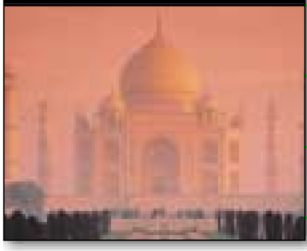
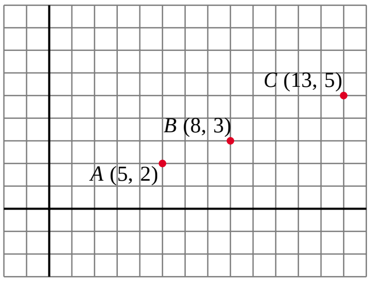


UNIDAD 6 RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

Página 152

1. Puntos alineados en el plano

- **Comprueba que los puntos $A(5, 2)$, $B(8, 3)$ y $C(13, 5)$ no están alineados.**



$\overrightarrow{AB} = (3, 1)$; $\overrightarrow{BC} = (5, 2)$

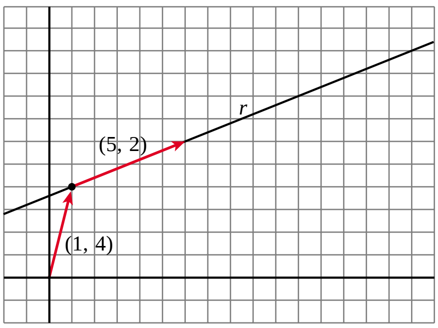
No tienen las coordenadas proporcionales; luego no están alineados.

Página 153

2. Rectas en el plano

- **Para hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que aparece a continación, toma el vector $\vec{p}(1, 4)$ para situarte en ella y el vector $\vec{d}(5, 2)$ para deslizarte por ella.**

  Halla también su ecuación implícita.



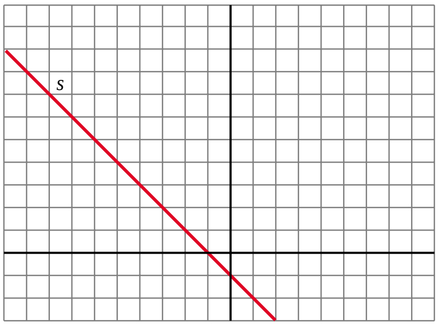
Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 + 5\lambda \\ y = 4 + 2\lambda \end{cases}$$

Ecuación implícita:

$$\begin{array}{r} -2x = -2 - 10\lambda \\ 5y = 20 + 10\lambda \\ \hline -2x + 5y = 18 \end{array} \quad \to \quad 2x - 5y + 18 = 0$$

■ **Halla las ecuaciones paramétricas de la recta, *s*, que aparece dibujada en la gráfica siguiente:**



Halla también su ecuación implícita.

La recta s pasa por el punto $(-1, 0)$ y tiene la dirección del vector $\vec{d}(1, -1)$.

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -\lambda \end{cases}$$

Ecuación implícita:

Sumando las dos anteriores: $x + y = -1 \quad \to \quad x + y + 1 = 0$

Página 154

1. Representa los puntos siguientes:
$P(5, 2, 3)$, $Q(3, -2, 5)$, $R(1, 4, 0)$, $S(0, 0, 4)$ y $T(0, 6, 3)$.

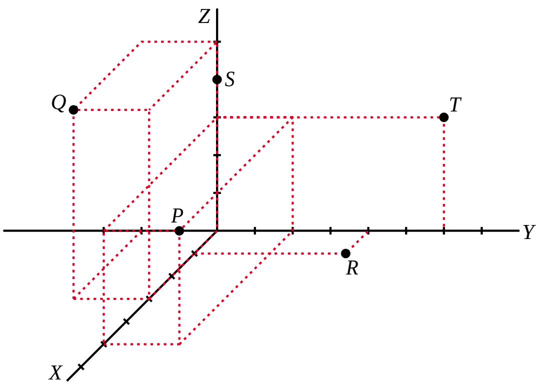
$P(5, 2, 3)$

$Q(3, -2, 5)$

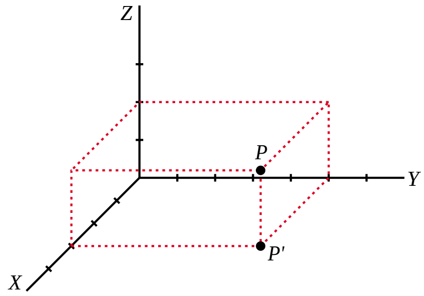
$R(1, 4, 0)$

$S(0, 0, 4)$

$T(0, 6, 3)$



2. **Sitúa sobre unos ejes coordenados un punto *P*. Proyéctalo, *P'*, sobre el plano *XY*. Sigue el proceso hasta determinar las coordenadas de *P*. (Observa que el único paso arbitrario es decidir la situación de *P'*).**



$P(3, 5, 2)$

Página 156

1. **Dados los puntos $A(1, 7, 3)$, $B(–1, 3, 0)$, $C(3, –4, 11)$ y $D(1, 0, –5)$:**

a) Halla las coordenadas de los vectores: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$

b) Halla el punto medio de cada uno de los siguientes segmentos: *AB*, *BC*, *CD*, *AC*, *AD*

a) $\overrightarrow{AB} = (-2, -4, -3)$ $\quad \overrightarrow{BC} = (4, -7, 11)$ $\quad \overrightarrow{CD} = (-2, 4, -16)$

$\overrightarrow{DA} = (0, 7, 8)$ $\quad \overrightarrow{AC} = (2, -11, 8)$

b) $M_{AB} = \left(0, 5, \dfrac{3}{2}\right)$ $\quad M_{BC} = \left(1, \dfrac{-1}{2}, \dfrac{11}{2}\right)$ $\quad M_{CD} = (2, -2, 3)$

$M_{AC} = \left(2, \dfrac{3}{2}, 7\right)$ $\quad M_{AD} = \left(1, \dfrac{7}{2}, -1\right)$

2. **Obtén las coordenadas del punto medio de los segmentos:**

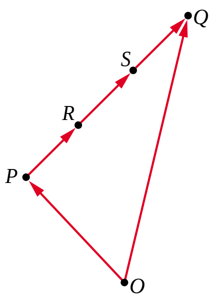
a) de extremos $(3, –5, 1)$ y $(–3, 1, 13)$.

b) de extremos $(–5, 1, 7)$ y $(4, 2, 0)$.

a) $\left(\dfrac{3-3}{2}, \dfrac{-5+1}{2}, \dfrac{1+13}{2}\right) = (0, -2, 7)$

b) $\left(\dfrac{-5+4}{2}, \dfrac{1+2}{2}, \dfrac{7+0}{2}\right) = \left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$

3. **Obtén las coordenadas de los puntos que dividen cada uno de los segmentos del ejercicio anterior en tres partes iguales.**



Dado un segmento de extremos *P* y *Q*:

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OQ} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OP} =$$

$$= \frac{\overrightarrow{OQ} + 2\overrightarrow{OP}}{3}$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PQ} = \frac{2\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP}}{3}$$

Según esto, los puntos que buscamos son:

a) $\dfrac{(-3, 1, 13) + 2(3, -5, 1)}{3} = (1, -3, 5)$

$\dfrac{2(-3, 1, 13) + (3, -5, 1)}{3} = (-1, -1, 9)$

b) $\dfrac{(4, 2, 0) + 2(-5, 1, 7)}{3} = \left(-2, \dfrac{4}{3}, \dfrac{14}{3}\right)$

$\dfrac{2(4, 2, 0) + (-5, 1, 7)}{3} = \left(1, \dfrac{5}{3}, \dfrac{7}{3}\right)$

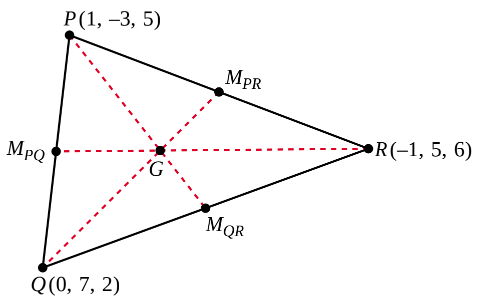
4. $\boldsymbol{P(1, -3, 5)}$**,** $\boldsymbol{Q(0, 7, 2)}$ **y** $\boldsymbol{R(-1, 5, 6)}$ **son los vértices de un triángulo.**

a) Calcula las coordenadas del punto medio de cada lado.

b) Recuerda que el baricentro (punto donde se cortan las medianas del triángulo) está sobre cada mediana, a $\boldsymbol{\frac{2}{3}}$ **del vértice y a** $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$ **del punto medio del lado opuesto.**

Calcula el baricentro del triángulo anterior a partir de uno de los vértices. Repítelo para los otros dos y obtendrás el mismo resultado.

a)



$M_{PQ} = \left(\dfrac{1}{2}, 2, \dfrac{7}{2}\right)$

$M_{QR} = \left(-\dfrac{1}{2}, 6, 4\right)$

$M_{PR} = \left(0, 1, \dfrac{11}{2}\right)$

b) A partir de P: (ver ejercicio 3)

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2\overrightarrow{OM}_{QR} + \overrightarrow{OP}}{3} = \frac{(-1, 12, 8) + (1, -3, 5)}{3} = \left(0, 3, \frac{13}{3}\right)$$

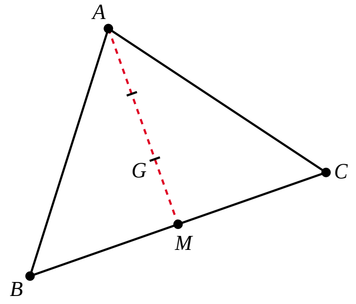
A partir de Q:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2\overrightarrow{OM}_{PR} + \overrightarrow{OQ}}{3} = \frac{(0, 2, 11) + (0, 7, 2)}{3} = \left(0, 3, \frac{13}{3}\right)$$

A partir de R:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2\overrightarrow{OM}_{PQ} + \overrightarrow{OR}}{3} = \frac{(1, 4, 7) + (-1, 5, 6)}{3} = \left(0, 3, \frac{13}{3}\right)$$

5. **Localiza el baricentro del triángulo de vértices $A(2, –1, 3)$, $B(0, 4, 1)$, $C(1, 1, 0)$.**



Hallamos el punto medio, M, del lado BC:

$$M = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

El baricentro, G, está sobre la mediana, a $\frac{2}{3}$ de A y a $\frac{1}{3}$ de M (ver ejercicio 3):

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA}}{3} = \frac{(1, 5, 1) + (2, –1, 3)}{3} = \left(1, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Página 157

1. **Halla las ecuaciones paramétricas de las rectas que pasan por:**

a) $A(2, 0, 5)$ **y** $B(–1, 4, 6)$ **b)** $M(5, 1, 7)$ **y** $N(9, –3, –1)$

c) $P(1, 0, –3)$ **y** $Q(1, 4, –3)$ **d)** $R(0, 2, 3)$ **y** $S(0, 2, 1)$

a) Vector dirección: $\overrightarrow{AB} = (–3, 4, 1)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$

b) Vector dirección: $\overrightarrow{MN} = (4, –4, –8) \,//\, (1, –1, –2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 7 - 2\lambda \end{cases}$

c) Vector dirección: $\overrightarrow{PQ} = (0, 4, 0)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4\lambda \\ z = -3 \end{cases}$

d) Vector dirección: $\overrightarrow{RS} = (0, 0, –2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$

