UNIDAD13.PRODUCTO ESCALAR, VECTORIAL Y MIXTO. APLICACIONES

Contexto con la P.A.U.

Este tema es la continuación del anterior. Mientras que en el tema 12 se describen las expresiones que identifican, puntos, rectas y planos, así como las posiciones relativas, en el tema que nos encontramos se estudia las relaciones métricas entre estos elementos.

Al final del tema se realizan los ejercicios del bloque de Geometría de los últimos exámenes de la PAU.

1. Producto escalar de dos vectores.

1.1. Definición

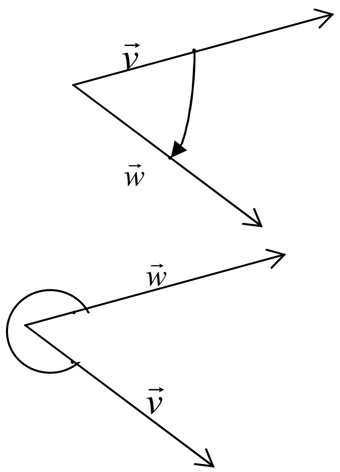
En el curso anterior se estudió ya la definición de producto escalar para vectores en el plano, en éste lo extenderemos al espacio (si la tercera coordenada de los vectores es nula podemos particularizar al producto escalar en el plano).

Definición: El producto escalar de dos vectores libres $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es un número real (escalar) definido como:

$\vec{v}\cdot\vec{w}=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos(\angle(\vec{v},\vec{w}))$, donde:

- $|\vec{v}|$ y $|\vec{w}|$ son los módulos de los vectores ($|\vec{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$)
- $\cos(\angle(\vec{v},\vec{w}))$ es el coseno del ángulo que forman los vectores $\vec{v},\vec{w}$ si se aplican desde el mismo punto

Si recuerdas, en Física el trabajo realizado al desplazar una masa es igual al producto escalar de la fuerza y el desplazamiento W=$\vec{F}\cdot\vec{d}=F\cdot d\cdot\cos(\alpha)$



El ángulo que forman dos vectores $(\vec{v},\vec{w})$ es el que va del primero al segundo en el sentido horario

Propiedades del producto escalar de dos vectores:

- El producto escalar de un vector por sí mismo es igual al cuadrado del módulo:

  $\vec{v}\cdot\vec{v}=|\vec{v}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\angle(\vec{v},\vec{v}))=|\vec{v}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(0)=|\vec{v}|^2$

- El producto escalar es conmutativo

  $\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{w}\cdot\vec{v}$ pues $\cos(\angle(\vec{v},\vec{w}))=\cos(\angle(\vec{w},\vec{v}))$ (pues $\angle(\vec{v},\vec{w})=360º-\angle(\vec{w},\vec{v})$ y el coseno cumple cos(α)=cos(360-α)

- El producto escalar es distributivo respecto a la suma de vectores:

  $\vec{v}\cdot(\vec{w}+\vec{u})=\vec{v}\,\vec{w}+\vec{v}\,\vec{u}$

- El producto escalar de dos vectores es nulo si y sólo si son perpendiculares o alguno de los vectores es cero:

  $\vec{v}\cdot\vec{w}=0 \leftrightarrow \vec{v}\perp\vec{w}$, $\angle(\vec{w},\vec{v})=90º$ ó 270º ó $\vec{v}=0$ y/o $\vec{w}=0$

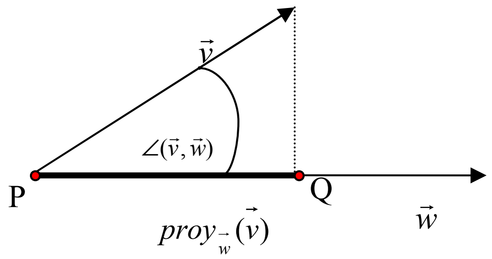
1.2. Interpretación geométrica del producto escalar

Se puede relacionar geométricamente el producto escalar de dos vectores con la proyección de un vector sobre el otro:

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = proy_{\vec{v}}(\vec{w})\cdot|\vec{v}| = proy_{\vec{w}}(\vec{v})\cdot|\vec{w}| \text{ donde :}$$

- $proy_{\vec{v}}(\vec{w})$ es el valor de la proyección de $\vec{w}$ sobre $\vec{v}$
- $proy_{\vec{w}}(\vec{v})$ es el valor de la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$

Demostración:



$proy_{\vec{w}}(\vec{v}) = |\overrightarrow{PQ}| = |\vec{v}|\cos(\angle(\vec{v},\vec{w}))$ multiplicando $|\vec{w}|$

$|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cos(\angle(\vec{v},\vec{w})) = \vec{v}\cdot\vec{w} = |\vec{v}|\cdot proy_{\vec{w}}(\vec{v})$

1.3. Expresión analítica del producto escalar.

A partir de la propiedad distributiva del producto escalar y del producto escalar de los vectores unitarios, podemos obtener la expresión analítica del producto escalar de dos vectores cualesquiera. Veamos primero el producto escalar de los vectores unitarios:

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = |1|\cdot|1|\cdot\cos(0) = 1$$

$$\vec{j}\cdot\vec{j} = |1|\cdot|1|\cdot\cos(0) = 1$$

$$\vec{k}\cdot\vec{k} = |1|\cdot|1|\cdot\cos(0) = 1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{i} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{j} = |1|\cdot|1|\cdot\cos(90) = 0$$

De esta manera el producto de dos vectores $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ y $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$ viene definido analíticamente como:

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = v_x\cdot w_x + v_y\cdot w_y + v_z\cdot w_z$$

Demostración:

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = (v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k})\cdot(w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}) =$$

$$= v_x\vec{i}\cdot(w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}) + v_y\vec{j}\cdot(w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}) + v_z\vec{k}\cdot(w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}) = v_x\cdot w_x + v_y\cdot w_y + v_z\cdot w_z$$

Ejemplos: (1,2,-1)·(2,1,4)=1·2+2·1-1·4=0 → son perpendiculares

(1,1,1)·(2,0,-1)=1·2+1·0+1·(-1)=1=|(1,1,1)|·|(2,0,-1)|·cos(α)→ $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}\right)$

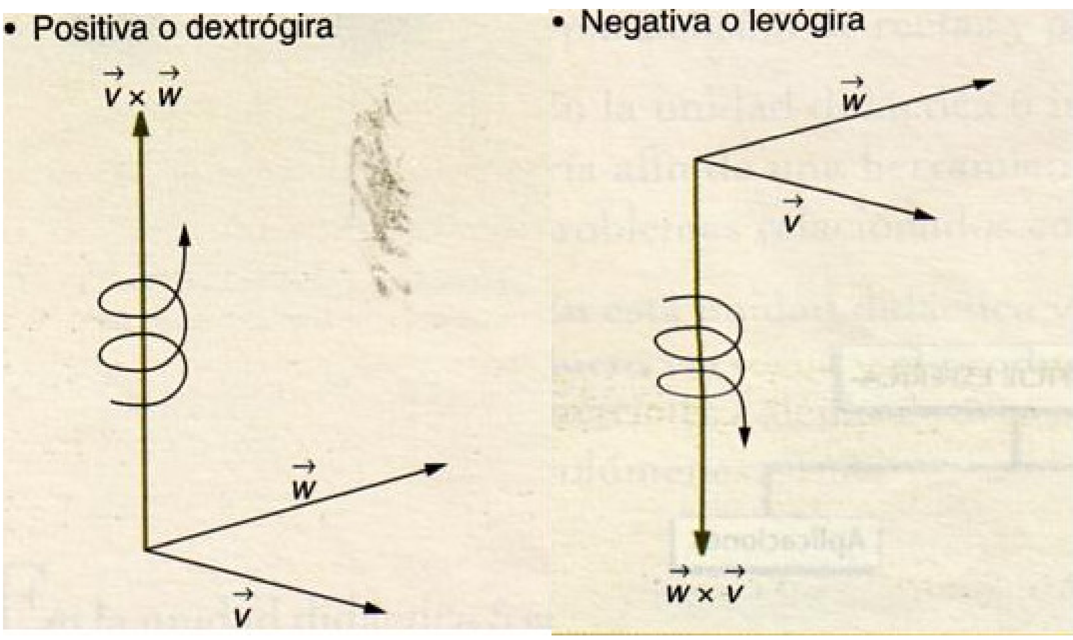
2. Producto vectorial de dos vectores

2.1. Definición

Definición: El producto vectorial de dos vectores libres $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es otro vector que designaremos como $\vec{v} \times \vec{w}$ y que se define a partir de las siguientes propiedades:

- *módulo* → $|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \text{sen}(\angle(\vec{v}, \vec{w}))$
- *dirección* → la perpendicular simultáneamente a $\vec{v}$ y $\vec{w}$
- *sentido* → el de avance a derechas de un sacacorchos girando de $\vec{v}$ a $\vec{w}$ (*)

(*) Sentido del producto vectorial



Propiedades del producto vectorial:

- El producto vectorial es anticonmutativo. El módulo y la dirección no cambian, pero el sentido es el opuesto (ver regla sacacorchos).

  $$(\vec{v} \times \vec{w}) = -(\vec{w} \times \vec{v})$$

- El producto vectorial es distributivo con la suma:

  $$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

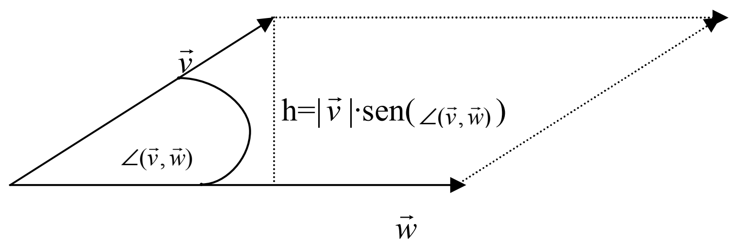
- El producto vectorial es nulo siempre que se cumple una de las dos siguientes condiciones:

  a) uno de los dos vectores o los dos son nulos

  b) son vectores paralelos $\angle(\vec{v}, \vec{w})$=0º ya que sen(0)=0

2.2. Interpretación geométrica del producto vectorial

Sean dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ con origen común. Si trasladamos el vector $\vec{w}$ sobre el extremo de $\vec{v}$ y el de $\vec{v}$ sobre el extremo de $\vec{w}$ se forma un paralelogramo (ver figura)



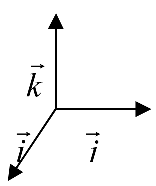
El área del paralelogramo es $|\vec{w}|$·h siendo h=$|\vec{v}|$·sen($\angle(\vec{v},\vec{w})$). Así el área del paralelogramo es igual al módulo del producto vectorial de los dos vectores que lo forman

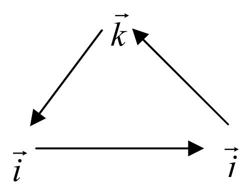
$$A_{paralelogramos}=|\vec{w}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen(\angle(\vec{v},\vec{w}))=|\vec{v}\times\vec{w}|$$

2.3.Expresión analítica del producto vectorial

Para calcular la expresión analítica del producto vectorial veamos el producto vectorial de los vectores unitarios:

$$\begin{array}{ll} \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} & \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k} \\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i} & \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i} \\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j} & \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j} \end{array}$$





A partir de estos productos vectoriales y de la propiedad distributiva podemos calcular de forma sencilla el producto vectorial de dos vectores $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$, $\vec{w}=(w_x,w_y,w_z)$

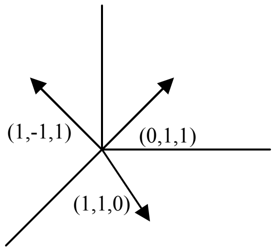
$$\vec{v}\times\vec{w}=(v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k})\times(w_x\vec{i}+w_y\vec{j}+w_z\vec{k})=v_x\cdot w_x\cdot 0+v_x\cdot w_y\vec{k}-v_xw_z\vec{j}-$$

$$-v_y\cdot w_x\vec{k}+v_y\cdot w_y\cdot 0+v_yw_z\vec{i}+v_zw_x\vec{j}-v_zw_y\vec{i}+v_z\cdot w_z\cdot 0=$$

$$=(v_yw_z-v_zw_y)\,\vec{i}+(v_zw_x-v_xw_z)\,\vec{j}+(v_x\cdot w_y-v_y\cdot w_x)\,\vec{k}$$

Se puede calcular fácilmente a partir del siguiente determinante:

$$\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}$$



Ejemplo: $(1,1,0)\times(0,1,1)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}=(1,-1,1)$

3. Producto Mixto de 3 vectores.

3.1.Definición

El producto mixto de tres vectores $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ es un valor numérico definido a partir del producto vectorial y escalar.

Definición: El producto mixto de 3 vectores, $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ que se designa como $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$, se obtiene del producto escalar del primer vector por el vector resultante de multiplicar vectorialmente los otros dos:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$$

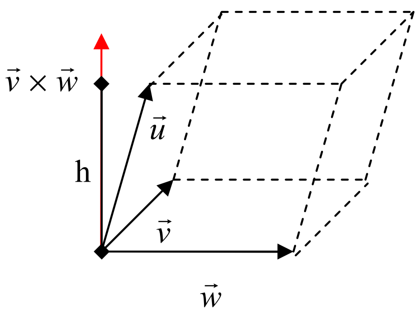
Propiedades del producto mixto:

- Si permutamos dos vectores del producto mixto este cambia de signo:
  $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=-[\vec{v},\vec{u},\vec{w}]=-[\vec{w},\vec{v},\vec{u}]=-[\vec{u},\vec{w},\vec{v}]$
- El producto mixto es distributivo respecto a la suma de vectores:
  $[\vec{u}+\vec{u}',\vec{v},\vec{w}=]\,[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]+[\vec{u}',\vec{v},\vec{w}]$
- $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0$ si algún vector es nulo o son coplanarios (linealmente dependientes).

3.2. Interpretación geométrica del producto mixto.

Consideremos los tres vectores $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ aplicados sobre el mismo origen, de manera que formen un paralelepípedo (con sus proyecciones). Se cumple que el volumen del paralelepípedo es igual al valor absoluto del producto mixto de los tres vectores que lo forman

$$V_{\text{paralelepipedo}}=\text{area}_{\text{base}}\cdot h=|\vec{v}\times\vec{w}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos(\angle(\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}))=[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$$



3.3. Expresión analítica del producto mixto

Aplicando la expresión analítica del producto vectorial y escalar de los apartados anteriores, es fácil ver como el producto mixto se puede poner a partir del siguiente determinante:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

Ejemplo: [(1,2,0),(-1,-2,0),(0,1,0)]= $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$ son coplanarios, es decir linealmente dependientes.

