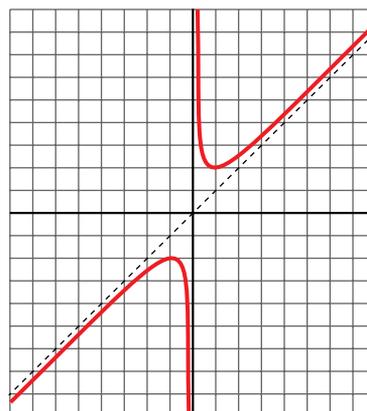
$$y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \rightarrow x = -1, x = 1$$

Puntos $(-1, -2)$ y $(1, 2)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

Asíntota vertical en $x = 0$.

Asíntota oblicua en $y = x$



Página 325

- 64** Comprueba que la función $y = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$:

- Tiene derivada nula en $(0, 0)$.
- La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.
- Posición de la curva respecto a la asíntota:

$$\text{Si } x \rightarrow -\infty, y < 2$$

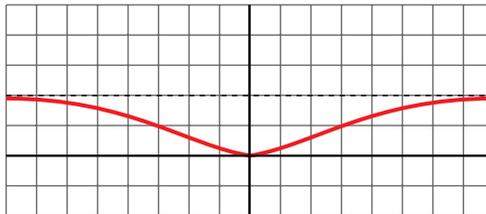
$$\text{Si } x \rightarrow +\infty, y < 2$$

Representala.

$$\bullet y'(x) = \frac{4x(x^2 + 1) - 2x(2x^2)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y'(0) = 0; \quad y(0) = 0$$

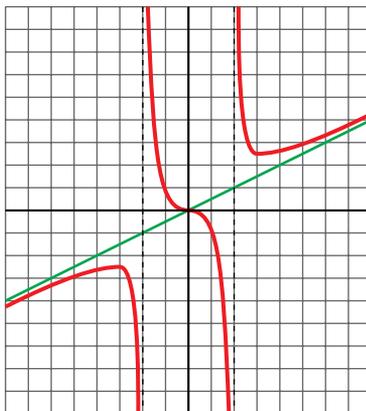
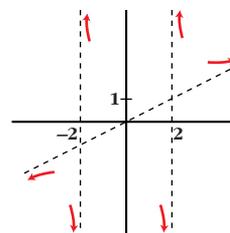
$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2$$



- 65** Completa la gráfica de una función de la que sabemos que tiene tres puntos de tangente horizontal:

$$\left(-3, -\frac{5}{2}\right) \quad (0, 0) \quad \text{y} \quad \left(3, \frac{5}{2}\right)$$

y que sus ramas infinitas son las representadas.



- 66** En cada una de las siguientes funciones, halla los puntos de tangente horizontal y, con ayuda de las ramas infinitas, decide si son máximos o mínimos.

Representálas:

a) $y = x^3 - 3x^2$

b) $y = x^3 - 3x + 2$

c) $y = x^4 + 4x^3$

d) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$

e) $y = 12x - x^3$

f) $y = -x^4 + x^2$

g) $y = x^5 - 6x^3 - 8x - 1$

h) $y = x^4 - 8x^2 + 2$

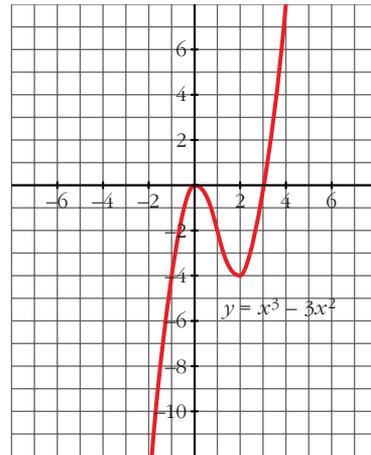
a) $y' = 3x^2 - 6x$

$$y'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = 2 \rightarrow f(2) = -4 \rightarrow (2, -4) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2) = +\infty$$



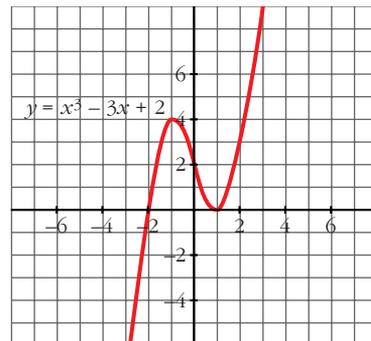
b) $y' = 3x^2 - 3$

$$y'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \rightarrow (1, 0) \\ f(-1) = 4 \rightarrow (-1, 4) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x + 2) = +\infty$$

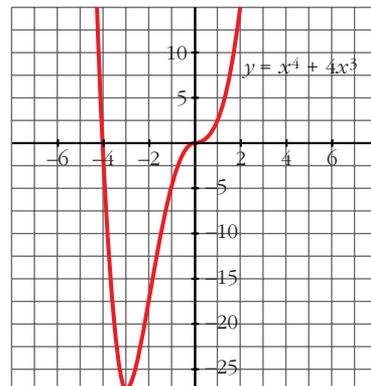


c) $y' = 4x^3 + 12x^2$

$$y'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = -3 \rightarrow f(-3) = -27 \rightarrow (-3, -27) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + 4x^3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 + 4x^3) = +\infty$$



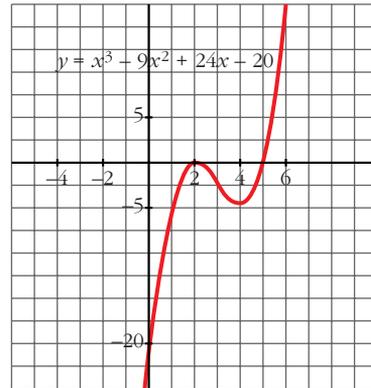
$$d) y' = 3x^2 - 18x + 24; \quad y'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(4) = -4 \rightarrow (4, -4) \\ f(2) = 0 \rightarrow (2, 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 9x^2 + 24x - 20) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 9x^2 + 24x - 20) = +\infty$$

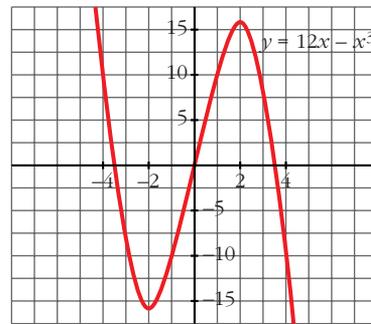


$$e) y' = 12 - 3x^2; \quad y'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$\begin{cases} f(2) = 16 \rightarrow (2, 16) \\ f(-2) = -16 \rightarrow (-2, -16) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (12x - x^3) = +\infty$$