Página 159

2. **Obtén las ecuaciones paramétricas, la ecuación en forma continua y las ecuaciones implícitas de la recta que pasa por estos puntos: (–5, 3, 7) y (2, –3, 3)**

Vector dirección: (2, –3, 3) – (–5, 3, 7) = (7, –6, –4)

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2 + 7\lambda \\ y = -3 - 6\lambda \\ z = 3 - 4\lambda \end{cases}$$

Ecuación continua:

$$\frac{x-2}{7} = \frac{y+3}{-6} = \frac{z-3}{-4}$$

Ecuaciones implícitas:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-2}{7} = \dfrac{y+3}{-6} \ \to\ -6x + 12 = 7y + 21 \\ \dfrac{x-2}{7} = \dfrac{z-3}{-4} \ \to\ -4x + 8 = 7z - 21 \end{array}\right\} \to \begin{cases} 6x + 7y + 9 = 0 \\ 4x + 7z - 29 = 0 \end{cases}$$

3. **Localiza seis puntos, además de los dados, de la recta anterior.**

Dándole valores a λ, obtenemos:

$\lambda = 1 \ \to\ (9, 9, -1)$

$\lambda = 2 \ \to\ (16, -15, -5)$

$\lambda = 3 \ \to\ (23, -21, -9)$

$\lambda = 4 \ \to\ (30, -27, -13)$

$\lambda = -2 \ \to\ (-12, 9, 11)$

$\lambda = -3 \ \to\ (-19, 15, 15)$

(Para $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$, obtenemos los puntos que teníamos).

4. **Comprueba si alguno de los puntos que se dan a continuación pertenecen o no a la recta dada *r*:**

A **(5, 0, 0)** ***B*** **(3, 3, 4)** ***C*** **(15, –15, 4)** ***D*** **(1, 6, 0)**

$A \notin r$, pues $z \neq 4$

$B: \left.\begin{cases} 5 - 2\lambda = 3 \ \to\ \lambda = 1 \\ 3\lambda = 3 \ \to\ \lambda = 1 \\ 4 = 4 \end{cases}\right\} B \in r$

$C: \left.\begin{cases} 5 - 2\lambda = 15 \ \to\ \lambda = -5 \\ 3\lambda = -15 \ \to\ \lambda = -5 \\ 4 = 4 \end{cases}\right\} C \in r$

$D \notin r$, pues $z \neq 4$

Página 163

1. Estudia las posiciones relativas de los pares de rectas que aparecen en estos apartados. Cuando se corten, calcula el punto en que lo hacen:

a) $\left\{\begin{array}{l} x = \ \ 1 - 5\lambda \\ y = \ \ 2 + 3\lambda \\ z = -5 + \ \ \lambda \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 - \ \ \lambda \\ z = 5 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x = -1 - 6\lambda \\ y = \ \ 3 + 3\lambda \\ z = \ \ 5 \end{array}\right.$

a) $P = (1, 2, -5)$ $\quad \vec{d}_1 = (-5, 3, 1)$

$Q = (1, 1, 0)$ $\quad \vec{d}_2 = (0, 0, 1)$

$\overrightarrow{PQ} = (0, -1, 5)$

$$M' = \underbrace{\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}}_{M}; \quad |M'| = -5 \ \rightarrow \ ran\ (M') = 3 \ \rightarrow \ \text{Las rectas se cruzan.}$$

b) $P = (3, 1, 5)$ $\quad \vec{d}_1 = (2, -1, 0)$

$Q = (-1, 3, 5)$ $\quad \vec{d}_2 = (-6, 3, 0)$

$\overrightarrow{PQ} = (-4, 2, 0)$

$$M' = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M}; \quad ran\ (M) = ran\ (M') = 1 \ \rightarrow \ \text{Las dos rectas coinciden.}$$

2. Estudia las posiciones relativas de los pares de rectas que aparecen en estos apartados. Cuando se corten, calcula el punto en que lo hacen:

a) $\left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 3 \\ z = \lambda \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x = \ \ 3 + \lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = \ \ 1 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x = \ \ \ \ \ - 2\lambda \\ y = \ \ 3 + 2\lambda \\ z = -1 \end{array}\right.$

a) $P = (0, 0, 0)$ $\quad \vec{d}_1 = (1, 1, 0)$

$Q = (3, 3, 0)$ $\quad \vec{d}_2 = (0, 0, 1)$

$\overrightarrow{PQ} = (3, 3, 0)$

$$M' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M}; \quad ran\ (M) = ran\ (M') = 2 \ \rightarrow \ \text{Las rectas se cortan.}$$

Hallamos el punto de corte:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = 3 \\ \lambda = 3 \\ 0 = \mu \end{array}\right\} \text{ Se cortan en el punto } (3, 3, 0).$$

b) $P = (3, -2, 1)$ $\quad\quad \vec{d_1} = (1, -1, 0)$

$Q = (0, 3, -1)$ $\quad\quad \vec{d_2} = (-2, 2, 0)$

$\vec{PQ} = (-3, 5, -2)$

$$M' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix}}_{M}\ \begin{matrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{matrix}\right); \quad ran\ (M) = 1; \quad ran\ (M') = 2 \quad \rightarrow \quad \text{Las rectas son paralelas.}$$

Página 165

1. a) Halla las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita del plano que pasa por $P(1, 7, -2)$, $Q(4, 5, 0)$ y $R(6, 3, 8)$.

b) Halla otros tres puntos del plano.

c) Calcula n para que $A(1, n, 5)$ pertenezca al plano.

a) El plano es paralelo a $\vec{PQ} = (3, -2, 2)$ y a $\vec{QR} = (2, -2, 8)$ // $(1, -1, 4)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 4 + 3\lambda + \mu \\ y = 5 - 2\lambda - \mu \\ z = 2\lambda + 4\mu \end{cases}$

Ecuación implícita:

Un vector normal al plano es: $(3, -2, 2) \times (1, -1, 4) = (-6, -10, -1)$ // $(6, 10, 1)$

La ecuación es: $6(x - 4) + 10(y - 5) + 1(z - 0) = 0$, es decir: $6x + 10y + z - 74 = 0$

b) $\left(\frac{37}{3}, 0, 0\right)$; $\left(0, \frac{37}{5}, 0\right)$; $(0, 0, 74)$

c) Sustituimos en la ecuación: $6 \cdot 1 + 10 \cdot n + 5 - 74 = 0 \quad \rightarrow \quad 6 + 10n + 5 - 74 = 0$

$10n = 63 \quad \rightarrow \quad n = \frac{63}{10}$

Página 167

1. Estudia la posición relativa del plano y de la recta:

$$\pi: 2x - y + 3z = 8 \qquad r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Hallamos los puntos de corte de r y π:

$2(2 + 3\lambda) - (-1 + 3\lambda) + 3(-\lambda) = 8$

$4 + 6\lambda + 1 - 3\lambda - 3\lambda = 8 \quad \rightarrow \quad 0\lambda = 3 \quad \rightarrow$ No tiene solución.

La recta y el plano **son paralelos**, pues no tienen ningún punto en común.

2. **Dados estos tres planos, estudia la posición relativa entre cada dos de ellos:**

$$\mathbf{2x - y + 3z = 8} \qquad \mathbf{x + 3y - z = 5} \qquad \mathbf{2x + 6y - 2z = 5}$$

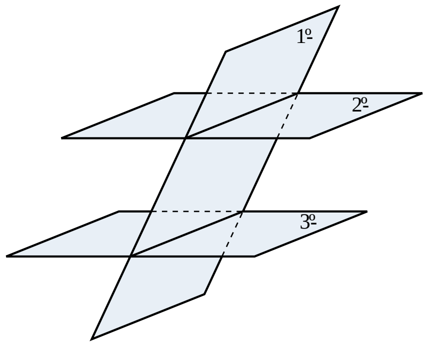
¿Tienen los tres planos algún punto común?

$\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 8 \\ x + 3y - z &= 5 \end{aligned}\right\}$ Se cortan en una recta.

$\left.\begin{aligned} x + 3y - z &= 5 \\ 2x + 6y - 2z &= 5 \end{aligned}\right\}$ Son paralelos.

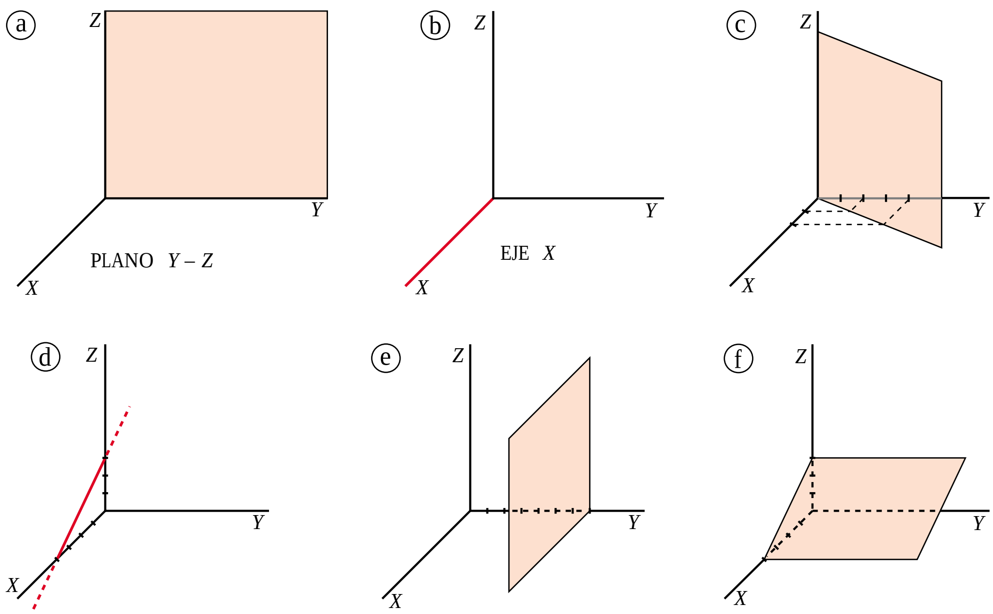
$\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 8 \\ 2x + 6y - 2z &= 5 \end{aligned}\right\}$ Se cortan en una recta.

No hay ningún punto común a los tres planos.



Página 169

1. **Escribe las ecuaciones implícitas y paramétricas de las siguientes figuras:**



a) x siempre vale 0.

y puede tomar cualquier valor.

z puede tomar cualquier valor.

$$\pi: \; x = 0 \quad \to \quad \pi: \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

b) x puede tomar cualquier valor.

y siempre vale 0.

z siempre vale 0.

$$\text{Eje } X: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \to \quad \text{Eje } X: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

c) z puede tomar cualquier valor.

