149 DERIVADAS con solución 2º BACH.

- Hallar las derivadas **simplificadas** de las siguientes funciones:

1. $y=3$ $(y'=0)$

2. $y=x$ $(y'=1)$

3. $y=5x$ $(y'=5)$

4. $y=-x$ $(y'=-1)$

5. $y=x^4+x^3+x^2+x+1$ $(y'=4x^3+3x^2+2x+1)$

6. $y= 4x^4-x^3+3x^2-7$ $(y'=16x^3-3x^2+6x)$

7. $y=-\frac{1}{5}x^5+4x^4-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2-3$ $\left(y'=-x^4+16x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right)$

8. $y=3(x^2+x+1)$ $(y'=3(2x+1))$

9. $y=4(3x^3-2x^2+5)+x^2+1$ $(y'=36x^2-14x)$

10. $y=\frac{2x^3-3x^2+4x-5}{2}$ $(y'=3x^2-3x+2)$

11. $y=(x^2+1)\,(2x^3-4)$ $(y'=10x^4+6x^2-8x)$

12. $y=1/x$ $(y'= -1/x^2)$

13. $y=1/x^3$ $(y`= -3/x^4)$

14. $y=1/x^5$ $(y'= -5/x^6)$

15. $y=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}$ $\left(y'=\frac{3x^2-2x-6}{x^4}\right)$

16. $y=\sqrt{x}$ $\left(y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

17. $y=\sqrt[3]{x^2}$ $\left(y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)$

18. $y=\sqrt[5]{x^3}$ $\left(y'=\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}\right)$

19. $y=2\sqrt[3]{x^2}-3x^2+\frac{1}{5}$ $\left(y'=\frac{4}{3\sqrt[3]{x}}-6x\right)$

20. $y=(x+1)^5$ $(y'=5(x+1)^4)$

21. $y=(2x^2-3x+1)^3$ $(y'=3\,(2x^2-3x+1)^2\,(4x-3))$

22. $y=(x^2+1)^{100}$ $(y'=200\,x\,(x^2+1)^{99})$

23. $y=\frac{x+1}{x-1}$ $\left(y'=\frac{-2}{(x-1)^2}\right)$

24. $y=\frac{1}{x^2+1}$ $\left(y'=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}\right)$

25. $y=3\,\frac{2x^2-1}{x^3+1}$ $\left(y'=3\,\frac{-2x^4+3x^2+4x}{(x^3+1)^2}\right)$

26. $y=\left(\frac{2x-3}{x+4}\right)^4$ $\left(y'=\frac{44(2x-3)^3}{(x+4)^5}\right)$

27. $y=\sqrt{x^2+1}$ $\left(y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

28. $y=2\sqrt{x^3-x^2+1}\,(2x^2+3)$ $\left(y'=\frac{14x^4-12x^3+9x^2+2x}{\sqrt{x^3-x^2+1}}\right)$

29. $y=\log x$ $\left(y'=\frac{1}{x}\log_{10}e=\frac{1}{x\ln 10}\right)$

30. $y=\ln x$ $(y'=1/x)$

31. $y=3\log_2 x-4\ln x$ $\left(y'=\frac{-4+3\log_2 e}{x}\right)$

32. $y=\ln(3x^2+4x+5)$ $\left(y'=\frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right)$

33. $y=\ln\sqrt{x^2-1}$ $\left(y'=\frac{x}{x^2-1}\right)$

34. $y=\sqrt{\ln(x^2-1)}$ $\left(y'=\frac{x}{(x^2-1)\sqrt{\ln(x^2-1)}}\right)$

35. $y=2^x$

36. $y=2^{x^2+x+1}$

37. $y=e^{2x^2-3x+5}$

38. $y=e^{-x}$ $(y'= -1/e^x)$

39. $y=e^{1/x}$

40. $y=10^{\sqrt{x}}$ $\left(y'=\frac{10^{\sqrt{x}}\cdot \mathrm{Ln}10}{2\sqrt{x}}\right)$

41. $y=\mathrm{sen}\,2x$

42. $y=\mathrm{sen}\,x^2$

43. $y=\mathrm{sen}^2 x$ $(y'= \mathrm{sen}\,2x)$

44. $y=2\,\mathrm{sen}\,x$

45. $y=\mathrm{sen}(x^2-2x+1)$

46. $y=\cos\sqrt{x}$ $\left(y'=-\frac{\mathrm{sen}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)$

47. $y = 400x - \frac{400\,000}{x^2}$ $\left(y' = 400 + \frac{800\,000}{x^3}\right)$

48. $y=\text{sen}^3(x^2+1)$ $(y'=6x\ \text{sen}^2(x^2+1)\cos(x^2+1))$

49. $y = \text{tg}\frac{1}{x}$ $\left(y' = -\frac{1+\text{tg}^2(1/x)}{x^2}\right)$