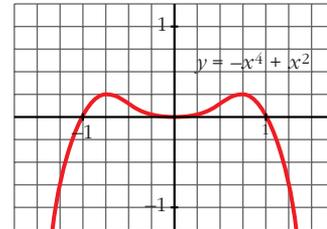
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (12x - x^3) = -\infty$$



$$f) y'(x) = -4x^3 + 2x; \quad y'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4} \rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}\right) \\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4} \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}\right) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 + x^2) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4 + x^2) = -\infty$$

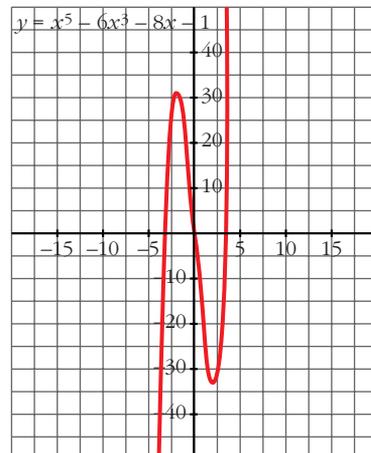


$$g) y' = 5x^4 - 18x^2 - 8; \quad y'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \rightarrow f(2) = -33 \rightarrow (2, -33) \\ x = -2 \rightarrow f(-2) = 31 \rightarrow (-2, 31) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = +\infty$$

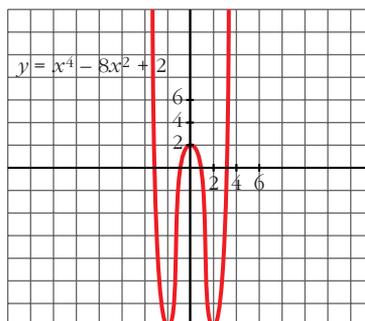


$$h) y' = 4x^3 - 16x; \quad y'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 2 \rightarrow (0, 2) \\ x = 2 \rightarrow f(2) = -14 \rightarrow (2, -14) \\ x = -2 \rightarrow f(-2) = -14 \rightarrow (-2, -14) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = +\infty$$



67 Representa estas funciones hallando los puntos de tangente horizontal y estudiando sus ramas infinitas:

a) $y = x^3 - 2x^2 + x$

b) $y = -x^4 + 2x^2$

c) $y = \frac{x}{x^2 + 5x + 4}$

d) $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

e) $y = \frac{x}{(x + 5)^2}$

f) $y = \frac{2x^2}{x + 2}$

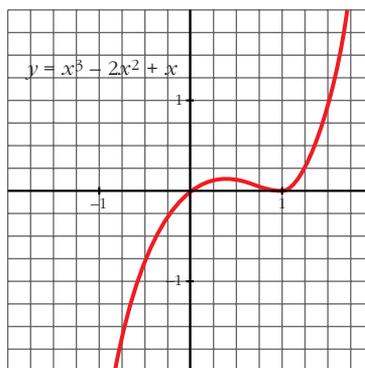
a) $y' = 3x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}, x = 1$

Puntos de tangente horizontal:

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right), (1, 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 2x^2 + x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x^2 + x) = -\infty$$



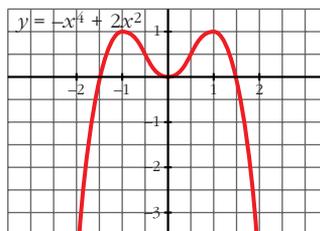
b) $y' = -4x^3 + 4x = -4x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow x = 0, x = 1, x = -1$

Puntos de tangente horizontal:

$$(-1, 1), (0, 0) \text{ y } (1, 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4 + 2x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 + 2x^2) = -\infty$$

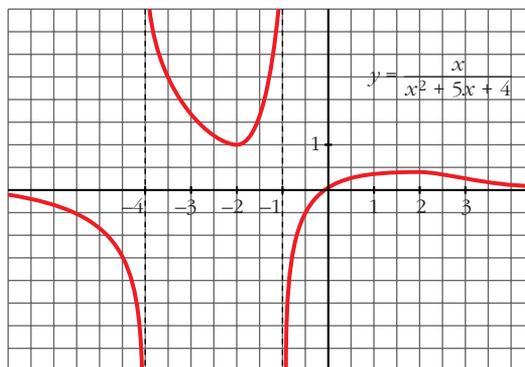


$$c) y' = \frac{x^2 + 5x + 4 - x(2x + 5)}{(x^2 + 5x + 4)^2} = \frac{-x^2 + 4}{(x^2 + 5x + 4)^2} = 0 \rightarrow x = 2, x = -2$$

Puntos de tangente horizontal: $(-2, 1)$, $(2, \frac{1}{9})$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 5x + 4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 5x + 4} = 0$$



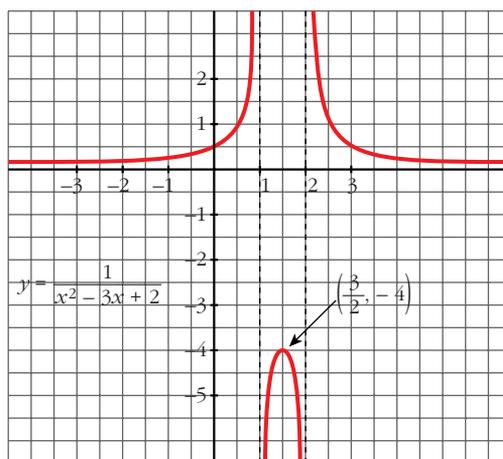
$$d) y' = \frac{-(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2} = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Puntos de tangente horizontal:

$$\left(\frac{3}{2}, -4\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = 0$$

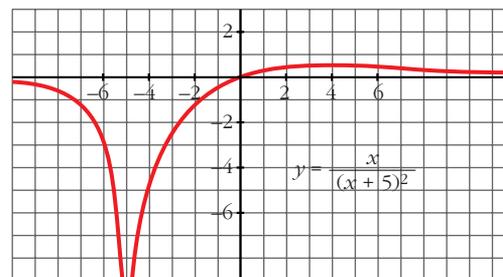


$$e) y' = \frac{(x + 5)^2 - x \cdot 2(x + 5)}{(x + 5)^4} = \frac{5 - x}{(x + 5)^3} = 0 \rightarrow x = 5$$