El plano π en su intersección con el plano XY determina la recta r de ecuación:

r: $x - y = 0$

Así, en el espacio XYZ:

$$\pi: x - y = 0 \quad \to \quad \pi: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

d) Calculamos la ecuación de la recta en el plano XZ:

r pasa por $A(4, 0)$ y $B(0, 3)$ $\to$ $\overrightarrow{AB} = (-4, 3)$

$$r: \begin{cases} x = 4 - 4\lambda \\ z = \quad\ \ 3\lambda \end{cases} \quad \to \quad \lambda = \frac{z}{3}$$

$$x = 4 - \frac{4}{3}z$$

r: $3x + 4z = 12$ en el plano XZ.

En el espacio XYZ la recta no toma valores en y, por tanto, $y = 0$. Luego la ecuación de la recta r en el espacio XYZ es:

$$r: \begin{cases} y = 0 \\ 3x + 4z = 12 \end{cases} \quad \to \quad r: \begin{cases} x = 4 - 4\lambda \\ y = 0 \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

e) x puede tomar cualquier valor.

z puede tomar cualquier valor.

y siempre vale 7.

$$\pi: y = 7 \quad \to \quad \pi: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 7 \\ z = \mu \end{cases}$$

f) y puede tener cualquier valor.

Calculamos la recta que determina el plano π en su intersección con el plano XZ:

r pasa por $A(4, 0)$ y $B(0, 3)$.

Por el apartado d):

r: $3x + 4z = 12$ en el plano XZ.

Así:

$$\pi: 3x + 4z = 12 \quad \rightarrow \quad \pi: \begin{cases} x = 4 - 4\lambda \\ y = \mu \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

2. Representa las figuras dadas por las siguientes ecuaciones:

a) $z = 4$ **b)** $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 4 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$

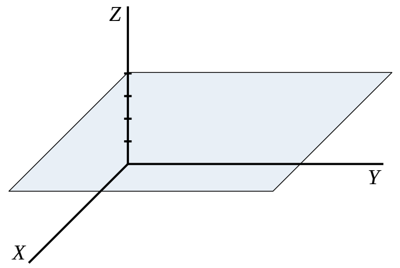
e) $\begin{cases} y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ **g)** $y = 0$ **h)** $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$

i) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 5 \end{cases}$ **j)** $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \rho \end{cases}$ **k)** $x + y + z = 1$ **l)** $\begin{cases} x + y + z \le 1 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ z \ge 0 \end{cases}$

¡Atención! Una de ellas representa un punto y otra, todo el espacio. Hay una que tiene dos parámetros, pero actúan como si solo hubiera uno.

a) $z = 4 \rightarrow$ z siempre vale 4.

x e y pueden tomar cualquier valor.

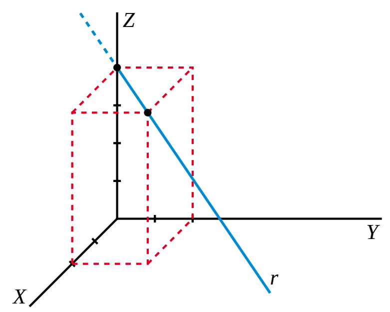


b) $\begin{cases} x = \lambda & \rightarrow & x \text{ puede tomar cualquier valor.} \\ y = \mu & \rightarrow & y \text{ puede tomar cualquier valor.} \\ z = 4 & \rightarrow & z \text{ siempre vale 4.} \end{cases}$

Es el mismo plano que el del apartado anterior.

c) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 4 \end{cases}$ x e y siempre toman el mismo valor. $z = 4 \rightarrow z$ siempre vale 4.

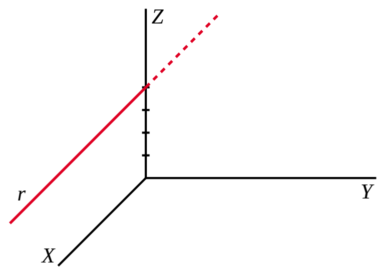
Como solo hay un parámetro, es una recta (paralela al plano XY).



d) $\begin{cases} x = \lambda & \to & x \text{ puede tomar cualquier valor.} \\ y = 0 & \to & y \text{ siempre vale 0.} \\ z = 4 & \to & z \text{ siempre vale 4.} \end{cases}$

Como solo hay un parámetro, es una recta.

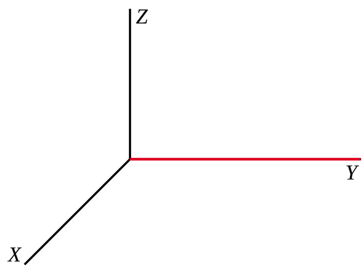
Como $y = 0$ siempre, es una recta del plano XZ.



e) $\begin{cases} y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$ Es la ecuación implícita de la recta anterior.

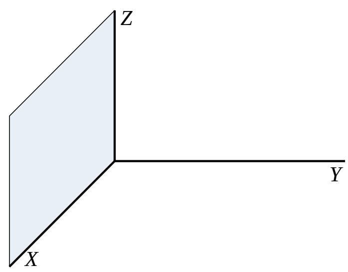
f) $\begin{cases} x = 0 & \to & x \text{ siempre vale 0.} \\ z = 0 & \to & z \text{ siempre vale 0.} \\ & & y \text{ puede tomar cualquier valor.} \end{cases}$

Es la ecuación del eje Y.



g) $y = 0 \;\to\; y$ siempre vale 0.
x puede tomar cualquier valor.
z puede tomar cualquier valor.

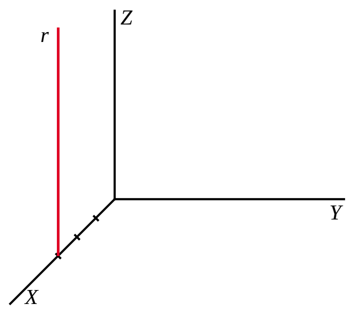
Es la ecuación del plano XZ.



h) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = \lambda + \mu \end{cases} \;\to\;$ si hacemos $\lambda + \mu = \rho$, $\rho \in \mathbb{R}$, tenemos:

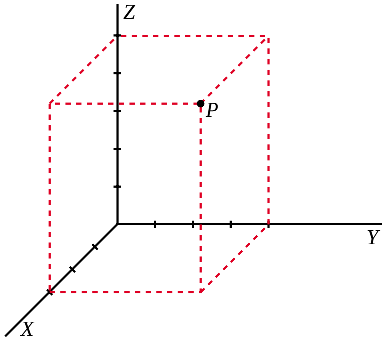
$\begin{cases} x = 3 & \to & x \text{ siempre vale 3.} \\ y = 0 & \to & y \text{ siempre vale 0.} \\ z = \rho & \to & z \text{ puede tomar cualquier valor.} \end{cases} \;\to\;$ Nos movemos en el plano XZ.

Como solo hay un parámetro, es una recta.



i) $\begin{cases} x = 3 & \rightarrow \quad x \text{ siempre vale 3.} \\ y = 4 & \rightarrow \quad y \text{ siempre vale 4.} \\ z = 5 & \rightarrow \quad z \text{ siempre vale 5.} \end{cases}$

Es un punto.



j) $\begin{cases} x = \lambda & \rightarrow \quad x \text{ puede tomar cualquier valor.} \\ y = \mu & \rightarrow \quad y \text{ puede tomar cualquier valor.} \\ z = \rho & \rightarrow \quad z \text{ puede tomar cualquier valor.} \end{cases}$

Representa todo el espacio.

k) $x + y + z = 1$

Calculamos las intersecciones con los ejes:

Eje X:

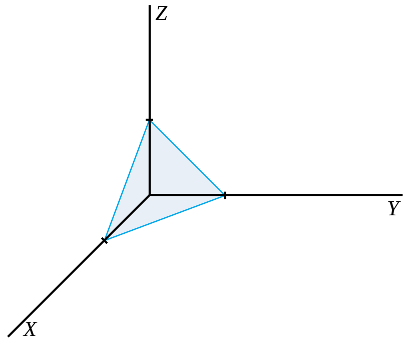
$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \quad x = 1 \quad \rightarrow \quad (1, 0, 0)$

Eje Y:

$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \quad y = 1 \quad \rightarrow \quad (0, 1, 0)$

Eje Z:

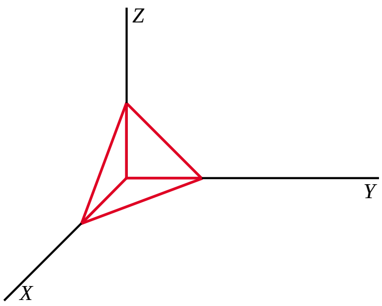
$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \quad z = 1 \quad \rightarrow \quad (0, 0, 1)$



l) $\begin{cases} x + y + z \le 1 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ z \ge 0 \end{cases}$

$x + y + z \le 1 \rightarrow$ Describe la región limitada por el plano anterior, cuyas coordenadas están por debajo de él.

$x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ — Las tres variables tienen que ser positivas.



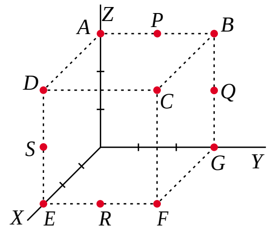
Representa la región comprendida entre la parte positiva de los planos XY, YZ, XZ y el plano $x + y + z = 1$.

Página 175

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Puntos



1 **Las coordenadas de los puntos representados en esta figura son:**

(0, 0, 3); (0, 3, 3); (3, 3, 3); (3, 0, 3); (3, 0, 0); (3, 3, 0); (0, 3, 0); (0, 3/2, 3); (0, 3, 3/2); (3, 3/2, 0); (3, 0, 3/2)

Asocia a cada punto sus coordenadas.

$A(0, 0, 3)$; $B(0, 3, 3)$; $C(3, 3, 3)$; $D(3, 0, 3)$; $E(3, 0, 0,)$; $F(3, 3, 0)$; $G(0, 3, 0)$; $P(0, 3/2, 3)$; $Q(0, 3, 3/2)$; $R(3, 3/2, 0)$; $S(3, 0, 3/2)$

2 **Comprueba si los puntos $A(1, –2, 1)$, $B(2, 3, 0)$ y $C(–1, 0, –4)$ están alineados.**

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}\,(1, 5, -1)\\ \overrightarrow{AC}\,(-2, 2, -5)\end{array}\right\}$$ Sus coordenadas no son proporcionales. Luego los puntos **no** están alineados.

3 **Halla los puntos P y Q tales que $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AQ}$, siendo $A(2, 0, 1)$ y $B(5, 3, –2)$.**

• Si $Q(x, y, z)$, entonces $\overrightarrow{AQ}(x - 2, y, z - 1)$:

$$\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{5}(3, 3, -3) = \left(\frac{9}{5}, \frac{9}{5}, \frac{-9}{5}\right) = (x - 2, y, z - 1)$$

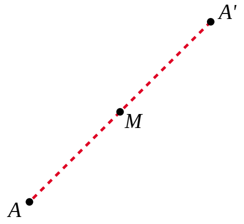
$$\left.\begin{array}{l} x - 2 = \frac{9}{5} \quad \to \quad x = \frac{19}{5} \\ y = \frac{9}{5} \\ z - 1 = -\frac{9}{5} \quad \to \quad z = \frac{-4}{5} \end{array}\right\} Q\left(\frac{19}{5}, \frac{9}{5}, \frac{-4}{5}\right)$$

• Si $P(a, b, c)$, entonces $\overrightarrow{AP}(a - 2, b, c - 1)$:

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{5}(3, 3, -3) = \left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}, \frac{-6}{5}\right) = (a - 2, b, c - 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} a - 2 = \frac{6}{5} \quad \to \quad a = \frac{16}{5} \\ b = \frac{6}{5} \\ c - 1 = \frac{-6}{5} \quad \to \quad c = \frac{-1}{5} \end{array}\right\} P\left(\frac{16}{5}, \frac{6}{5}, \frac{-1}{5}\right)$$

4 **Halla el simétrico del punto $A(-2, 3, 0)$ respecto del punto $M(1, -1, 2)$.**



Sea $A'(x, y, z)$ el simétrico de A respecto del punto M.

