Geometría analítica

Ejercicio nº 1.-

a) Averigua el punto simétrico de $A(5, -1)$ con respecto a $B(4, -2)$.
b) Halla el punto medio del segmento de extremos $A(5, -1)$ y $B(4, -2)$.

Ejercicio nº 2.-

a) Halla el punto medio del segmento cuyos extremos son $A(2, -5)$ con respecto al punto $B(-3, 2)$.
b) Halla el simétrico de $A(2, -5)$ con respecto al punto $C(1, -4)$.

Ejercicio nº 3.-

a) Halla el punto medio del segmento de extremos $P(3, -2)$ y $Q(-1, 5)$.
b) Halla el simétrico del punto $P(3, -2)$ con respecto a $Q(-1, 5)$.

Ejercicio nº 4.-

Considera los puntos $A(-1, 3)$, $B(2, 6)$ y $C(x, y)$. Halla los valores de x e y para que C sea:

a) El punto medio del segmento de extremos A y B.
b) El simétrico de A con respecto a B.

Ejercicio nº 5.-

Dados los puntos $A(2, -1)$, $B(-3, 4)$ y $C(0, -8)$:

a) Halla el punto medio del segmento de extremos A y B.
b) Halla el simétrico de B con respecto a C.

Ejercicio nº 6.-

El punto medio del segmento AB es $M(2, -1)$. Halla las coordenadas de A, sabiendo que $B(-3, 2)$.

Ejercicio nº 7.-

Dados los puntos $A(2, -3)$, $B(-1, 4)$ y $C(x, 3)$, determina el valor de x para que A, B y C estén alineados.

Ejercicio nº 8.-

Halla las coordenadas del vértice D del paralelogramo $ABCD$, sabiendo que $A(-1, -2)$, $B(3, 1)$ y $C(1, 3)$.

Ejercicio nº 9.-

Halla las coordenadas del baricentro del triángulo de vértices $A(2, -3)$, $B(4, 1)$ y $C(-1, 2)$.

Ejercicio nº 10.-

Averigua las coordenadas del punto *P*, que divide al segmento de extremos $A(2,\ -4)$ y $B(1,\ 3)$ en dos partes tales que $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$.

Ejercicio nº 11.-

Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto *P*(3, –1) y es paralela a la recta:

$$s: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 + t \end{cases}$$

Ejercicio nº 12.-

Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos *A*(2, –3) y *B*(–1, 4).

Ejercicio nº 13.-

Halla las ecuaciones paramétricas de la recta paralela a $2x - y + 3 = 0$ y que pasa por el punto *P*(4, 3).

Ejercicio nº 14.-

Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por *P*(2, –1) y es perpendicular a la recta de ecuación $3x - 2y + 1 = 0$.

Ejercicio nº 15.-

Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos *P*(–1, 3) y *Q*(–2, 8).

Ejercicio nº 16.-

Dadas las rectas:

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 2 + 6t \end{cases}$$

averigua su posición relativa. Si se cortan, di cuál es el punto de corte:

Ejercicio nº 17.-

Averigua la posición relativa de las rectas (si se cortan, averigua en qué punto):

$$r: \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = -2 + t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 3 + 8t \\ y = -1 - 2t \end{cases}$$

Ejercicio nº 18.-

Determina la posición relativa de estas rectas. Si se cortan, di en qué punto:

$$r:\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases} \qquad x:\begin{cases} x = 5 - t \\ y = -3 + t \end{cases}$$

Ejercicio nº 19.-

Dadas las rectas:

$$r:\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 6 + 4t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -2 - 8t \end{cases}$$

averigua su posición relativa (si se cortan, di en qué punto).

Ejercicio nº 20.-

Determina la posición relativa de las siguientes rectas. Si se cortan, averigua en qué punto:

$$r:\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -4 - t \end{cases}$$

Ejercicio nº 21.-

Averigua el ángulo formado por las rectas:

$$r:\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -1 + 3t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x = -2 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$$

Ejercicio nº 22.-

Determina el ángulo que forman las rectas:

$$r:\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 4 - t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$$

Ejercicio nº 23.-

Dadas las rectas *r* y *s*, determina el ángulo que forman:

$$r:\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 4 + 4t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 5 - t \end{cases}$$

Ejercicio nº 24.-

Halla el ángulo que forman las rectas:

$$r:\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 + 2t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -1 - 6t \end{cases}$$

Ejercicio nº 25.-

Averigua si estas dos rectas son perpendiculares. Si no lo fueran, halla el ángulo que forman:

$$r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -2 - 6t \end{cases}$$

Ejercicio nº 26.-

Escribe la ecuación implícita de la recta que pasa por los puntos
***P*(3, –1) y *Q*(2, –4).**

Solución:

Ejercicio nº 27.-

Halla la ecuación implícita de la recta que pasa por *P*(–2, 5) y es paralela al vector $\vec{v}(-1, 3)$.

Ejercicio nº 28.-

Escribe la ecuación implícita de la recta que tiene pendiente 2 y pasa por el punto *P*(–1, 4).

Ejercicio nº 29.-

Averigua la ecuación implícita de la recta que pasa por el punto
***P*(2, –2) y cuya pendiente es $m = -3$.**

Ejercicio nº 30.-

Halla la ecuación implícita de la recta cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$r: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$$

Ejercicio nº 31.-

Halla la ecuación implícita de la recta perpendicular a $2x + y - 3 = 0$
que pasa por el punto *P*(1, 1).

Ejercicio nº 32.-

¿Cuál ha de ser el valor de *k* para que estas dos rectas sean paralelas?

$$x + 3y - 2 = 0 \qquad kx + 2y + 3 = 0$$

Ejercicio nº 33.-

Escribe la ecuación implícita de la recta que pasa por *P*(–1, 2) y es paralela a
$3x - y + 4 = 0$.

