11 DISTRIBUCIONES DE VARIABLE CONTINUA

Página 256

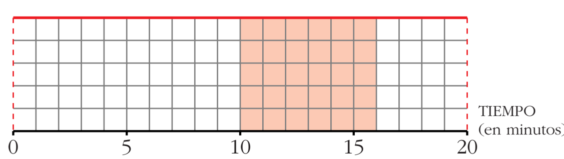
PARA EMPEZAR, REFLEXIONA Y RESUELVE

Problema 1

Los trenes de una cierta línea de cercanías pasan cada 20 minutos. Cuando llegamos a la estación, ignoramos cuándo pasó el último.

La medida de la probabilidad del tiempo que tendremos que esperar a que pase el siguiente tren (TIEMPO DE ESPERA) se obtiene con la ayuda de la gráfica adjunta.

Observa que bajo ella hay 100 cuadritos.



- **Procediendo de forma similar, halla las siguientes probabilidades e interpreta lo que significan:**

a) $P[x \le 2]$ **b)** $P[5 \le x \le 10]$

c) $P[x \le 10]$ **d)** $P[5 \le x \le 6]$

a) $P[x \le 2] = \frac{10}{100} = 0{,}10$

La probabilidad de tener que esperar menos de 2 minutos es 0,10 (del 10%).

b) $P[5 \le x \le 10] = \frac{25}{100} = 0{,}25$

La probabilidad de tener que esperar entre 5 y 10 minutos es del 25%.

c) $P[x \le 10] = \frac{50}{100} = 0{,}50$

La probabilidad de tener que esperar menos de 10 minutos es del 50%.

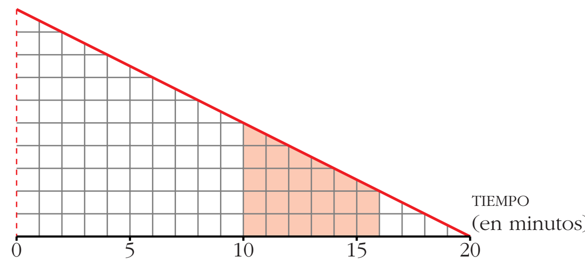
d) $P[5 \le x \le 6] = \frac{5}{100} = 0{,}05$

La probabilidad de tener que esperar entre 5 y 6 minutos es del 5%.

Problema 2

El autobús que nos lleva al trabajo es un tanto impuntual. Debe pasar a las 8, pero puede retrasarse hasta 20 minutos. Sin embargo, es más probable que llegue cerca de las 8 h que cerca de las 8 h y 20 min.

***Si llegamos a la parada a las 8 en punto, la gráfica adjunta nos ayuda a calcular la probabilidad del* TIEMPO DE ESPERA.**



■ **Halla e interpreta estas probabilidades:**

a) $P[x \le 2]$ **b)** $P[5 \le x \le 10]$

c) $P[x \le 10]$ **d)** $P[5 \le x \le 6]$

En total hay 100 cuadritos (el área total es 100). Así:

a) $P[x \le 2] = \dfrac{(10 + 9)/2 \cdot 2}{100} = 0{,}19$

La probabilidad de que tengamos que esperar menos de 2 minutos es del 19%.

b) $P[5 \le x \le 10] = \dfrac{(7{,}5 + 5)/2 \cdot 5}{100} = 0{,}3125$

La probabilidad de que tengamos que esperar entre 5 y 10 minutos es del 31,25%.

c) $P[x \le 10] = \dfrac{(10 + 5)/2 \cdot 10}{100} = 0{,}75$

La probabilidad de que tengamos que esperar menos de 10 minutos es del 75%.

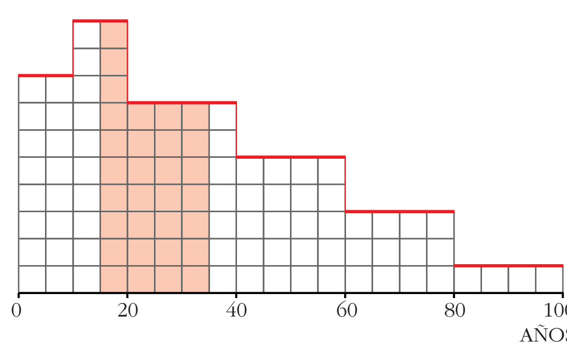
d) $P[5 \le x \le 6] = \dfrac{(7{,}5 + 7)/2 \cdot 1}{100} = 0{,}0725$

La probabilidad de que tengamos que esperar entre 5 y 6 minutos es del 7,25%.