Como M es el punto medio del segmento AA', entonces:

$$\left(\frac{x-2}{2}, \frac{y+3}{2}, \frac{z}{2}\right) = (1, -1, 2)$$

$$\frac{x-2}{2} = 1 \to x = 4; \quad \frac{y+3}{2} = -1 \to y = -5; \quad \frac{z}{2} = 2 \to z = 4$$

Por tanto: $A'(4, -5, 4)$

5 **Calcula a y b para que los puntos $A(1, 2, -1)$, $B(3, 0, -2)$ y $C(4, a, b)$ estén alineados.**

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}\,(2, -2, -1) \\ \overrightarrow{AC}\,(3, a-2, b+1) \end{array}\right\} \text{ Para que estén alineados ha de ser: } \frac{3}{2} = \frac{a-2}{-2} = \frac{b+1}{-1}$$

Por tanto:

$$\frac{a-2}{-2} = \frac{3}{2} \to a - 2 = -3 \to a = -1$$

$$\frac{b+1}{-1} = \frac{3}{2} \to b = \frac{-3}{2} - 1 \to b = \frac{-5}{2}$$

Rectas

6 **Halla las ecuaciones paramétricas de los ejes de coordenadas.**

Eje $OX \to \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ Eje $OY \to \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$ Eje $OZ \to \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$

7 **Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(-3, 2, 1)$ y $B\left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$.**

Un vector dirección de la recta r es $\overrightarrow{AB}\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, -1\right)$.

Tomamos el vector $\vec{d}(1, -1, -2) \,//\, \overrightarrow{AB}$.

- *Ecuación vectorial:*

$$(x, y, z) = (-3, 2, 1) + \lambda(1, -1, -2)$$

- *Ecuaciones paramétricas:*

$$\begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

• *Forma continua:*

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-2}$$

• *Forma implícita:*

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-2}{-1} \;\rightarrow\; -x-3 = y-2 \;\rightarrow\; x+y+1=0 \\ \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{z-1}{-2} \;\rightarrow\; -2x-6 = z-1 \;\rightarrow\; 2x+z+5=0 \end{array}\right\}$$

8 **Comprueba si existe alguna recta que pase por los puntos $P(3, 1, 0)$, $Q(0, -5, 1)$ y $R(6, -5, 1)$.**

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}(-3, -6, 1) \\ \overrightarrow{AC}(3, -6, 1) \end{array}\right\}$$ Las coordenadas no son proporcionales, luego los puntos **no** están alineados.

9 S **Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $A(-4, 2, 5)$ y es paralela al eje OZ.**

Si es paralela al eje OZ, tiene como vector dirección $(0, 0, 1)$.

• *Ecuación vectorial:*

$(x, y, z) = (-4, 2, 5) + \lambda(0, 0, 1)$

• *Ecuaciones paramétricas:*

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$$

• *Forma continua:*

$$\frac{x+4}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-5}{1}$$

• *Forma implícita:*

$$\left.\begin{array}{l} x = -4 \;\rightarrow\; x+4=0 \\ y = 2 \;\rightarrow\; y-2=0 \end{array}\right\}$$

10 S **Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(1, -3, 0)$ y es paralela al vector $\vec{u} \times \vec{v}$, siendo $\vec{u}(1, -1, 2)$ y $\vec{v}(2, 0, 0)$.**

$\vec{u} \times \vec{v} = (0, 4, 2) \,//\, (0, 2, 1)$

• *Ecuación vectorial:*

$(x, y, z) = (1, -3, 0) + \lambda(0, 2, 1)$

• *Ecuaciones paramétricas:*

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

• *Forma continua:*

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-0}{1}$$

• *Forma implícita:*

$$\left.\begin{array}{lll} x = 1 & & \to \; x - 1 = 0 \\ \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z}{1} & \to \; y + 3 = 2z & \to \; y - 2z + 3 = 0 \end{array}\right\}$$

11 S **Estudia la posición relativa de las siguientes rectas y halla el punto de corte, cuando sea posible:**

a) $r: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{4}$ $\qquad s: \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{3}$

b) $r: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{1}$ $\qquad s: \dfrac{x-4}{4} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-5}{2}$

c) $r: \dfrac{x}{2} = y - 1 = \dfrac{z+1}{3}$ $\qquad s: \begin{cases} x - 2y - \quad 1 = 0 \\ 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$

d) $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4}$ $\qquad s: \begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = 3 + 6\lambda \\ z = 4 + 8\lambda \end{cases}$

a) $\vec{d}_r(3, 2, 4)$; $P(1, -2, 1)$

$\vec{d}_s(-1, 2, 3)$; $P'(-2, 3, 2)$

$\overrightarrow{PP'}(-3, 5, 1)$

$$M' = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{array}\right) \to |M'| = -51 \neq 0 \to \text{Las rectas se cruzan.}$$

(with the first two columns labelled M)

b) $\vec{d}_r(-1, 2, 1)$; $P(1, 1, 2)$

$\vec{d}_s(4, 1, 2)$; $P'(4, 4, 5)$

$\overrightarrow{PP'}(3, 3, 3)$

$$M' = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to |M'| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \to ran\,(M) = ran\,(M') = 2 \to$$

$$\to \text{Las rectas se cortan.}$$

Para hallar el punto de corte, escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4 + 4\mu \\ y = 4 + \mu \\ z = 5 + 2\mu \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 - \lambda = 4 + 4\mu \\ 1 + 2\lambda = 4 + \mu \\ 2 + \lambda = 5 + 2\mu \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sumando la 1ª y la 3ª: } 3 = 9 + 6\mu \;\; \to \;\; \mu = -1 \\ \text{Sustituyendo en la 1ª: } 1 - \lambda = 4 - 4 \;\; \to \;\; \lambda = 1 \end{array}$$

Sustituyendo $\lambda = 1$ en las ecuaciones de r (o bien $\mu = -1$ en las de s), obtenemos el punto de corte: (0, 3, 3).

c) $\vec{d}_r(2, 1, 3)$; $P(0, 1, -1)$

$\vec{d}_s(1, -2, 0) \times (0, 3, -1) = (2, 1, 3)$

Tienen la misma dirección, y el punto $P \in r$, pero $P \notin s$, luego las rectas son paralelas.

d) $\left.\begin{array}{l} \vec{d}_r(2, 3, 4) \\ \vec{d}_s(4, 6, 8) \end{array}\right\}$ Tienen la misma dirección.

Veamos si el punto $P(1, 0, 0) \in r$, pertenece también a s:

$$\left.\begin{array}{l} 3 + 4\lambda = 1 \;\; \to \;\; \lambda = -1/2 \\ 3 + 6\lambda = 0 \;\; \to \;\; \lambda = -1/2 \\ 4 + 8\lambda = 0 \;\; \to \;\; \lambda = -1/2 \end{array}\right\} P \in s$$

Por tanto, las rectas r y s coinciden, son la misma recta.

12 S **Obtén el valor de a para el cual las rectas r y s se cortan, y halla el punto de corte:**

$$\mathbf{r: x = y = z - a} \qquad \mathbf{s: \frac{2x - 1}{3} = \frac{y + 3}{-2} = \frac{z - 2}{0}}$$

En s, divide por 2 el numerador y el denominador de la primera fracción.

$r: x = y = z - a \;\; \to \;\; \vec{d}_r(1, 1, 1)$; $P(0, 0, a)$

$s: \dfrac{x - 1/2}{3/2} = \dfrac{y + 3}{-2} = \dfrac{z - 2}{0} \;\; \to \;\; \vec{d}_s\left(\dfrac{3}{2}, -2, 0\right)$; $P'\left(\dfrac{1}{2}, -3, 2\right)$

$PP'\left(\dfrac{1}{2}, -3, 2 - a\right)$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 - a \end{pmatrix} \;\; \to \;\; ran\ (M) = 2$$

Para que las rectas se corten, ha de ser $ran\ (M') = 2$, es decir, $|M'| = 0$:

$$|M'| = \frac{7a - 21}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad a = 3$$

Para hallar el punto de corte, escribimos las rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\mu \\ y = -3 - 2\mu \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\mu \\ \lambda = -3 - 2\mu \\ 3 + \lambda = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -1 = -3 - 2\mu \quad \rightarrow \quad \mu = -1 \\ \lambda = -1 \end{array}$$

Sustituyendo $\lambda = -1$ en las ecuaciones de r (o $\mu = -1$ en las de s), obtenemos el punto de corte: $(-1, -1, 2)$.

13 S **Halla los valores de m y n para que las rectas r y s sean paralelas:**

$$\boldsymbol{r: \begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \qquad s: \frac{x}{m} = \frac{y - 1}{3} = \frac{z + 3}{n}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{d}_r(4, 1, -1) \\ \vec{d}_s(m, 3, n) \end{array}\right\} \text{Las coordenadas han de ser proporcionales:}$$

$$\frac{m}{4} = \frac{3}{1} = \frac{n}{-1} \quad \rightarrow \quad m = 12, \quad n = -3$$

(El punto $P(0, 1, -3) \in s$; pero $P \notin r$; luego las dos rectas son paralelas si $m = 12$ y $n = -3$).

14 **a) Halla el vector director de la recta determinada por los planos:**

$$\boldsymbol{\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 2 \end{cases}}$$

b) Escribe las ecuaciones paramétricas de r.

a) $\vec{d} = (1, -1, 0) \times (0, 1, 1) = (-1, -1, 1)$

b) Obtenemos un punto de la recta haciendo $y = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ z = 2 \end{array}\right\} \text{El punto } (0, 0, 2) \text{ pertenece a la recta.}$$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$

15 **Dada la recta $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = z$, exprésala como intersección de dos planos.**

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} = z \quad \to \quad x = 2z \quad \to \quad x - 2z = 0 \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{-1} \quad \to \quad -x = 2y + 2 \quad \to \quad x + 2y + 2 = 0 \end{array}\right\}$$

Página 176

Planos

16 S **Halla las ecuaciones de los siguientes planos:**

a) Determinado por el punto $A(1, -3, 2)$ y por los vectores $\vec{u}(2, 1, 0)$ y $\vec{v}(-1, 0, 3)$.

b) Pasa por el punto $P(2, -3, 1)$ y cuyo vector normal es $\vec{n}(5, -3, -4)$.

c) Perpendicular a la recta $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{3}$ y que pasa por el punto (1, 0, 1).

a) $\vec{u} \times \vec{v} = (2, 1, 0) \times (-1, 0, 3) = (3, -6, 1)$

$3(x-1) - 6(y+3) + (z-2) = 0$

$3x - 6y + z - 23 = 0$

b) $5(x-2) - 3(y+3) - 4(z-1) = 0$

$5x - 3y - 4z - 15 = 0$

c) $\vec{n}(2, -1, 3)$

$2(x-1) - (y-0) + 3(z-1) = 0$

$2x - y + 3z - 5 = 0$

17 **Halla las ecuaciones paramétricas e implícitas de los planos *OXY*, *OYZ*, *OXZ*.**

Plano *OXY*:

Paramétricas: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases}$ Implícita: $z = 0$

Plano *OYZ*:

Paramétricas: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$ Implícita: $x = 0$

Plano OXZ:

Paramétricas: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \mu \end{cases}$ Implícita: $y = 0$

18 **Escribe las ecuaciones paramétricas de los planos:**

a) $z = 3$ **b)** $x = -1$ **c)** $y = 2$

a) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 \\ z = \mu \end{cases}$

19 **¿Cuál es el vector normal del plano** $x = -1$**?**

Escribe las ecuaciones de una recta perpendicular a ese plano que pase por $A(2, 3, 0)$**.**

El vector normal al plano $x = -1$ es $\vec{n}(1, 0, 0)$.

