EJERCICIOS DE PUNTOS EN EL ESPACIO

1.- Las coordenadas de los vértices consecutivos de un paralelogramo son A (1, 0, 0) y B(0, 1, 0). Las coordenadas del centro M son M(0, 0, 1). Hallar las coordenadas de los vértices C y D.

2.- Dado el triángulo de vértices A(2, 3, 4), B(1, −1, 5) y C(5, 5, 4), hallar:

a) Las ecuaciones de las medianas del triángulo.

b) Las coordenadas del baricentro del triángulo.

c) Las coordenadas del baricentro del triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados del triángulo anterior.

3.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (2, 3, 4) y B(−2, 3). Estudiar si el punto C(2, 1, 3) está alineado con A y B.

4.- Determinar los valores de m para que los puntos A(m, 2,−3), B(2, m, 1) y C(5, 3, −2) estén alineados y hallar las ecuaciones de la recta que los contiene.

5.- Determinar el valor de x para que los puntos A(0, 0, 1), B(0, 1, 2), C(−2, 1, 3) y D(x, x-1, 2) sean coplanarios.

6.- ¿Qué en relación se ha de verificar entre los parámetros a, b y c para que los puntos A(1, 0, 1), B(1, 1, 0), C(0, 1, 1) y D(a, b, c) sean coplanarios?

7.- Calcular el valor de a para que los puntos (a, 0, 1), (0, 1, 2), (1, 2, 3) y (7, 2, 1) sean coplanarios. Calcular también la ecuación del plano que los contiene.

PROBLEMAS DE RECTAS

8.-Hallar las ecuaciones paramétricas, en forma continua e implícitas de la recta que pasa por el punto A = (−1, 2, 1) y cuyo vector director es $\vec{u}(4, 5, -1)$.

9.- **Hallar las ecuaciones paramétricas, en forma continua e implícita de la recta que pasa por los puntos A(1, 0, 1) y B(0, 1, 1).**

10.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (8, 2, 3) y lleva la dirección del vector $\vec{j}$ (0,1,0).

11.- Dados los puntos A(2, 6,−3) y B(3, 3, −2), hallar aquellos puntos de la recta AB tenían al menos una coordenada nula.

12.- Hallar una ecuación continua de la recta que es paralela a los planos: x − 3y + z = 0 y 2x − y + 3z − 5 = 0, y pasa por el punto (2, −1, 5).

13.- Determinar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto A(1, −1, 0) y corta a las dos rectas:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1} \qquad s \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-2}$$

PROBLEMAS DEL PLANO

14.- Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos A(1,‒2, 4), B(0, 3, 2) y es paralelo a la recta .

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{2}$$

15.- Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-1} \qquad s \equiv \frac{x-1}{-2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{3}$$

Determinar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

16.- Sea π un plano que pasa por P(1, 2, 1) y corta a los semiejes coordenados positivos en los puntos A, B y C. Sabiendo que el triángulo ABC es equilátero, hallar las ecuaciones de π.

17.- Hallar la ecuación del plano que contienen a las rectas:

$$r \equiv \frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+3}{-1} \quad s \equiv \frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+3}{-2}$$

18.- Hallar las ecuaciones de los ejes coordenados y de los planos coordenados.

19.- Hallar las coordenadas del punto común al plano x + 2y − z − 2 = 0 y a la recta determinada por el punto (1, −3, 2) y el vector $\vec{u}(2,4,1)$.

20.- Hallar la ecuación implícita del plano que pasa por el punto P(1, 1, 1) y es paralelo a:

$$\begin{cases} x = 1+2\lambda-3\mu \\ y = 3+2\mu \\ z = -1-\mu \end{cases}$$

21.- Hallar la ecuación del plano que contiene al punto A(2, 5, 1) y a la recta de ecuación:

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{2}$$

22.- Hallar la cual del plano que contiene a la recta $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-4}{3}$ **y es paralelo a la recta** $\begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = 1+2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

23.- Hallar la ecuación del plano paralelo a las rectas de ecuaciones:

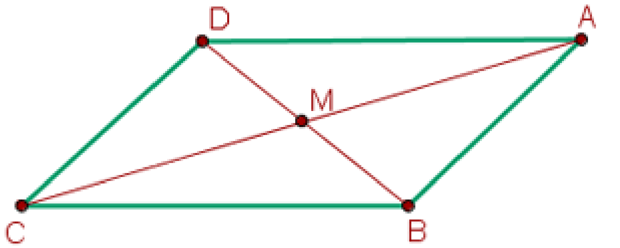
$$r \equiv \frac{x-2}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2} \qquad s \equiv \begin{cases} 2x-y+z=-2 \\ -x+y+3z=1 \end{cases}$$

y que pasa por el punto (1, 1, 2).