Página 257

Problema 3

Las edades de los habitantes de una población se distribuyen según la gráfica adjunta (comprueba que bajo esta gráfica también hay, exactamente, 100 cuadraditos).



■ **Halla las siguientes probabilidades e interpreta lo que significan:**

a) $P[x \le 15]$ **b)** $P[45 \le x \le 65]$

c) $P[x \le 80]$ **d)** $P[25 \le x \le 70]$

Contamos los cuadritos que hay en el intervalo y dividimos por el número total de cuadritos (que es 100). Así:

a) $P[x \le 15] = \dfrac{26}{100} = 0{,}26$

La probabilidad de que un habitante, elegido al azar en esa población, tenga menos de 15 años es del 26%.

b) $P[45 \le x \le 65] = \dfrac{18}{100} = 0{,}18$

La probabilidad de que tenga entre 45 y 65 años es del 18%.

c) $P[x \le 80] = \dfrac{96}{100} = 0{,}96$

La probabilidad de que tenga menos de 80 años es del 96%.

d) $P[25 \le x \le 70] = \dfrac{47}{100} = 0{,}47$

La probabilidad de que tenga entre 25 y 70 años es del 47%.

Página 259

1. Calcula k para que $f(x) = \begin{cases} k, & x \in [3, 8] \\ 0, & x \notin [3, 8] \end{cases}$ sea una función de densidad.

Halla las probabilidades:

a) $P[4 < x < 6]$ **b)** $P[2 < x \le 5]$

c) $P[x = 6]$ **d)** $P[5 < x \le 10]$

Como el área bajo la curva ha de ser igual a 1, tenemos que:

$P[-\infty < x < +\infty] = P[3 \le x \le 8] = 5k = 1 \quad \rightarrow \quad k = \dfrac{1}{5}$

a) $P[4 < x < 6] = (6 - 4) \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{5}$

b) $P[2 < x \le 5] = P[3 \le x \le 5] = (5 - 3) \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{5}$

c) $P[x = 6] = 0$

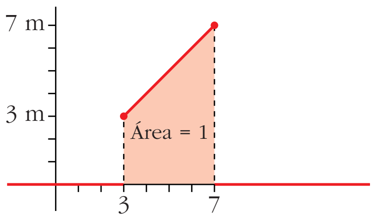
d) $P[5 < x \le 10] = P[5 \le x \le 8] = (8 - 5) \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{5}$

2. **Calcula m para que $f(x) = \begin{cases} mx, & x \in [3, 7] \\ 0, & x \notin [3, 7] \end{cases}$ sea una función de densidad.**

Halla las probabilidades:

a) $P[3 < x < 5]$ **b) $P[5 \le x < 7]$**

c) $P[4 \le x \le 6]$ **d) $P[6 \le x < 11]$**



El área bajo la curva (área del trapecio señalado) ha de ser igual a 1:

$$P[-\infty < x < +\infty] = P[3 \le x \le 7] = \frac{(7m + 3m) \cdot 4}{5} =$$

$$= 20m = 1 \quad \rightarrow \quad m = \frac{1}{20}$$

a) $P[3 < x < 5] = \dfrac{(5/20 + 3/20) \cdot 2}{2} = \dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5}$

b) $P[5 \le x < 7] = \dfrac{(7/20 + 5/20) \cdot 2}{2} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}$

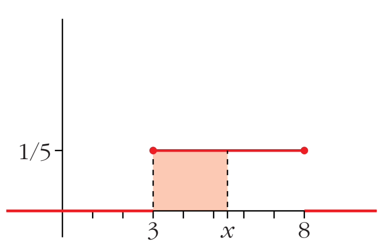
c) $P[4 \le x \le 6] = \dfrac{(6/20 + 4/20) \cdot 2}{2} = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2}$

d) $P[6 \le x < 11] = P[6 \le x \le 7] = \dfrac{(7/20 + 6/20) \cdot 1}{2} = \dfrac{13}{40}$

Página 260

3. **Halla la función de distribución de la v. a. cuya función de densidad es:**

$$f(x) = \begin{cases} 1/5, & x \in [3, 8] \\ 0, & x \notin [3, 8] \end{cases}$$



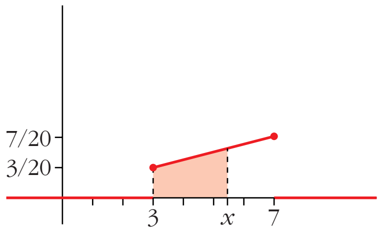
$$P[t \le x] = (x - 3) \cdot \frac{1}{5} = \frac{x - 3}{5}$$