50. $y = \text{ctg}(x^2+1)$ $\left(y' = -\frac{2x}{\text{sen}^2(x^2+1)}\right)$

51. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x}$ $(y'=-3x^3+x^2+x+1/x^2)$

52. $y=2/x$ $(y'=-2/x^2)$

53. $y=2\ \text{sen}\ (x^2+1)$ $\left(y' = 4x\cos(x^2+1)\right)$

54. $y=3(x^2-x+1)\ (x^2+x-1)$ $(y'=3(4x^3-2x+2))$

55. $y = \frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{x}+1\right)$ $\left(y' = -\frac{\text{sen}\left(\sqrt{x}+1\right)}{4\sqrt{x}}\right)$

56. $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ $\left(y' = \frac{4x}{(x^2+1)^2}\right)$

57. $y=x/2$ $(y'=1/2)$

58. $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \ln x$ $\left(y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} - \frac{9}{x^4} + \frac{1}{x}\right)$

59. $y=\ln^3(x+1)$ $\left(y' = \frac{3\ln^2(x+1)}{x+1}\right)$

60. $y=(2x^2-1)(x^2-2)(x^3+1)$ $(y'=14x^6-25x^4+8x^3+6x^2-10x)$

61. $y = \sqrt{\frac{1-x^3}{x^2+1}}$ $\left(y' = -\frac{x^4+3x^2+2x}{2\sqrt{(x^2+1)^3}\sqrt{1-x^3}}\right)$

62. $y=\ln^2 x$ $\left(y' = \frac{2\ln x}{x}\right)$

63. $y=\ln x^2$ $(y'=2/x)$

64. $y=(x^2+1)(x+2)^3$ $(y'=5x^4+24x^3+39x^2+28x+12)$

65. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ $\left(y' = \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}\right)$

66. $y = \frac{1}{3x^5 - x^3 + 2}$ $\left(y' = \frac{-15x^4+3x^2}{(3x^5-x^3+2)^2}\right)$

67. $y = \text{Ln}\,\text{sen}\,x$

68. $y = \text{sen}\,\text{Ln}\,x$ $\left(y' = \frac{\cos \text{Ln}\,x}{x}\right)$

69. $y = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 3}$ $\left(y' = \frac{2x^3-2x}{\sqrt{x^4-2x^2+3}}\right)$

70. $y = e^{\text{sen}x}$

71. $y=2\ \text{tg}^3 x$

72. $y = \sqrt{\ln x}$ $\left(y' = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}\right)$

73. $y = 2^{\text{tg}x}$

74. $y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$ $\left(y' = \frac{-2x\sqrt{x^2-1}}{(x^2-1)^2\cdot\sqrt{x^2+1}}\right)$

75. $y = \cos(e^x+1)$

76. $y = \sqrt[5]{x^2}+1$ $\left(y' = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}\right)$

77. $y = \text{tg}\,(1+\text{Ln}^2 x)$ $\left(y' = \frac{2\,\text{Ln}x}{x\cos^2\left(1+\text{Ln}^2 x\right)}\right)$

78. $y = \log(2^x+5)$ $\left(y' = \frac{2^x\,\text{Ln}\,2}{\left(2^x+5\right)\text{Ln}10}\right)$

79. $y = \frac{x^4-2x^2+1}{4}$ $(y'=x^3-x)$

80. $y = \frac{5}{x^4-2x^2+1}$ $\left(y' = \frac{20x-20x^3}{\left(x^4-2x^2+1\right)^2}\right)$

81. $y = 3\ (x+1)^3\ \sqrt[3]{x+1}$ $\left(y' = 10\sqrt[3]{(x+1)^7}\right)$

82. $y=\ln(x-3)$ $\left(y' = \frac{1}{x-3}\right)$

83. $y = 4\ln\sqrt{x}$ $(y'=2/x)$

84. $y = \sqrt{4\ln x}$ $\left(y' = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\right)$

85. $y = x^3\sqrt{x}$ $\left(y' = \frac{7x^2\sqrt{x}}{2}\right)$

86. $y = \sqrt{x}\cdot\ln x$ $\left(y' = \frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\right)$

87. $y = \ln\frac{x-1}{x+2}$ $\left(y' = \frac{3}{(x+2)(x-1)}\right)$

88. $y=\ln(x+1)\cdot\log(x-1)$ $\left(y' = \frac{\log(x-1)}{x+1} + \frac{\ln(x+1)\log e}{x-1}\right)$

89. $y=\ln(\ln x)$ $\left(y' = \frac{1}{x\ln x}\right)$

90. $y = \frac{3}{\ln(x^2+1)}$ $\left(y' = -\frac{6x}{(x^2+1)\ln^2(x^2+1)}\right)$