Recta: $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$

20
S **Calcula** m **y** n **para que los planos:** $\alpha: mx + y - 3z - 1 = 0$ **y** $\beta: 2x + ny - z - 3 = 0$ **sean paralelos. ¿Pueden ser coincidentes?**

$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\alpha(m, 1, -3) \\ \vec{n}_\beta(2, n, -1) \end{array}\right\}$ Las coordenadas han de ser proporcionales:

$$\frac{m}{2} = \frac{1}{n} = \frac{-3}{-1} \quad \to \quad m = 6, \quad n = \frac{1}{3}$$

Así, quedaría:

$$\begin{cases} \alpha: 6x + y - 3z - 1 = 0 \quad \to \quad 6x + y - 3z - 1 = 0 \\ \beta: 2x + \frac{1}{3}y - z - 3 = 0 \quad \to \quad 6x + y - 3z - 9 = 0 \end{cases}$$

Los planos son paralelos, no coincidentes. No pueden ser coincidentes pues los términos independientes no son proporcionales a los anteriores.

21
S **Escribe la ecuación del plano que pase por los puntos (0, 0, 0), (2, 2, 0) y (1, 1, 2).**

$(2, 2, 0) \times (1, 1, 2) = (4, -4, 0) \quad \to \quad \vec{n}(1, -1, 0)$

$P(0, 0, 0)$

El plano es: $x - y = 0$

22 S **Determina la ecuación del plano que contiene al punto $P(2, 1, 2)$ y a la recta:**

$$x - 2 = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-3}$$

Si contiene a la recta, contendrá al punto $Q(2, 3, 4)$ y será paralelo a $\vec{d}(1, -1, -3)$.

También será paralelo a $\overrightarrow{PQ}(0, 2, 2) \mathbin{//} (0, 1, 1)$.

Un vector normal al plano es: $(1, -1, -3) \times (0, 1, 1) = (2, -1, 1)$

La ecuación del plano es: $2(x - 2) - (y - 1) + (z - 2) = 0$

$$2x - y + z - 5 = 0$$

23 S **Comprueba que las rectas:**

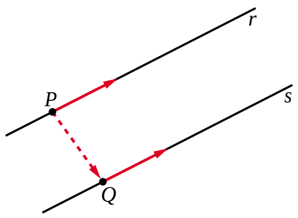
$$r: \frac{x-1}{2} = y = z - 2 \qquad s: \begin{cases} x - 2z = 5 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$$

son paralelas, y halla la ecuación del plano que las contiene.

$\vec{d}_r(2, 1, 1)$; $P(1, 0, 2)$

$\vec{d}_s = (1, 0, -2) \times (1, -2, 0) = (-4, -2, -2) \mathbin{//} (2, 1, 1)$

Las rectas r y s tienen la misma dirección. Además, $P(1, 0, 2) \in r$, pero $P \notin s$. Luego las rectas son paralelas.



Obtenemos un punto, Q, de s haciendo $y = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2z = 5 \\ x = 11 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 11 \\ z = 3 \end{array}\right\} Q(11, 0, 3)$$

El plano que buscamos será paralelo a $\vec{d}_r(2, 1, 1)$ y a $\overrightarrow{PQ}(10, 0, 1)$. Un vector normal es: $(2, 1, 1) \times (10, 0, 1) = (1, 8, -10)$

La ecuación del plano será: $1 \cdot (x - 1) + 8 \cdot (y - 0) - 10 \cdot (z - 2) = 0$

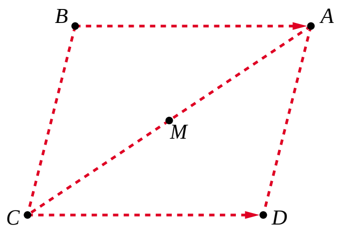
$$x + 8y - 10z + 19 = 0$$

24 S **¿Son coplanarios los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(2, 1, 0)$ y $D(-1, 2, 1)$?**

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (1, 1, 0) \\ \overrightarrow{AD} = (-2, 2, 1) \end{array}\right\} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Los puntos *no* son coplanarios.

25 **Los puntos $A(1, 3, -1)$, $B(2, 0, 2)$ y $C(4, -1, -3)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo. Halla el vértice D y el centro del paralelogramo.**



Sea $D(x, y, z)$ el otro vértice:

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \rightarrow (-1, 3, -3) = (x - 4, y + 1, z + 3)$

$$\left.\begin{array}{l} x - 4 = -1 \rightarrow x = 3 \\ y + 1 = 3 \rightarrow y = 2 \\ z + 3 = -3 \rightarrow z = -6 \end{array}\right\} D(3, 2, -6)$$

Si M es el centro del paralelogramo, es el punto medio de $\overrightarrow{AC}$:

$$M = \left(\frac{4+1}{2}, \frac{-1+3}{2}, \frac{-3-1}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 1, -2\right)$$

26 **S** **Calcula b para que las rectas r y s se corten. ¿Cuál es el punto de corte?**

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z+1}{2} \qquad s: \frac{x}{4} = \frac{y-b}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

$\vec{d}_r(2, -3, 2)$; $P(1, -5, -1)$

$\vec{d}_s(4, -1, 2)$; $P'(0, b, 1)$

$\overrightarrow{PP'}(-1, b + 5, 2)$

$$M' = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -1 \\ -3 & -1 & b+5 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

(M = the first two columns)

Para que las rectas se corten, ha de ser $|M'| = 0$ (para que $ran\ (M) = ran\ (M') = 2$).

$|M'| = 4b + 44 = 0 \rightarrow b = -11$

Para hallar el punto de corte, escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -5 - 3\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4\mu \\ y = -11 - \mu \\ z = 1 + 2\mu \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} 1 + 2\lambda = 4\mu \\ -5 - 3\lambda = -11 - \mu \\ -1 + 2\lambda = 1 + 2\mu \end{array}\right\} \text{Restando la 3ª ecuación a la 1ª: } 2 = -1 + 2\mu$$

$$\mu = \frac{3}{2} \qquad \lambda = \frac{4\mu - 1}{2} = \frac{5}{2}$$

Sustituyendo $\lambda = \frac{5}{2}$ en las ecuaciones de r (o $\mu = \frac{3}{2}$ en las de s), obtenemos el punto de corte: $\left(6, \frac{-25}{2}, 4\right)$.

27 **S** **Determina el valor de a para que las rectas r y s sean coplanarias:**

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-a}{1} = \frac{z}{0} \qquad s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

Halla el plano que las contiene.

$\vec{d}_r(1, 1, 0)$; $P(0, a, 0)$

$\vec{d}_s(1, -1, 1)$; $P'(1, 1, -1)$

$\overrightarrow{PP'}(1, 1 - a, -1)$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1-a \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$ Para que las rectas sean coplanarias, ha de ser $|M'| = 0$.

$|M'| = a + 2 = 0 \rightarrow a = -2$

Un vector normal al plano es: $\vec{d}_r \times \vec{d}_s = (1, 1, 0) \times (1, -1, 1) = (1, -1, -2)$

El plano que las contiene es: $1(x - 1) - 1(y - 1) - 2(z + 1) = 0$

$$x - y - 2z - 2 = 0$$

28 **S** **¿Se puede construir un triángulo que tenga dos de sus lados sobre las rectas r y s?**

$$r: \frac{x-1}{2} = y = z + 1 \qquad s: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Estudiamos la posición relativa de las rectas:

$\vec{d}_r(2, 1, 1)$; $P(1, 0, -1)$

$\vec{d}_s(2, 1, 1)$

Las dos rectas tienen la misma dirección. Además, $P(1, 0, -1) \in r$, pero $P \notin s$

puesto que: $\begin{cases} 2\lambda = 1 \rightarrow \lambda = 1/2 \\ -1 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$

Por tanto, las rectas son paralelas. Luego *no* se puede construir un triángulo que tenga dos de sus lados sobre las rectas r y s.

29 **S** **Estudia la posición relativa de la recta: $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ y el plano $\pi: x - y + z - 3 = 0$.**

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

$\pi: x - y + z - 3 = 0$

$$(3 + 2\lambda) - (-1 + \lambda) + (-\lambda) - 3 = 0$$

$$3 + 2\lambda + 1 - \lambda - \lambda - 3 = 0$$

$$1 = 0$$

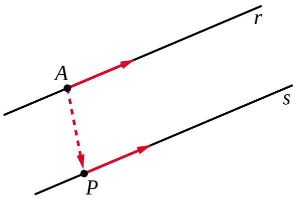
La recta es *paralela* al plano (pues no tienen ningún punto en común).

30 **S** **Dadas la recta r determinada por los puntos $A(1, 1, 1)$ y $B(3, 1, 2)$, y la recta:**

$$s: \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

estudia su posición relativa y halla, si existe, la ecuación del plano que las contiene.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{d_r} = \vec{AB} = (2, 0, 1);\ \ A(1, 1, 1) \\ \vec{d_s} = (1, 0, -2) \times (0, 1, 0) = (2, 0, 1);\ \ A \notin s \end{array}\right\} \text{Las rectas son paralelas.}$$



Obtenemos un punto de s haciendo $z = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array}\right\} P(1, 2, 0)$$

El plano que buscamos es paralelo a $\vec{d_r}$ y a $\vec{AP}(0, 1, -1)$.