La función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad x \le 3 \\ \dfrac{x-3}{5} \quad \text{si} \quad 3 \le x \le 8 \\ 1 \quad \text{si} \quad x \ge 8 \end{cases}$$

4. Halla la función de distribución de la v. a. cuya función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} x/20, & x \in [3, 7] \\ 0, & x \notin [3, 7] \end{cases}$$



$$P[t \le x] = \frac{(x/20 + 3/20) \cdot (x - 3)}{2} =$$

$$= \frac{(x + 3)(x - 3)}{40} = \frac{x^2 - 9}{40}$$

La función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \le 3 \\ \dfrac{x^2 - 9}{40} \text{ si } 3 \le x \le 7 \\ 1 \text{ si } x \ge 7 \end{cases}$$

Página 262

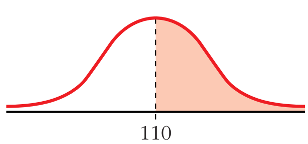
1. En una distribución $N(110, 10)$, calcula:

a) $P[x > 110]$ **b)** $P[110 < x < 120]$ **c)** $P[110 < x < 130]$

d) $P[120 < x < 130]$ **e)** $P[90 < x < 100]$ **f)** $P[90 < x < 120]$

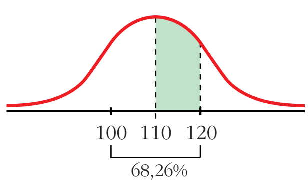
g) $P[x < 100]$

a)



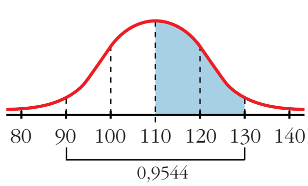
$P[x > 110] = 0{,}5$

b)



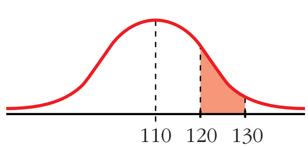
$$P[110 < x < 120] = \frac{0{,}6826}{2} = 0{,}3413$$

c)



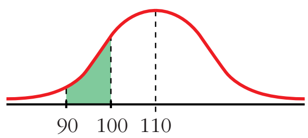
$$P[110 < x < 130] = \frac{0{,}9544}{2} = 0{,}4772$$

d)



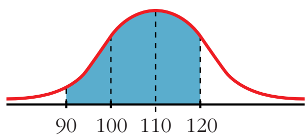
$0{,}9544 - 0{,}6826 = 0{,}2718$

$$P[120 < x < 130] = \frac{0{,}2718}{2} = 0{,}1359$$

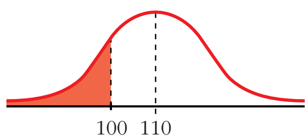
e) 

Por simetría, igual que el anterior:

$P[90 < x < 100] = 0{,}1359$

f) 

$P[90 < x < 120] = 0{,}6826 + 0{,}1359 = 0{,}8185$

g) 

$P[x < 100] = \dfrac{1 - 0{,}6826}{2} = 0{,}1587$

Página 263

1. Calcula las probabilidades de los apartados a), b) y c) del ejercicio resuelto anterior. Estima el valor aproximado de las probabilidades d), e) y f) del mismo ejercicio.

a) $P[x > \mu] = 0{,}5$

b) $P[\mu < x < \mu + 2\sigma] = 0{,}4772$

c) $P[x < \mu - \sigma] = 0{,}1587$

d) $P[x < \mu + 0{,}5\sigma] = 0{,}6915$

e) $P[x > \mu + 1{,}75\sigma] = 0{,}0401$

f) $P[x + 0{,}5\sigma < x < \mu + 1{,}75\sigma] = 0{,}2684$

Página 264

2. Halla las siguientes probabilidades:

a) $P[z \le 0{,}84]$	**b) $P[z < 1{,}5]$**	**c) $P[z < 2]$**	**d) $P[z < 1{,}87]$**
e) $P[z < 2{,}35]$	**f) $P[z \le 0]$**	**g) $P[z < 4]$**	**h) $P[z = 1]$**