Puntos de tangente horizontal:

$$\left(5, \frac{1}{20}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x + 5)^2} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(x + 5)^2} = 0$$



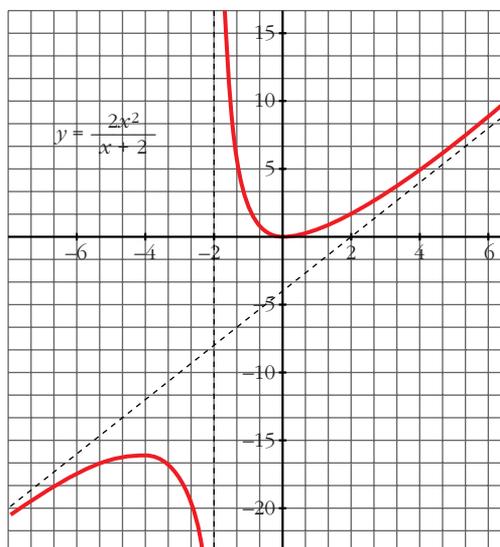
$$f) y' = \frac{4x(x+2) - 2x^2}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 8x}{(x+2)^2} = \frac{2x(x+4)}{(x+2)^2} = 0 \rightarrow x = 0, x = -4$$

Puntos de tangente horizontal:

$$(-4, -16), (0, 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = 2x - 4$$

(asíntota oblicua)



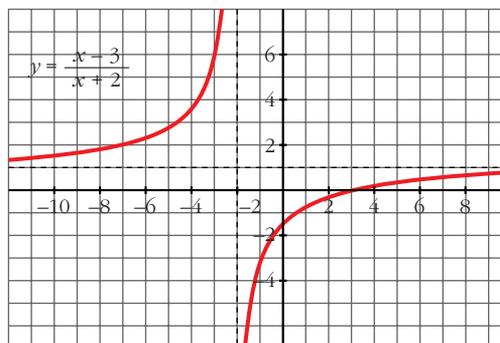
68 Comprueba que estas funciones no tienen puntos de tangente horizontal. Representálas estudiando sus ramas infinitas y los puntos de corte con los ejes:

$$a) y = \frac{x-3}{x+2} \quad b) y = \frac{x^2-1}{x} \quad c) y = \frac{x^3}{3} + 4x \quad d) y = \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$a) y' = \frac{5}{(x+2)^2} \neq 0$$

Los puntos de corte son:

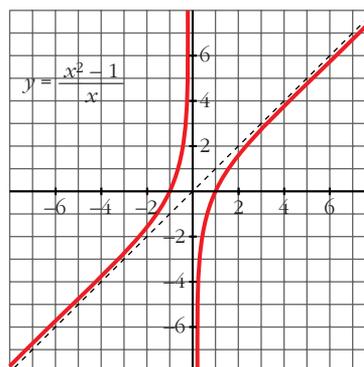
$$\left(0, -\frac{3}{2}\right), (3, 0)$$



$$b) y' = \frac{x^2+1}{x^2} \neq 0$$

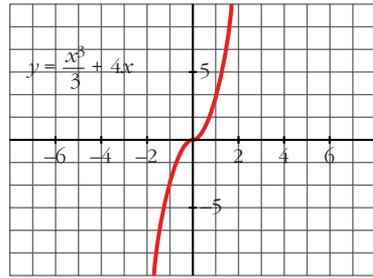
Los puntos de corte son:

$$(1, 0), (-1, 0)$$



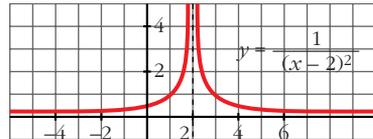
c) $y' = x^2 + 4 \neq 0$

El punto de corte es: $(0, 0)$



d) $y' = \frac{-2}{(x-2)^3} \neq 0$

El punto de corte es: $(0, \frac{1}{4})$



69 Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x}{x^2 - 16}$

b) $y = \frac{x}{1 - x^2}$

c) $y = \frac{x + 2}{x^2 - 6x + 5}$

d) $y = \frac{(x-1)^2}{x+2}$

e) $y = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$

f) $y = \frac{x^2}{1 - x^2}$

g) $y = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$

h) $y = \frac{x^2}{(x-2)^2}$

i) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

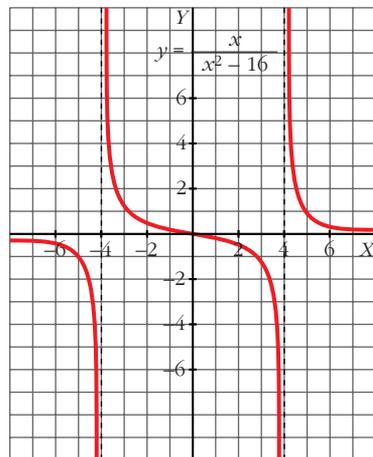
j) $y = \frac{x^2 - 5}{2x - 4}$

a) $y' = \frac{-x^2 - 16}{(x^2 - 16)^2}$

Asíntotas verticales: $x = -4, x = 4$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.

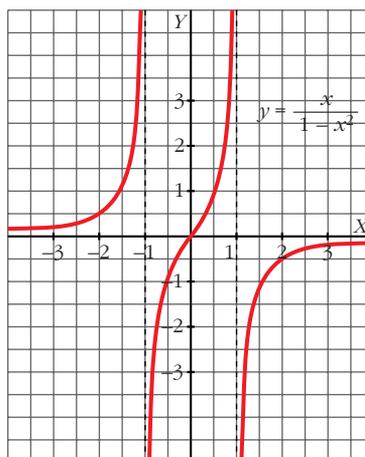


$$b) y' = \frac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2}$$

Asíntotas verticales: $x = 1$, $x = -1$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.



$$c) y' = \frac{-x^2 - 4x + 17}{(x^2 - 6x + 5)^2}$$

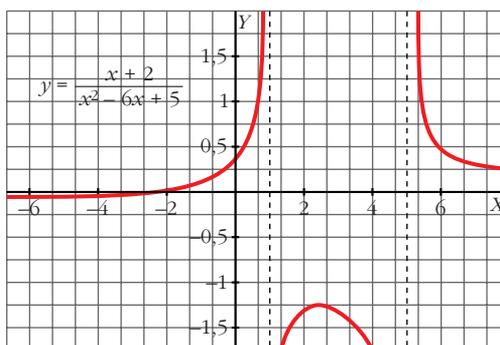
Asíntotas verticales: $x = 5$, $x = 1$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son, aproximadamente:

$(-6,58; -0,052)$, $(2,58; -1,197)$



$$d) y' = \frac{x^2 + 4x - 5}{(x + 2)^2}$$

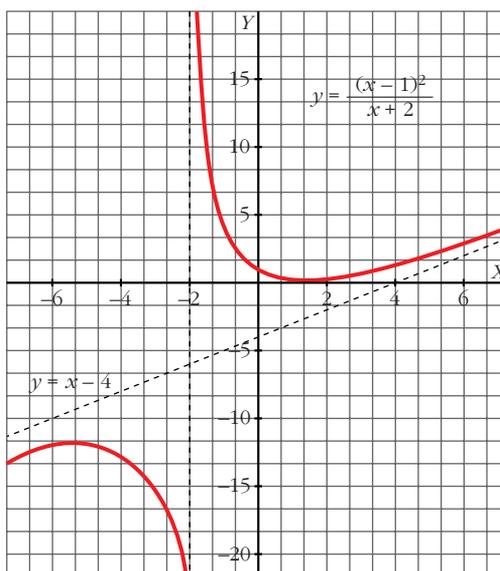
Asíntotas verticales: $x = -2$

Asíntotas oblicuas: $y = x - 4$

No hay asíntotas horizontales.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$(1, 0)$, $(-5, 12)$



$$e) y' = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x + 2)^2}$$

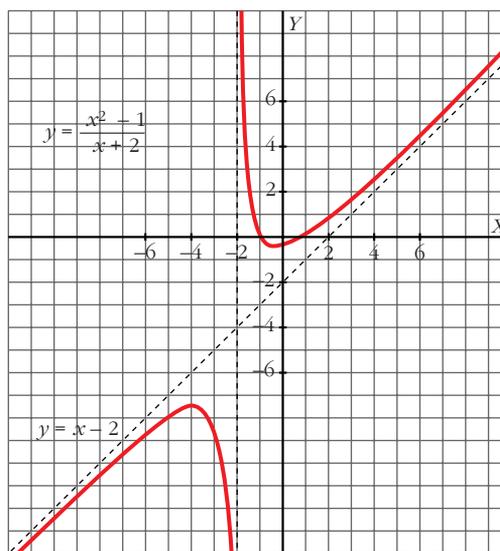
Asíntotas verticales: $x = -2$

Asíntotas oblicuas: $y = x - 2$

No hay asíntotas horizontales.

Sus puntos de tangente horizontal son, aproximadamente:

$(-0,26; -0,54), (-3,73; -7,46)$



$$f) y' = \frac{2x}{(1 - x^2)^2}$$

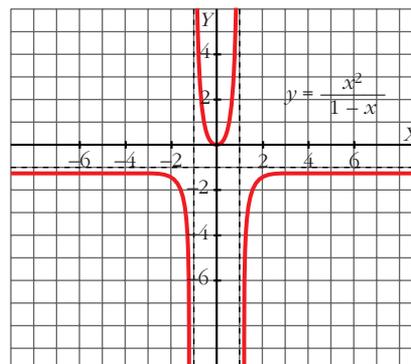
Asíntotas verticales: $x = 1, x = -1$

Asíntotas horizontales: $y = -1$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$(0, 0)$



$$g) y' = \frac{-4x^2 + 6x}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

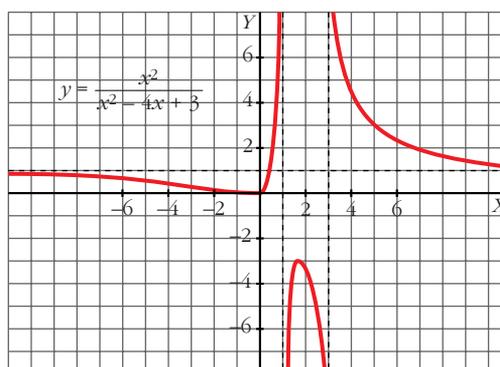
Asíntotas verticales: $x = 3, x = 1$

Asíntotas horizontales: $y = 1$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$(0, 0), \left(\frac{3}{2}, -3\right)$



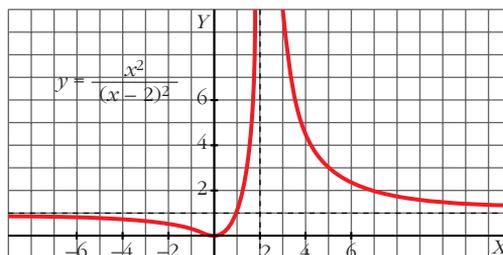
$$h) y' = -\frac{4x}{(x-2)^3}$$

Asíntotas verticales: $x = 2$

Asíntotas horizontales: $y = 1$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son: $(0, 0)$



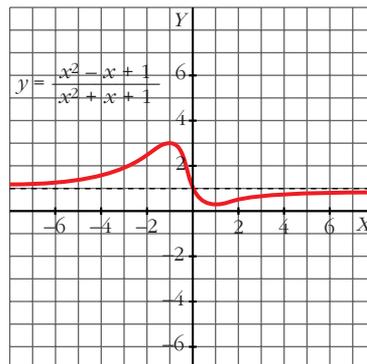
$$i) y' = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$$

Asíntotas horizontales: $y = 1$

No hay asíntotas verticales ni oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$$\left(1, \frac{1}{3}\right), (-1, 3)$$

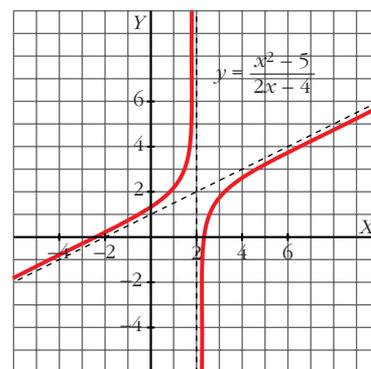


$$j) y' = \frac{2x^2 - 8x + 10}{(2x - 4)^2}$$

Asíntotas verticales: $x = 2$

Asíntotas oblicuas: $y = \frac{x}{2} + 1$

No hay asíntotas horizontales ni puntos de tangente horizontal.