Un vector normal al plano es: $\vec{n} = \vec{d_r} \times \vec{AP} = (2, 0, 1) \times (0, 1, -1) = (-1, 2, 2)$

El plano es: $-1 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 1) + 2 \cdot (z - 1) = 0$

$$-x + 2y + 2z - 3 = 0$$

31 **S** **Dada la recta $r: \begin{cases} 3x + ay + z = 1 \\ 2x + 6y - 2z = 6 \end{cases}$**

a) Halla, para cada valor de a, las ecuaciones paramétricas de r_a.

b) Discute la existencia de valores de a para que la recta r_a esté incluida en el plano $x + y + z = 1$.

a) $\left.\begin{array}{l} 3x + z = 1 - ay \\ 2x - 2z = 6 - 6y \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 3x + z = 1 - ay \\ x - z = 3 - 3y \end{array}\right\}$ Sumando: $4x = 4 - (a + 3)y$

$$x = 1 - \frac{a + 3}{4}y$$

$$z = x - 3 + 3y = 1 - \frac{a + 3}{4}y - 3 + 3y = -2 + \frac{9 - a}{4}y$$

$$r_a: \begin{cases} x = 1 - (a + 3)\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = -2 + (9 - a)\lambda \end{cases}$$

b) $x + y + z = 1$

$1 - (a + 3)\lambda + 4\lambda - 2 + (9 - a)\lambda = 1$

$1 - a\lambda - 3\lambda + 4\lambda - 2 + 9\lambda - a\lambda = 1$

$(10 - 2a)\lambda = 2$

$10 - 2a = 0 \quad \to \quad 10 = 2a \quad \to \quad a = 5$

- Si $a = 5 \quad \to$ La recta es paralela al plano.
- Si $a \neq 5 \quad \to$ La recta y el plano se cortan en un punto.

Por tanto, no existen valores de a para los que la recta esté contenida en el plano.

Página 177

32 S **Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1, 3, 2)$ y $B(-2, 5, 0)$ y es paralelo a la recta** $\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -2 - 3\lambda \end{cases}$

El plano será paralelo a $\overrightarrow{AB}(-3, 2, -2)$ y a $\vec{d}(-1, 1, -3)$.

Un vector normal al plano es: $(-3, 2, -2) \times (-1, 1, -3) = (-4, -7, -1) \quad \to \quad \vec{n}(4, 7, 1)$

El plano es: $4(x - 1) + 7(y - 3) + 1(z - 2) = 0$

$4x + 7y + z - 27 = 0$

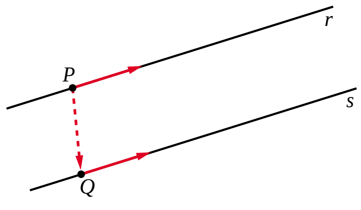
33 S **Estudia la posición de las siguientes rectas y halla, si es posible, el plano que las contiene:**

$r: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2} \qquad s: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{-2}$

$\vec{d}_r(1, -1, 2)$; $P(2, 1, 0)$

$\vec{d}_s(-1, 1, -2)$

Las rectas tienen la misma dirección. Además $P(2, 1, 0) \in r$, pero $P \notin s$; luego las rectas son paralelas.



Un punto de s es $Q(1, 1, -2)$.

El plano que buscamos es paralelo a $\vec{d}_r$ y a $\overrightarrow{PQ}(-1, 0, -2)$.

Un vector normal al plano es:

$\vec{n} = (1, -1, 2) \times (-1, 0, -2) = (2, 0, -1)$

El plano es: $2(x - 2) + 0(y - 1) - 1(z - 0) = 0$

$2x - z - 4 = 0$

34 S **Halla la ecuación del plano que contiene a la recta**

$$r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \textbf{y es paralelo a: } s: \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$$

El plano será paralelo a $\vec{d}_r(3, -1, 1)$ y a $\vec{d}_s(5, 2, -3)$.

Un vector normal al plano será: $\vec{n} = (3, -1, 1) \times (5, 2, -3) = (1, 14, 11)$

Un punto del plano es $(2, -1, 0)$.

Por tanto, el plano es: $1(x - 2) + 14(y + 1) + 11(z - 0) = 0$

$$x + 14y + 11z + 12 = 0$$

35 S **Calcula el valor de m para que los puntos $A(m, 0, 1)$, $B(0, 1, 2)$, $C(1, 2, 3)$ y $D(7, 2, 1)$ estén en un mismo plano. ¿Cuál es la ecuación de ese plano?**

Hallamos la ecuación del plano que contiene a B, C y D.

El plano será paralelo a $\overrightarrow{BC}(1, 1, 1)$ y a $\overrightarrow{CD}(6, 0, -2)$, es decir, a $(1, 1, 1)$ y a $(3, 0, -1)$. Un vector normal al plano es:

$$(1, 1, 1) \times (3, 0, -1) = (-1, 4, -3) \quad \rightarrow \quad \vec{n}(1, -4, 3)$$

La ecuación del plano es: $1(x - 0) - 4(y - 1) + 3(z - 2) = 0$

$$x - 4y + 3z - 2 = 0$$

Para que A pertenezca al mismo plano, ha de ser:

$$m - 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad m + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad m = -1$$

36 S **Dado el plano $\pi: 2x - 3y + z = 0$ y la recta $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$, halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.**

El plano será paralelo a $(2, -3, 1)$ y a $(1, -1, 2)$.

Un vector normal al plano es: $(2, -3, 1) \times (1, -1, 2) = (-5, -3, 1) \quad \rightarrow \quad \vec{n}(5, 3, -1)$

El punto $(1, 2, -1)$ pertenece al plano.

La ecuación del plano es: $5(x - 1) + 3(y - 2) - 1(z + 1) = 0$

$$5x + 3y - z - 12 = 0$$

37 S **Estudia la posición de los siguientes planos:**

$$\textbf{a)} \begin{cases} x + 2y - z - 3 = 0 \\ 3y + 2z - 1 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases} \quad \textbf{b)} \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \\ 3x - y + z - 4 = 0 \end{cases} \quad \textbf{c)} \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y - \ \ z = 3 \\ 3y + 2z = 1 \\ x + \ \ y + \ \ z = 2 \end{array}\right\} \quad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$, with M the first three columns.

$|M| = 8 \;\rightarrow\; ran\ (M) = ran\ (M') = 3 \;\rightarrow\;$ Los tres planos se cortan en un punto.

b) $\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - y + z = 4 \end{array}\right\} \quad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right)$, with M the first three columns.

La 3ª columna es –1 · 2ª; y la 4ª columna se obtiene sumando la 1ª y la 3ª.

Luego $ran\ (M) = ran\ (M') = 2 \;\rightarrow\;$ Los tres planos se cortan en una recta.

c) $\left.\begin{array}{r} x - \ \ y + \ \ z = 1 \\ 3x + \ \ y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 3z = -4 \end{array}\right\} \quad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & -4 \end{array}\right)$, with M the first three columns.

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ y $|M| = 0 \;\rightarrow\; ran\ (M) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\ (M') = 3$

Los planos se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a los tres.

38 S **Escribe la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1, -3, 2)$ y $B(0, 1, 1)$ y es paralelo a la recta:**

$$r: \begin{cases} \mathbf{3x - 2y \qquad + 1 = 0} \\ \mathbf{\qquad 2y + 3z - 3 = 0} \end{cases}$$

Un vector dirección de r es: $(3, -2, 0) \times (0, 2, 3) = (-6, -9, 6) \,//\, (2, 3, -2)$

$\overrightarrow{AB}(-1, 4, -1)$

El plano que buscamos es paralelo a (2, 3, –2) y a (–1, 4, –1).

Un vector normal al plano es: $\vec{n} = (2, 3, -2) \times (-1, 4, -1) = (5, 4, 11)$

La ecuación del plano es: $5(x - 0) + 4(y - 1) + 11(z - 1) = 0$

$$5x + 4y + 11z - 15 = 0$$

39 **Dados los planos $mx + 2y - 3z - 1 = 0$ y $2x - 4y + 6z + 5 = 0$, halla m para que sean:**

a) Paralelos.

b) Perpendiculares.

a) Las coordenadas de $(m, 2, -3)$ y de $(2, -4, 6)$ han de ser proporcionales:

$$\frac{m}{2} = \frac{2}{-4} = \frac{-3}{6} \quad \to \quad m = -1$$

b) $(m, 2, -3) \cdot (2, -4, 6) = 2m - 8 - 18 = 2m - 26 = 0 \quad \to \quad m = 13$

40 S **Halla el valor de a para que las rectas r y s estén en un mismo plano y halla la ecuación de ese plano:**

$$r: \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - z = 2 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2z = a \end{cases}$$

Escribimos las ecuaciones de r y s en forma paramétrica:

$$r: \left\{ \begin{array}{l} x - 2z = 0 \to x = 2z \\ y - z = 2 \to y = 2 + z \end{array} \right\} \qquad r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$s: \left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \to y = 1 - x \\ x + 2z = a \to z = \dfrac{a}{2} - \dfrac{x}{2} \end{array} \right\} \qquad s: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \dfrac{a}{2} - \lambda \end{cases}$$

Obtenemos un punto y un vector dirección de cada recta:

$\vec{d}_r(2, 1, 1)$; $P(0, 2, 0)$

$\vec{d}_s(2, -2, -1)$; $P'(0, 1, a/2)$

$\overrightarrow{PP'}(0, -1, a/2)$

Para que las rectas estén en el mismo plano, los vectores $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ y $\overrightarrow{PP'}$ han de ser coplanarios:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & a/2 \end{vmatrix} = -3a - 4 = 0 \quad \to \quad a = \frac{-4}{3}$$

El plano será paralelo a $\vec{d}_r$ y a $\vec{d}_s$. Un vector normal al plano es:

$\vec{n} = (2, 1, 1) \times (2, -2, -1) = (1, 4, -6)$

El punto $P(0, 2, 0)$ pertenece al plano.

La ecuación del plano es: $1(x - 0) + 4(y - 2) - 6(z - 0) = 0$

$$x + 4y - 6z - 8 = 0$$

41 **Estudia la posición de la recta $r: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ y el plano $z = 1$.**

Son perpendiculares y se cortan en el punto $(3, 2, 1)$.

42 S **Sean la recta** $r: \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ **y el plano** $ax - y + 4z - 2 = 0$.

a) Calcula el valor de a **para que** r **sea paralela al plano.**

b) ¿Existe algún valor de a **para el cual** r **sea perpendicular al plano?**

Un vector dirección de r es: $\vec{d} = (3, -1, 1) \times (2, 0, -1) = (1, 5, 2)$

Un vector normal al plano es $\vec{n} = (a, -1, 4)$.

a) Para que r sea paralela al plano, $\vec{d}$ y $\vec{n}$ han de ser perpendiculares:

$(1, 5, 2) \cdot (a, -1, 4) = a - 5 + 8 = a + 3 = 0 \quad \to \quad a = -3$

b) Los vectores $\vec{d}$ y $\vec{n}$ deberían tener sus coordenadas proporcionales.

Como $\frac{5}{-1} \neq \frac{2}{4}$, no es posible; es decir, *no* existe ningún valor de a para el cual r sea perpendicular al plano.

43 S **Dados la recta** $r: \begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$ **y el plano** $\pi: x + 2y + 3z - 1 = 0$, **halla la ecuación de una recta** s **contenida en el plano** π **que pase por el punto** $P(2, 1, -1)$ **y sea perpendicular a** r.

El vector dirección de s ***ha de ser perpendicular al vector dirección de*** r ***y al vector normal del plano.***

Un vector dirección de r es: $\vec{d} = (1, 0, -2) \times (0, 1, -1) = (2, 1, 1)$

Un vector normal al plano es $\vec{n} = (1, 2, 3)$.

Un vector dirección de la recta que buscamos es: $(2, 1, 1) \times (1, 2, 3) = (1, -5, 3)$

La recta es: $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$

44 S **Halla la ecuación de la recta paralela a** $r: \begin{cases} x + 2z = 5 \\ y + 3z = 5 \end{cases}$ **que pase por el punto de intersección de la recta** $s: \frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{3}$ **con el plano** $\pi: x - y + z = 7$.