Mirando directamente la tabla, obtenemos:

a) 0,7996	b) 0,9332	c) 0,9772	d) 0,9693
e) 0,9906	f) 0,5000	g) 1	h) 0

3. Di el valor de *k* en cada caso:

a) $P[z \le k] = 0{,}7019$	**b) $P[z < k] = 0{,}8997$**
c) $P[z \le k] = 0{,}5040$	**d) $P[z < k] = 0{,}7054$**

a) $k = 0{,}53$	b) $k = 1{,}28$
c) $k = 0{,}01$	d) $k = 0{,}54$

4. **Di el valor aproximado de k en cada caso:**

a) $P[z < k] = 0{,}9533$ **b)** $P[z \leq k] = 0{,}62$

a) $k \approx 1{,}68$ b) $k \approx 0{,}305$

Página 265

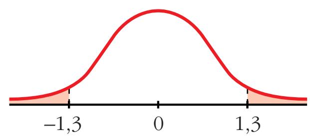
5. **Halla:** **a)** $P[z > 1{,}3]$ **b)** $P[z < -1{,}3]$

c) $P[z > -1{,}3]$ **d)** $P[1{,}3 < z < 1{,}96]$

e) $P[-1{,}96 < z < -1{,}3]$ **f)** $P[-1{,}3 < z < 1{,}96]$ **g)** $P[-1{,}96 < z < 1{,}96]$

a) $P[z > 1{,}3] = 1 - P[z < 1{,}3] = 1 - 0{,}9032 = 0{,}0968$

b) $P[z < -1{,}3] = 0{,}0968$



c) $P[z > -1{,}3] = 1 - 0{,}0968 = 0{,}9032$

d) $P[1{,}3 < z < 1{,}96] = 0{,}9750 - 0{,}9032 = 0{,}0718$

e) $P[-1{,}96 < z < -1{,}3] = 0{,}0718$

f) $P[-1{,}3 < z < 1{,}96] = 0{,}9750 - (1 - 0{,}9032) = 0{,}8782$

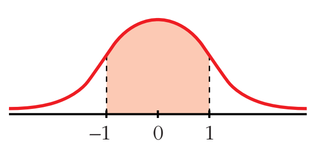
g) $P[-1{,}96 < z < 1{,}96] = 0{,}95$

6. **Halla, a partir de la tabla, las siguientes probabilidades:**

a) $P[-1 \leq z \leq 1]$ **b)** $P[-2 \leq z \leq 2]$

c) $P[-3 \leq z \leq 3]$ **d)** $P[-4 \leq z \leq 4]$

a) $P[-1 \leq z \leq 1] = 2(P[z \leq 1] - 0{,}5) = 0{,}6826$



b) $P[-2 \leq z \leq 2] = 2(P[z \leq 2] - 0{,}5) = 0{,}9544$

c) $P[-3 \leq z \leq 3] = 0{,}9974$

d) $P[-4 \leq z \leq 4] = 1$

Página 266

7. **En una distribución $N(173, 6)$, halla las siguientes probabilidades:**

a) $P[x \leq 173]$ **b)** $P[x \geq 180{,}5]$ **c)** $P[174 \leq x \leq 180{,}5]$

d) $P[161 \leq x \leq 180{,}5]$ **e)** $P[161 \leq x \leq 170]$ **f)** $P[x = 174]$

g) $P[x > 191]$ **h)** $P[x < 155]$

a) $P[x \leq 173] = 0,5$

b) $P[x \geq 180,5] = P\left[z \geq \dfrac{180,5 - 173}{6}\right] = P[z \geq 1,25] = 1 - 0,8944 = 0,1056$

c) $P[174 \leq x \leq 180,5] = P[0,17 \leq z \leq 1,25] = 0,3269$

d) $P[161 \leq x \leq 180,5] = P[-2 \leq z \leq 1,25] = 0,8716$

e) $P[161 \leq x \leq 170] = P[-2 \leq z \leq -0,5] = 0,2857$

f) $P[x = 174] = P[z = 0,1667] = 0$

g) $P[x > 191] = P[z > 3] = 1 - \phi(3) = 1 - 0,9987 = 0,0013$

h) $P[x < 155] = P[z < -3] = 1 - \phi(3) = 0,0013$

Página 267

1. Calcula las probabilidades de las siguientes distribuciones binomiales mediante aproximación a la normal correspondiente (en todas ellas, ten en cuenta el ajuste de media unidad que hay que hacer al pasar de una variable discreta a una continua).