70 Halla una función de segundo grado sabiendo que pasa por $(0, 1)$ y que la pendiente de la recta tangente en el punto $(2, -1)$ vale 0.

• Llama a la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ y ten en cuenta que $f(0) = 1$, $f(2) = -1$ y $f'(2) = 0$.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \rightarrow 1 = c \\ f(2) = -1 \rightarrow -1 = 4a + 2b + c \\ f'(2) = 0 \rightarrow 0 = 4a + b \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{array}$$

La función es $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

- 71** Halla el vértice de la parábola $y = x^2 + 6x + 11$ teniendo en cuenta que en ese punto la tangente es horizontal.

$$f'(x) = 2x + 6 = 0 \rightarrow x = -3$$

Punto $(-3, 2)$.

- 72** Determina la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = 2x - 3$ en el punto $A(2, 1)$ y que pasa por el punto $B(5, -2)$.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = 1 \rightarrow 4a + 2b + c = 1 \\ f'(2) = 2 \rightarrow 4a + b = 2 \\ f(5) = -2 \rightarrow 25a + 5b + c = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 6 \\ c = -7 \end{array}$$

La función es $f(x) = -x^2 + 6x - 7$.

- 73** Halla el valor de x para el que las tangentes a las curvas $y = 3x^2 - 2x + 5$ e $y = x^2 + 6x$ sean paralelas y escribe las ecuaciones de esas tangentes.

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x^2 - 2x + 5 \rightarrow y' = 6x - 2 \\ y = x^2 + 6x \rightarrow y' = 2x + 6 \end{array} \right\} 6x - 2 = 2x + 6 \Rightarrow x = 2$$

Para $y = 3x^2 - 2x + 5$ la tangente en $x = 2$ es:

$$y = 10(x - 2) + 13 \rightarrow y = 10x - 7$$

Para $y = x^2 + 6x$ la tangente en $x = 2$ es:

$$y = 10(x - 2) + 16 \rightarrow y = 10x - 4$$

- 74** Halla a , b y c en $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ de modo que la gráfica de f tenga tangente horizontal en $x = -4$ y en $x = 0$ y que pase por $(1, 1)$.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(-4) = 0 \rightarrow 48 - 8a + b = 0 \\ f'(0) = 0 \rightarrow b = 0 \\ f(1) = 1 \rightarrow 1 + a + b + c = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 6 \\ b = 0 \\ c = -6 \end{array}$$

La función es $f(x) = x^3 + 6x^2 - 6$.

Página 326

- 75** Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $y = 3^{x^2 + 1}$

b) $y = 5^{\sqrt{x}}$

c) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

d) $y = \frac{x}{\ln x}$

e) $y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$

f) $y = \cos^3(2x + 1)$

$$a) y' = 3^{x^2+1} \cdot 2x \cdot \ln 3$$

$$b) y' = 5^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln 5$$

$$c) y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$d) y' = \frac{\ln x - x \cdot 1/x}{(\ln x)^2} = \frac{(\ln x) - 1}{\ln^2 x}$$

$$e) y' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

$$f) y' = 3 \cos^2(2x+1) \cdot (-\sin(2x+1)) \cdot 2 = -6 \cos^2(2x+1) \cdot \sin(2x+1)$$

76 Aplica las propiedades de los logaritmos para derivar las siguientes funciones:

$$a) y = \ln \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

$$b) y = \ln \sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$$

$$c) y = \ln x e^{-x}$$

$$d) y = \log \frac{(3x-5)^3}{x}$$

$$e) y = \log(\operatorname{tg} x)^2$$

$$f) y = \ln x^x$$

$$a) y = \ln(x^2+1) - \ln(x^2-1)$$

$$y' = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{x^4 - 1} = \frac{-4x}{x^4 - 1}$$

$$b) y = \frac{1}{2} [\ln x - \ln(x^2+1)]$$

$$y' = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+1} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2+1-2x^2}{x^3+x} \right] = \frac{1-x^2}{2x^3+2x}$$

$$c) y = \ln x + \ln e^{-x} = \ln x - x$$

$$y' = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

$$d) y = 3 \log(3x-5) - \log x$$

$$y' = 3 \cdot \frac{3}{3x-5} \cdot \frac{1}{\ln 10} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \left[\frac{9}{3x-5} - \frac{1}{x} \right] =$$

$$= \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{9x-3x+5}{(3x^2-5x)} = \frac{6x+5}{\ln 10 (3x^2-5x)}$$

$$e) y = 2 \log (tg x)$$

$$y' = 2 \cdot \frac{1 + tg^2 x}{tg x} \cdot \frac{1}{\ln 10} = \frac{2(1 + tg^2 x)}{tg x \cdot \ln 10}$$

$$f) y = x \ln x$$

$$y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

- 77** Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$, obtén su función derivada y estudia su signo. ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f ? ¿Tiene f máximo o mínimo?

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 1, x = 3$$

$$f'(x) > 0 \rightarrow (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \rightarrow \text{Intervalos de crecimiento.}$$

$$f'(x) < 0 \rightarrow (1, 3) \rightarrow \text{Intervalo de decrecimiento.}$$

Máximo en (1, 8) y mínimo en (3, 4).

- 78** Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 3x^3 - 18x + 1$.

$$f'(x) = 9x^2 - 18 = 9(x^2 - 2)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}$$

$$f'(x) > 0 \rightarrow (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \rightarrow f(x) \text{ creciente}$$

$$f'(x) < 0 \rightarrow (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \rightarrow f(x) \text{ decreciente}$$

- 79** Estudia el crecimiento y el decrecimiento de estas funciones analizando el signo de su derivada:

$$a) y = \frac{x-3}{5}$$

$$b) y = x^2 - 5x + 3$$

$$c) y = \frac{3x^2 - 2x + 1}{4}$$

$$d) y = 1 + 2x - x^2$$

$$e) y = x^3$$

$$f) y = (x + 1)^4$$

$$g) y = (2 - x)^5$$

$$h) y = (3 - x)^3$$

$$a) y' = \frac{1}{5}. \text{ Creciente para todo } x.$$

$$b) y' = 2x - 5. \text{ Decrece en } \left(-\infty, \frac{5}{2}\right). \text{ Crecce en } \left(\frac{5}{2}, +\infty\right).$$

$$c) y' = \frac{3x-1}{2}. \text{ Decrece en } \left(-\infty, \frac{1}{3}\right). \text{ Crecce en } \left(\frac{1}{3}, +\infty\right).$$

$$d) y' = 2 - 2x. \text{ Crecce en } (-\infty, 1). \text{ Decrece en } (1, +\infty).$$

- e) $y' = 3x^2$. Creciente para todo $x \neq 0$.
- f) $y' = 4(x + 1)^3$. Decece en $(-\infty, -1)$. Crece en $(-1, +\infty)$.
- g) $y' = -5(2 - x)^4$. Decreciente para todo $x \neq 2$.
- h) $y' = 3(3 - x)^2 \cdot (-1) = -3(3 - x)^2$; $y' < 0$ para $x \neq 3$; $y' = 0$ en $x = 3$.
La función es decreciente.