Ejercicio nº 34.-

Halla el valor de k para que las rectas

$$2x - 3y + 4 = 0 \qquad\qquad -3x + ky - 1 = 0$$

sean perpendiculares.

Ejercicio nº 35.-

Dadas las rectas:

$$r: -4x + y - 3 = 0 \qquad\qquad s: kx - y + 1 = 0$$

halla el valor de k para que r y s sean perpendiculares.

Ejercicio nº 36.-

Calcula la distancia del punto $P(-3, 5)$ a la recta $r: y = 2x - 3$.

Ejercicio nº 37.-

Halla la distancia de P a Q y de P a r, siendo:

$$P(-1, -1),\ Q(2, -3) \ \text{ y } \ r: 3x - y + 6 = 0$$

Ejercicio nº 38.-

Dados los puntos $P(3, 2)$ y $Q(-2, 4)$, y la recta $r: 2x + y - 3 = 0$; calcula la distancia:

a) Entre P y Q.
b) De P a r.

Ejercicio nº 39.-

Halla la distancia del punto $P(2, -1)$ a la recta:

$$r: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$$

Ejercicio nº 40.-

Halla el valor de k para que la distancia del punto $P(2, k)$ a la recta $r: x - y + 3 = 0$ sea $\sqrt{2}$.

Ejercicio nº 41.-

Halla las coordenadas del punto simétrico de $P(3, -4)$ respecto a la recta $r: -3x + y + 2 = 0$.

Ejercicio nº 42.-

Calcula los vértices y el área del triángulo cuyos lados están sobre las rectas:

$$r: x - y - 2 = 0 \qquad s: 2x + 3y - 9 = 0 \qquad t: x = 0$$

Ejercicio nº 43.-

Halla el área del paralelogramo de vértices $A(1, 1)$, $B(5, 2)$, $C(4, 4)$ y $D(0, 3)$.

Ejercicio nº 44.-

Dado el triángulo de vértices $A(-1, -1)$, $B(1, 4)$ y $C(5, 2)$, halla las ecuaciones de sus tres medianas y calcula el baricentro (punto de intersección de las medianas).

Ejercicio nº 45.-

Halla el área del triángulo de vértices:

$$A(3, 1) \qquad B(6, -2) \qquad C(0, -4)$$

Soluciones Geometría analítica

Ejercicio nº 1.-

a) Averigua el punto simétrico de $A(5, -1)$ con respecto a $B(4, -2)$.
b) Halla el punto medio del segmento de extremos $A(5, -1)$ y $B(4, -2)$.

Solución:

a) Llamamos $A'(x, y)$ al simétrico de A con respecto a B. El punto B es el punto medio del segmento que une A con A'. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+5}{2} = 4 \\ \dfrac{y-1}{2} = -2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -3 \end{array}\right\} \quad A'(3, -3)$$

b) El punto medio es:

$$M=\left(\frac{5+4}{2},\frac{-1-2}{2}\right)=\left(\frac{9}{2},\frac{-3}{2}\right)$$

<u>Ejercicio nº 2.-</u>

a) Halla el punto medio del segmento cuyos extremos son *A*(2, –5) con respecto al punto *B*(–3, 2).
b) Halla el simétrico de *A*(2, –5) con respecto al punto *C*(1, –4).

Solución:

a) El punto medio es:

$$M=\left(\frac{2+(-3)}{2},\ \frac{-5+2}{2}\right)=\left(\frac{-1}{2},\ \frac{-3}{2}\right)$$

b) Llamamos $A'(x, y)$ al simétrico de A con respecto a C. Entonces C es el punto medio del segmento que une A con A'. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x+2}{2}=1\\ \frac{y-5}{2}=-4\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}x=0\\ y=-3\end{array}\right\}\ \rightarrow\ A'(0,-3)$$

<u>Ejercicio nº 3.-</u>

a) Halla el punto medio del segmento de extremos *P*(3, –2) y *Q*(–1, 5).
b) Halla el simétrico del punto *P*(3, –2) con respecto a *Q*(–1, 5).

Solución:

a) El punto medio es:

$$M=\left(\frac{3+(-1)}{2},\ \frac{-2+5}{2}\right)=\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$$

b) Llamamos $P'(x, y)$ al simétrico de P con respecto a Q. Q es el punto medio del segmento que une P y P'. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{3+x}{2}=-1\ \rightarrow\ x=-5\\ \frac{-2+y}{2}=5\ \rightarrow\ y=12\end{array}\right\}\quad P'(-5,12)$$

<u>Ejercicio nº 4.-</u>

Considera los puntos *A*(–1, 3), *B*(2, 6) y *C* (*x* , *y*). Halla los valores de *x* e *y* para que *C* sea:

a) El punto medio del segmento de extremos *A* y *B*.
b) El simétrico de *A* con respecto a *B*.

Solución:

a) El punto medio es:

$$\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{3+6}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right) = (x, y) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

b) B será el punto medio del segmento que une A y C, entonces:

$$\left(\frac{-1+x}{2}, \frac{3+y}{2}\right) = (2, 6) \quad \rightarrow \quad \left.\begin{cases} \dfrac{-1+x}{2} = 2 \\ \dfrac{3+y}{2} = 6 \end{cases}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x = 5 \\ y = 9 \end{matrix}\right\} \quad \rightarrow \quad C(5, 9)$$

<u>Ejercicio nº 5.-</u>

Dados los puntos $A(2, -1)$, $B(-3, 4)$ y $C(0, -8)$:

a) Halla el punto medio del segmento de extremos A y B.
b) Halla el simétrico de B con respecto a C.