Ejercicio 1. Sean los vectores $\vec{u}=(2,-5,3)$, $\vec{v}=(4,-3,2)$ y $\vec{w}=(0,2,-7)$

a) Calcular los productos escalares entre los tres vectores

$\vec{u}=(2,-5,3)$ $\vec{v}=(4,-3,2)$ $\vec{w}=(0,2,-7)$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=8+15+6=29$

$\vec{u}\cdot\vec{w}=0-10-21=-31$

$\vec{v}\cdot\vec{w}=0-6-14=-20$

b) Determinar el módulo de los tres vectores

$|\vec{u}|=\sqrt{2^2+(-5)^2+3^2}=\sqrt{4+25+9}=\sqrt{38}$

$|\vec{v}|=\sqrt{16+9+4}=\sqrt{29}$

$|\vec{w}|=\sqrt{0+4+49}=\sqrt{53}$

c) Hallar el ángulo que forman entre ellos

$$\angle(\vec{u},\vec{v})=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{29}{\sqrt{38\cdot 29}}\right)=29^{o}17'7''$$

$$\angle(\vec{u},\vec{w})=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{u}||\vec{w}|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{-31}{\sqrt{38\cdot 53}}\right)=133^{o}41'\ 27{,}2''$$

$$\angle(\vec{v},\vec{w})=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{-20}{\sqrt{29\cdot 53}}\right)=120^{o}\ 40'\ 24{,}4''$$

Ejercicio 2.- Sean los vectores $\vec{u} = (2,2,2)$ y $\vec{v} = (1,0,1)$. Hallar todos los vectores de módulo unidad que formen un ángulo de 30º con $\vec{u}$ y de 45º con $\vec{v}$

$\vec{w} = (x, y, z)$

$|\vec{w}| = x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ (Ec1)$

$$\vec{u}\cdot\vec{w} = |\vec{u}|\cdot 1\cdot\cos(30) \rightarrow \cos(30) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{u}|} = \frac{2(x+y+z)}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow (x+y+z) = \frac{\sqrt{36}}{4} = \frac{3}{2} \ (Ec2)$$

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = |\vec{v}|\cdot 1\cdot\cos(45) \rightarrow \cos(45) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|} = \frac{(x+z)}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow (x+z) = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1 \ (Ec3)$$

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ x^2+y^2+z^2=1\\ (2)\ x+y+z=\dfrac{3}{2}\\ (3)\ x+z=1\end{array}\right\} \ (3)-(2) \rightarrow y=\frac{1}{2};\ x^2+\frac{1}{4}+(1-x)^2=1 \rightarrow 2x^2-2x+\frac{1}{4}=0\ .$$

Dos soluciones

$$x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4},\ y=\frac{1}{2},\quad z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4} \qquad \vec{v}_1=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4},\ y=\frac{1}{2},\quad z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4} \qquad \vec{v}_2=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

Ejercicio 3. – Calcula un vector $\vec{u}$ que cumpla en cada caso las siguientes condiciones:

a) Sea proporcional al vector $\vec{v} = (2,-1,1)$ y además $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3$

$$\vec{u}=(2k,-k,k)\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=(2k,-k,k)\cdot(2,-1,1)=4k+k+k=6k=3 \rightarrow k=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \rightarrow \vec{u}=(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

b) Sea perpendicular a los vectores $\vec{v} = (2,-1,1)$ y $\vec{w} = (18,-22,-5)$ y además $|\vec{u}|=14$

$\vec{u}=(x,y,z)$:

$|\vec{u}|=x^2+y^2+z^2=196$ (Ec 1)

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2x-y+z=0$ (Ec 2)

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 18x-22y-5z=0$ (Ec 3)

$$\begin{cases}(1)\ x^2+y^2+z^2=164\\ (2)\ 2x-y+z=0\\ (3)\ 18x-22y-5z=0\end{cases}$$

(2)→ z=y-2x, (3) → 18x-22y-5(y-2x)=0 28x-27y=0→ $x=\frac{27}{28}y$, $z=y-2\frac{27}{28}y=-\frac{13}{14}y$

$$(1)\ \left(\left(\frac{27}{28}\right)^2+1+\left(\frac{13}{14}\right)^2\right)y^2=196 \rightarrow y^2=\frac{196}{\frac{2189}{784}}=\frac{153664}{2189} \rightarrow y=\frac{\pm 392}{\sqrt{2189}}$$

$$x=\frac{378}{\sqrt{2189}} \quad z=-\frac{364}{\sqrt{2189}} \rightarrow \begin{array}{l} \vec{u}_1=\frac{1}{\sqrt{2189}}(378,392,-364) \\ \vec{u}_2=-\frac{1}{\sqrt{2189}}(378,392,-364) \end{array}$$

Otra forma más sencilla: el producto vectorial de dos vectores es un vector perpendicular a ambos

$$\vec{u}=k\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=k\cdot\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 18 & -22 & -5 \end{vmatrix}=k\cdot(27,28-26)$$

$$|\vec{u}|=x^2+y^2+z^2=k^2(27^2+28^2+26^2)=196 \rightarrow k=\frac{\pm 14}{\sqrt{2189}}$$

$$\vec{u}_1=\frac{1}{\sqrt{2189}}(378,392,-364)$$

$$\vec{u}_2=-\frac{1}{\sqrt{2189}}(378,392,-364)$$

c) Que sea perpendicular al eje OZ y cumpla $\vec{u}\cdot\vec{v}=9, y\,\vec{u}\cdot\vec{w}=-4$ siendo $\vec{v}=(3,-1,5)$ $y\,\vec{w}$ =(1,2,-3)

$\vec{u}$=(x,y,z)

$\vec{u}\cdot\vec{k}=z=0$ (Ec 1)

$\vec{u}\cdot\vec{v}$=3x-y+5z=9 (Ec2)

$\vec{u}\cdot\vec{w}$=x+2y-3z=-4 (Ec 3)

Resolviendo el sistema $\vec{u}$=(2,-3,0)

Ejercicio 4.- Para los vectores $\vec{u}=(2,-3,1)$, $\vec{v}=(-3,1,2)$ y $\vec{w}=(1,2,3)$ calcular $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$ y $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$

$\vec{u}=(2,-3,1)$, $\vec{v}=(-3,1,2)$, $\vec{w}=(1,2,3)$

$$\vec{u}x\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-7\vec{i}-7\vec{j}-7\vec{k} \quad (\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -7 & -7 & -7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-7\vec{i}+14\vec{j}-7\vec{k}$$

$$\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-\vec{i}+11\vec{j}-7\vec{k} \quad \vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 11 & -7 \end{vmatrix}=10\vec{i}+13\vec{j}+19\vec{k}$$

Nota: en el producto vectorial no se cumple la propiedad distributiva

Ejercicio 5.-Dado los vectores $\vec{u} = (1,-1,3)$, $\vec{v} = (-2,2,1)$ y $\vec{w} = (3,-2,5)$ calcular $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$

Es el producto mixto $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -7$

Ejercicio 6.- Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se cumple a) sus módulos son, respectivamente, 10 y 2, b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 12$. Calcular $|\vec{u}\times\vec{v}|$

$|\vec{u}| = 10,\quad |\vec{v}| = 2$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\angle(\vec{u},\vec{v})) = 10\cdot 2\cdot\cos(\angle(\vec{u},\vec{v})) = 12 \ \rightarrow \cos(\angle(\vec{u},\vec{v})) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen(\angle(\vec{u},\vec{v})) = 20\cdot sen(\angle(\vec{u},\vec{v})) = 20\cdot\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = 20\cdot\sqrt{\frac{16}{25}} = 20\cdot\frac{4}{5} = 16$$

4. Aplicaciones

4.1. Aplicaciones con vectores

En este apartado veremos las aplicaciones del módulo, del producto escalar, vectorial y mixto relativos a las propiedades de los vectores. Recordemos que muchas magnitudes físicas, como la posición, velocidad, la fuerza…son vectores, de aquí la gran importancia de este punto.

4.1.1. Módulo y vector unitario

A partir del producto escalar es fácil calcular el módulo y el vector unitario de dicho vector. Módulo:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Por otro lado, el vector unitario de un vector $\vec{v}$ es otro vector con la misma dirección y sentido, pero con módulo unidad. Para calcularlo se divide el vector por su módulo:

$$\vec{u}_v = \frac{1}{|\vec{v}|}\cdot\vec{v} = \left(\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}, \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}, \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}\right)$$

4.1.2 Ángulo de dos vectores

A partir del producto escalar o del módulo del producto vectorial es fácil calcular el ángulo que forman dos vectores:

$$\angle(\vec{u},\vec{v}) = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)$$

$$\angle(\vec{u},\vec{v}) = sen^{-1}\left(\frac{|\vec{u}\times\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)$$

Luego, si dos vectores $\vec{u},\vec{v}$ son perpendiculares, se cumple:

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
- $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$

4.1.3 Vector normal a un plano y director de una recta

1) Dado un plano con ecuación general π:Ax+By+Cz+D=0, demostremos lo dicho en el tema anterior, esto es que el **vector (A,B,C) es perpendicular al plano π**:

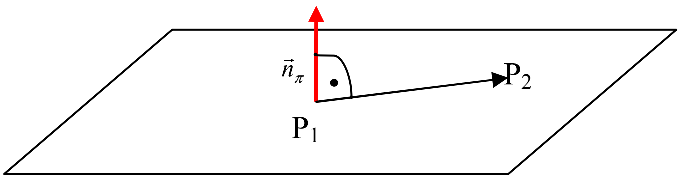
Sea $P_1=(x_1,y_1,z_1)\in\pi \rightarrow Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ (1)

Sea $P_2=(x_2,y_2,z_2)\in\pi \rightarrow Ax_2+By_2+Cz_2+D=0$ (2)

Restando (1)-(2) $\rightarrow$ $A(x_1-x_2)+B(y_1-y_2)+C(z_1-z_2)=0$

Podemos expresar esta igualdad a partir del siguiente producto escalar del vector $\vec{n}_\pi=$ (A,B,C) y el vector $\overline{P_1P_2}=((x_1-x_2),(y_1-y_2),(z_1-z_2))$, contenido en el plano:

$(A,B,C)\cdot((x_1-x_2),(y_1-y_2),(z_1-z_2))=0$ $\rightarrow$ $\vec{n}_\pi \perp \overline{P_1P_2}$, luego es un vector perpendicular a cualquier vector contenido en el plano, y, por lo tanto $\vec{n}_\pi$ es perpendicular a π.



2) Sea r la recta dada como intersección de dos planos π_1, π_2:

$$r: \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

Se cumple que la recta r está contenida en π_1 y π_2, luego el vector director de la recta, $\vec{v}_r$ es perpendicular a π_1 y π_2 $\rightarrow \vec{v}\perp\vec{n}_{\pi_1}, \vec{v}\perp\vec{n}_{\pi_2}$ luego $\vec{v}_r$ **se puede expresar como el producto vectorial de $\vec{n}_{\pi_1}, \vec{n}_{\pi_2}$:**

$$\vec{v}_r=\vec{n}_{\pi_1}\times\vec{n}_{\pi_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

Ejemplo:

$$r:\begin{cases} x-2y+z=2 \\ 2x+y-3z=3 \end{cases} \qquad \vec{n}_{\pi_1}=(1,-2,1),\ \vec{n}_{\pi_2}=(2,1,-3)$$

$$\vec{v}_r=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}=5\vec{i}+5\vec{j}+5\vec{k}$$

4.2. Ángulo entre los elementos del espacio

En este apartado calcularemos los ángulos que forman los distintos elementos del espacio, vectores, rectas y planos. Para su cálculo usaremos el producto escalar de los vectores característicos de ellos, el vector director de la recta y el normal del plano.

4.2.1 Ángulos entre dos rectas.

Sean dos rectas r_1 y r_2 cuyos vectores directores son $\vec{v}_{r_1}$ y $\vec{v}_{r_2}$; el ángulo que forman estas dos rectas es el mismo que forman sus vectores directores:

$$\angle(r_1, r_2) = \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}\right)$$

Nota: las dos rectas forman dos ángulos que suman 180º (son suplementarios). El ángulo que forma que se da es el menor de ellos, es decir el que es menor o igual que 90º. De esta forma si $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}\right)$ es un ángulo mayor que 90º el ángulo de la recta es el suplementario (180º-α)

Casos:

a) rectas perpendiculares ($r_1 \perp r_2$)→ $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$

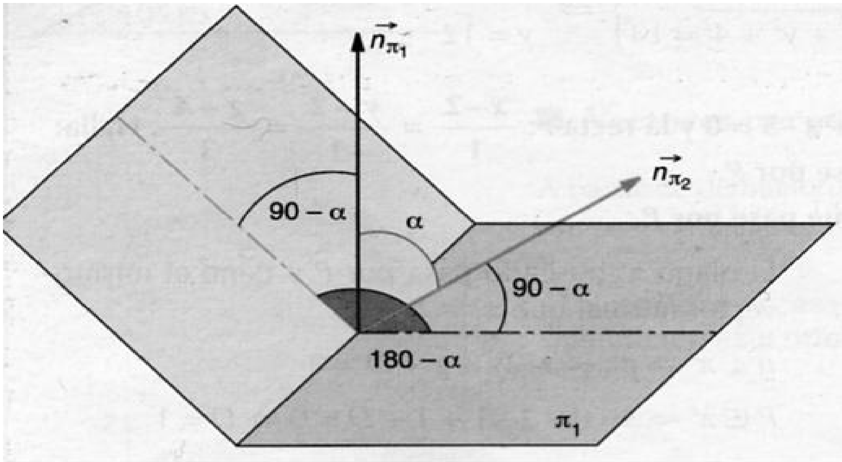
b) rectas paralelas ($r_1 \parallel r_2$)→ $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|$, $\vec{v}_1 = \lambda \cdot \vec{v}_2$

4.2.2 Ángulos entre dos planos.