91. $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x+2}}$ $\left(y' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+2)^4}}\right)$

92. $y = 3\ \frac{(x-1)^2(x+2)}{x+1}$ $\left(y' = 3\ \frac{2x^3+3x^2-5}{(x+1)^2}\right)$

93. $y = 7\ \frac{3x^2-5}{\ln(3x^2-5)}$ $\left(y' = \frac{42x\left[-1+\ln(3x^2-5)\right]}{\ln^2(3x^2-5)}\right)$

94. $y = e^{x^2}$ $\left(y' = e^{x^2}\cdot 2x\right)$

95. $y=x\cdot e^x$ $(y'=(x+1)\cdot e^x)$

96. $y = \frac{t^2+2t}{e^t}$ $\left(y' = \frac{t^2+4t+2}{e^t}\right)$

97. $y=\dfrac{e^x}{x}$ $\left(y'=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}\right)$

98. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$ $\left(y'=\dfrac{\ln x-2}{2\sqrt{x}\,\ln^2 x}\right)$

99. $y=\dfrac{2x+4}{\sqrt{x+3}}$ $\left(y'=\dfrac{x+4}{(x+3)\sqrt{x+3}}\right)$

100. $y=\text{arc sen}\,(x^2-4)$ $\left(y'=\dfrac{2x}{\sqrt{-x^4+8x^2-15}}\right)$

101. $y=\text{arc cos}\,\dfrac{1}{x}$ $\left(y'=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\right)$

102. $y=\dfrac{-6x^2+72x+4}{(6-x)^2}$ $\left(y'=\dfrac{440}{(6-x)^3}\right)$

103. $y=2(\sqrt{x}-\text{arc tg}\sqrt{x})$ $\left(y'=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\right)$

104. $y=\text{arc tg}\,\dfrac{2x^3-1}{x^2-2}$ $\left(y'=\dfrac{2x^4-12x^2+2x}{4x^6+x^4-4x^3-4x^2+5}\right)$

105. $y=(x^3-4x^2+7x-6)e^x$ $\left(y'=(x^3-x^2-x+1)e^x\right)$

106. $y=\text{arc sen}\,\sqrt{1-x^2}$ $\left(y'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

107. $y=\dfrac{1}{2}\text{arc tg}\,e^{x^2}$ $\left(y'=\dfrac{x\,e^{x^2}}{1+e^{2x^2}}\right)$

108. $y=\text{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$ $\left(y'=\dfrac{1}{1+x^2}\right)$

109. $y=\text{Ln cos}\,(\text{arc tg}\,x)$ $\left(y'=-\dfrac{x}{1+x^2}\right)$

110. $y=-\text{Ln}\sqrt{x^2+1}$ $\left(y'=-\dfrac{x}{1+x^2}\right)$

111. $y=\dfrac{\ln x}{x^3}$ $\left(y'=\dfrac{1-3\ln x}{x^4}\right)$

112. $y=\ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ $\left(y'=\dfrac{1}{1-x^2}\right)$

113. $y=\text{arc sen}\,\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $\left(y'=-\dfrac{1}{x\sqrt{x-4}}\right)$

114. $y=\sqrt{x^2+1}\,(x^2-1)^2$ $\left(y'=\dfrac{5x^5-2x^3-3x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

115. $y=\dfrac{1}{3}\text{arc tg}\,e^x$ $\left(y'=\dfrac{e^x}{3(1+e^{2x})}\right)$

116. $y=\dfrac{x^2+5}{x^2-4}$ $\left(y'=\dfrac{-18x}{(x^2-4)^2}\right)$

117. $y=\text{arc sen}\,(x^2+1)$ $\left(y'=\dfrac{2}{\sqrt{-x^2-2}}\right)$

118. $y=\text{arc cos}\,\sqrt{x}$

119. $y=\dfrac{1}{3x^3}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x}+5$ $\left(y'=-\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{3}{x^2}\right)$

120. $y=\text{arc tg}\,\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ $\left(y'=\dfrac{-2x}{x^4+1}\right)$

121. $y=\sqrt[3]{(x^3+1)^4}$ $\left(y'=4x^2\sqrt[3]{x^3+1}\right)$

122. $y=(x+2)\ln(x+2)$ $(y'=1+\ln(x+2))$

123. $y=\sqrt{x^2+1}\,(x^2+1)^2$ $\left(y'=5x\sqrt{(x^2+1)^3}\right)$

124. $y=(2x+1)^3\sqrt[3]{3x-1}$

125. $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ $\left(y'=-\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}(x-1)^2}\right)$