Solución:

a) El punto medio es:

$$M = \left(\frac{2+(-3)}{2}, \frac{-1+4}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

b) Llamamos $B'(x, y)$ al simétrico de B con respecto a C. Si B' es simétrico de B respecto de C, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB'}$$

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{BC} = (3, -12) \\ \overrightarrow{CB'} = (x-0, y+8) \end{matrix}\right\} \quad \text{Entonces:} \quad \left.\begin{cases} x = 3 \\ y+8 = -12 \end{cases}\right\} \quad \begin{matrix} x = 3 \\ y = -20 \end{matrix}$$

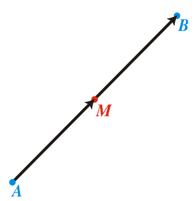
Por tanto:

$B'(3, -20)$

<u>Ejercicio nº 6.-</u>

El punto medio del segmento AB es $M(2, -1)$. Halla las coordenadas de A, sabiendo que $B(-3, 2)$.

Solución:



Si llamamos $A(x, y)$, tenemos que:

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, es decir:

$$(2-x,\ -1-y) = (-3-2,\ 2-(-1))$$
$$(2-x,\ -1-y) = (-5,\ 3)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2-x=-5 \quad \rightarrow \quad x=7 \\ -1-y=3 \quad \rightarrow \quad y=-4 \end{array}\right\} \quad \text{Por tanto } A(7,-4)$$

Ejercicio nº 7.-

Dados los puntos $A(2, -3)$, $B(-1, 4)$ y $C(x, 3)$, determina el valor de x para que A, B y C estén alineados.

Solución:

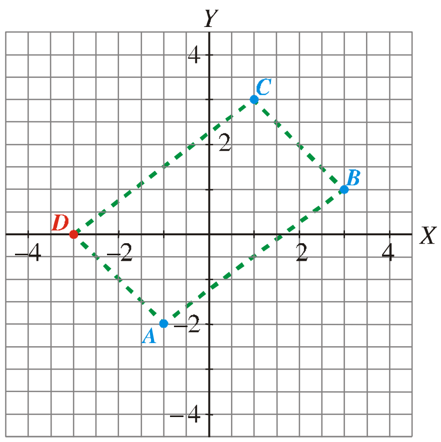
Para que los tres puntos estén alineados, las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y de $\overrightarrow{BC}$ han de ser proporcionales

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-3, 7) \\ \overrightarrow{BC} = (x+1, -1) \end{array}\right\} \quad \frac{-3}{x+1} = \frac{7}{-1} \quad \rightarrow \quad 3 = 7x+7 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-4}{7}$$

Ejercicio nº 8.-

Halla las coordenadas del vértice D del paralelogramo $ABCD$, sabiendo que $A(-1, -2)$, $B(3, 1)$ y $C(1, 3)$.

Solución:



Llamamos $D(x, y)$ al cuarto vértice.
Ha de cumplirse que:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (4, 3) \\ \overrightarrow{DC} = (1-x,\ 3-y) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 4 = 1-x \quad \rightarrow \quad x=-3 \\ 3 = 3-y \quad \rightarrow \quad y=0 \end{array}$$

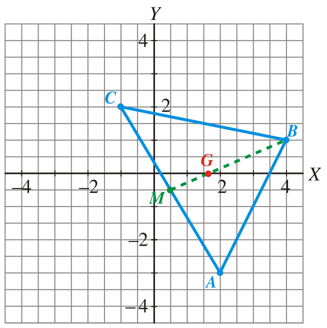
Por tanto:

$D(-3, 0)$

Ejercicio nº 9.-

Halla las coordenadas del baricentro del triángulo de vértices *A*(2, –3), *B*(4, 1) y *C*(–1, 2).

***Solución*:**



Llamamos $G(x, y)$ al baricentro y $M(a, b)$ al punto medio del lado AC. Sabemos que:

$$2\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{BG}$$

Hallamos M:

$$M = \left(\frac{2+(-1)}{2}, \frac{-3+2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{GM} = \left(\frac{1}{2} - x, -\frac{1}{2} - y\right) \\ \overrightarrow{BG} = (x-4, y-1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2\left(\frac{1}{2} - x, \frac{-1}{2} - y\right) = (x-4, y-1) \\ (1-2x, -1-2y) = (x-4, y-1) \end{array}$$

$$1-2x = x-4 \rightarrow 5 = 3x \rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$-1-2y = y-1 \rightarrow 0 = 3y \rightarrow y = 0$$

El baricentro es:

$$G\left(\frac{5}{3}, 0\right)$$

Ejercicio nº 10.-

Averigua las coordenadas del punto *P*, que divide al segmento de extremos $A(2, -4)$ y $B(1, 3)$ en dos partes tales que $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$.

Solución:

Si llamamos (x, y) a las coordenadas de P, se ha de cumplir que:

$\overline{AP} = 3\overline{PB}$, es decir:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AP} = (x-2,\ y+4) \\ \overrightarrow{PB} = (-1-x,\ 3-y)\end{array}\right\} \begin{array}{l}(x-2,\ y+4) = 3\,(-1-x,\ 3-y) \\ (x-2,\ y+4) = (-3-3x,\ 9-3y)\end{array}$$

$$x-2 = -3-3x \quad \rightarrow \quad 4x = -1 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{1}{4}$$

$$y+4 = 9-3y \quad \rightarrow \quad 4y = 5 \quad \rightarrow \quad y = \frac{5}{4}$$

Por tanto:

$$P\left(-\frac{1}{4},\ \frac{5}{4}\right)$$

<u>Ejercicio nº 11.-</u>

Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto *P*(3, –1) y es paralela a la recta:

$$\boldsymbol{s:\begin{cases} x = 2-3t \\ y = 4+t \end{cases}}$$

Solución:

Vector posición: $\overrightarrow{OP}\ (3,\ -1)$
Vector dirección: $(-3,\ 1)$
Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 3-3t \\ y = -1+t \end{cases}$$

<u>Ejercicio nº 12.-</u>

Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos *A*(2, –3) y *B*(–1, 4).