Sean dos planos π_1 y π_2, cuyos vectores normales son $\vec{n}_{\pi_1}, \vec{n}_{\pi_2}$, respectivamente. Si llamamos α al ángulo entre los dos vectores normales, el ángulo que forman los dos planos es 180º-α.

$$\angle(\pi_1, \pi_2) = 180º - \angle(\vec{n}_{\pi_1}, \vec{n}_{\pi_2}) = 180º - \cos^{-1}\left(\frac{\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}}{|\vec{n}_{\pi_1}||\vec{n}_{\pi_2}|}\right)$$

Nota: los dos planos forman dos ángulos que suman 180º (son suplementarios). El ángulo que forma que se da es el menor de ellos, es decir el que es menor o igual que 90º. De esta forma si $\alpha = 180 - \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}\right)$ es un ángulo mayor que 90º el ángulo de la recta es el suplementario (180º-α)



Casos:

a) planos perpendiculares: $(\pi_1 \perp \pi_2) \to \vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2} \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = 0$

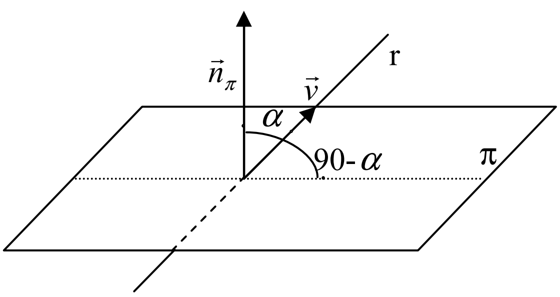
b) planos paralelos: $(\pi_1 \parallel \pi_2) \to \vec{n}_{\pi_1} \parallel \vec{n}_{\pi_2} \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = |\vec{n}_{\pi_1}| \cdot |\vec{n}_{\pi_2}|,\ \vec{n}_{\pi_1} = \lambda \cdot \vec{n}_{\pi_2}$

4.2.3 Ángulos entre una recta y un plano.

Sea una recta r con vector director $\vec{v}$ y un plano π con vector normal $\vec{n}_\pi$. Si llamamos α el ángulo que forman $\vec{v}$ y $\vec{n}_\pi$, el ángulo que forman la recta y el plano será 90º-α:

$$\angle(\pi, r) = 90^{\text{o}} - \angle(\vec{n}_\pi, \vec{v}) = 90^{\text{o}} - \cos^{-1}\left(\frac{\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}}{|\vec{n}_\pi| |\vec{v}|}\right)$$

Nota: la recta y el plano forman dos ángulos que suman 180º (son suplementarios). El ángulo que forman que se da es el menor de ellos, es decir el que es menor o igual que 90º. De esta forma si $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}\right)$ es un ángulo mayor que 90º el ángulo que restamos a 90º en la fórmula es el suplementario (180º-α)



Ejercicio7.- Calcular el ángulo que forman las rectas r y s

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{-1} \quad \vec{v}_r = (2,-2,-1)$$

$$s: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-2} \quad \vec{v}_s = (-1,3,-2)$$

$$\angle(r,s) = \angle(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s}{|\vec{v}_r||\vec{v}_s|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{|3||\sqrt{14}|}\right) = 122^{o}\ 18'\ 41{,}5''$$

El ángulo que se suele dar es el menor de los dos que forman $\angle(r,s)$ =180º-122º18'41,5''=57º 41'18,5''

Ejercicio 8.- Calcular el ángulo que forman plano π:x-y+z=0 y la recta r:$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3}$

π: x-y+z=0 → $\vec{n}_\pi = (1,-1,1)$

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3} \quad \vec{v}_r = (2,-1,3)$$

$$\angle(r,\pi) = 90^{o} - \angle(\vec{v}_r, \vec{n}_\pi) = 90^{o} - \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi}{|\vec{v}_r||\vec{n}_\pi|}\right) = 90^{o} - \cos^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{3}\sqrt{14}}\right) = 67^{o}\ 47'\ 32{,}44''$$

Ejercicio 9.- Calcular el ángulo que forman los planos π_1:x+y-2z=3 y π_2:-x+y+2z=2

π_1: x+y-2z=3 → $\vec{n}_{\pi 1} = (1,1,-2)$

π_2: -x+y+2z=2 → $\vec{n}_{\pi 1} = (-1,1,2)$

$$\angle(\pi_1,\pi_2) = 180^{o} - \angle(\vec{n}_{\pi 1}, \vec{n}_{\pi 2}) = 180^{o} - \cos^{-1}\left(\frac{\vec{n}_{\pi 1} \cdot \vec{n}_{\pi 2}}{|\vec{n}_{\pi 1}||\vec{n}_{\pi 2}|}\right) = 180^{o} - \cos^{-1}\left(\frac{-4}{\sqrt{6}\sqrt{6}}\right) = 48^{o}\ 12'\ 12{,}9''$$

4.3.Distancia entre los elementos del espacio

En este apartado estudiamos las distancias entre los elementos del espacio, puntos, rectas y planos entre si.

4.3.1. Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos P(x_1,y_1,z_1) y Q(x_2,y_2,z_2) del espacio es igual al módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$, es decir:

$$d(P,Q)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

4.3.2. Distancia entre un punto y una recta

La distancia de un punto $P(x_1,y_1,z_1)$ y una recta r (con vector director $\vec{v}_r=(v_x,v_y,v_z)$ y siendo $Q(x_2,y_2,z_2)$ un punto de la misma) es la mínima distancia entre P y la recta.

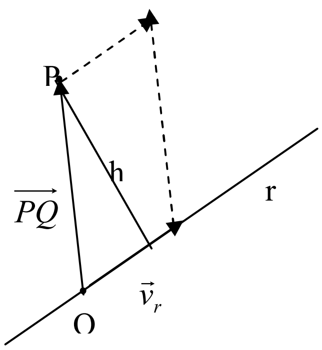
Hay dos formas de obtener la distancia entre r y P

a) $d(P,r)=\dfrac{|\vec{v}_r \times \overrightarrow{PQ}|}{|\vec{v}_r|}$

b) $d(P,r)=\sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2-(proy_{\vec{v}_r}(\overrightarrow{PQ}))^2}=\sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2-\left|\dfrac{\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}_r}{|\vec{v}_r|}\right|^2}$

Demostración:

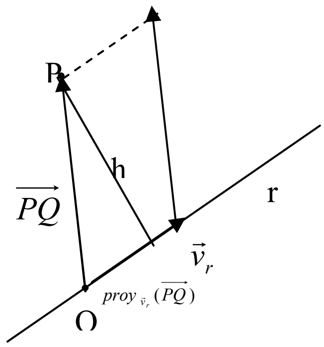
(a)



$a_{paralelogramo}=\text{base}\cdot h=|\vec{v}_r|\cdot d(P,r)=|\vec{v}_r\times\overrightarrow{PQ}|$

despejando: $d(P,r)=\dfrac{|\vec{v}_r\times\overrightarrow{PQ}|}{|\vec{v}_r|}$

(b)



Por el teorema de Pitágoras:

$d(P,r)=h=\sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2-(proy_{\vec{v}_r}(\overrightarrow{PQ}))^2}$

4.3.3. Distancia entre un punto y un plano

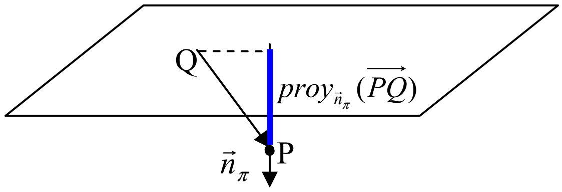
La distancia entre un punto $P(x_0,y_0,z_0)$ y un plano π (con vector normal $\vec{n}_\pi=(A,B,C)$ y que contiene a un punto $Q(x_1,y_1,z_1)$), es la menor distancia que existe entre P y el plano.

Su valor numérico es:

$$d(P,\pi)=proy_{\vec{n}_\pi}(\overline{PQ})=\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}_\pi\right|}{|\vec{n}_\pi|}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Demostración

$\left|\overline{PQ}\cdot\vec{n}_\pi\right| =$ $|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z_1-z_0)|=|Ax_1+By_1+Cz_1-Ax_0-By_0-Cz_0|=|-D-Ax_0-By_0-Cz_0|$ ya que $Ax_1+By_1+Cz_1=-D$ al pertenecer P al plano.



4.3.4. Distancia entre una recta y un plano

Para calcular la distancia entre una recta r (con vector director $\vec{v}_r=(v_x,v_y,v_z)$ y conteniendo a un punto $P(x_0,y_0,z_0)$) y un plano (con vector normal $\vec{n}_\pi=(A,B,C)$ y punto $Q(x_1,y_1,z_1)$), lo primero tenemos que hacer es comprobar la posición relativa entre ambos. Así según sea esta:

a) Se cortan → d(r,π)=0

b) Recta contenida en el plano → d(r,π)=0

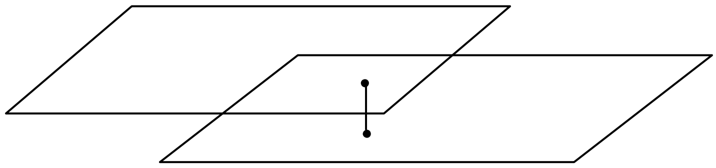
c) Son paralelas→ d(r,π)= $d(P,\pi)=proy_{\vec{n}_\pi}(\overline{PQ})=\dfrac{\left|\overline{PQ}\cdot\vec{n}_\pi\right|}{|\vec{n}_\pi|}=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

4.3.5 Distancia entre dos planos

Para estudiar la distancia entre dos planos π y π’, primero se tiene que estudiar la posición relativa de ambas. Así distinguimos:

A) Si los planos se cortan o son el mismo d(π,π’)=0

B) Si son paralelos d(π,π')=d(P,π’)=d(Q,π) donde P es un punto de π y Q de π’



4.3.6. Distancia entre rectas

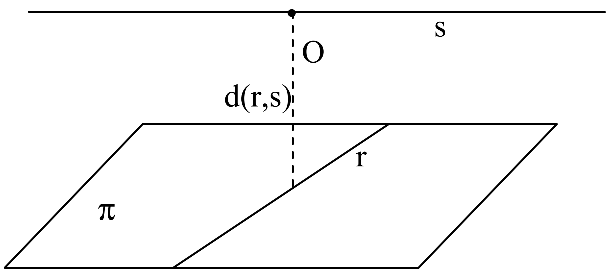
Para estudiar la distancia entre dos rectas r ($\vec{v}_r, P$) y s ($\vec{v}_s, Q$), primero se tiene que estudiar la posición relativa de ambas. Así distinguimos:

A) Rectas que se cortan → d(r,s)=0

B) Rectas paralelas d(r,s)=d(P,s)=d(r,Q), donde P es un punto de r y Q de s.

C) Rectas que se cruzan, el procedimiento a seguir es el siguiente: hallamos el plano π que contiene a la recta r y es paralela a s. La distancia entre las dos rectas es la misma que la distancia de s al plano π, es decir la distancia entre un punto de la recta s y el plano.

$$d(r,s) = d(s,\pi) = d(Q,\pi) = \frac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}_\pi|}{|\vec{n}_\pi|} = \frac{|(\vec{v}_r \times \vec{v}_s)\cdot\overrightarrow{PQ}|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{PQ}, \vec{v}_r, \vec{v}_s\right]\right|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}$$



Ejercicio 10. Calcular la distancia entre el punto P(-2,4,3) y la recta r: $\begin{cases} x = 2z + 1/2 \\ y = 4 - 2z/3 \end{cases}$

d(P,r)= $\sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2 - \left|\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}_r}{|\vec{v}_r|}\right|^2}$, tenemos que hallar un punto y un vector director de la recta.

Pasamos la recta a paramétricas: r: $\begin{cases} x = 2\cdot\lambda + 1/2 \\ y = 4 - 2\cdot\lambda/3 \\ z = \lambda \end{cases}$ → Q(1/2,4,0), $\vec{v} = (2,-2/3,1)$

$\overrightarrow{PQ} = (5/2, 0, -3)$ → $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\frac{25}{4} + 9} = \sqrt{\frac{61}{4}} = \frac{\sqrt{61}}{2}$

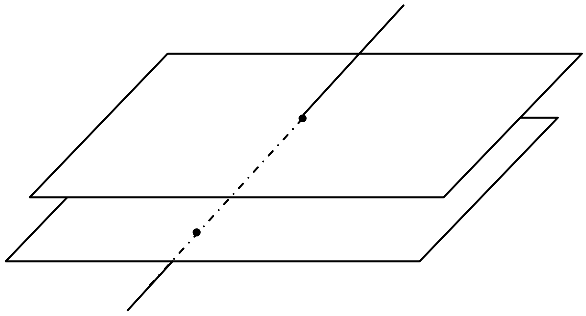
$|\vec{v}| = \sqrt{4 + \frac{4}{9} + 1} = \sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{7}{3}$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v} = 5 - 3 = 2$

d(P,r)= $\sqrt{\frac{61}{4} - \frac{4}{49/9}} = \sqrt{\frac{61}{4} - \frac{36}{49}} = \sqrt{\frac{61\cdot 49 - 36\cdot 4}{49\cdot 4}} = \frac{\sqrt{2845}}{14} \approx 3.81$

Ejercicio 11. Hallar la ecuación del plano paralelo a π:3x+2y-6z+3=0 y que dista 4 unidades de la recta r: $\begin{cases} x = 2-3t \\ y=-t \\ z=-3 \end{cases}$

Si estudiamos la posición relativa del plano y la recta, veamos que se cortan, luego cualquier otro plano paralelo a π cortará también a la recta dada, y por lo tanto, no puede distar 4 unidades de la misma.