SOLUCIONES

EJERCICIOS DE PUNTOS EN EL ESPACIO

1.- Las coordenadas de los vértices consecutivos de un paralelogramo son A (1, 0, 0) y B(0, 1, 0). Las coordenadas del centro M son M(0, 0, 1). Hallar las coordenadas de los vértices C y D.



$$(0,0,1)=\left(\frac{1+x_C}{2},\frac{0+y_C}{2},\frac{0+z_C}{2}\right)$$

$$0=\frac{1+x_C}{2} \qquad 0=\frac{0+y_C}{2} \qquad 1=\frac{0+z_C}{2}$$

$$x_C=-1 \qquad y_C=0 \qquad z_C=2$$

$C(-1,0,2)$

$$(0,0,1)=\left(\frac{0+x_D}{2},\frac{1+y_D}{2},\frac{0+z_D}{2}\right)$$

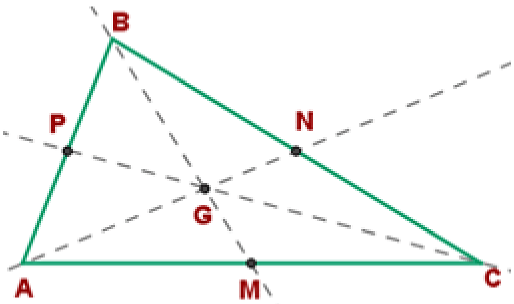
$$0=\frac{0+x_D}{2} \qquad 0=\frac{1+y_D}{2} \qquad 1=\frac{0+z_D}{2}$$

$$x_D=0 \qquad y_D=-1 \qquad z_D=2$$

$D(0,-1,2)$

2.-Dado el triángulo de vértices A(2, 3, 4), B(1, −1, 5) y C(5, 5, 4), hallar:

a) Las ecuaciones de las medianas del triángulo**.**



$$P\left(\frac{2+1}{2},\frac{3-1}{2},\frac{4+5}{2}\right) \qquad P\left(\frac{3}{2},1,\frac{9}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{2+5}{2},\frac{3+5}{2},\frac{4+4}{2}\right) \qquad M\left(\frac{7}{2},4,4\right)$$

$$N\left(\frac{1+5}{2},\frac{-1+5}{2},\frac{5+4}{2}\right) \qquad N\left(3,2,\frac{9}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{NA}=\left(2-3,3-2,4-\frac{9}{2}\right)=\left(-1,1,-\frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{MB}=\left(1-\frac{7}{2},-1-4,5-4\right)=\left(-\frac{5}{2},-5,1\right)$$

$$\overrightarrow{PC}=\left(5-\frac{3}{2},5-1,4-\frac{9}{2}\right)=\left(\frac{7}{2},4,-\frac{1}{2}\right)$$

$$A(2,3,4) \qquad \overrightarrow{NA}=\left(-1,1,-\frac{1}{2}\right) \qquad r\equiv\begin{cases}x=2-\lambda\\ y=3+\lambda\\ z=4-\frac{1}{2}\lambda\end{cases}$$

$$B(1,-1,5) \qquad \overrightarrow{MB}=\left(-\frac{5}{2},-5,1\right) \qquad s\equiv\begin{cases}x=1-\frac{5}{2}\lambda\\ y=-1-5\lambda\\ z=5+\lambda\end{cases}$$

$$C(5,5,4) \qquad \overrightarrow{PC}=\left(\frac{7}{2},4,-\frac{1}{2}\right) \qquad t\equiv\begin{cases}x=5+\frac{7}{2}\lambda\\ y=5+4\lambda\\ z=4-\frac{1}{2}\lambda\end{cases}$$

b).- Las coordenadas del baricentro del triángulo.

$$G\left(\frac{2+1+5}{3},\frac{3-1+5}{3},\frac{4+5+4}{3}\right) \qquad G\left(\frac{8}{3},\frac{7}{3},\frac{13}{3}\right)$$

c) Las coordenadas **del** baricentro **del triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados del triángulo anterior.**

$$G'\left(\frac{\frac{3}{2}+\frac{7}{2}+3}{3},\frac{1+4+2}{3},\frac{\frac{9}{2}+4+\frac{9}{2}}{3}\right) \qquad G'\left(\frac{8}{3},\frac{7}{3},\frac{13}{3}\right)$$

Los baricentros de los dos triángulos coinciden.