Solución:

Vector posición: $\overrightarrow{OA}\ (2, -3)$
Vector dirección: $\overrightarrow{AB}\ (-3, 7)$
Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2-3t \\ y = -3+7t \end{cases}$$

<u>Ejercicio nº 13.-</u>

Halla las ecuaciones paramétricas de la recta paralela a 2*x* – *y* + 3 = 0 y que pasa por el punto *P*(4, 3).

Solución:

Vector posición: $\overline{OP}\,(4,\ 3)$
Vector dirección: El vector $(2,\ -1)$ es perpendicular a $2x - y + 3 = 0$, por tanto, podemos tomar como vector dirección el vector $(1,\ 2)$.
Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$$

<u>Ejercicio nº 14.-</u>

Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por *P*(2, –1) y es perpendicular a la recta de ecuación 3*x* – 2*y* + 1 = 0.

Solución:

Vector posición: $\overline{OP}\,(2,\ -1)$
Vector dirección: $(3,\ -2)$ es perpendicular a $3x - 2y + 1 = 0$
Por tanto, las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 - 2t \end{cases}$$

<u>Ejercicio nº 15.-</u>

Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos *P*(–1, 3) y *Q*(–2, 8).

Solución:

Vector posición: $\overline{OP}\,(-1,\ 3)$
Vector dirección: $\overline{PQ}\,(-1,\ 5)$
Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 3 + 5t \end{cases}$$

<u>Ejercicio nº 16.-</u>

Dadas las rectas:

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x = 1 + t} \\ \boldsymbol{y = -2 - 2t} \end{cases} \qquad \boldsymbol{s}: \begin{cases} \boldsymbol{x = -1 - 3t} \\ \boldsymbol{y = 2 + 6t} \end{cases}$$

averigua su posición relativa. Si se cortan, di cuál es el punto de corte:

Solución:

Cambiamos el parámetro en la recta *s*:

$$r:\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2-2t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x = -1-3k \\ y = 2+6k \end{cases}$$

Igualamos:

$$\left.\begin{array}{l} 1+t = -1-3k \\ -2-2t = 2+6k \end{array}\right\} \begin{array}{l} t = -2-3k \\ -2-2(-2-3k) = 2+6k-2+4+6k = 2+6k \quad \rightarrow \quad 0 = 0k \end{array}$$

Infinitas soluciones $\rightarrow$ Se trata de la misma recta; r y s coinciden.

<u>Ejercicio nº 17.-</u>

Averigua la posición relativa de las rectas (si se cortan, averigua en qué punto):

$$\boldsymbol{r:\begin{cases} x = 2-4t \\ y = -2+t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x = 3+8t \\ y = -1-2t \end{cases}}$$

Solución:

Cambiamos el parámetro en la recta s:

$$r:\begin{cases} x = 2-4t \\ y = -2+t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x = 3+8k \\ y = -1-2k \end{cases}$$

Igualamos:

$$\left.\begin{array}{l} 2-4t = 3+8k \\ -2+t = -1-2k \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -1 = 4t+8k \\ -1 = -t-2k \end{array}\right\} t = 1-2k$$

$$-1 = 4(1-2k)+8k \quad \rightarrow \quad -1 = 4-8k+8k \quad \rightarrow \quad -5 = 0k$$

No tiene solución $\rightarrow$ Las rectas son paralelas.

<u>Ejercicio nº 18.-</u>

Determina la posición relativa de estas rectas. Si se cortan, di en qué punto:

$$\boldsymbol{r:\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-3t \end{cases} \qquad x:\begin{cases} x = 5-t \\ y = -3+t \end{cases}}$$

Solución:

Cambiamos el parámetro en la recta s:

$$r:\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-3t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x = 5-k \\ y = -3+k \end{cases}$$

Igualamos:

$$\left.\begin{array}{l} 1+2t = 5-k \\ 2-3t = -3+k \end{array}\right\} \begin{array}{l} k = 4-2t \\ 2-3t = -3+4-2t \\ 1 = t \\ k = 4-2 = 2 \end{array}$$

Sustituyendo $t = 1$ en las ecuaciones de r (o bien $k = 2$ en las de s), obtenemos el punto de corte de las dos rectas:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 2 = 3 \\ y = 2 - 3 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{ Las dos rectas se cortan en el punto } (3,\text{-}1).$$

Ejercicio nº 19.-

Dadas las rectas:

$$\boldsymbol{r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 6 + 4t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -2 - 8t \end{cases}}$$

averigua su posición relativa (si se cortan, di en qué punto).

Solución:

Cambiamos el parámetro en la recta s:

$$r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 6 + 4t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4 + 2k \\ y = -2 - 8k \end{cases}$$

Igualamos:

$$\left.\begin{array}{l} 2 - t = 4 + 2k \\ 6 + 4t = -2 - 8k \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 - 2k = t \\ 6 + 4(-2 - 2k) = -2 - 8k \\ 6 - 8 - 8k = -2 - 8k \\ 0 = 0k \end{array}$$

Infinitas soluciones $\rightarrow$ Se trata de la misma recta; r y s coinciden.