Ejercicio 12. Hallar la distancia del punto A(1,2,3) a cada uno de los ejes coordenados

El eje OX tiene vector director $\vec{v}_{0x}=(1,0,0)$ y un punto Q(0,0,0)

d(A,r)= $\sqrt{|\overrightarrow{AQ}|^2-\left|\frac{\overrightarrow{AQ}\cdot\vec{v}_r}{|\vec{v}_r|}\right|^2}$

$\overrightarrow{AQ}=(-1,-2,-3)$ $|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$

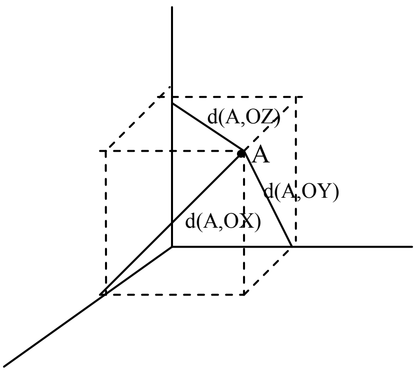
$\overrightarrow{AQ}\cdot\vec{v}_{ox}=-1$

d(A,OX)= $\sqrt{14-\left|\frac{-1}{1}\right|^2}=\sqrt{13}=\sqrt{2^2+3^2}\ u(Pitagoras)$

Haciendo lo mismo en los otros dos ejes:

d(A,OY)= $\sqrt{10}=\sqrt{1^2+3^2}$ u

d(A,OZ)= $\sqrt{5}=\sqrt{1^2+2^2}$ u



Ejercicio 13. Hallar la distancia entre las rectas r: $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-2}$ y s:$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -x+y+2z=1 \end{cases}$

Veamos la posición relativa entre las dos rectas:

r: $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-2}$ → P(2,0,-1), $\vec{v}_r=(3,2,-2)$

s: $\begin{cases} x+y+z=1 & (1) \\ -x+y+2z=1 & (2) \end{cases}$ (2)+(1) → 2y+3z=2 → y=1-3z/2 ; x=1-1+3z/2-z=z/2

s: $\begin{cases} x=\lambda/2 \\ y=1-3\lambda/2 \\ z=\lambda \end{cases}$ → Q(0,1,0) , $\vec{v}_s=(1,-3,2)$

$\left.\begin{array}{l} \text{rang}(\vec{v}_r,\vec{v}_s)=2 \\ \text{rang}(\vec{v}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{PQ})=3 \end{array}\right\}$ Se cruzan.

$$d(r,s)=d(s,\pi)=d(Q,\pi)=\frac{|\vec{n}_\pi\cdot\overrightarrow{PQ}|}{|\vec{n}_\pi|}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{PQ},\vec{v}_r,\vec{v}_s\right]\right|}{|\vec{v}_r\times\vec{v}_s|}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{|(-2,-8,-11)|}=\frac{15}{\sqrt{189}}\approx 1{,}09\ u$$

Ejercicio 14. Hallar la distancia entre la recta que pasan por los puntos A(1,0,0) y B(0,1,1) y el eje OY

La recta que pasa por A y B → r: $\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ y el eje OY: $\begin{cases} x=0 \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}$.

$\vec{v}_r=(-1,1,1)$ y $\vec{v}_s=(0,1,0)$ $\overrightarrow{PQ}=(1,0,0)$

$\left.\begin{array}{l} \text{rang}(\vec{v}_r,\vec{v}_s)=2 \\ \text{rang}(\vec{v}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{PQ})=3 \end{array}\right\}$ Se cruzan

$$d(r,s)=d(s,\pi)=d(Q,\pi)=\frac{|\vec{n}_\pi\cdot\overrightarrow{PQ}|}{|\vec{n}_\pi|}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{PQ},\vec{v}_r,\vec{v}_s\right]\right|}{|\vec{v}_r\times\vec{v}_s|}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|(1,0,1)|}=\frac{|1|}{\sqrt{2}}\approx 0{,}7071\ u$$

Ejercicio 15. Calcular la distancia entre el punto P(1,-1,3) y la recta r: $\begin{cases} x-z=0 \\ y+4=0 \end{cases}$

La recta en paramétricas puede expresarse como r: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=-4 \\ z=\lambda \end{cases}$, Q=(0,-4,0) y $\vec{v}_r=(1,0,1)$

$\overrightarrow{PQ}=(1,3,3)$ $|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{19}$ $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}_r=4$ $|\vec{v}_r|=\sqrt{2}$

$$d(P,r)=\sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2-\left|\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}_r}{|\vec{v}_r|}\right|^2}=\sqrt{19-\left|\frac{4}{\sqrt{2}}\right|^2}=\sqrt{19-\frac{16}{2}}=\sqrt{11}\ \text{u}$$

Ejercicio16. Hallar la distancia entre las rectas r: $\begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=1+2t \end{cases}$ y s: $\begin{cases} x-z=0 \\ y+4=0 \end{cases}$

Las rectas se cruzan:

$$d(r,s)=d(s,\pi)=d(Q,\pi)=\frac{|\vec{n}_\pi\cdot\overrightarrow{PQ}|}{|\vec{n}_\pi|}=\frac{\left|[\overrightarrow{PQ},\vec{v}_r,\vec{v}_s]\right|}{|\vec{v}_r\times\vec{v}_s|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ \text{u}$$

Ejercicio17. Calcular la distancia entre el plano π: 2x+3y-z+3=0 y π’: -4x-6y+2z+6=0

Veamos primero la posición relativa entre los dos planos:

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\neq\frac{D}{D'}\rightarrow\frac{2}{-4'}=\frac{3}{-6'}=\frac{-1}{2}\neq\frac{3}{6}\rightarrow son\ \ paralelos$$

$\pi \rightarrow \vec{n}_\pi=(2,3,-1)$ $P(0,0,3)$

$\pi' \rightarrow \vec{n}_{\pi'}=(-4,-6,2)$ $Q(0,0,-3)$

$\overrightarrow{PQ}=(0,0,-6)$, $\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}_\pi\right|=|6|=6$, $\left|\vec{n}_\pi\right|=\sqrt{14}$

$$d(\pi,\pi')=d(P,\pi')=proy_{\vec{n}_\pi}(\overrightarrow{PQ})=\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}_\pi\right|}{|\vec{n}_\pi|}=\frac{6}{\sqrt{14}}=\frac{6\sqrt{14}}{14}=\frac{3\sqrt{14}}{7}u$$

4.4Proyecciones

Las proyecciones de un punto P sobre en un plano o una recta son los puntos situados en éstos y que distan la menor distancia de P. Para proyectar una recta se proyectan dos puntos de la misma.

4.4.1. Proyección de un punto sobre un plano

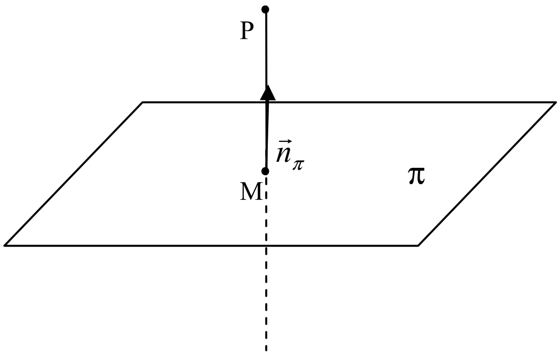
La proyección de un punto P sobre un plano π, es el punto M situado en el plano a la menor distancia de P. Calculando este punto podremos determinar la distancia entre el plano y el punto como la distancia entre P y su proyección M.

El punto M es tal que la recta que pasa por P y M es perpendicular al plano. Así obtendremos M, como intersección del plano π con la recta normal a π que pasa por P.

Pasos para obtener M:

1. Calculamos la recta perpendicular a π (vector director $\vec{v}=\vec{n}_\pi=(A,B,C)$) y que pasa por P

2. Calculamos la intersección del plano π con la recta obtenida en 1.



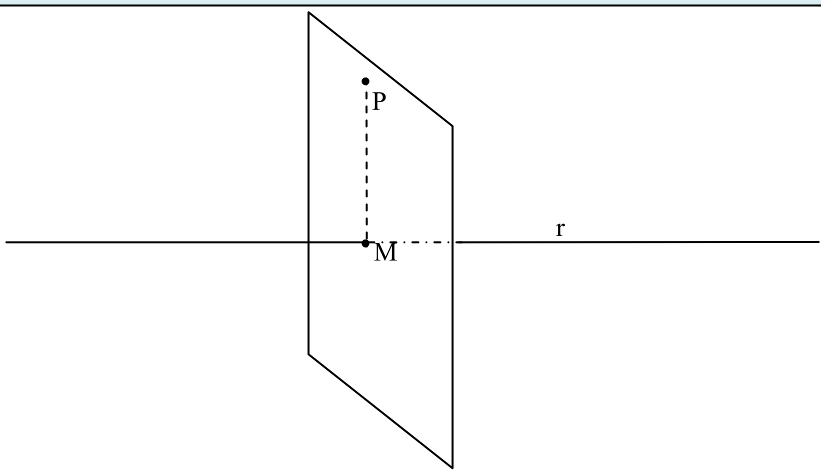
4.4.2. Proyección de un punto sobre una recta

La proyección de un punto P sobre una recta, es el punto M situado en la recta a la menor distancia de P. Calculando este punto podremos conocer la distancia entre la recta y el punto como la distancia entre P y su proyección M.

Pasos para obtener M:

1. Calculamos el plano perpendicular a r (vector normal $\vec{n}_\pi=\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$) y que pasa por P

2. Calculamos la intersección de la recta r y el plano obtenido en 1.



4.4.3. Proyección de una recta en un plano

La proyección de una recta r (vector director $\vec{v}_r$ y punto P) sobre un plano π (vector normal $\vec{n}_\pi$ y punto Q), es otra recta s situada en el plano y tal que la proyección de cualquier punto de r sobre π se encuentra en s. Dos formas de obtener la proyección:

a) Dos pasos:

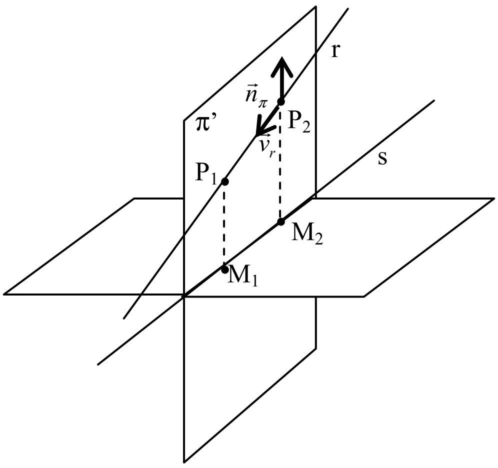
1. Obtenemos la proyección de dos puntos de r, P_1 y P_2, sobre π (M_1 y M_2)

2. Calculamos la recta que pasa por M_1 y M_2.

b) Dos pasos:

1. Hallamos el plano π' que pasa por r y es perpendicular a π. Dos vectores directores del plano son, $\vec{v}_r=(v_x,v_y,v_z)$, y el vector normal del plano π, $\vec{n}_\pi=(A,B,C)$. Un punto del plano es el punto P de la recta

2. La proyección s es la recta intersección entre los dos plano π y π'



Ejercicio 18. Calcular las siguientes proyecciones

a) Proyección del punto P(4,-2,1) en el plano π: 3x-2y-2z=-2

Paso 1: Calculemos la recta r que pasa por P y perpendicular a π: r: $\begin{cases} x=4+3\cdot\lambda \\ y=-2-2\lambda \\ z=1-2\lambda \end{cases}$

Paso 2: Intersección r y π: 3(4+3λ)-2(-2-2λ)-2(1-2λ)=-2→λ=-16/17→ M $\left(\frac{20}{17},\frac{-2}{17},\frac{49}{17}\right)$

b) Proyección del punto P(4,-2,1) sobre a la recta r: $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-7}{-1}$

Paso 1: Calculemos el plano π que pasa por P y perpendicular a r:

π:3x+5y-z+D=0. Pasa por P → 12-10-1+D=0 D=-1. Luego π:3x+5y-z-1=0

Paso 2: intersección r:(x,y,z)=(1+3λ,1+5λ,7-λ) → 3·(1+3λ)+5·(1+5λ)-(7-λ)-1=0 →λ=0 → M(1,1,7)

c) La recta r: $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$ en el plano π:x+2y+z=1

Lo haremos por el segundo método:

Paso 1: Calculamos el plano que contiene a r (es decir pasa por P(2,0,-1) y el vector director $\vec{v}$=(3,1,-1)) y perpendicular a π (es decir el otro vector director $\vec{w}=\vec{n}_\pi$ =(1,2,1)) → π: $\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3x-4y+5z-1=0$

Paso 2: La recta s es la intersección de π y π':

s: $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 3x-4y+5z=1 \end{cases}$

4.5. Elementos simétricos

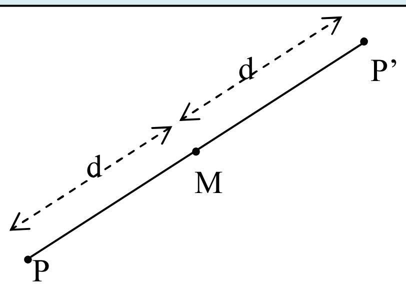
En este apartado veremos los siguientes elementos simétricos:

- Punto respecto a otro
- Punto respecto a un plano
- Punto respecto a una recta
- Recta respecto un plano

4.5.1. Simétrico de un punto respecto a otro punto.

El simétrico de un punto P(P_x,P_y,P_z) respecto a un punto M(M_x,M_y,M_z) es otro punto P'(x,y,z), tal que M es el punto medio del segmento PP'. Se cumple entonces:

$\frac{P_x+x}{2}=M_x$, $\frac{P_y+y}{2}=M_y$, $\frac{P_z+z}{2}=M_z$ → P'=$(2M_x-P_x, 2M_y-P_y, 2M_z-P_z)$

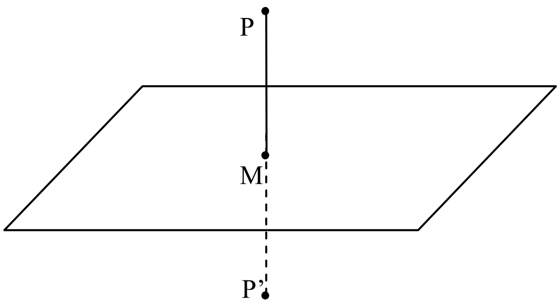


4.5.2. Simétrico de un punto respecto a un plano.

El simétrico de un punto P respecto de un plano π, es otro punto P', tal que se cumple que los dos puntos equidistan del plano, y la recta que pasa por P y P' es perpendicular a π. Para calcular P' dos pasos:

Paso 1: Calculamos M, la proyección de P sobre π.

Paso 2: El simétrico P' es el punto simétrico de P respecto M.

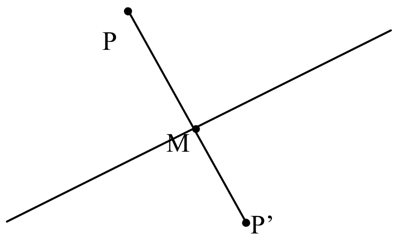


4.5.3. Simétrico de un punto respecto a una recta.

El simétrico de un punto P respecto de una recta r, es otro punto P', tal que se cumple que los dos puntos equidistan de la recta, y la recta que pasa por P y P' corta y es perpendicular a r. Para calcular P' dos pasos:

Paso 1: Calculamos M, la proyección de P sobre r.