Un vector dirección de la recta es: $(1, 0, 2) \times (0, 1, 3) = (-2, -3, 1) \,//\, (2, 3, -1)$

Escribimos la recta s en forma paramétrica para hallar el punto de corte de s y π:

$s: \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}$ $\qquad \pi: x - y + z = 7$

$1 + 4\lambda + 3 - 2\lambda - 2 + 3\lambda = 7$

$5\lambda = 5 \quad \to \quad \lambda = 1$

El punto de corte de s y π es $(5, -1, 1)$.

Por tanto, la recta que buscamos es:

$$\begin{cases} x = \ \ 5 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = \ \ 1 - \ \ \lambda \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

Página 178

45 **S** **Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$ y es perpendicular al plano que pasa por el origen y por los puntos $B(1, 1, 1)$ y $C(1, 2, 1)$.**

Un vector normal al plano es: $\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} = (1, 1, 1) \times (1, 2, 1) = (-1, 0, 1)$

Este vector es un vector dirección de la recta que buscamos.

Las ecuaciones de la recta son:

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

46 **S** **Escribe la ecuación del plano que contiene a la recta $r: \begin{cases} x + y \quad\quad - 1 = 0 \\ 2x - y + z \quad\quad = 0 \end{cases}$**

y es paralelo a $s: \dfrac{1-x}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+2}{-4}$.

Un vector dirección de r es: $(1, 1, 0) \times (2, -1, 1) = (1, -1, -3)$

El plano que buscamos es paralelo a $(1, -1, -3)$ y a $(-2, 3, -4)$. Un vector normal al plano es: $\vec{n} = (1, -1, -3) \times (-2, 3, -4) = (13, 10, 1)$

Obtenemos un punto de r haciendo $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} y - 1 = 0 \ \ \rightarrow \ \ y = 1 \\ -y + z = 0 \ \ \rightarrow \ \ z = y = 1 \end{array}\right\} P(0, 1, 1)$$

La ecuación del plano es: $13(x - 0) + 10(y - 1) + 1(z - 1) = 0$

$$13x + 10y + z - 11 = 0$$

47 **S** **Estudia las posiciones relativas del plano: $\pi: x + ay - z = 1$ y de la recta:**

$r: \begin{cases} 2x + y - az = 2 \\ x - y - \ z = a - 1 \end{cases}$ según los valores de a.

$$\left.\begin{array}{ll} \pi: & x + ay - \ z = 1 \\ r: & \begin{cases} 2x + \ \ y - az = 2 \\ x - \ \ y - \ \ z = a - 1 \end{cases} \end{array}\right\} \quad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ 1 & -1 & -1 & a-1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{M}$$

$$|M| = -a^2 + a + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} a = -1 \\ a = \ \ 2 \end{cases}$$

• Si $a = -1$, queda:

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$ planos paralelos. La recta es paralela al plano.

• Si $a = 2$, queda:

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$ La 1ª ecuación se obtiene restándole a la 2ª la 3ª.

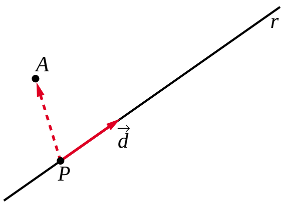
Por tanto, la recta está contenida en el plano.

• Si $a \neq -1$ y $a \neq 2$ $\rightarrow$ La recta y el plano se cortan en un punto.

48 S **Calcula la ecuación del plano que determinan el punto $A(1, 0, 1)$ y la recta:**

$$r: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Un vector dirección de la r es: $\vec{d} = (1, 1, -1) \times (2, -1, 2) = (1, -4, -3)$



Obtenemos un punto de r haciendo $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} y - z + 1 = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sumando: } z + 1 = 0 \rightarrow z = -1 \\ y = 2z = -2 \end{array}$$

$P(0, -2, -1)$

El plano es paralelo a $\vec{d}(1, -4, -3)$ y a $\overrightarrow{PA}(1, 2, 2)$.

Un vector normal al plano es: $(1, -4, -3) \times (1, 2, 2) = (-2, -5, 6) \,//\, (2, 5, -6)$

La ecuación del plano es: $2(x - 1) + 5(y - 0) - 6(z - 1) = 0$

$$2x + 5y - 6z + 4 = 0$$

49 **Dados los vectores $\vec{u}(2, 3, 5)$, $\vec{v}(6, -3, 2)$, $\vec{w}(4, -6, 3)$, $\vec{p}(8, 0, a)$, y los planos: $\pi: (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ y $\pi': (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda\vec{w} + \mu\vec{p}$, estudia la posición relativa de π y π' según los valores de a.**

Obtenemos las ecuaciones implícitas de los dos planos:

$\vec{u} \times \vec{v} = (21, 26, -24)$

$\pi: 21(x - 1) + 26(y - 2) - 24(z - 3) = 0$

$\pi: 21x + 26y - 24z - 1 = 0$

$\vec{w} \times \vec{p} = (-6a, 24 - 4a, 48)$

$\pi': -6a(x - 1) + (24 - 4a)(y - 2) + 48(z - 3) = 0$

$\pi': -6ax + (24 - 4a)y + 48z + (14a - 192) = 0$

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 21 & 26 & -24 & 1 \\ -6a & 24-4a & 48 & 192-14a \end{array}\right)$$

(with the first three columns forming M)

$$\begin{vmatrix} 21 & -24 \\ -6a & 48 \end{vmatrix} = 1\,008 - 144a = 0 \quad \to \quad a = 7$$

• Si $a = 7$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 21 & 26 & -24 & 1 \\ -42 & -4 & 48 & 94 \end{array}\right) \quad \to \quad \text{Los planos se cortan en una recta.}$$

• Si $a \neq 7 \quad \to \quad ran\ (M) = ran\ (M')$. Los planos se cortan en una recta.

Los planos se cortan en una recta cualquiera que sea el valor de a (aunque no sea siempre la misma recta).

50 **S** **Estudia la posición de los siguientes planos según los valores de m:**

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + y = 1} \\ \boldsymbol{my + z = 0} \\ \boldsymbol{x + (1+m)y + mz = m+1} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ my + z = 0 \\ x + (1+m)y + mz = m+1 \end{array}\right\} \quad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & 1+m & m & m+1 \end{array}\right)$$

$$|M| = m^2 - m = 0 \quad \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

• Si $m = 0$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

El 1º y el 3º son el mismo plano; el 2º los corta. Por tanto, se cortan en una recta.

• Si $m = 1$, queda:

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \ \text{ y } \ |M| = 0 \quad \to \quad ran\ (M) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \to \quad ran\ (M') = 3$$

Los planos se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a los tres.

• Si $m \neq 0$ y $m \neq 1 \quad \to \quad ran\ (M) = ran\ (M') = 3$. Los planos se cortan en un punto.

51 S **Halla la ecuación de la recta r que pasando por el punto $P(2, 0, -1)$ corta a las rectas:**

$$s_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1} \qquad s_2: \left\{\begin{array}{l} x + y \qquad\quad + 4 = 0 \\ \quad y - 3z + 3 = 0 \end{array}\right.$$

Escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$$s_1: \left\{\begin{array}{l} x = 2 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{array}\right. \qquad s_2: \left\{\begin{array}{l} x = -1 - 3\lambda \\ y = -3 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

La recta r está determinada por los siguientes planos:

α: contiene a la recta s_1 y al punto P: $\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

β: contiene a la recta s_2 y al punto P: $\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Así, $r: \left\{\begin{array}{l} x - 2z - 4 = 0 \\ x + 3z + 1 = 0 \end{array}\right.$

52 S **Dados los planos: $\pi: ax + y + z = a$ y $\pi': x - ay + az = -1$ comprueba que se cortan en una recta para cualquier valor de a. Obtén el vector director de esa recta en función de a.**

$$\left.\begin{array}{l} \pi: \; ax + \;\; y + \;\; z = a \\ \pi': \;\; x - ay + az = -1 \end{array}\right\} \; M = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & a \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 - 1 = -(a^2 + 1) \neq 0$ para todo valor de a.

Por tanto, $ran\,(M) = 2$ para cualquier valor de a; es decir, los planos se cortan en una recta (cualquiera que sea el valor de a).

- Vector dirección de la recta: $(a, 1, 1) \times (1, -a, a) = (2a, 1 - a^2, -a^2 - 1)$

53 S **Considera estas rectas:**

$$r: \left\{\begin{array}{l} x = \;\; 3 + \;\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = \;\; 2 + \;\lambda \end{array}\right. \qquad s: \left\{\begin{array}{l} 4x + 5y \qquad + 7 \qquad = 0 \\ \qquad 3y - 4z + 7 - m = 0 \end{array}\right.$$

a) Calcula el valor de m para que estén en un mismo plano.

b) Escribe la ecuación de dicho plano.

a) $\left.\begin{array}{l} \vec{d}_r(1, 2, 1) \\ \vec{d}_s = (4, 5, 0) \times (0, 3, -4) = (-20, 16, 12) \,//\, (-5, 4, 3) \end{array}\right\}$

Como las rectas no son paralelas ni coincidentes, para que estén en un mismo plano se han de cortar en un punto. Imponemos esta condición. Para averiguar el punto de corte, sustituimos las coordenadas de un punto de r en las ecuaciones de s y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 4(3+\lambda)+5(-1+2\lambda)+7=0 \;\rightarrow\; 14\lambda+14=0 \;\rightarrow\; \lambda=-1 \\ 3(-1+2\lambda)-4(2+\lambda)+7-m=0 \;\rightarrow\; 2\lambda-4-m=0 \;\rightarrow\; -6-m=0 \;\rightarrow\; m=-6 \end{cases}$$

Por tanto, para que las rectas estén en un mismo plano, ha de ser $m=-6$.

b) Si $m=-6$, las rectas se cortan en el punto $(2, -3, 1)$ (lo obtenemos haciendo $\lambda=-1$ en las ecuaciones de r).

El plano que buscamos pasará por ese punto y será paralelo a $\vec{d}_r$ y a $\vec{d}_s$. Luego, un vector normal al plano será:

$(1, 2, 1) \times (-5, 4, 3) = (2, -8, 14) \;\rightarrow\; \vec{n}(1, -4, 7)$

La ecuación del plano es: $1(x-2)-4(y+3)+7(z-1)=0$

$x-4y+7z-21=0$

54 S **Dadas la rectas** $r: \begin{cases} x-3y+6=0 \\ ax-3z+3=0 \end{cases}$ **y** $s: \begin{cases} x-2ay+4a-1=0 \\ 2y-z-4=0 \end{cases}$ **:**

a) Averigua si existe algún valor de a para el cual las rectas están contenidas en un plano. En caso afirmativo, calcula la ecuación de dicho plano.

b) Determina, cuando sea posible, los valores de a para los cuales las rectas son paralelas y los valores de a para los que las rectas se cruzan.

a) Obtenemos un vector dirección de cada una de las rectas:

$\vec{d}_r$: $(1, -3, 0) \times (a, 0, -3) = (9, 3, 3a) \,//\, (3, 1, a) = \vec{d}_r$

$\vec{d}_s$: $(1, -2a, 0) \times (0, 2, -1) = (2a, 1, 2) = \vec{d}_s$

Las coordenadas de los dos vectores no son proporcionales para ningún valor de a; por tanto, las rectas no son paralelas ni coincidentes. Para que estén en un mismo plano, se han de cortar en un punto.