Ejercicio nº 20.-

Determina la posición relativa de las siguientes rectas. Si se cortan, averigua en qué punto:

$$\boldsymbol{r: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -4 - t \end{cases}}$$

Solución:

Cambiamos el parámetro en la recta s:

$$r: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 5 + 3k \\ y = -4 - k \end{cases}$$

Igualamos:

$$\left.\begin{array}{l} 4 + t = 5 + 3k \\ 1 + 2t = -4 - k \end{array}\right\} \begin{array}{l} t = 1 + 3k \\ 1 + 2(1 + 3k) = -4 - k \\ 1 + 2 + 6k = -4 - k \\ 7k = -7 \\ k = -1 \\ t = 1 + 3k = 1 - 3 = -2 \end{array}$$

Sustituimos $t = -2$ en las ecuaciones de r (o bien, $k = -1$ en las de s) para obtener el punto de corte de r y s:

$$\left.\begin{cases} x = 4 - 2 = 2 \\ y = 1 - 4 = -3 \end{cases}\right\} \rightarrow \; r \text{ y } s \text{ se cortan en el punto } (2, -3).$$

<u>Ejercicio nº 21.-</u>

Averigua el ángulo formado por las rectas:

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x = -2 + 4t} \\ \boldsymbol{y = -1 + 3t} \end{cases} \qquad \boldsymbol{s}: \begin{cases} \boldsymbol{x = -2 - t} \\ \boldsymbol{y = -1 + 2t} \end{cases}$$

Solución:

Hallamos el ángulo que forman los vectores dirección de las dos rectas:

Vector dirección de $r \rightarrow (4, 3)$
Vector dirección de $s \rightarrow (-1, 2)$

$$cos\,\alpha = \frac{\left|(4, 3)\cdot(-1, 2)\right|}{\sqrt{9+16}\cdot\sqrt{1+4}} = \frac{\left|-4+6\right|}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{5}} = \frac{2}{5\sqrt{5}} = 0{,}179 \;\rightarrow\; \alpha = 79^\circ\ 41'\ 43''$$

<u>Ejercicio nº 22.-</u>

Determina el ángulo que forman las rectas:

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x = -1 + 3t} \\ \boldsymbol{y = 4 - t} \end{cases} \qquad \boldsymbol{s}: \begin{cases} \boldsymbol{x = 2 + t} \\ \boldsymbol{y = -1 + 2t} \end{cases}$$

Solución:

Vector dirección de $r \rightarrow (3, -1)$
Vector dirección de $s \rightarrow (1, 2)$

Llamamos α al ángulo que forman r y s:

$$cos\alpha = \frac{\left|(3, -1)\cdot(1, 2)\right|}{\sqrt{9+1}\cdot\sqrt{1+4}} = \frac{\left|3-2\right|}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = 0{,}141 \rightarrow \alpha = 81^\circ\ 52'\ 12''$$

<u>Ejercicio nº 23.-</u>

Dadas las rectas *r* y *s*, determina el ángulo que forman:

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x = -2 + 2t} \\ \boldsymbol{y = 4 + 4t} \end{cases} \qquad \boldsymbol{s}: \begin{cases} \boldsymbol{x = -4 + 2t} \\ \boldsymbol{y = 5 - t} \end{cases}$$

Solución:

Vector dirección de $r \rightarrow (2, 4)$
Vector dirección de $s \rightarrow (2, -1)$

Llamamos α al ángulo que forman r y s:

$$cos\,\alpha = \frac{|(2,\ 4)\cdot(2,\ -1)|}{\sqrt{4+16}\cdot\sqrt{4+1}} = \frac{|4-4|}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}} = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = 90^\circ$$

Es decir, las rectas son perpendiculares.

Ejercicio nº 24.-

Halla el ángulo que forman las rectas:

$$r: \begin{cases} x = 2-3t \\ y = 4+2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1-4t \\ y = -1-6t \end{cases}$$

Solución:

El ángulo que forman r y s lo podemos hallar a partir de sus vectores dirección:

Vector dirección de $r \rightarrow (-3, 2)$
Vector dirección de $s \rightarrow (-4, -6)$

$$cos\alpha = \frac{|(-3,\ 2)\cdot(-4,\ -6)|}{\sqrt{9+4}\cdot\sqrt{16+36}} = \frac{|12-12|}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{52}} = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = 90^\circ$$

Es decir, r y s son perpendiculares.

Ejercicio nº 25.-

Averigua si estas dos rectas son perpendiculares. Si no lo fueran, halla el ángulo que forman:

$$r: \begin{cases} x = 1-2t \\ y = 1+3t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 3+4t \\ y = -2-6t \end{cases}$$

Solución:

Vector dirección de $r \rightarrow (-2, 3)$
Vector dirección de $s \rightarrow (4, -6)$

Llamamos α al ángulo formado:

$$cos\,\alpha = \frac{|(-2,3)\cdot(4,-6)|}{\sqrt{4+9}\cdot\sqrt{16+36}} = \frac{|-8-18|}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{52}} = \frac{26}{\sqrt{13}\cdot 2\sqrt{13}} = \frac{26}{26} = 1 \rightarrow \alpha = 0^\circ \text{ (luego no son perpendiculares).}$$

Ejercicio nº 26.-

Escribe la ecuación implícita de la recta que pasa por los puntos
***P*(3, –1) y *Q*(2, –4).**

Solución:

La pendiente de la recta es:

$$m=\frac{-4-(-1)}{2-3}=\frac{-4+1}{-1}=\frac{-3}{-1}=3$$

La ecuación será:

$$y=-1+3(x-3) \quad\rightarrow\quad y=-1+3x-9 \quad\rightarrow\quad 3x-y-10=0$$

Ejercicio nº 27.-

Halla la ecuación implícita de la recta que pasa por *P*(–2, 5) y es paralela al vector $\vec{v}(-1,3)$.