Paso 2: El simétrico P' es el punto simétrico de P respecto a M.

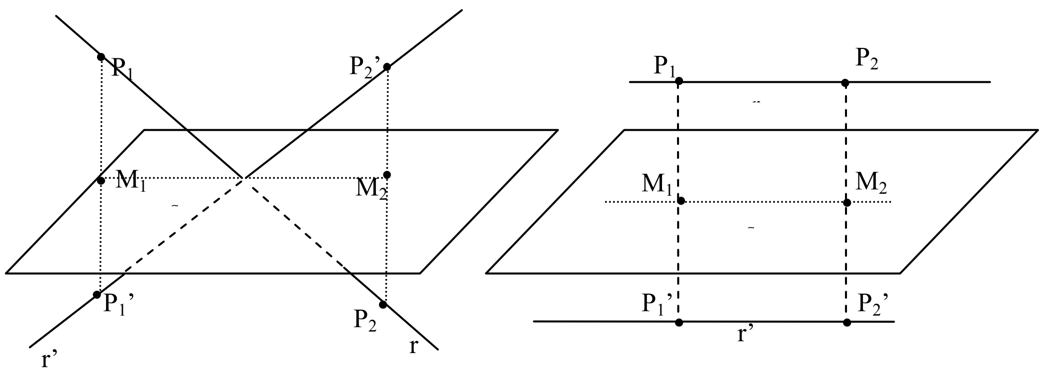


4.5.4. Simétrico de una recta respecto a un plano.

Sea una recta r y un plano π, el simétrico de la recta r sobre el plano π es otra recta r', que es la que se vería reflejada en el plano si este fuera un espejo. Para obtenerla dos pasos.

Paso 1: Tomamos dos puntos de r, P_1 y P_2 y calculamos sus simétricos respecto π, P_1' y P_2'. Si uno de los puntos que tomamos es el punto de intersección de la recta y el plano (siempre que se corten), su simétrico es el mismo.

Paso 2: La recta buscada es la que contiene a P_1' y P_2'



Ejercicio 19. Hallar el simétrico del origen respecto al plano π: x+y+z=1

Simétrico de P(0,0,0) respecto el plano π:x+y+z=1.

Paso 1: Calculamos M, proyección de P respecto a π. Para ello vemos la intersección de π con una recta que pasa por P y es perpendicular a π.

a) Recta perpendicular a π por P: un vector director de la recta es el vector normal del plano π→ $\vec{v}_r = \vec{n}_\pi$=(1,1,1). De esta forma r:(x,y,z)=(0+λ,0+λ,0+λ).

b) La proyección M: λ+λ+λ=1 → λ=1/3 → M($\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}$). De esta forma P' se calcula como el simétrico de P respecto M:

Paso2 : Simétrico de P respecto de M.

P'=($2M_x - P_x, 2M_y - P_y, 2M_z - P_z$) → P($\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}$)

Ejercicio 20. Hallar el simétrico de P(2,0,1) res pecto a la recta r:$\frac{x}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{1}$

Paso 1: Calculemos la proyección M de P sobre la recta r.

a) Primero calculemos el plano π, perpendicular a r que pasa por P. Su vector normal es $\vec{n}_\pi = (2,-1,1)$ y el punto P(2,0,1), luego π:2x-y+z+D=0. Para calcular D obliguemos que P pase por π→4+1+D=0 →D=-5. Así π:2x-y+z-5=0

b) Para hallar la intersección de π con r expresamos la recta en paramétricas r:(x,y,z)=(2λ,3-λ,2+λ). Así M será 2·(2λ)-(3-λ)+(2+λ)-5=0 → λ=1→ M(2,2,3).

Paso 2: Simétrico de P respecto de M.

Las coordenadas de P' son entonces: P'=($2M_x - P_x, 2M_y - P_y, 2M_z - P_z$) → P(2,4,5)

Ejercicio 21. Dado el plano π:x-y+z=0 hallar el simétrico de r:$x-1=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{3}$

Paso 1: Calculemos el simétrico del punto P_1(1,0,1) sobre π. Calcularemos la intersección de π y r, P_2, cuyo simétrico es el mismo punto:

a) simétrico de P_1→ calculamos la recta t que pase por P_1 y perpendicular a π ($\overrightarrow{n_\pi} = \vec{v} = (1,-1,1)$). La intersección de π y t será M_1 proyección de P_1 en π: t:(x,y,z)=(1+λ,-λ,1+λ). La intersección será (1+λ)-(-λ)+(1+λ)=0, λ=-2/3 → M_1=($\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}$).

Simétrico P_1'=($2M_{1x} - P_{1x}, 2M_{1y} - P_{1y}, 2M_{1z} - P_{1z}$)=($\frac{-1}{3},\frac{4}{3},\frac{-1}{3}$)

b) Intersección de π y r será P_2 cuyo simétrico es el mismo P_2'=P_2. r:(x,y,z)=(1+λ,3λ,1+3λ). De esta forma la intersección con π: 1+λ-(3λ)+1+3λ=0 λ=-2 → P_2=P_2'(-1,-6,-5)

Paso2: La recta r' buscada pasa entonces por los puntos P_2'(-1,-6,-5) y P_1'($\frac{-1}{3},\frac{4}{3},\frac{-1}{3}$). El vector director de la recta es $\overrightarrow{P_2'P_1'} = (\frac{2}{3},\frac{22}{3},\frac{14}{3})$. Podemos usar un vector proporcional $\vec{v}_{r'} = (2,22,14)$→ r':$\frac{x+1}{2}=\frac{y+6}{22}=\frac{z+5}{14}$

4.6. Rectas que se apoyan en otras rectas.

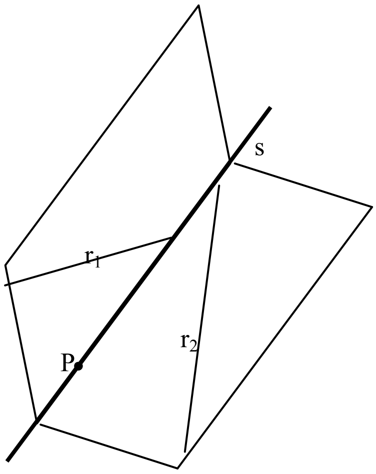
4.6.1. Se apoya en las dos rectas y pasa por otro punto

Dadas dos rectas r_1 y r_2 y un punto P, buscamos otra recta s que corte a estas dos rectas (se apoye) y que pase por el punto P. Para obtener la recta s tenemos que utilizar el siguiente procedimiento analítico en 3 pasos:

<u>Paso 1</u>: Hallamos el plano π_1 que contiene a r_1 y a P

<u>Paso 2</u>: Hallamos el plano π_2 que contiene a r_2 y a P

<u>Paso 3</u>: La recta buscada es la intersección de π_1 y π_2.



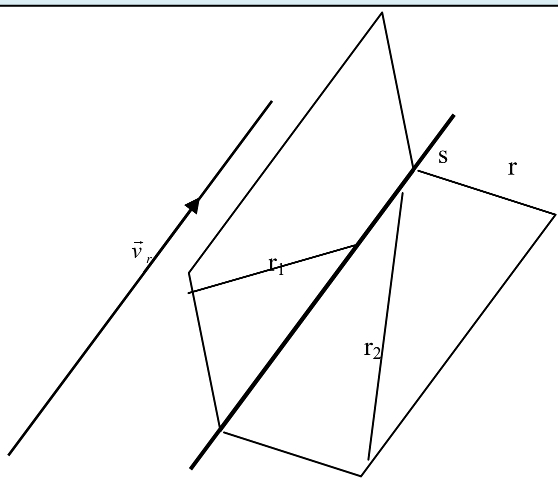
4.6.2. Se apoya en las dos rectas y es paralela a otra dada

Buscamos una recta s tal que corte otras dos dadas, r_1 y r_2, y que sea paralela a otra r, con vector director $\vec{v}_r$. Para obtenerla usaremos el siguiente procedimiento geométrico con 3 pasos:

<u>Paso 1</u>: Hallamos el plano π_1 que contiene a la recta r_1 y un vector director $\vec{v}_r$.

<u>Paso 2</u>: Hallamos el plano π_2 que contiene a la recta r_2 y un vector director $\vec{v}_r$.

<u>Paso 3</u>: La recta s buscada es la intersección de π_1 y π_2



Ejercicio 22. Determinar la ecuación de la recta que se apoya en las rectas:

$r_1 = \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$ y $r_2 = \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{3}$ y pasa por P(1,-1,2)

<u>Paso 1:</u> Cálculo del plano π_1 que se apoya en r_1 y pasa por P: el vector $\vec{v}_{r1} = (-2,1,3)$ es director del plano, además pasa por los puntos P(1,-1,2) y por cualquiera de la recta, en concreto por $Q_1(1,0,-1)$. Con estos dos puntos formamos otro vector director del plano $\overrightarrow{PQ_1} = (0,1,-3)$. Tomando Q como punto del plano; la ecuación del plano en expresión general es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & 0 \\ y & 1 & -1 \\ z+1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_1 : 3x + 3y + z - 2 = 0$$

<u>Paso 2:</u> calculo del plano π_2 que se apoya en r_1 y pasa por P: pasa por los puntos P(1,-1,2) y por cualquiera de la recta, por ejemplo $Q_2(0,2,2)$, además tiene un vector director $\vec{v}_{r2} = (2,-1,3)$.El otro vector director será $\overrightarrow{Q_2P} = (1,-3,0)$. La ecuación de π_2 es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & 2 & 1 \\ y-2 & -1 & -3 \\ z-2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_2 : 9x + 3y - 5z + 4 = 0$$

<u>Paso 3:</u> s es la intersección de π_1 y π_2

$$s: \begin{cases} 3x + 3y + z - 2 = 0 \\ 9x + 3y - 5z + 4 = 0 \end{cases}$$

4.7. Cálculo de áreas y volúmenes

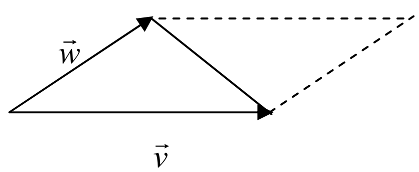
4.7.1. Áreas del triángulo y del paralelogramo

El área de un paralelogramo de lados no paralelos, $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ viene definido como ya vimos en el producto vectorial:

$$A_{\text{paralelogramo}} = |\vec{v} \times \vec{w}|$$

El área de un triángulo, cuyos dos lados contiguos están definidos por los vectores $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$, será igual a la mitad del área del paralelogramo cuyos lados no paralelos están definidos por los mismos vectores.

$$A_{\text{triángulo}} = \left|\frac{\vec{v} \times \vec{w}}{2}\right|$$



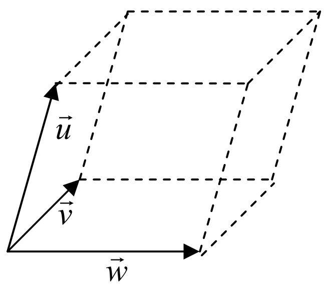
4.7.2. Volumen del paralelepípedo y del tetraedro.

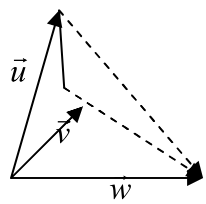
Como vimos en la interpretación del producto mixto de 3 vectores, el volumen de un paralelepípedo de aristas concurrentes en un mismo vértice $\vec{u}, \vec{v}$ *y* $\vec{w}$ es:

$$V_{\text{paralelpípedo}}=[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

Un paralelepípedo puede descomponerse en 6 tetraedros (pirámides de base triangular) iguales, así que el volumen de un tetraedro de aristas concurrente en un mismo vértice $\vec{u}, \vec{v}$ *y* $\vec{w}$ es:

$$V_{\text{tetraedro}}=\frac{1}{6}[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$





Ejercicio 23. Dada la recta $r:\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=z \end{cases}$ y el punto Q(1,2,-1)

a) Hallar la ecuación del plano π que pasa por Q y es perpendicular a r,

$$r: \begin{cases} x-y=0 \\ x+y=z \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=2\cdot\lambda \end{cases} \quad \vec{v}_r=(1,1,2), \ Q(0,0,0)$$

Como el plano π es perpendicular a r entonces $\vec{n}_\pi=\vec{v}_r=(1,1,2)$ y pasa por P(1,2,-1). El plano π tiene de ecuación general:

π: x+y+2z+D=0 → 1+1·2+2(-1)+D=0 → D=-1, luego π: x+y+2z-1=0.

b) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los cortes de π con los ejes de coordenadas;

Corte de π con los ejes coordenados:

Con eje OX: y=z=0 → x=1 → A(1,0,0)

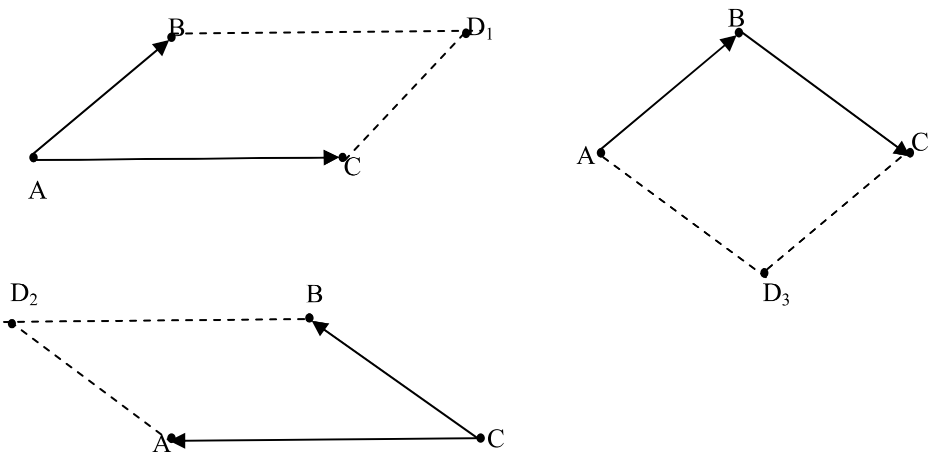
Con eje OY: x=z=0 → y=1 → B(0, 1,0)

Con eje OZ: x=y=0 → z=½ → C(0,0, ½)

$$a=\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \tfrac{1}{2} \end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot|\tfrac{1}{2}\vec{i}-\tfrac{1}{2}\vec{j}+\vec{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{1}{2})^2+1^2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\tfrac{3}{2}}\approx 0{,}612\ u^2$$

Ejercicio 24. Se conocen 3 vértices de un paralelogramo A(1,0,1), B(-1,1,1), C(2,-1,2). Calcular el que falta, ¿cuántas soluciones hay?