CUESTIONES TEÓRICAS

- 80** Calcula la T.V.M. de $f(x) = 3x - 2$ en los intervalos $[-1, 2]$, $[1, 3]$ y $[-3, 4]$. Justifica por qué obtienes el mismo resultado.

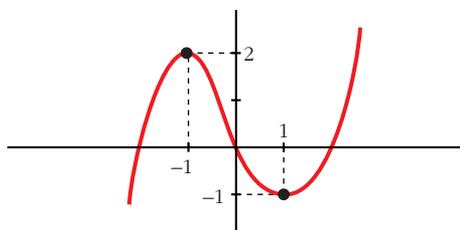
$$\text{T.V.M. } [-1, 2] = \frac{4 + 5}{3} = 3$$

$$\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{7 - 1}{2} = 3$$

$$\text{T.V.M. } [-3, 4] = \frac{10 + 11}{7} = 3$$

T.V.M. = 3 para todos. La función es una recta de pendiente 3.

- 81** Dibuja una función que tenga derivada nula en $x = 1$ y en $x = -1$, derivada negativa en el intervalo $[-1, 1]$ y positiva para cualquier otro valor de x .



- 82** Pon ejemplos de funciones f cuya derivada sea $f'(x) = 2x$. ¿Cuántas existen?

Existen infinitas.

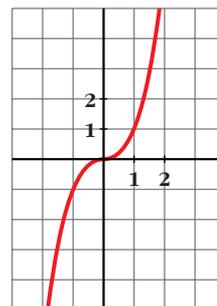
$f(x) = x^2 + k$, donde x es cualquier número.

- 83** Esta es la gráfica de la función $y = x^3$.

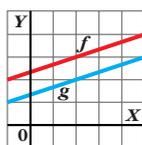
Halla su tangente en $x = 0$ y comprueba que obtienes la recta $y = 0$.

¿Por qué podemos asegurar que el eje de abscisas es la tangente de esa curva en $(0, 0)$?

Porque la ecuación del eje de abscisas es $y = 0$.



84



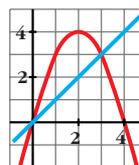
¿Qué relación existe entre f y g ?

¿Y entre f' y g' ?

$$\left. \begin{array}{l} f = g + 1 \\ f' = g' \end{array} \right\} \text{ Son rectas paralelas (de igual pendiente).}$$

85

¿Existe algún punto de la función $y = 4x - x^2$ en que la tangente sea paralela a la recta que pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(3, 3)$? En caso afirmativo, hállalo.



$$\left. \begin{array}{l} y' = 4 - 2x \\ \text{Pendiente de la recta} = 1 \end{array} \right\} 4 - 2x = 1 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\text{Punto} \left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4} \right)$$

86

Demuestra, utilizando la derivada, que la abscisa del vértice de la parábola

$$y = ax^2 + bx + c \text{ es } x = \frac{-b}{2a}.$$

$$y' = 2ax + b = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{2a}$$

87

Si $f'(2) = 0$, ¿cuál de estas afirmaciones es correcta?

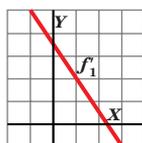
a) La función f tiene máximo o mínimo en $x = 2$.

b) La tangente en $x = 2$ es horizontal.

c) La función pasa por el punto $(2, 0)$.

La correcta es la b).

88



Esta es la gráfica de la función derivada de f_1 .

a) ¿Tiene f_1 algún punto de tangente horizontal?

b) ¿Es creciente o decreciente?

Justifica tus respuestas.

a) Sí, en $x = 2,3$, puesto que $f'_1(2,3) = 0$

b) Si $x < 2,3$ es creciente, pues $f'_1 > 0$; y si $x > 2,3$ es decreciente, pues $f'_1 < 0$.

Página 327

PARA PROFUNDIZAR

- 89** Halla la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto de abscisa 2 aplicando la definición.

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2+h} - \sqrt{2})(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

- 90** Halla los puntos singulares de las siguientes funciones y estudia el crecimiento y decrecimiento para decidir si son máximos o mínimos.

a) $y = x e^x$ b) $y = \frac{x}{e^x}$ c) $y = e^{-x^2}$

a) $y' = (1+x)e^x = 0 \rightarrow x = -1$

$$\left. \begin{array}{l} y' < 0 \text{ si } x < -1 \rightarrow \text{Decrece} \\ y' > 0 \text{ si } x > -1 \rightarrow \text{Crece} \end{array} \right\} \text{Mínimo en } \left(-1, -\frac{1}{e}\right)$$

b) $y' = \frac{1-x}{e^x} = 0 \rightarrow x = 1$

$$\left. \begin{array}{l} y' > 0 \text{ si } x < 1 \rightarrow \text{Crece} \\ y' < 0 \text{ si } x > 1 \rightarrow \text{Decrece} \end{array} \right\} \text{Mínimo en } \left(1, \frac{1}{e}\right)$$

c) $y' = -2x e^{-x^2} = 0 \rightarrow x = 0$

$$\left. \begin{array}{l} y' > 0 \text{ si } x < 0 \rightarrow \text{Crece} \\ y' < 0 \text{ si } x > 0 \rightarrow \text{Decrece} \end{array} \right\} \text{Mínimo en } (0, 1)$$

- 91** Halla la ecuación de la tangente a la curva $y = \ln x$ que es paralela a la recta $y = 3x - 2$.

$$y' = \frac{1}{x} = 3 \rightarrow x = \frac{1}{3}; \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln \frac{1}{3} = -\ln 3$$

$$\text{La recta es } y = 3\left(x - \frac{1}{3}\right) - \ln 3 = 3x - 1 - \ln 3$$

- 92** ¿Cuáles son los puntos singulares de las funciones $y = \sen x$ e $y = \cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$?

$$y = \sen x \rightarrow y' = \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{3\pi}{2}$$

Máximo en $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ y mínimo en $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$.

$$y = \cos x \rightarrow y' = -\operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = 0, x = \pi$$

Máximo en $(0, 1)$ y mínimo en $(\pi, -1)$.