Solución:

Las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x=-2-t \\ y=5+3t \end{cases}$$

Multiplicamos por 3 la primera ecuación y sumamos:

$$\begin{array}{l} 3x=-6-3t \\ \underline{y=5+3t} \\ 3x+y=-1 \end{array}$$

La ecuación implícita es $3x+y+1=0$.

Ejercicio nº 28.-

Escribe la ecuación implícita de la recta que tiene pendiente 2 y pasa por el punto *P*(–1, 4).

Solución:

Escribimos la ecuación punto–pendiente y operamos:

$$y=4+2(x+1) \quad\rightarrow\quad y=4+2x+2 \quad\rightarrow\quad 2x-y+6=0$$

Ejercicio nº 29.-

Averigua la ecuación implícita de la recta que pasa por el punto *P*(2, –2) y cuya pendiente es *m* = –3.

Solución:

Escribimos la ecuación punto–pendiente y operamos:

$$y=-2-3(x-2) \quad\rightarrow\quad y=-2-3x+6 \quad\rightarrow\quad 3x+y-4=0$$

Ejercicio nº 30.-

Halla la ecuación implícita de la recta cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\boldsymbol{r:}\begin{cases} \boldsymbol{x = -3 + 2t} \\ \boldsymbol{y = 1 - 3t} \end{cases}$$

Solución:

Multiplicamos por 3 la primera ecuación y por 2 la segunda, y sumamos:

$$\left.\begin{matrix} 3(x = -3 + 2t) \\ 2(y = 1 - 3t) \end{matrix}\right\} \quad \begin{array}{l} 3x = -9 + 6t \\ \underline{2y = 2 - 6t} \\ 3x + 2y = -7 \end{array}$$

La ecuación implícita es $3x + 2y + 7 = 0$.

Ejercicio nº 31.-

Halla la ecuación implícita de la recta perpendicular a $2x + y - 3 = 0$ que pasa por el punto $P(1, 1)$.

Solución:

Obtenemos la pendiente de la recta dada:

$$2x + y - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad y = -2x + 3 \quad \rightarrow \quad pendiente = -2$$

La pendiente de la perpendicular es:

$$\frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

La ecuación de la recta buscada será:

$$y = 1 + \frac{1}{2}(x - 1) \quad \rightarrow \quad 2y = 2 + x - 1 \quad \rightarrow \quad x - 2y + 1 = 0$$

Ejercicio nº 32.-

¿Cuál ha de ser el valor de k para que estas dos rectas sean paralelas?

$x + 3y - 2 = 0$ $\qquad$ $kx + 2y + 3 = 0$

Solución:

Despejamos y en cada ecuación para obtener la pendiente de cada recta:

$$x + 3y - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad 3y = -x + 2 \quad \rightarrow \quad y = \frac{-1}{3}x + \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad pendiente = -\frac{1}{3}$$

$$kx + 2y + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad 2y = -kx - 3 \quad \rightarrow \quad y = \frac{-k}{2}x - \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad pendiente = \frac{-k}{2}$$

Para que sean paralelas, las pendientes han de ser iguales:

$$-\frac{1}{3}=-\frac{k}{2} \quad \rightarrow \quad -2=-3k \quad \rightarrow \quad k=\frac{2}{3}$$

Ejercicio nº 33.-

Escribe la ecuación implícita de la recta que pasa por *P*(–1, 2) y es paralela a 3*x* – *y* + 4 = 0.

Solución:

Obtenemos la pendiente de la recta dada:

$$3x-y+4=0 \quad \rightarrow \quad y=3x+4 \quad \rightarrow \quad pendiente=3$$

La recta paralela tiene la misma pendiente; su ecuación será:

$$y=2+3(x+1) \quad \rightarrow \quad y=2+3x+3 \quad \rightarrow \quad 3x-y+5=0$$

Ejercicio nº 34.-

Halla el valor de *k* para que las rectas

2*x* – 3*y* + 4 = 0   –3*x* + *ky* –1 = 0

sean perpendiculares.

Solución:

Despejamos y para obtener la pendiente de cada recta:

$$2x-3y+4=0 \quad \rightarrow \quad 3y=2x+4 \quad \rightarrow \quad y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3} \quad \rightarrow \quad pendiente=\frac{2}{3}$$

$$-3x+ky-1=0 \quad \rightarrow \quad ky=3x+1 \quad \rightarrow \quad y=\frac{3}{k}x+\frac{1}{k} \quad \rightarrow \quad pendiente=\frac{3}{k}$$

Para que sean perpendiculares, tiene que cumplirse:

$$\frac{3}{k}=\frac{-1}{2/3}=\frac{-3}{2} \quad \rightarrow \quad k=-2$$

Ejercicio nº 35.-

Dadas las rectas:

$$\boldsymbol{r: -4x+y-3=0} \qquad \boldsymbol{s: kx-y+1=0}$$

halla el valor de *k* para que *r* y *s* sean perpendiculares.

Solución:

Obtenemos la pendiente de cada una de la rectas:

$$-4x+y-3=0 \quad \to \quad y=4x+3 \quad \to \quad pendiente=4$$
$$kx-y+1=0 \quad \to \quad y=kx+1 \quad \to \quad pendiente=k$$

Para que r y s sean perpendiculares, ha de cumplirse que:

$$k=\frac{-1}{4}$$

<u>Ejercicio nº 36.-</u>

Calcula la distancia del punto *P*(–3, 5) a la recta *r* : *y* = 2*x* – 3.