Tenemos 3 casos:



$D_1 \rightarrow$ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD_1}$ (1,-1,1)=(x+1,y-1,z-1) $\rightarrow$ D_1=(0,0,2)

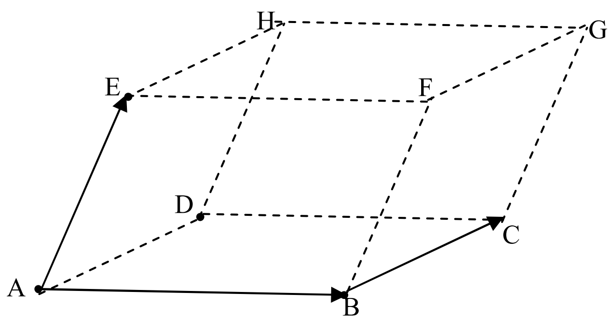
$D_2 \rightarrow$ $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BD_2}$ (-1,1,-1)=(x+1,y-1,z-1)$\rightarrow D_2$=(-2,2,0)

$D_3 \rightarrow$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D_3C}$ (-2,1,0)=(2-x,-1-y,2-z) $\rightarrow D_3$=(4,-2,2)

b) El área del paralelogramo es igualen los tres (probar)

$a_1 = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = a_2 = |\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CA}| = a_3 = |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = \sqrt{6}\ u^2$

Ejercicio 25. Halla el volumen del paralelepípedo de bases ABCD y EFGH, sabiendo que A(8,0,0), B(0,8,0), C(0,0,8) y E(8,8,8). Obtener las coordenadas del resto de vértices.



D $\rightarrow$ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ $\rightarrow$ (0,-8,8)=(x-8,y-0,z-0) $\rightarrow$ D(8,-8,8)

H $\rightarrow$ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH}$ $\rightarrow$ (0,8,8)=(x-8,y+8,z-8) $\rightarrow$ H(8,0,16)

G $\rightarrow$ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$ $\rightarrow$ (0,8,8)=(x-0,y-0,z-8) $\rightarrow$ G(0,8,0)

F $\rightarrow$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ $\rightarrow$ (-8,8,0)=(x-8,y-8,z-8) $\rightarrow$ F(0,16,8)

$V=[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}]=1024u^3$

Ejercicios de la P.A.U.

Junio 2004. Prueba A

PR-2. Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x-z+3=0 \end{cases}$. **a)** Escríbase la recta en forma paramétrica.

b) Para cada punto P de r, determínese la ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente al eje OZ

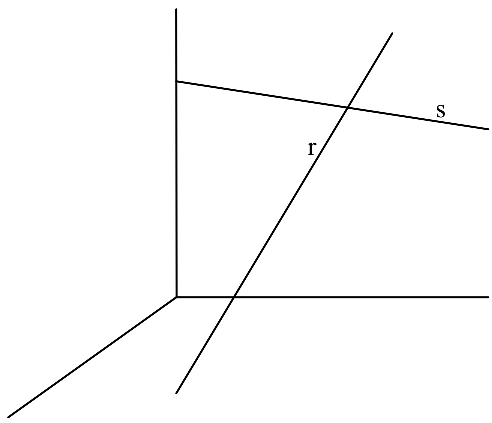
a) Paramétricas → z=3+2x, y=-1-x. Llamando x=λ → $r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=-1-\lambda \\ z=3+2\lambda \end{cases}$

b) Cada punto P de r cumple P=(x,y,z)=(λ,-1-λ,3+2λ) ∀λ∈R. Si es perpendicular al eje OZ la recta está situada en el plano perpendicular a OZ, y por tanto su vector normal es $\vec{n}_\pi=(0,0,1)$. Conocido entonces el vector normal y P, el plano es para cada λ:

$$\pi \equiv z+D=0 \ como\ P\in\pi \rightarrow 3+2\lambda+D=0 \rightarrow D=-3-2\lambda \ \rightarrow \pi\equiv z-3-2\lambda=0.$$

La recta será la que pase por P y la intersección (Q) de π con eje OZ (x=0,y=0) z=3+2λ. Luego Q(0,0,3+2λ)

Para cada λ la recta pasa por P(λ,-1-λ,3+2λ) y Q(0,0, 3+2λ), con vector director $\vec{v}_s=\overrightarrow{PQ}=(-\lambda,1+\lambda,0)$. Así la ecuación en forma continua es $s\equiv\frac{x}{-\lambda}=\frac{y}{1+\lambda}, z=3+2\lambda$



C-4 Determínese si el plano π:2x+3y-4=0 corta o no al segmento de extremos A(2,1,3) y B(3,2,1) .

La ecuación de la recta que pasa por A y B en paramétricas es ($\vec{v}_r=\overrightarrow{AB}=(1,1,-2)$)

$$r: \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=3-2\lambda \end{cases}.$$

Los puntos de la recta que están entre A y B son los de la recta siempre que λ∈[0,1], ya que si λ=0 el punto de r es A(2,1,3) y si λ=1 es B(3,2,1)

Veamos la intersección de r con π → 2·(2+λ)+3·(1+λ)-4=0 → 5λ=-3 → λ=-3/5. El punto no pertenece a la recta ya que -3/5∉[0,1].

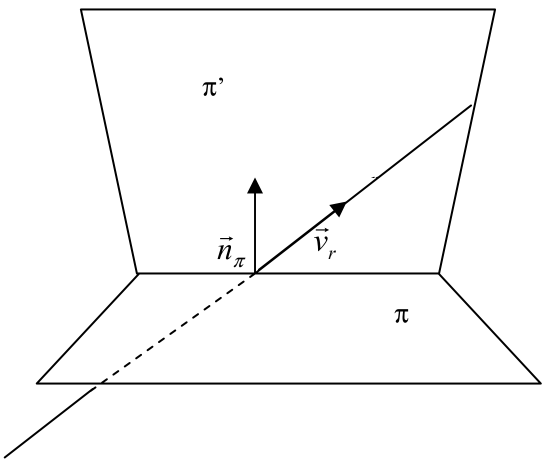
Junio 2004. Prueba B

C-3. Hállese la ecuación del plano que contiene a la recta *r: x =y=z* y es perpendicular al plano π: x+y-z-1=0

Llamemos π' al plano que buscamos

La recta r tiene como vector director $\vec{v}_r=(1,1,1)$ y pasa por el punto P(0,0,0). Este vector será director del plano. Si el plano π es perpendicular al plano π' entonces el vector normal de π ($\vec{n}_\pi=(1,1,-1)$) es otro vector director del plano buscado. Luego el plano en paramétricas es:

$$\pi':\begin{cases} x=\lambda+\mu \\ y=\lambda+\mu \\ z=\lambda-\mu \end{cases}$$



Septiembre 2004. Prueba A

PR-1. Sea *m* un número real y sean *r* y π la recta y el plano dados respectivamente por

$$r\equiv\begin{cases} 2x-my+z=2-m \\ x+2y+z=0 \end{cases} \qquad \pi\equiv 3x+2z=2-m.$$

a) Estúdiese la posición relativa de *r* y π en función del valor de *m*.
b) Para el valor *m*=1, hállese la ecuación del plano que pasa por el punto de corte de *r* y π y es perpendicular a la recta *t: x=y=z*.

a) Posición relativa de $r\equiv\begin{cases} 2x-my+z=2-m \\ x+2y+z=0 \end{cases}$ π:3x+2z=2-m

Tenemos que ver el rango de la siguiente matriz: $M=\begin{pmatrix} 2 & -m & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $M'=\begin{pmatrix} 2 & -m & 1 & 2-m \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2-m \end{pmatrix}$

<u>Rango de M:</u>

|M|=-m+2≠0 →

$\forall m \in R-\{2\}$ rang(M)=3.

Si m=2 rang(M)=2

<u>Rango de M'</u>:

$\forall m \neq 2$ → rang(M')=3,

m=2 → $M'=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ rang(M'(m=2))=2.

	m=2	m=R-{2}
rang(M)	2	3
rang(M')	2	3
Posición relativa	r contenida en π	Se cortan

b) m=1 → r y π se cortan en el punto solución del sistema $\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ x+2y+z=0 \\ 3x+2z=1 \end{cases}$.

Resolviendo el sistema el punto buscado es M(1,0,-1)

Si es perpendicular a t≡ $x=y=z$, entonces se cumple que el vector normal al plano buscado es igual al vector normal de la recta t → $\vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (1,1,1)$, luego el plano es π'=x+y+z+D=0, y al pasar por M, entonces 1-1+D=0 → D=0 → π'=x+y+z=0

C-2: Calcúlese la distancia entre las rectas *r* y *s* de ecuaciones

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 0 \\ z = -\lambda \end{cases} \quad , \quad s \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{-1}$$

Para calcular la distancias entre dos rectas:

1) primero tenemos que ver la posición relativa de las dos:
$\vec{v}_r = (2,0,-1), P(1,0,0) \quad \vec{v}_s = (-1,1-1), Q(0,3,2)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{rang}(\vec{v}_r, \vec{v}_s)=2 \\ \\ \text{rang}(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{PQ})=3 \end{array}\right\} \text{Se cruzan}$$

$$d(r,s) = d(s,\pi) = d(Q,\pi) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{n}_\pi|} = \frac{|(\vec{v}_r \times \vec{v}_s) \cdot \overrightarrow{PQ}|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{\left|[\overrightarrow{PQ}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]\right|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}$$

$$\left[\overrightarrow{PQ},\vec{v}_r,\vec{v}_s\right]=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=12$$

$$\vec{v}_r\times\vec{v}_s=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}\ \rightarrow\ |\vec{v}_r\times\vec{v}_s|=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}$$

$$d(r,s)=\frac{12}{\sqrt{14}}=\frac{12\sqrt{14}}{14}=\frac{6\sqrt{14}}{7}\ u$$

Septiembre 2004. Prueba B

C-2: Hállese la ecuación general del plano que pasa por los puntos A(2,2,-1), B(4,0,2) y es perpendicular al plano $\pi \equiv x-5y+2z-6=0$.

Si pasa por estos dos puntos y es perpendicular al plano, tenemos dos vectores directores del plano buscado: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(2,-2,3)$ y $\vec{v}=\vec{n}_\pi=(1,-5,2)$.

El plano π’ en paramétricas es π’: $\begin{cases} x=2+2\lambda+\mu \\ y=2-2\lambda-5\mu \\ z=-1+3\lambda+2\mu \end{cases}$ →General : $\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z+1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix}=0$

π: 11x-y-8z-28=0

Septiembre de 2005. Prueba A.

PR-1: a) Calcúlense los valores de a para los cuales las rectas

$r\equiv\begin{cases} 3x+ay-6az+1=0 \\ -x+y+3z-3=0 \end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=1+a\lambda \end{cases}$ son perpendiculares.

b) Para a=1, calcúlese la recta que pasa por (1,1,1) y se apoya en r y s.

a) Son perpendiculares si sus vectores directores lo son. Para calcular el vector director de r tenemos que expresar ésta en forma paramétrica:

Operando: (1)+3(2) → (a+3)y+(9-6a)z-8=0 → $y=\frac{6a-9}{a+3}z+\frac{8}{a+3}$ → sustituyendo en (2) x=$\frac{6a-9}{a+3}z+\frac{8}{a+3}$+3z-3= $\frac{9a}{a+3}z+\frac{-3a-1}{a+3}$.

De esta forma:

$$r:\begin{cases} x=\dfrac{9a}{a+3}\lambda-\dfrac{3a+1}{a+3} \\ y=\dfrac{6a-9}{a+3}\lambda+\dfrac{8}{a+3} \\ z=\lambda \end{cases} \rightarrow \quad \vec{v}_r=\left(\dfrac{9a}{a+3},\dfrac{6a-9}{a+3},1\right)$$

El vector director de la recta s es $\vec{v}_s=(-1,1,a)$

$$r\perp s \rightarrow \vec{v}_r\perp\vec{v}_s \rightarrow \vec{v}_r\cdot\vec{v}_s=-\dfrac{9a}{a+3}+\dfrac{6a-9}{a+3}+a=0 \rightarrow \dfrac{-9a+6a-9+a^2+3a}{a+3}=0\rightarrow$$

$$\dfrac{a^2-9}{a+3}=a-3=0 \rightarrow a=3$$

b) a=1 → $r:\begin{cases} x=\dfrac{9}{4}\lambda-1 \\ y=-\dfrac{3}{4}\lambda+2 \\ z=\lambda \end{cases}$ $\vec{v}_r=(9,-3,4)$, $P_r(-1,2,0)$

→ $s:\begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$ $\vec{v}_s=(-1,1,1)$, $P_s(-1,3,1)$

<u>Paso 1</u>: plano π_1 que pasa por r y Q(1,1,1) →

Dos vectores directores del plano: $\vec{v}_r=(9,-3,4)$ y $\overrightarrow{P_rQ}$=(2,-1,1) y pasa por Q(1,1,1):

$$\pi_1:\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 9 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \pi_1: x-y-3z+3=0$$

<u>Paso 2</u>: Plano π_2 que pasa por s y Q(1,1,1) →

Dos vectores directores del plano $\vec{v}_s=(-1,1,1)$ y $\overrightarrow{P_sQ}$=(2,-2,0)

$$\pi_2:\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \pi_1: 2x+2y-4=0$$

<u>Paso 3</u>: La recta es la intersección de π_1 y π_2 → t: $\begin{cases} x-y-3z+3=0 \\ 2x+2y-4=0 \end{cases}$:

C-3.- Calcúlese el simétrico de $P(1,1,1)$ respecto del plano π: $x+y+z=0$.

Paso 1: Calculamos el punto M proyección de P sobre π:

1) Calculamos la recta r perpendicular a π y que pasa por P(1,1,1) : $\vec{v}_r = \vec{n}_\pi = (1,1,1)$

r:(x,y,z)=(1+λ,1+λ,1+λ)

2) Intersección de π con r→ (1+λ)+(1+λ)+(1+λ)=0 → λ=-1 → M(0,0,0)

Paso 2: El simétrico P' de P respecto π es también el simétrico de P respecto de M, siendo M el punto medio de P y P' $0=\frac{x+1}{2}$, $0=\frac{y+1}{2}$, $0=\frac{z+1}{2}$ → P'(-1,-1-1).