3.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (2, 3, 4) y B(8,−2, 3). Estudiar si el punto C(2, 1, 3) está alineado con A y B.

$$\overrightarrow{AB} = (8-2, -2-3, 3-4) = (6, -5, -1)$$

$$\frac{x-2}{6} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z-4}{-1}$$

Para que el punto C este alineado con A y B, debe pertenecer a la recta que pasa por A y B.

$$\frac{2-2}{6} \neq \frac{1-3}{-5} \neq \frac{3-4}{-1}$$

Como C no satisface las ecuaciones de la recta, no está alineado con A y B.

4.- Determinar los valores de m para que los puntos **A(m, 2,−3), B(2, m, 1) y C(5, 3, −2) estén** alineados **y hallar las ecuaciones de la recta que los contiene.**

$$\overrightarrow{BC} = (5-2, 3-m, -2-1) = (3, 3-m, -3)$$

$$rang\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}\right) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 5-m & 1 & 1 \\ 3 & 3-m & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 5-m & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$-15 + 3m - 3 = 0 \qquad m = 6$$

5.- Determinar el valor de x para que los puntos **A(0, 0, 1), B(0, 1, 2), C(-2, 1, 3) y D(x, x-1, 2) sean** coplanarios**.**

Para que los puntos sean coplanarios, los vectores determinados por ellos también han de ser coplanarios, es decir, que el rango de los vectores sea 2.

$$\overrightarrow{AB} = (0-0, 1-0, 2-1) = (0, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2-0, 1-0, 3-1) = (-2, 1, 2)$$

$$\overrightarrow{AD} = (x-0, x-1-0, 2-1) = (x, x-1, 1)$$

Para que el rango sea igual a 2, el determinante de las componentes de los vectores ha de ser igual a cero.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ x & x-1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$2x - 2x + 2 - x + 2 = 0 \qquad x = 4$$

6.- ¿Qué en relación se ha de verificar entre los parámetros a, b y c para que los puntos A(1, 0, 1), B(1, 1, 0), C(0, 1, 1) y D(a, b, c) sean coplanarios?

Los puntos A, B, C y D son coplanarios si:

$$rang\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = 2$$

$$\overrightarrow{AB} = (1-1, 1-0, 0-1) = (0, 1, -1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0-1, 1-0, 1-1) = (-1, 1, 0)$$

$$\overrightarrow{AD} = (a-1, b-0, c-1) = (a-1, b, c-1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ a-1 & b & c-1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ a-1 & b & c-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$b + a - 1 + c - 1 = 0 \qquad a + b + c = 2$$

7.- Calcular el valor de a para que los puntos (a, 0, 1), (0, 1, 2), (1, 2, 3) y (7, 2, 1) sean coplanarios**. Calcular también la ecuación del plano que los contiene.**

$$rang\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) = 2$$

$$\overrightarrow{BA} = (a-0, 0-1, 1-2) = (a, -1, -1)$$

$$\overrightarrow{BC} = (1-0, 2-1, 3-2) = (1, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{BD} = (7-0, 2-1, 1-2) = (7, 1, -1)$$

$$\begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{array}{l} -a - 7 - 1 + 7 - 1 - a = 0 \\ -2a - 2 = 0 \qquad a = -1 \end{array}$$

$$B(0, 1, 2) \qquad \overrightarrow{BC} = (1, 1, 1) \qquad \overrightarrow{BD} = (7, 1, -1)$$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 7 \\ y-1 & 1 & 1 \\ z-2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad -2x+8y-6z+4=0$$

$$x-4y+3z-2=0$$

PROBLEMAS DE RECTAS

8.-Hallar las ecuaciones paramétricas**, en forma** continua **e** implícitas **de la recta que pasa por el punto A = (−1, 2, 1) y cuyo vector director es $\vec{u}(4,5,-1)$.**

$$\begin{cases} x = 1+4\lambda & \lambda = \dfrac{x-1}{4} \\ y = 2+5\lambda & \lambda = \dfrac{y-2}{5} \\ z = 1-\lambda & \lambda = \dfrac{z-1}{-1} \end{cases}$$