Solución:

Expresamos la recta en forma implícita:

$$r: y=2x-3 \quad \to \quad r: 2x-y-3=0$$

Por tanto:

$$dist(P,r)=\frac{|2\cdot(-3)-5-3|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|-6-5-3|}{\sqrt{5}}=\frac{14}{\sqrt{5}}=\frac{14\sqrt{5}}{5}$$

<u>Ejercicio nº 37.-</u>

Halla la distancia de *P* a *Q* y de *P* a *r*, siendo:

_P_(–1, –1), _Q_(2, –3) y _r_: 3_x_ – _y_ + 6 = 0

Solución:

$$dist(P,Q)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$
$$dist(P,r)=\frac{|3\cdot(-1)-(-1)+6|}{\sqrt{9+1}}=\frac{|-3+1+6|}{\sqrt{10}}=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{10}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

<u>Ejercicio nº 38.-</u>

Dados los puntos _P_(3, 2) y _Q_(–2, 4), y la recta _r_: 2_x_ + _y_ – 3 = 0; calcula la distancia:

a) Entre _P_ y _Q_.
b) De _P_ a _r_.

Solución:

$$\text{a) } dist(P,Q)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=|(-5,2)|=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$$
$$\text{b) } dist(P,r)=\frac{|2\cdot 3+2-3|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|6+2-3|}{\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}$$

<u>Ejercicio nº 39.-</u>

Halla la distancia del punto *P*(2, –1) a la recta:

$$r:\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$$

Solución:

Expresamos r en forma implícita:

$$\left.\begin{array}{l} 4\cdot(x=-3+2t) \\ -2\cdot(y=1+4t) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 4x = -12 + 8t \\ \underline{-2y = -2 - 8t} \\ 4x - 2y = -14 \end{array}$$

$$4x - 2y + 14 = 0$$

Hallamos la distancia de P a r:

$$dist(P,r) = \frac{|4\cdot 2 - 2\cdot(-1) + 14|}{\sqrt{16+4}} = \frac{|8+2+14|}{\sqrt{20}} = \frac{24}{\sqrt{20}} = \frac{24\sqrt{20}}{20} = \frac{6\cdot 5\sqrt{2}}{5} = 6\sqrt{2}$$

<u>Ejercicio nº 40.-</u>

Halla el valor de *k* para que la distancia del punto *P*(2, *k*) a la recta $r:\ x - y + 3 = 0$ sea $\sqrt{2}$.

Solución:

$$dist(P,r) = \frac{|2-k+3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|5-k|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad \rightarrow \quad |5-k| = 2$$

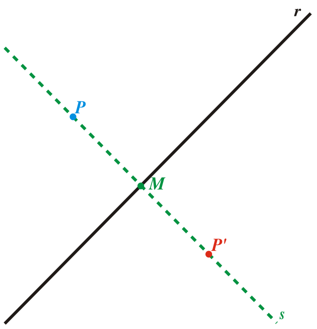
Hay dos posibilidades:

$$\begin{cases} 5-k=2 \quad \rightarrow \quad k=3 \\ 5-k=-2 \quad \rightarrow \quad k=7 \end{cases}$$

<u>Ejercicio nº 41.-</u>

Halla las coordenadas del punto simétrico de *P*(3, –4) respecto a la recta *r* : –3*x* + *y* + 2 = 0.

Solución



1.º) Hallamos la ecuación de la recta, s, que es perpendicular a r y que pasa por P:

$$r: -3x + y + 2 = 0 \;\rightarrow\; y = 3x - 2 \;\rightarrow\; pendiente = 3$$

La pendiente de s será $\frac{-1}{3}$. Por tanto:

$$s: y = -4 - \frac{1}{3}(x - 3) \;\rightarrow\; 3y = -12 - x + 3$$

$$s: x + 3y + 9 = 0$$

2.º) Hallamos el punto de corte, M, entre r y s:

$$\left.\begin{array}{r} -3x + y + 2 = 0 \\ x + 3y + 9 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = 3x - 2 \\ x + 3(3x - 2) + 9 = 0 \\ x + 9x - 6 + 9 = 0 \\ 10x = -3 \\ x = \frac{-3}{10} \;\rightarrow\; y = \frac{-9}{10} - 2 = \frac{-29}{10} \end{array}$$

El punto es $M\left(\frac{-3}{10}, \frac{-29}{10}\right)$.

3.º) Si llamamos $P'(x, y)$ al simétrico de P con respecto a r, M es el punto medio entre P y P'. Por tanto:

$$\frac{3 + x}{2} = \frac{-3}{10} \;\rightarrow\; 30 + 10x = -6 \;\rightarrow\; x = \frac{-36}{10} = \frac{-18}{5}$$

$$\frac{-4 + y}{2} = \frac{-29}{10} \;\rightarrow\; -40 + 10y = -58 \;\rightarrow\; y = \frac{-18}{10} = \frac{-9}{5}$$

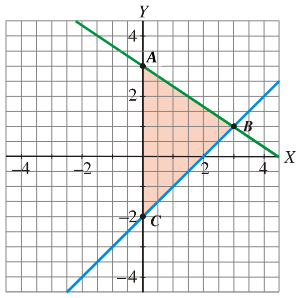
El punto buscado es $P'\left(\frac{-18}{5}, \frac{-9}{5}\right)$.