Obtenemos un punto de cada una de las rectas:

r: $x=0 \;\rightarrow\; y=2,\; z=1 \;\rightarrow\; P(0, 2, 1)$

s: $y=0 \;\rightarrow\; z=-4,\; x=1-4a \;\rightarrow\; P'(1-4a, 0, -4)$

$\vec{PP'}(1-4a, -2, -5)$

Para que las rectas se corten, los vectores $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ y $\vec{PP'}$ han de ser coplanarios:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & a \\ 2a & 1 & 2 \\ 1-4a & -2 & -5 \end{vmatrix} = a-1=0 \;\rightarrow\; a=1$$

Si $a=1$, las rectas son secantes, y, por tanto, están contenidas en un plano.

El plano será paralelo a (3, 1, 1) y a (2, 1, 2). Un vector normal al plano será:

$\vec{n} = (3, 1, 1) \times (2, 1, 2) = (1, -4, 1)$.

Un punto del plano es, por ejemplo, $P(0, 2, 1)$. Así, la ecuación del plano es:

$1(x - 0) - 4(y - 2) + 1(z - 1) = 0$

$x - 4y + z + 7 = 0$

b) Por lo obtenido en el apartado anterior, sabemos que:

- No hay ningún valor de a para el que las rectas sean paralelas.
- Si $a \neq 1$, las rectas se cruzan.

CUESTIONES TEÓRICAS

55 Demuestra que la ecuación del plano que corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ y $C(0, 0, c)$ puede escribirse así:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

- Si sustituimos las coordenadas de los puntos A, B y C en la ecuación dada, vemos que la cumplen.
- Por otra parte, para ver los puntos de corte con los ejes de coordenadas del plano dado, hacemos lo siguiente:

— corte con el eje X $\rightarrow$ $y = z = 0$ $\rightarrow$ $x = a$ $\rightarrow$ $A(a, 0, 0)$

— corte con el eje Y $\rightarrow$ $x = z = 0$ $\rightarrow$ $y = b$ $\rightarrow$ $B(0, b, 0)$

— corte con el eje Z $\rightarrow$ $x = y = 0$ $\rightarrow$ $z = c$ $\rightarrow$ $C(0, 0, c)$

56 Un plano queda determinado por un punto A y dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. ¿Qué condición tienen que cumplir $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para determinar un plano?

Tener distinta dirección.

57 Explica cómo se obtienen las ecuaciones paramétricas de un plano del que se conoce la ecuación implícita. Aplícalo al plano $x + 2y - z - 1 = 0$.

Hacemos, por ejemplo, $y = \lambda$, $z = \mu$ y despejamos x.

En el caso del plano $x + 2y - z - 1 = 0$, quedaría: $x = 1 - 2y + z$; es decir:

$$\left.\begin{cases} x = 1 - 2\lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}\right.$$ son sus ecuaciones paramétricas.

Página 179

58 **¿Cuáles son las ecuaciones implícitas de la recta $\dfrac{x-4}{0} = \dfrac{y+3}{0} = \dfrac{z-1}{2}$?**

$$\begin{cases} x - 4 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$$

59 **¿Qué posición relativa deben tener dos rectas para que determinen un plano?**

Paralelas o secantes.

60 **Sean π_1 y π_2 dos planos paralelos y r_1 y r_2 dos rectas contenidas en π_1 y π_2, respectivamente. ¿Podemos asegurar que r_1 y r_2 son paralelas?**

No. Pueden ser paralelas o cruzarse.

61 **Las rectas r y s se cruzan. Si hallamos el plano que contiene a r y es paralelo a s, y el plano que contiene a s y es paralelo a r, ¿cómo son entre sí esos planos?**

Paralelos.

62 **Sean $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ dos puntos del plano $ax + by + cz + d = 0$. Prueba que el vector $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular al vector $\vec{n}(a, b, c)$.**

Sustituye las coordenadas de A y de B en la ecuación del plano y resta las igualdades que obtienes.

$$\left.\begin{array}{l} A \in \pi \quad \rightarrow \quad ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ B \in \pi \quad \rightarrow \quad ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \end{array}\right\}$$

Restando, obtenemos:

$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0$; es decir:

$(a, b, c) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

Por tanto, $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular a $\vec{n}$.

63 **Dados una recta $r: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ y un plano $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$, ¿qué significa geométricamente que el sistema que se obtiene juntando las ecuaciones de la recta y el plano sea incompatible? ¿Y si es compatible indeterminado?**

Si el sistema es incompatible, significa que la recta y el plano son paralelos. Si es compatible indeterminado, significa que la recta está contenida en el plano.

64 **Indica qué condición deben cumplir a, b, c y d para que el plano $ax + by + cz + d = 0$ sea:**

a) Paralelo al plano *OXY*.

b) Perpendicular al plano *OXY*.

c) Paralelo al eje *Z*.

d) No sea paralelo a ninguno de los ejes.

a) $a = b = 0, \ c \neq 0, \ d \neq 0$

b) $c = 0$

c) $c = 0, \ d \neq 0$

d) $a \neq 0, \ b \neq 0, \ c \neq 0$

PARA PROFUNDIZAR

65 **Dados el plano $\pi: ax + y + z + 1 = 0$ y las rectas:**

$$r_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 2 \\ y = 2z \end{cases} \qquad r_3: \begin{cases} x = 3 \\ y = 3z \end{cases}$$

Calcula el valor de a para que los puntos de corte del plano con cada una de las rectas estén alineados.

Halla, en función de a, los puntos de corte P, Q y R. Expresa después la dependencia lineal entre los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$.

Hallamos los puntos de corte del plano con cada una de las tres rectas:

π con r_1: $\quad a + 2z + 1 = 0 \ \rightarrow \ z = \dfrac{-1-a}{2}$

$$P\left(1, \frac{-1-a}{2}, \frac{-1-a}{2}\right)$$

π con r_2: $\quad 2a + 3z + 1 = 0 \ \rightarrow \ z = \dfrac{-1-2a}{3}$

$$Q\left(2, \frac{-2-4a}{3}, \frac{-1-2a}{3}\right)$$

π con r_3: $\quad 3a + 4z + 1 = 0 \ \rightarrow \ z = \dfrac{-1-3a}{4}$

$$R\left(3, \frac{-3-9a}{4}, \frac{-1-3a}{4}\right)$$

Los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$ han de tener sus coordenadas proporcionales:

$$\overrightarrow{PQ}\left(1, \frac{-1-5a}{6}, \frac{1-a}{6}\right); \ \overrightarrow{QR}\left(1, \frac{-1-11a}{12}, \frac{1-a}{12}\right)$$

$$\frac{-1-5a}{6} = \frac{-1-11a}{12} \quad \to \quad -2-10a = -1-11a \quad \to \quad a = 1$$

$$\frac{1-a}{6} = \frac{1-a}{12} \quad \to \quad a = 1$$

Por tanto, $a = 1$.

66 **Halla la ecuación de la recta que pasa por $A(1, 1, 1)$, es paralela al plano π: $x - y + z - 3 = 0$ y corta la recta s: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$**

- Como corta a s, pasará por el punto $P(1, 3, K)$ para cierto valor de K.
- Como pasa por $A(1, 1, 1)$ y por $P(1, 3, K)$, un vector dirección es: $\overrightarrow{AP}(0, 2, K-1)$.
- Como ha de ser paralelo al plano π, será perpendicular al vector normal de π, $\vec{n}(1, -1, 1)$. Por tanto:

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = -2 + K - 1 = 0 \quad \to \quad K = 3, \text{ es decir: } \overrightarrow{AP}(0, 2, 2) \,//\, (0, 1, 1)$$

- Las ecuaciones de la recta son:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

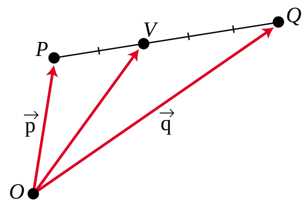
PARA PENSAR UN POCO MÁS

67 **Puntos interiores en un segmento**

Dividimos el segmento PQ en cinco partes iguales y situamos el punto V a dos unidades de P y tres de Q. ¿Cuáles son las coordenadas de V? Para hallarlas procedemos así.

Llamamos $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$

$$\overrightarrow{OV} = \vec{p} + \frac{2}{5}\overrightarrow{PQ} = \vec{p} + \frac{2}{5}(\vec{q} - \vec{p}) = \frac{3}{5}\vec{p} + \frac{2}{5}\vec{q}$$



a) Si $P(4, -1, 8)$ y $Q(-1, 9, 8)$, halla las coordenadas de V.

b) Obtén las coordenadas de un punto W situado en el segmento PQ del siguiente modo: se divide el segmento en 7 partes iguales y situamos W a 2 de P. Aplícalo a $P(2, 11, -15)$, $Q(9, -3, 6)$.

c) Demuestra que si dividimos el segmento PQ en $m + n$ partes y situamos X a m unidades de P, las coordenadas de X son:

$$\frac{n}{m+n}\vec{p} + \frac{m}{m+n}\vec{q}$$

d) Demuestra que si $0 \le \alpha < 1$, entonces $(1 - \alpha)\vec{p} + \alpha\vec{q}$ es un punto de $\overline{PQ}$.

a) $V = \frac{3}{5}(4, -1, 8) + \frac{2}{5}(-1, 9, 8) = (2, 3, 8)$

b) Razonando como en el caso anterior, llegamos a:

$$\vec{OW} = \vec{p} + \frac{2}{7}\vec{PQ} = \vec{p} + \frac{2}{7}(\vec{q} - \vec{p}) = \frac{5}{7}\vec{p} + \frac{2}{7}\vec{q}$$

Si consideramos el caso $P(2, 11, -15)$ y $Q(9, -3, 6)$, entonces:

$$W = \frac{5}{7}(2, 11, -15) + \frac{2}{7}(9, -3, 6) = (4, 7, -9)$$

c) Razonando como en los casos anteriores, tenemos que:

$$\vec{OX} = \vec{p} + \frac{m}{m+n}\vec{PQ} = \vec{p} + \frac{m}{m+n}(\vec{q} - \vec{p}) =$$

$$= \left(1 - \frac{m}{m+n}\right)\vec{p} + \frac{m}{m+n}\vec{q} = \frac{n}{m+n}\vec{p} + \frac{m}{m+n}\vec{q}$$

d) Llamamos $d = |\vec{PQ}|$. Sea X un punto del segmento PQ que esté a una distancia αd de P y $(1 - \alpha)d$ de Q. (Como $0 \le \alpha < 1$, entonces $0 \le \alpha d < d$; luego X pertenece al segmento PQ).

Razonando como en los apartados anteriores, tenemos que las coordenadas de X son:

$$\frac{(1-\alpha)d}{d}\vec{p} + \frac{\alpha d}{d}\vec{q}, \text{ es decir, } (1-\alpha)\vec{p} + \alpha\vec{q}$$

Por tanto, este punto (que es X) es un punto del segmento PQ.