126. Dada $y=\dfrac{x^2-1}{x^3}$, hallar y', y'' e y''' $\left(y'=\dfrac{3-x^2}{x^4};\ y''=\dfrac{2x^2-12}{x^5};\ y'''=\dfrac{60-6x^2}{x^6}\right)$

■ Derivación implícita:

Hallar, por derivación implícita, la derivada de las siguientes funciones:

127. $y^2+2xy+5=0$ $\left(y'=\dfrac{-y}{x+y}\right)$

128. $x^2y+xy^2=y+1$ $\left(y'=\dfrac{y^2+2xy}{-x^2-2xy+1}\right)$

129. $x^2+y^2-xy=3$ $\left(y'=\dfrac{2x-y}{x-2y}\right)$

130. $xy^2=x^2+y$ $\left(y'=\dfrac{2x-y^2}{2xy-1}\right)$

131. $xy^2+x^2y-\frac{1}{x}+y=5$ $\left(y'=-\frac{x^2y^2+2x^3y+1}{2x^3y+x^4+x^2}\right)$

132. $x^2+2xy+y^2=4$ $(y'=-1)$

Hallar, por derivación implícita, la derivada de las siguientes funciones, en los puntos que se indican:

133. $x^3-y^3=y$ en P(1,0) $\left(y'=\frac{3x^2}{3y^2+1};\ y'(P)=3\right)$

134. $x^2+y^2+x+y=16$ en Q(−1,−1/2) $\left(y'=-\frac{2x+1}{2y+1};\ y'(Q)=\nexists\right)$

135. $xy^2+\frac{y}{2}=x+1$ en el origen $\left(y'=\frac{2-2y^2}{4xy+1};\ y'(O)=2\right)$

136. $2y-x+3xy^2=5$ en el punto de ordenada y=0 ¿De qué punto se trata? $\left(y'=\frac{1-3y^2}{2+6xy};\ y'(P)=\frac{1}{2};\ P(5,0)\right)$

■ Derivación logarítmica:

Hallar, por derivación logarítmica, la derivada de las siguientes funciones:

137. $y=x^x$ $(y'=(1+\ln x)\,x^x)$

138. $y=x^{1/x}$ $\left(y'=(1-\ln x)\,x^{1-2x/x}\right)$

139. $y=(\text{sen } x)^{\text{sen } x}$ $(y'=[\cos x \ln(\text{sen } x)+\cos x](\text{sen } x)^{\text{sen } x})$

140. $y=(\text{sen } x)^{\cos x}$ $(y'=[-\text{sen } x \ln(\text{sen } x)+\text{ctg } x \cos x](\text{sen } x)^{\cos x})$

141. $y=(\text{sen } x)^x$ $(y'=(\ln \text{sen } x+x \text{ ctg } x)\,(\text{sen } x)^x)$

142. $y=(e^x)^{\text{sen } x}$ $(y'=(\text{sen } x+x\cos x)\,e^{x\cdot \text{sen } x})$

143. $y=x^{x^2}$ $\left(y'=(1+2\ln x)\,x^{x^2+1}\right)$

144. $y=(x+1)^{x-1}$ $\left(y'=(x+1)^{x-1}\left[\ln(x+1)+\frac{x-1}{x+1}\right]\right)$

145. $y=(\text{sen } x)^{1/x}$ $\left(y'=(\text{sen } x)^{1/x}\left[\frac{-\ln \text{sen } x}{x^2}+\frac{\text{ctg } x}{x}\right]\right)$

146. $y=x^{\text{sen } x}$ $\left(y'=\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\text{sen}x}{x}\right)\cdot x^{\text{sen}x}\right)$

■ Ejercicios varios:

147. **(S)** Dada la función $f(x)=\text{Ln}\sqrt{\frac{1+\text{sen } x}{1-\text{sen } x}}$

se pide: **a)** Determinar los valores de x para los que está definida.

b) Hallar su derivada.

(Soluc: $\forall x\neq\pi/2+n\pi$ con $n\in Z$; f'(x)=1/cos x)

148. **(S)** Un observador se encuentra a 2000 metros de la torre de lanzamiento de un cohete. Cuando éste despega verticalmente mide la variación del ángulo φ(t) que forma la línea visual que le une con el cohete y la del suelo horizontal en función del tiempo transcurrido. Sabiendo que φ'(t)=1/20 radianes por segundo cuando φ=π/3, se pide:

a) ¿Cuál es la altura del cohete cuando φ=π/3 radianes?

b) ¿Cuál es la velocidad del cohete cuando φ=π/3 radianes?

(Soluc: 2000√3 m.; 400 m/s)

149. **(S)** Hallar la derivada vigésimo cuarta de *y=a sen bx* para **a** y **b** constantes. *(Soluc: $y^{(24)}=ab^{24}$ sen bx)*