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-1}{-1}$$

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5} \qquad \frac{x-1}{4} = \frac{z-1}{-1}$$

$$\begin{cases} 5x-4y+13=0 \\ -x-4z+3=0 \end{cases}$$

9.- Hallar las ecuaciones paramétricas, en forma continua e implícita de la recta que pasa por los puntos A(1, 0, 1) y B(0, 1, 1).

$$\overrightarrow{AB} = (0-1, 1-0, 1-1) = (-1, 1, 0)$$

$$\begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}$$

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} \qquad \frac{x-1}{-1} = \frac{z-1}{0}$$

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ -z+1=0 \end{cases}$$

10.- Hallar la ecuación de la recta **que pasa por el punto (8, 2, 3) y lleva la dirección del vector $\vec{j}$ (0,1,0). .**

$A(8,2,3) \qquad \vec{j} = (0,1,0)$

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 \end{cases}$$

11.- Dados los puntos A(2, 6,−3) y B(3, 3, −2), hallar aquellos puntos de la recta AB tenían al menos una coordenada nula.

$$\overrightarrow{AB} = (3-2, 3-6, -2+3) = (1,-3,1)$$

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 6 - 3\lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases}$$

$\lambda = -2 \qquad (0,12,-5)$

$\lambda = 2 \qquad (4,0,-1)$

$\lambda = 3 \qquad (5,-3,0)$

12.- Hallar una ecuación continua de la recta que es paralela a los planos: x − 3y + z = 0 y 2x − y + 3z − 5 = 0, y pasa por el punto (2, −1, 5).

El vector director de la recta es perpendicular a a los vectores normales de cada plano.

$\overrightarrow{n_1} = (1,-3,1) \qquad \overrightarrow{n_2} = (2,-1,3)$

$$\vec{u} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} + 6\vec{k} - 3\vec{j} + \vec{i}$$

$A(2,-1,5) \qquad \vec{u} = (-8,-1,5)$

$$\frac{x-2}{-8} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{5}$$

13.- Determinar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto A(1, −1, 0) y corta a las dos rectas:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1} \qquad s \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-2}$$

La recta pedida es la intersección de los dos planos que pasan por A y contienen a las rectas r y s.

Plano que contiene a A y r.

$$\overrightarrow{AB} = (2-1, 0+1, 1-0) = (1,1,1)$$

$$A(1,-1,0) \qquad \vec{u} = (3,2,1) \qquad \overrightarrow{AB} = (1,1,1)$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 1 \\ y+1 & 2 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad x - 2y + z - 3 = 0$$

Plano que contiene a A y s.

$$\overrightarrow{AC} = (0-1, 2+1, 0-0) = (-1,3,0)$$

$$C(0,2,0) \qquad \vec{v} = (-1,1,-2) \qquad \overrightarrow{AC} = (-1,3,0)$$

$$\begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ y-2 & 1 & 3 \\ z & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} 6x + 2y - 2z - 4 = 0 \\ 3x + y - z - 2 = 0 \end{matrix}$$

La recta pérdida es:

$$t \equiv \begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ 3x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

SOLUCIONES PROBLEMAS DE PLANOS

14.- Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos A(1,−2, 4), B(0, 3, 2) y es paralelo a la recta:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$$

$$A(1,-2,4) \qquad \overrightarrow{AB} = (-1,5,-2) \qquad \vec{u} = (4,1,2)$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 4 \\ y+2 & 5 & 1 \\ z-4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad 4x - 2y - 7z + 20 = 0$$

15.- Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1} \qquad s \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{3}$$

Determinar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

$A(-2,1,-1)$ $\vec{u}=(3,2,-1)$ $\vec{v}=(-2,-2,3)$

$$\begin{vmatrix} x+2 & 3 & -2 \\ y-1 & 2 & -2 \\ z+1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0 \qquad 4x-7y-2z+13=0$$

16.- Sea π un plano que pasa por P(1, 2, 1) y corta a los semiejes coordenados positivos en los puntos A, B y C. Sabiendo que el triángulo ABC es equilátero, hallar las ecuaciones de π.