Septiembre de 2005. Prueba B.

C-4: Calcúlese el volumen del tetraedro de vértices *A(1,1,1), B(1,2,3), C(2,3,1), D(3,1,2)*

Para calcular el volumen del tetraedro calculamos los 3 vectores directores que salen del mismo vértice: $\overrightarrow{AB} = (0,1,2)$, $\overrightarrow{AC} = (1,2,0)$, $\overrightarrow{AD} = (2,0,1)$

$$V_{\text{tetraedro}} = \left|\frac{1}{3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{3}\cdot(-8-1)\right| = 3\ u^3$$

Junio de 2005. Prueba A.

C-2: Calcúlese la distancia del origen al plano π que pasa por $A(1,2,0)$ y contiene a la recta $r \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{3} = z$.

El plano π pasa por A(1,2,0) y contiene a la recta $r \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{3} = z$ $\vec{v}_r = (2,3,1)$ $P(-2,1,0)$

Luego el plano pasa por A(1,2,0), y dos vectores directores del mismo son $\vec{u} = \vec{v}_r = (2,3,1)$ y $\vec{w} = \overrightarrow{AP} = (-3,-1,0)$. El plano en forma continua es:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = x - 3y + 7z + 5 = 0$$

La distancia entre P(0,0,0) y π es

$$d(P,\pi) = proy_{\vec{n}_\pi}(\overline{PQ}) = \frac{\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}_\pi\right|}{|\vec{n}_\pi|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{1+9+49}} = \frac{5}{\sqrt{59}} = \frac{5\sqrt{59}}{59}u$$

Junio de 2005. Prueba B.

PR-1: a) Determínese el punto simétrico de $A(-3,1,-7)$ respecto de la recta $r \equiv x+1=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{2}$.

b) Hállese la distancia entre A y r.

a) Pasos para obtener el simétrico:

Paso 1: Obtenemos M, la proyección de A sobre r. Para ello dos pasos:

1) Plano π que contiene a P y perpendicular a r, de esta forma $\vec{n}_\pi=\vec{v}_r=(1,2,2)$, con lo que la ecuación de π:x+2y+2z+D=0→A∈π→-3+2-14+D=0→D=15→π:x+2y+2z+15=0

2) La intersección de r con π es M; la mejor forma de obtener M es poner r en forma paramétrica (x,y,z)=(-1+λ,3+2λ,-1+2λ) y sustituir en π→-1+λ+2(3+2λ)+2(-1+2λ)+15=0

λ=-2 → M(-3,-1,-5)

Paso 2: A' es el simétrico de A respecto de M: $-3=\frac{x-3}{2},\ -1=\frac{y+1}{2},\ -5=\frac{z-7}{2}$ →

A'(-3,-3,-3)

b) d(A,r)=d(A,M) siendo M es la proyección de A en r:

$$d(A,r)=d(A,M)=\sqrt{(-3+3)^2+(-1-1)^2+(-5+7)^2}=\sqrt{8}\,u$$

C-2: Dados el punto $A(3,5,-1)$ y la recta $r\equiv\frac{x-1}{2}=y+2=\frac{z+1}{4}$, hállese el punto B perteneciente a r tal que el vector de extremos A y B es paralelo al plano π de ecuación π: $3x-2y+z+5=0$.

Pongamos r en paramétricas :

$$r:\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=-1+4\lambda \end{cases},$$

El punto B∈r, es por lo tanto, en función de λ: B=(1+2λ,-2+λ,-1+4λ). El vector $\overrightarrow{AB}=(-2+2\lambda,-7+\lambda,4\lambda)$. Si es paralelo al plano π, entonces es perpendicular al vector normal de π ($\vec{n}_\pi=(3,-2,1)$), y por lo tanto $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}_\pi=0$→

3·(-2+2λ)-2·(-7+λ)+1·(4λ)=8λ+8=0 → λ=-1→ B(-1,-3,-5)

Junio de 2006. Prueba A.

PR-1: Sean r y s las rectas dadas por $r \equiv \begin{cases} 2x - y = m \\ z + 2y = 3 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2z = 3 \end{cases}$.

a) Hállese el valor de m para que ambas rectas se corten.

b) Para m=1, hállese la ecuación del plano que contiene a r y s.

a) M=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, M'=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & m \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ → rang(M)=3

Para que se crucen se debe cumplir que |M'|≠0, calculemos el determinante haciendo ceros la 3ª columna:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & m \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & m \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -(5-5m) \neq 0 \rightarrow m \neq 1$$

Luego, siempre que m≠1, se cruzan

b) Si m=1 entonces rang(M)=rang(M')=3 y las rectas se cortan en un punto.

Para obtener las ecuaciones del plano es necesario conocer un punto y dos vectores directores del mismo. Podemos tomar cualquier punto de las dos rectas y los vectores directores de r y s. Para esto tenemos que poner las rectas en paramétricas:

1) recta r → y=2x-1, z=3-2y=3-2(2x-1)=5-4x

r: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 \cdot \lambda - 1 \\ z = -4 \cdot \lambda + 5 \end{cases}$ $\vec{v}_r = (1,2,-4)$, $P_r(0,-1,5)$

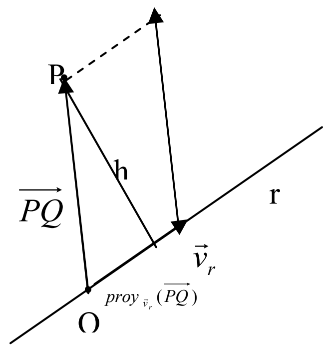
2) recta s → y=2-x, z=3/2-x/2

s: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda + 2 \\ z = -\frac{1}{2}\lambda + \frac{3}{2} \end{cases}$ $\vec{v}_r = (1,-1,-\frac{1}{2})$, $P_r(0,2,\frac{3}{2})$

π: $\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = -1 + 2\lambda - \mu \\ z = 5 - 4\lambda - \frac{1}{2}\mu \end{cases}$

C-2.- Calcúlese la distancia del punto *P(1,1,1)* a la recta $r \equiv \begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = 0 \\ z = -\lambda \end{cases}$

Para calcular la distancia de una recta a un punto utilizamos la interpretación del producto escalar (proyección de un vector sobre otro), o del producto vectorial (área del triángulo). Vamos a hacerlo a partir del producto escalar:



Por el teorema de Pitágoras:

$$d(P,r)=h=\sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2-(proy_{\vec{v}_r}(\overrightarrow{PQ}))^2}$$

De la recta dada obtenemos Q(-2,0,0) y el vector director $\vec{v}_r=(2,0,-1)$ .De esta forma:

$\overrightarrow{PQ}=(-3,-1,-1)$ → $|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{9+1+1}=\sqrt{11}$

$$proy_{\vec{v}_r}(\overrightarrow{PQ})=\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}_r}{|\vec{v}_r|}=\frac{-5}{\sqrt{3}}$$

$$d(P,r)=h=\sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2-(proy_{\vec{v}_r}(\overrightarrow{PQ}))^2}=\sqrt{11-\frac{25}{3}}=\sqrt{\frac{8}{3}}\ u$$

Septiembre de 2006. Prueba A.

PR-1. a) Hállese el valor del parámetro a para que la recta $r\equiv\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x+y-5z=2 \end{cases}$ y el plano π: *ax-y+z+1=0* sean paralelos.

b) Para a=2 calcúlese la ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular a π, y hállese la distancia entre r y π

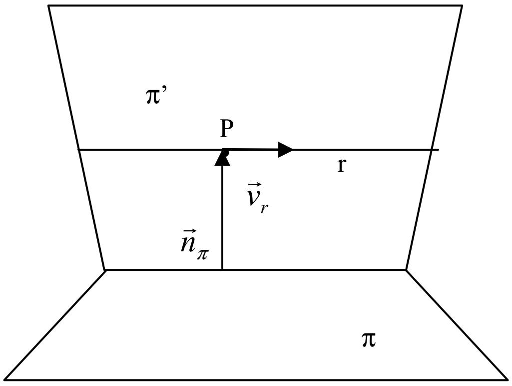
a) Si son paralelos, el vector normal del plano $\vec{n}_\pi=(a,-1,1)$ y el vector director de la recta $\vec{v}_r=(1,-1,2)\times(2,1,-5)$ son perpendiculares, y por lo tanto $\vec{n}_\pi\cdot\vec{v}_r$=0:

$$\vec{n}_\pi\cdot\vec{v}_r=(a,-1,1)\cdot[(1,-1,2)\times(2,1,-5)]=[(a,-1,1),(1,-1,2),(2,1,-5)]=0 \rightarrow \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}=3a-6=0$$

(se puede ver la misma condición estudiando la posición relativa de un plano y una recta). Luego para a=2 plano y recta son paralelos.

b) para a=2 el plano π≡2x-y+z+1=0 y la recta r≡ $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x+y-5z=2 \end{cases}$ Son paralelos.

Si el plano buscado, π', contiene a r, entonces $\vec{v}_r$ es un vector director de π y el punto P de la recta también está del plano π'. Por otro lado, al ser π' perpendicular a π, $\vec{n}_\pi$=(2,-1,1) es el otro vector director de π'.



Tenemos que obtener P y $\vec{v}_r$, para esto pasamos la ecuación de la recta a paramétricas, sumando las dos ecuaciones (1)+(2)→ 3x-3z=3 → x=1+z, sustituyendo en (1)→ y=3z. Con lo que r en paramétricas es

r: $\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=3\cdot\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$, P(1,0,0), $\vec{v}_r$=(1,3,1)

La ecuación del plano π' buscado es: π'= $\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$ → π':4x+y-7z-4=0

La distancia entre r y π, al ser paralelas, viene dada por:

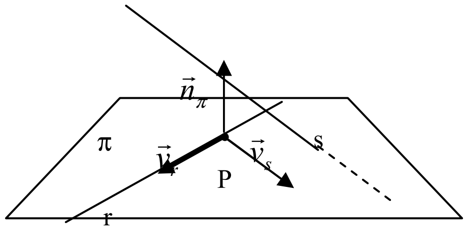
d(r,π)=d(P,π)= $proy_{\vec{n}_\pi}\overline{PQ}=\frac{|\overrightarrow{PQ}\vec{n}_\pi|}{|\vec{n}_\pi|}=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2\cdot1-1\cdot0+7\cdot0+1|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{2}u$

C-2. Hállense las ecuaciones de la recta *r* que pasa por *P*(2,1,–1) , está contenida en el plano π: x+2y+3z-1=0 y perpendicular a s≡$\begin{cases} x=2z-3 \\ y=z+4 \end{cases}$

Si está contenida en π es necesario que todos los puntos de la recta estén contenidos en el plano, en concreto P. Comprobémoslo: (2+2-3-1=0).

Si r está contenida en π entonces $\vec{v}_r$ es perpendicular a $\vec{n}_\pi$, pero también es perpendicular a s, luego $\vec{v}_r$ es perpendicular a $\vec{v}_s$. Podemos obtener el vector $\vec{v}_r$ a partir del producto vectorial de $\vec{n}_\pi$ y $\vec{v}_s$: $\vec{v}_r=\vec{v}_s\times\vec{n}_\pi$ =(2,1,1)×(1,2,3)=(1,-5,3)

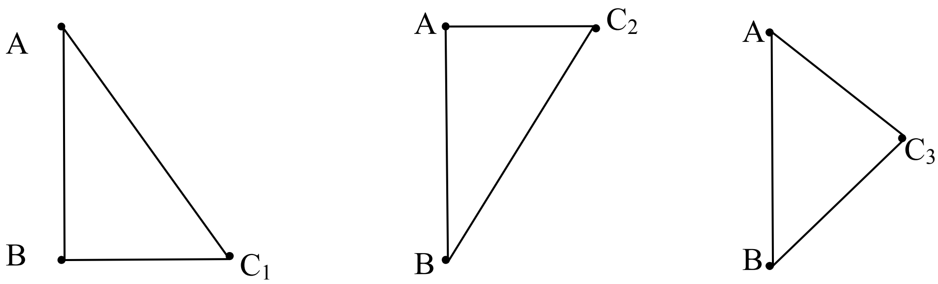
r=(x,y,z)=(2,1,-1)+λ(1,-5,3)



Septiembre de 2006. Prueba B.

C-4. El triángulo *ABC* es rectángulo en *A*, siendo *A*(3,0,–1) , *B*(6,–4,5) , *C*(5,3, *z*). Calcúlese el valor de *z* y hállese el área del triángulo.

Si es rectángulo, hay tres posibilidades:



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0$ $\quad\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC_2}=0$ $\quad\overrightarrow{AC_3}\cdot\overrightarrow{BC_3}=0$

Como nos dicen en el problema que el ángulo rectángulo es A, el triángulo buscado es el segundo triángulo: $\begin{matrix}\overline{AB}=(3,-4,6)\\ \overline{AC}=(2,3,z+1)\end{matrix}$ → $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\rightarrow 6-12+6z+6=0$ → $z=\frac{0}{6}=0$

$$A_{\text{triángulo}}=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{9+16+36}\cdot\sqrt{4+9+1}=\frac{1}{2}\sqrt{61\cdot 14}=\frac{1}{2}\sqrt{854}\ u^2$$

Junio de 2007. Prueba A

PR1.- Sea el plano *π: x+y-2z-5=0,* y la recta *r :x=y=z* se pide

a) Calcular la distancia de la recta al plano

b) Hallar un plano que contenga a r y sea perpendicular a π

c) Hallar el punto simétrico de P(-1,3,3) respecto a π

a) Tenemos que ver la posición relativa de ambas

$$\begin{matrix}\pi: x+y-2z=5\\ r:\begin{cases}x-y=0\\ x-z=0\end{cases}\end{matrix} \rightarrow M=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\quad M^*=\begin{pmatrix}1&1&-2&5\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\end{pmatrix}$$

Veamos la posición relativa:

|M|=0→ rang(M)=2

$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ →rang(M*)=3

Luego son paralelos

Pongamos r en paramétricas $r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

Un punto de la recta es P(0,0,0) y $\overline{v_r}=(1{,}1{,}1)$

Un punto del plano x=0, z=0 →y=5→Q(0,5,0).