93 ¿Tiene algún punto de tangente horizontal la función $y = \operatorname{tg} x$?

No, puesto que $y' = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0$ para todo x .

94 Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $y = \frac{4 - 2x^2}{x}$

b) $y = \frac{x^3}{3(x + 1)}$

c) $y = \frac{4 + 2x^2 - x^3}{x^2}$

d) $y = \frac{x^4 - 2x^2}{x^2 - 1}$

a) $y' = \frac{-4x^2 - 4 + 2x^2}{x^2} = \frac{-2x^2 - 4}{x^2} \neq 0$

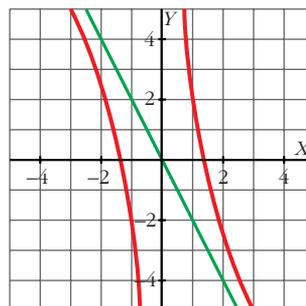
No hay puntos de tangente horizontal.

Puntos de corte con los ejes: $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$

Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$

Asíntota vertical: $x = 0$

Asíntota oblicua: $y = -2x$



b) $y' = \frac{3x^2 \cdot 3(x + 1) - x^3 \cdot 3}{9(x + 1)^2} = \frac{9x^3 + 9x^2 - 3x^3}{9(x + 1)^2} = \frac{6x^3 + 9x^2}{9(x + 1)^2} = \frac{2x^3 + 3x^2}{3(x + 1)^2} =$
 $= \frac{x^2(2x + 3)}{3(x + 1)^2} = 0 \rightarrow x = 0, x = -\frac{3}{2} = -1,5$

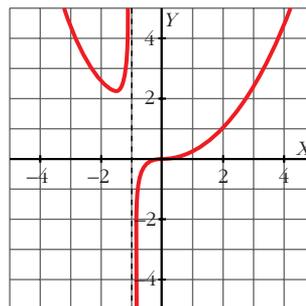
Mínimo en $(-1,5; 2,25)$.

Punto de inflexión en $(0, 0)$.

Puntos de corte con los ejes: $(0, 0)$.

Dominio = $\mathbb{R} - \{-1\}$

Asíntota vertical: $x = -1$



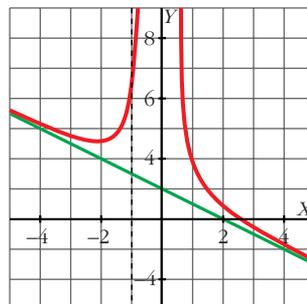
$$\begin{aligned}
 \text{c) } y' &= \frac{(4x - 3x^2)x^2 - (4 + 2x^2 - x^3)2x}{x^4} = \frac{(4x - 3x^2)x - (4 + 2x^2 - x^3)2}{x^3} = \\
 &= \frac{4x^2 - 3x^3 - 8 - 4x^2 + 2x^3}{x^3} = \\
 &= \frac{-x^3 - 8}{x^3} = 0 \rightarrow x = -2
 \end{aligned}$$

Mínimo en $(-2, 5)$.

Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$

Asíntota vertical: $x = 0$

Asíntota oblicua: $y = 2 - x$



$$\begin{aligned}
 \text{d) } y' &= \frac{(4x^3 - 4x)(x^2 - 1) - (x^4 - 2x^2)2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{4x(x^2 - 1)^2 - 2x(x^4 - 2x^2)}{(x^2 - 1)^2} = \\
 &= \frac{2x[2x^4 + 2 - 4x^2 - x^4 + 2x^2]}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x(x^4 - 2x^2 + 2)}{(x^2 - 1)^2} = 0 \rightarrow x = 0
 \end{aligned}$$

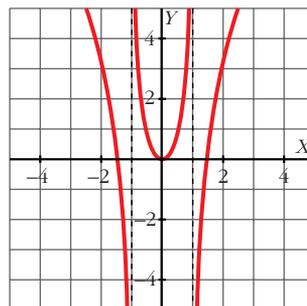
Mínimo en $(0, 0)$.

Puntos de corte con los ejes:

$(0, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$

Dominio = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Asíntotas verticales: $x = -1$, $x = 1$



95 Calcula el punto de corte de las tangentes a las curvas $f(x) = x^2 - 5x + 1$ y $g(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 1$.

Recta tangente a $f(x) = x^2 - 5x + 1$ en $x = 1$:

$$f'(x) = 2x - 5; \quad f'(1) = -3; \quad f(1) = -3$$

$$y = -3(x - 1) - 3 = -3x + 3 - 3 = -3x$$

Recta tangente a $g(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 1$:

$$g'(x) = \frac{-1}{x^2}; \quad g'(1) = -1; \quad g(1) = 1$$

$$y = -1(x - 1) + 1 = -x + 1 + 1 = -x + 2$$

Punto de corte:

$$\left. \begin{aligned} y &= -3x \\ y &= -x + 2 \end{aligned} \right\} -3x = -x + 2; \quad -2x = 2; \quad x = -1; \quad y = 3$$

El punto de corte es $(-1, 3)$.

- 96** Halla los polinomios de segundo grado que pasan por el origen de coordenadas y tienen un mínimo en $x = -\frac{1}{2}$. ¿Cuál de ellos pasa por el punto (5, 4)?

$$f(x) = ax^2 + bx + c; \quad f'(x) = 2ax + b$$

$$f(0) = 0 \rightarrow c = 0$$

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \rightarrow -a + b = 0 \rightarrow b = a; \quad a > 0 \quad (\text{para que sea mínimo}).$$

Son los polinomios de la forma $f(x) = ax^2 + ax$, con $a > 0$.