Ejercicio nº 42.-

Calcula los vértices y el área del triángulo cuyos lados están sobre las rectas:

$$r: x - y - 2 = 0 \qquad s: 2x + 3y - 9 = 0 \qquad t: x = 0$$

Solución:



1.º) Los vértices del triángulo son los puntos de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} x-y-2=0 \\ 2x+3y-9=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x=y+2 \\ 2(y+2)+3y-9=0 \\ 2y+4+3y-9=0 \quad \rightarrow \quad 5y=5 \quad \rightarrow \quad y=1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x=3 \end{array}$$

Punto $B(3, 1)$

$$\left.\begin{array}{l} x-y-2=0 \\ x=0 \end{array}\right\} \quad \left. y=-2 \right\} \quad \text{Punto } C(0,-2)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y-9=0 \\ x=0 \end{array}\right\} \quad \left. y=3 \right\} \quad \text{Punto } A(0,3)$$

2.º) Tomamos el lado AC como base del triángulo:

$$base=\left|\overrightarrow{AC}\right|=5$$

3.º) La altura es la distancia de B a la recta que pasa por A y por C (que es el eje Y). Por tanto:

$$altura=3$$

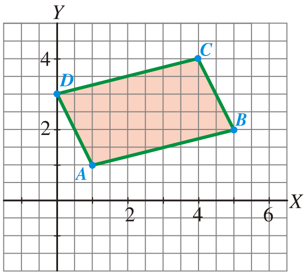
4.º) El área del triángulo es:

$$Área=\frac{5\cdot 3}{2}=\frac{15}{2}=7{,}5 \ \text{u}^2$$

Ejercicio nº 43.-

Halla el área del paralelogramo de vértices $A(1, 1)$, $B(5, 2)$, $C(4, 4)$ y $D(0, 3)$.

Solución:



1.º) Tomamos como base el lado AB:

$$base=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$$

2.º) La altura es la distancia del vértice C (o del D) a la recta que pasa por A y B. Obtengamos la ecuación de dicha recta.

$$pendiente=\frac{2-1}{5-1}=\frac{1}{4}$$

$$r: y=1+\frac{1}{4}(x-1) \quad \rightarrow \quad 4y=4+x-1 \quad \rightarrow \quad x-4y+3=0$$

$$altura = dist(C, r) = \frac{|4-16+3|}{\sqrt{1+16}} = \frac{|-9|}{\sqrt{17}} = \frac{9}{\sqrt{17}}$$

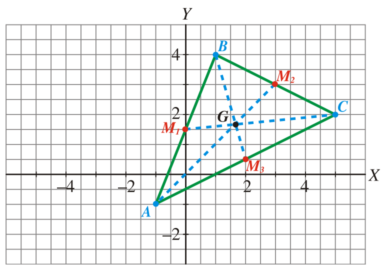
Así, el área es:

$$Área = base \cdot altura = \sqrt{17} \cdot \frac{9}{\sqrt{17}} = 9 \text{ u}^2$$

Ejercicio nº 44.-

Dado el triángulo de vértices *A*(–1, –1), *B*(1, 4) y *C*(5, 2), halla las ecuaciones de sus tres medianas y calcula el baricentro (punto de intersección de las medianas).

Solución:



1.º) Hallamos los puntos medios de cada lado:

- de $AB \rightarrow M_1\left(0, \frac{3}{2}\right)$
- de $BC \rightarrow M_2\,(3, 3)$
- de $AC \rightarrow M_3\left(2, \frac{1}{2}\right)$

2.º) Hallamos las ecuaciones de las tres medianas:

- La que pasa por *A* y M_2:

$$pendiente = \frac{4}{4} = 1$$
$$recta: y = 3 + 1 \cdot (x-3) \rightarrow y = 3 + x - 3 \rightarrow x - y = 0$$

- La que pasa por *B* y M_3:

$$pendiente = \frac{4-1/2}{1-2} = \frac{7/2}{-1} = \frac{-7}{2}$$
$$recta: y = 4 - \frac{7}{2}(x-1) \rightarrow 2y = 8 - 7x + 7 \rightarrow 7x + 2y - 15 = 0$$

- La que pasa por *C* y M_1:

$$pendiente = \frac{2-3/2}{5-0} = \frac{1/2}{5} = \frac{1}{10}$$
$$recta: y = 2 + \frac{1}{10}(x-5) \rightarrow 10y = 20 + x - 5 \rightarrow x - 10y + 15 = 0$$

3.º) Hallamos el baricentro como punto de corte de las medianas:

$$\left.\begin{array}{l} x-y=0 \\ 7x+2y-15=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x=y \\ 7x+2x-15=0 \quad \rightarrow \quad 9x-15=0 \quad \rightarrow \quad x=\dfrac{15}{9}=\dfrac{5}{3} \end{array}$$

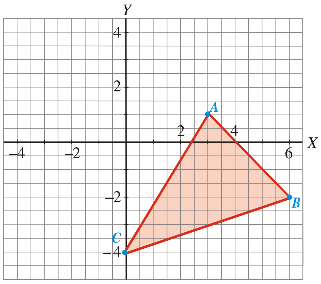
$$Baricentro = G = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

Ejercicio nº 45.-

Halla el área del triángulo de vértices:

***A*(3, 1) *B*(6, –2) *C*(0, –4)**

Solución



1.º) Tomamos el lado BC como base del triángulo:

$$base = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$$

2.º) La altura es la distancia de A a la recta que pasa por B y C. Hallamos la ecuación de dicha recta:

$$pendiente = \frac{-4+2}{0-6} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

$$y = -4 + \frac{1}{3}x \quad \rightarrow \quad 3y = -12 + x \quad \rightarrow \quad r: x - 3y - 12 = 0$$

Por tanto:

$$altura = dist\,(A, r) = \frac{|3-3-12|}{\sqrt{1+9}} = \frac{12}{\sqrt{10}}$$

3.º) El área del triángulo es:

$$Área = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{\sqrt{40} \cdot \dfrac{12}{\sqrt{10}}}{2} = 12 \text{ u}^2$$