Vector normal del plano $\vec{n}_\pi$=(1,1,-2)

$$d(r,\pi)=d(P,\pi)=proy_{\vec{n}_\pi}(\overline{PQ})=\frac{|\overline{PQ}\cdot\vec{n}_\pi|}{|\vec{n}_\pi|}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|0+0+0-5|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{5}{\sqrt{6}}u$$

b) Si contiene a r, el punto P(0,0,0) es del plano y $\overline{v_r}$ es vector director del plano. De igual forma $\vec{n}_\pi$ es otro vector director del plano buscado (ya que π' perpendicular a π)

$$\pi\equiv\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0\rightarrow\pi\equiv -3x+3y=0$$

c) Pasos:

1) La proyección de P(-1,3,3) sobre a π:
   a. Recta perpendicular a π por P→r: (x,y,z)=(-1+λ,3+λ,3-2λ)
   b. Intersección (-1+λ)+(3+λ)-2(3-2λ)-5=0 → λ=-3/2→M(-2.5, 1.5, 0)
2) El simétrico P' es el simétrico de P respecto de M:

(-2.5, 1.5, 0)=$\left(\frac{x-1}{2},\frac{y+3}{2},\frac{z+3}{2}\right)$ → x=-4, y=0, z=-3 → P'(-4,0,-3)

C-3.- Hallar el área del triángulo cuyos vértices son A(1,1,0) , B(2,–1,0) y C(2, 4,0).

$$area=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|5\vec{k}\right|=2.5\ u^2$$

Junio de 2007. Prueba B

C-2.- Dadas las rectas $r: \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+2y=7 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x=2 \\ y=-5 \end{cases}$ hallar un punto de cada una de ellas, de tal forma, que el vector que los una sea perpendicular a ambas.

Pongamos las rectas en paramétricas r: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=\frac{7}{2}-\frac{\lambda}{2} \\ z=\frac{7}{2}+\frac{\lambda}{2} \end{cases}$ s: $\begin{cases} x=2 \\ y=-5 \\ z=\mu \end{cases}$

Punto de r → P(λ,3.5- 0.5 λ ,3.5+0.5λ)

Punto de s→ Q(2,-5,μ)

$\overline{PQ}=(2-\lambda,-8.5+0.5\lambda,\mu-3.5-0.5\lambda)$

$\overline{PQ}$ perpendicular a $\overrightarrow{v_r}=(2,-1,1)$ → $\overline{PQ}\cdot\overrightarrow{v_r}$=0 → 4-2λ+8.5-0.5λ+μ-3.5-0.5λ=0

$\overline{PQ}$ perpendicular a $\overrightarrow{v_s}=(0,0,1)$ → $\overline{PQ}\cdot\overrightarrow{v_s}=0$ → μ-3.5-0.5λ=0

$\left.\begin{array}{r} 9-3\lambda+\mu=0 \\ -3.5-0.5\lambda+\mu=0 \end{array}\right\}$ → λ=5, μ=6

P(5,1,6)

Q(2,-5,6)

Septiembre de 2007. Prueba A

C-2.- Determinar el punto simétrico de *P*(4,0,3) respecto del plano de ecuación *x*=*y*.

π: x-y=0

Para calcular el simétrico seguiremos dos pasos:

1. Calcular la proyección (M):
    a. Recta perpendicular al plano por P → (x,y,z)=(4+λ,-λ,3)
    b. Intersección π y r→ 4+λ+λ=0 →λ=-2. Luego M(2,2,3)
2. El punto buscado, P' es el simétrico de P respecto M:

(2,2,3)=$\left(\frac{x+4}{2},\frac{y+0}{2},\frac{z+3}{2}\right)$ → x=0, y=4, z=3 → P'(0,4,3)

Septiembre de 2007. Prueba B

PR-1.- De una recta r se sabe que está contenida en el plano π: x -y=0, que A(0,0,0) pertenece a r , y que el vector que une A y $B(1,0,-1)$ es perpendicular a r. a) Determinar la recta r, y b) calcular la distancia entre r y el plano paralelo a π que pasa por B.

a) Si está contenida en el plano π, el vector director es perpendicular al vector $\overrightarrow{n_\pi}=(1,-1,0)$ También perpendicular al vector $\overline{AB}=(1,0,-1)$. Al ser prependucular a ambos vectores podemos calcular $\overline{v_r}$ por el producto vectorial de éstos:

$$\overline{v_r}=\overline{n_\pi}\times\overline{AB}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=i+j+k=(1,1,1)$$

$$r:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$$

b) Calculemos π' paralelo a π:x-y=0 y que pasa por B(1,0,-1):

π':x-y+D=0 como B∈π' 1-0+D=0→ D=-1 → π':x-y-1=0

Como r está contenida en un plano paralelo a π', r es paralelo a π', con lo que la distancia es:

d(r,π')= $d(A,\pi')=proy_{\vec{n}_\pi}(\overline{AB})=\frac{\left|\overline{AB}\cdot\vec{n}_\pi\right|}{|\vec{n}_\pi|}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|0-0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}u$

C-2.- Sea A el punto medio del segmento de extremos $P(3,2,1)$ y $Q(-1,0,1)$. Calcular el volumen del tetraedro de vértices A, $B(2,1,3)$, $C(1,2,3)$ y $D(3,4,1)$.

Calculemos A→ $A\left(\frac{3-1}{2},\frac{2+0}{2},\frac{1+1}{2}\right)\rightarrow A(1,1,1)$

$V_{tetraedro}=\frac{1}{6}[\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}]=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}|-10|=\frac{5}{3}u^3$

Junio de 2008. Prueba A

PR-1.- Sea el plano π:x+ay+2az=4 y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$

a) Determinar los valores de a para que recta y plano sean paralelos

b) Para a=2 calcula la recta que pasa por P(1,0,-1), es paralela a π y se apoya en r.

a) Para que sea paralela no tienen que tener ningún punto en común, y por tanto

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & a & 2a \end{pmatrix} = 2 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & a & 2a \end{vmatrix} = 5a + -5 = 0 \rightarrow a=1$$

b) Para a=2→ π:x+2y+4z=4. La recta buscada la denominaremos *s.*

Si la recta buscada pasa por P(1,0,-1) y es paralela a π, entonces está contenida en el plano paralelo a π por P, que lo denominaremos π':

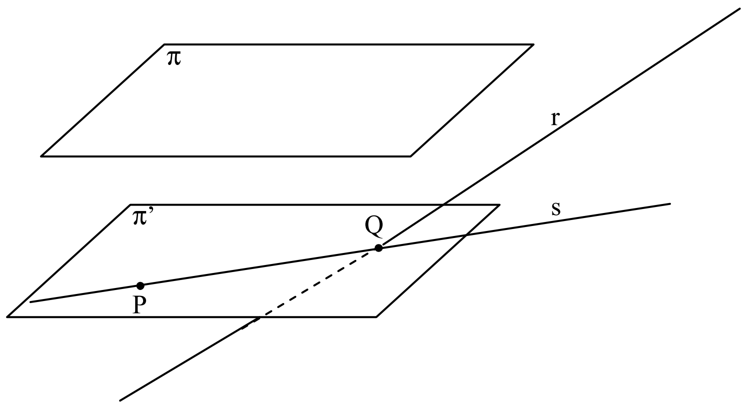
π':x+2y+4z+D=0, calculemos D sabiendo que P(1,0,-1)∈π' → 1-4+D=0→ D=3→ π':x+2y+4z+3=0

La recta buscada se apoya en r, esto quiere decir que la corta, luego podemos calcular el punto de intersección de las dos rectas, como el de corte del plano π' y r.

Q, intersección de $r \equiv \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$ y π':x+2y+4z+3=0. Resolviendo el sistema tenemos que Q(7, -13/5, -6/5).

Ya tenemos dos puntos de s, el punto P(1,0,-1) y el punto Q(7,-13/5,-6/5). Con estos dos puntos es fácil calcular s:

$$\overline{PQ} = (6,-13/5,-1/5) \rightarrow \overline{v_s} = (30,-13,-1) \rightarrow s \equiv \frac{x-1}{30} = \frac{y-0}{-13} = \frac{z+1}{-1}$$



C-4.- Sabiendo que tres de los vértices de un paralelogramo son los puntos A(1,1, 2), B(1,1, 4) y C(3,3,6) , hallar el área del mismo.

$a_{paralelogramo}=\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{matrix}\right\| = \left|-4i+4j\right| = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32}\ u^2$

Junio de 2008. Prueba A

C-4.- Dada la recta r : 2x + y = 2 , calcular el punto P de la recta r tal que la perpendicular a r por P pase por el punto (1,−1) .

Estamos en un problema de 2 dimensiones. La recta r:y=2-2x tiene pendiente m=-2.

Luego la recta perpendicular tiene de pendiente m=1/2=0.5

El punto de la recta buscado es $P(x_0,2-2x_0)$ y por lo tanto la recta será $y-(2-2x_0)=0.5(x-x_0)$. Para hallar el punto obliguemos a que la recta pase por $(1,-1) \rightarrow -1-2+2x_0=0.5(1-x_0) \rightarrow x_0=7/5$. En consecuencia $y_0=2-2\cdot(7/5)=-4/5$, con lo que P(7/5,-4/5)

Septiembre de 2008. Prueba A

C-2.- Hallar la distancia entre el punto A(2,1,4) y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{3}$

De la recta r sabemos su vector director $\overrightarrow{v_r} = (2,1,3)$ y un punto de de r es Q(1,-1,0)

$$d(A,r) = \sqrt{|\overline{AQ}|^2 - (proy_{\vec{v}_r}(\overline{AQ}))^2} = \sqrt{|\overline{AQ}|^2 - \left|\frac{\overline{AQ}\cdot\vec{v}_r}{|\vec{v}_r|}\right|^2}$$

$\overrightarrow{AQ} = (-1,-2,-4) \rightarrow |\overrightarrow{AQ}| = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$

$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{v_r}=-2-2-12=-16$

$|\overrightarrow{v_r}|=\sqrt{4+1+9} = \sqrt{13}$

$$d(A,r) = \sqrt{|\overline{AQ}|^2 - \left|\frac{\overline{AQ}\cdot\vec{v}_r}{|\vec{v}_r|}\right|^2} = \sqrt{21 - \left|\frac{-16}{\sqrt{14}}\right|^2} = \sqrt{21-\frac{256}{14}} = \sqrt{\frac{19}{7}}\ u$$

Septiembre de 2008. Prueba B

PR-1.- Se consideran las rectas r y s de ecuaciones respectivas:

$r \equiv \begin{cases} y=1 \\ z=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=0 \\ z=2 \end{cases}$

a) Estudiar la posición relativa de r y s .

b) Determinar la recta que corta perpendicularmente a r y s

c) Calcular las distancias entre r y s

a) Posición relativa de las dos rectas, estudiemos el rango de

$$M=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad M^*=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&2\end{pmatrix}$$

rang(M)=3, pues $\begin{vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{vmatrix}=1\neq 0$ rang(M*)=4, pues $\begin{vmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&1&2\end{vmatrix}=2\neq 0$

Luego se cruzan

b) Llamemos a la recta buscada, t. Para calcular t, recta que corte perpendicular a ambas rectas, se cumple que su vector director es perpendicular a los vectores directores de r y s. Es decir $\overrightarrow{v_t}\cdot\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{v_t}\cdot\overrightarrow{v_s}=0$

Como la recta t corta a r y a s, podemos tomar un punto de r y otro punto de s (donde corta la recta). Para tomar un punto de cada recta pongámoslas en forma paramétricas:

$r\equiv\begin{cases}x=\lambda\\y=1\\z=0\end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases}x=0\\y=\mu\\z=1\end{cases}$ → P(λ,1,0) y Q(0,μ,1). Luego el vector director de la recta t es $\overrightarrow{v_t}=\overrightarrow{PQ}=(-\lambda,\mu-1,1)$. Para calcular λ y μ apliquemos que $\overrightarrow{v_t}\cdot\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{v_t}\cdot\overrightarrow{v_s}=0$

$\overrightarrow{v_t}\cdot\overrightarrow{v_r}$=0 → siendo $\overrightarrow{v_r}=(1,0,0)$ → -λ=0

$\overrightarrow{v_t}\cdot\overrightarrow{v_s}$=0 → siendo $\overrightarrow{v_s}=(0,1,0)$ → $\mu-1$=0→ $\mu=1$

Así P(0,1,0) y Q(0,1,1), que son 2 puntos de la recta buscada;

$\overrightarrow{v_t}=\overrightarrow{PQ}=(0,0,1)$ t: $\begin{cases}x=0\\y=1\\z=\lambda\end{cases}$

c) distancia entre dos rectas que se cruzan: $d(r,s)=\dfrac{\left|[\overrightarrow{PQ},\vec{v}_r,\vec{v}_s]\right|}{|\vec{v}_r\times\vec{v}_s|}$, siendo P y Q puntos de r y s: P(0,1,0), Q(0,0,1)→$\overrightarrow{PQ}=(0,-1,1)$, $\overrightarrow{v_r}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{v_s}=(0,1,0)$

$$d(r,s)=\frac{\left\|\begin{matrix}0&-1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{matrix}\right\|}{\left\|\begin{matrix}i&j&k\\1&0&0\\0&1&0\end{matrix}\right\|}=\frac{1}{|k|}=1u$$

C-2.- Hallar el seno del ángulo formado por la recta r y el plano π con ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} x = z \\ 2y + z = 3 \end{cases} \quad y \quad \pi \equiv x + y = z$$

Para calcular el ángulo entre r y π necesitamos $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{n_\pi}$. Pongamos r en paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \dfrac{3-\lambda}{2} \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{v_r} = (1, -0.5, 1) \text{ o podemos usar uno proporcional } \overrightarrow{v_r} = (2, -1, 2)$$

Por otro lado π:x+y-z=0 → $\overrightarrow{n_\pi}$=(1,1,-1)

$$\angle(\pi, r) = 90^{o} - \angle(\vec{n}_\pi, \vec{v}) = 90^{o} - \cos^{-1}\left(\frac{\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}}{|\vec{n}_\pi||\vec{v}|}\right) = 90^{o} - \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3 \cdot 3}}\right) = 90^{o} - 101{,}1^{o} = -10.1^{o} \equiv 10{,}1^{o}$$

sen(10,1º)≈0,19