$A(a,0,0)$ $B(0,b,0)$ $C(0,0,c)$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad a=b=c$$

Como el triángulo es equilátero, los tres segmentos son iguales.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1 \qquad x+y+z=a$$

$$1+2+1=a \qquad a=4$$

$$x+y+z=4$$

17.- Hallar la ecuación del plano que contienen a las rectas:

$$r\equiv\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+3}{-1} \quad s\equiv\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+3}{-2}$$

$A(-2,1,-3)$ $\vec{u}=(1,3,-1)$ $\vec{v}=(-1,4,-2)$

$$\begin{vmatrix} x+2 & 1 & -1 \\ y-1 & 3 & 4 \\ z+3 & -1 & -2 \end{vmatrix}=0 \qquad -2x+3y+7z+14=0$$

18.- Hallar las ecuaciones de los ejes coordenados y de los planos coordenados.

Eje OX $O(0,0,0)$ $\vec{i}=(1,0,0)$

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0} \qquad \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Eje OY $O(0,0,0)$ $\vec{j}=(0,1,0)$

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0} \qquad \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Eje OZ $O(0,0,0)$ $\vec{k}=(0,0,1)$

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1} \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$Plano\ XOY \qquad O(0,0,0) \qquad \vec{i}=(1,0,0) \qquad \vec{j}=(0,1,0)$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 0 & 0 \end{vmatrix}=0 \qquad z=0$$

$Plano\ XOZ \qquad O(0,0,0) \qquad \vec{i}=(1,0,0) \qquad \vec{k}=(0,0,1)$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad y=0$$

$Plano\ YOZ \qquad O(0,0,0) \qquad \vec{j}=(0,1,0) \qquad \vec{k}=(0,0,1)$

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad x=0$$

19.- Hallar las coordenadas del punto común al plano x + 2y− z − 2 = 0 y a la recta determinada por el punto (1, −3, 2) y el vector $\vec{u}(2,4,1)$.

$\vec{u}=(2,4,1)$.

$$\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-3+4\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$$

$$(1+2\lambda)+2(-3+4\lambda)-(2+\lambda)-2=0$$

$\lambda=1 \qquad B(3,1,3)$

20.- Hallar la ecuación implícita del plano que pasa por el punto P(1, 1, 1) y es paralelo a:

$$\begin{cases} x=1+2\lambda-3\mu \\ y=3+2\mu \\ z=-1-\mu \end{cases}$$

$P(1,1,1) \qquad \vec{u}=(2,0,0) \qquad \vec{v}=(-3,2,-1)$

$$\begin{vmatrix} x- & 2 & -3 \\ y-1 & 0 & 2 \\ z-1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad -2\begin{vmatrix} y-1 & 2 \\ z-1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-2(-y+1-2z+2)=0 \qquad y+2z-3=0$$

21.- Hallar la ecuación del plano **que contiene al punto A(2, 5, 1) y a la recta de ecuación:**

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{2}$$

$$B(2,1,-1) \qquad \overrightarrow{AB}=(2-2,1-5,-1-1)=(0,-4,-2)$$

$$A(2,5,1) \qquad \vec{u}=(1,3,1) \qquad \overrightarrow{AB}=(0,-4,-2)$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ y-5 & 3 & -4 \\ z-1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad x-y+2z+1=0$$

22.- Hallar la cual del plano que contiene a la recta $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-4}{3}$ **y es paralelo a la recta** $\begin{cases} x=1+3\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$.

El punto A(2, 2, 4) y el vector $\vec{u}=(1,-2,3)$ pertenecen al plano, ya que la primera recta está contenida en el plano.

El vector $\vec{v}=(3,2,1)$ es un vector del plano, por ser paralelo a la recta.

$$A(2,2,4) \qquad \vec{u}=(1,-2,3) \qquad \vec{v}=(3,2,1)$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 3 \\ y-2 & -2 & 2 \\ z-4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad x-y-z+4=0$$

23.- Hallar la ecuación del plano paralelo a las rectas de ecuaciones:

$$r \equiv \frac{x-2}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2} \qquad s \equiv \begin{cases} 2x-y+z=-2 \\ -x+y+3z=1 \end{cases}$$

y que pasa por el punto (1, 1, 2).

$$\begin{cases} 2x-y+z=-2 \\ -x+y+3z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-y=-2-z \\ -x+y=1-3z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2-z & -1 \\ 1-3z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = 1-4z \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2-z \\ -1 & 1-3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -7z$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1-4\lambda \\ y = -7\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$A(1,1,2) \qquad \vec{u} = (-1,1,2) \qquad \vec{v} = (-4,-7,1)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -4 \\ y-1 & 1 & -7 \\ z-2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad 15x - 7y + 11z - 30 = 0$$