El que pasa por (5, 4) será:

$$f(5) = 4 \rightarrow 25a + 5a = 4; \quad 30a = 4; \quad a = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

$$f(x) = \frac{2}{15}x^2 + \frac{2}{15}x$$

- 97** Un banco lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad $R(x)$, en miles de euros, viene dada en función de la cantidad que se invierte, x , en miles de euros, por medio de la siguiente expresión:

$$R(x) = -0,001x^2 + 0,04x + 3,5$$

a) ¿Qué cantidad de dinero se debe invertir para obtener la máxima rentabilidad?

b) ¿Qué rentabilidad se obtendrá?

a) $R'(x) = -0,002x + 0,04 = 0 \rightarrow x = 20$

Se deben invertir 20 000 €.

b) $R(20) = 3,9$

Se obtendrán 3 900 € de rentabilidad.

- 98** El coste total de fabricación de q unidades de cierto artículo es:

$$C(q) = 3q^2 + 5q + 75 \text{ dólares}$$

El coste medio por unidad es $M(q) = \frac{C(q)}{q}$.

a) ¿Cuántas unidades se deben fabricar para que el coste medio por unidad sea mínimo?

b) Calcula $C(q)$ y $M(q)$ para el valor de q que has hallado en el apartado a).

a) $M(q) = \frac{3q^2 + 5q + 75}{q}$

$$\begin{aligned} M' &= \frac{(6q + 5)q - (3q^2 + 5q + 75)}{q^2} = \frac{6q^2 + 5q - 3q^2 - 5q - 75}{q^2} = \\ &= \frac{3q^2 - 75}{q^2} = 0 \rightarrow q^2 = 25 \rightarrow q = 5 \text{ unidades} \end{aligned}$$

Se deben fabricar 5 unidades.

b) $C(5) = 175; \quad M(5) = 35$

99 La función $f(x) = \frac{60x}{x^2 + 9}$ indica los beneficios obtenidos por una empresa desde que comenzó a funcionar ($f(x)$ en miles de euros, x en años, $x = 0$ indica el momento de constitución de la empresa).

a) Haz una representación gráfica aproximada de la función teniendo en cuenta el dominio válido en el contexto del problema.

b) ¿Al cabo de cuánto tiempo obtiene la empresa el beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

c) ¿Perderá dinero la empresa en algún momento? ¿Es posible que llegue un momento en que no obtenga beneficios ni pérdidas? Razona la respuesta.

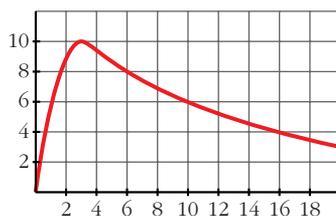
$$a) f'(x) = \frac{60(x^2 + 9) - 60x \cdot 2x}{(x^2 + 9)^2} = \frac{60x^2 + 540 - 120x^2}{(x^2 + 9)^2} = \frac{-60x^2 + 540}{(x^2 + 9)^2} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 3 \quad (x = -3 \text{ no está en el dominio})$$

Máximo en (3, 10)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \rightarrow \text{asíntota horizontal: } y = 0$$

La gráfica sería:



b) Beneficio máximo en $x = 3 \rightarrow$ A los 3 años.

El beneficio sería $f(3) = 10$ miles de euros.

c) No perderá dinero ni llegará un momento en que no obtenga beneficios ni pérdidas, pues $f(x) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x > 0$.

PARA PENSAR UN POCO MÁS

100 Averigua qué función $y = f(x)$ cumple las siguientes condiciones:

a) Su derivada es $f'(x) = 3x^2 + 4x + 5$.

b) Pasa por el punto $(-2, 6)$.

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + k, \text{ donde } k \text{ es constante.}$$

Hallamos el valor de k teniendo en cuenta que:

$$f(-2) = 6 \rightarrow -8 + 8 - 10 + k = 6 \rightarrow k = 16$$

Por tanto:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 16$$

- 101** La ecuación de un movimiento es $e = t^2 - 6t + 9$, $t \geq 3$ (e = recorrido en metros, t = tiempo en segundos).

Halla la ecuación de un movimiento uniforme (velocidad constante) que en el instante $t = 5$ está en el mismo lugar y con la misma velocidad que el anterior.

Representa ambas ecuaciones en un diagrama $e - t$.

Llamamos a la función buscada $f(t) = at + b$

Ha de cumplir que $f(5) = e(5)$ y que $f'(5) = e'(5)$

Como:

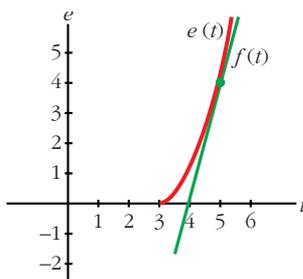
$$f'(t) = a, \quad e'(t) = 2t - 6$$

tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} f(5) = e(5) \rightarrow 5a + b = 4 \\ f'(5) = e'(5) \rightarrow a = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 4 \\ b = -16 \end{array}$$

Luego: $f(t) = 4t - 16$

Las gráficas serían:



Página 328

RESUELVE TÚ

Dejamos mil moscas en una isla en la que no había ninguna y en la cual hay condiciones para que vivan, a lo sumo, 600 000. Cada día, el número de moscas aumenta el 2%.

- Expresa el crecimiento según el modelo exponencial, como si no hubiera limitación.
 - Expresa el crecimiento según el modelo logístico.
 - Compara el número de moscas que habría a los 10, 100, 150, 200, 250, 300 y 400 días según cada modelo y razona sobre las diferencias observadas.
- a) La función exponencial que expresa el crecimiento de la población de moscas es $M_1 = 1000 \cdot (1,02)^t$; t en días.

b) El crecimiento, según el modelo logístico, será:

$$M_2 = 600\,000 \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{600\,000}{1\,000} - 1\right) \cdot (1,02)^{-t}} = 600\,000 \cdot \frac{1}{1 + 599 \cdot (1,02)^{-t}}, \quad t \text{ en días}$$

c)

TIEMPO (días)	M_1 : MODELO EXPONENCIAL	M_2 : MODELO LOGÍSTICO	DIFERENCIA $M_1 - M_2$
10	1 219	1 219	0
100	7 245	7 170	75
150	19 500	18 916	584
200	52 485	48 337	4 148
250	141 268	114 500	26 768
300	380 235	232 979	147 256
400	2 754 664	492 834	2 261 830

En los primeros días (0, 100 y 150) las diferencias son muy pequeñas. A partir de los 250 días se empieza a apreciar una mayor diferencia, siendo bastante grande al cabo de los 300 días. A los 400 días el número de moscas, según el modelo exponencial, no tiene nada que ver con el número de moscas que obtenemos según el modelo logístico (el nivel de saturación está alrededor de los 600 000 ejemplares).