a) x es $B(100; 0,1)$. Calcula $P[x = 10]$, $P[x < 2]$ y $P[5 < x < 15]$

b) x es $B(1\,000; 0,02)$. Calcula $P[x > 30]$ y $P[x < 80]$

c) x es $B(50; 0,9)$. Calcula $P[x > 45]$ y $P[x \leq 30]$

a) x es $B(100; 0,1) \approx x'$ es $N(10; 3)$

$P[x = 10] = P[9,5 < x' < 10,5] = P[-0,17 < z < 0,17] = 0,135$

$P[x < 2] = P[x' \leq 1,5] = P[z \leq -2,83] = 0,0023$

$P[5 < x < 15] = P[5,5 \leq x' \leq 14,5] = P[-1,5 \leq z \leq 1,5] = 0,8664$

b) x es $B(1\,000; 0,02) \approx x'$ es $N(20; 4,427)$

$P[x > 30] = P[x' \geq 30,5] = P[z \geq 2,37] = 0,0089$

$P[x < 80] = P[x' \leq 79,5] = P[z \leq 13,44] = 1$

c) x es $B(50; 0,9) = x'$ es $N(45; 2,12)$

$P[x > 45] = P[x' \geq 45,5] = P[z \geq 0,24] = 0,4052$

$P[x \leq 30] = P[x' \leq 30,5] = P[z \leq -6,83] = 0$

Página 270

1. La tabla adjunta corresponde a las estaturas de 1 400 chicas. Estudia si es aceptable considerar que provienen de una distribución normal.

x_i	141	146	151	156	161	166	171	176	181
f_i	2	25	146	327	428	314	124	29	5

Los parámetros de la distribución estadística son $\bar{x} = 160,9$; $\sigma = 6,43$.

Formamos la siguiente tabla:

EXTREMOS INTERVALOS x_k	EXTREMOS TIPIFICADOS z_k	$P[z \le z_k]$	$p_k = P[z_k \le z \le z_{k+1}]$	$1\,400 \cdot p_k$	NÚMEROS TEÓRICOS	NÚMEROS OBTENIDOS	|DIFER.|
138,5	–3,48	0,0003	0,0031	4,34	4	2	2
143,5	–2,71	0,0034	0,0234	32,76	33	25	8
148,5	–1,93	0,0268	0,0983	137,62	138	146	8
153,5	–1,15	0,1251	0,2306	322,84	323	327	4
158,5	–0,37	0,3557	0,3034	424,76	425	428	3
163,5	0,41	0,6591	0,2219	310,66	311	314	3
168,5	1,18	0,8810	0,0940	131,60	132	124	8
173,5	1,96	0,9750	0,0219	30,66	31	29	2
178,5	2,74	0,9969	0,0029	4,06	4	5	1
183,5	3,51	0,9998					

La mayor de las diferencias, 8, en comparación con el total, 1 400, es suficientemente pequeña como para aceptar que la muestra procede de una distribución normal y que las diferencias son atribuibles al azar.

Página 274

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Manejo de la tabla $N(0, 1)$

1 **En una distribución $N(0, 1)$, calcula las siguientes probabilidades:**

a) $P[z = 2]$ **b) $P[z \le 2]$** **c) $P[z \ge 2]$**

d) $P[z \le -2]$ **e) $P[z \ge -2]$** **f) $P[-2 \le z \le 2]$**

a) $P[z = 2] = 0$

b) $P[z \le 2] = 0,9772$

c) $P[z \ge 2] = 1 - 0,9792 = 0,0228$

d) $P[z \le -2] = 1 - 0,0228$

e) $P[z \ge -2] = 1 - 0,0228 = 0,9772$

f) $P[-2 \le z \le 2] = 2(P[z \le 2] - 0,5) = 0,9544$

2 **En una distribución $N(0, 1)$, calcula:**

a) $P[z \le 1,83]$ **b) $P[z \ge 0,27]$**

c) $P[z \le -0,78]$ **d) $P[z \ge 2,5]$**

a) $P[z \le 1,83] = 0,9664$ b) $P[z \ge 0,27] = 0,3935$

c) $P[z \le -0,78] = 0,2177$ d) $P[z \ge 2,5] = 0,0062$

3 **En una distribución $N(0, 1)$, calcula las siguientes probabilidades:**

a) $P[z = 1{,}6]$ **b) $P[-2{,}71 \le z \le -1{,}83]$**

c) $P[1{,}5 \le z \le 2{,}5]$ **d) $P[-1{,}87 \le z \le 1{,}25]$**

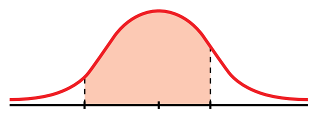
a) $P[z = 1{,}6] = 0$

b) $P[-2{,}71 \le z \le -1{,}83] = P[1{,}83 \le z \le 2{,}71] = P[z \le 2{,}71] - P[z \le 1{,}83] = 0{,}0302$

c) $P[1{,}5 \le z \le 2{,}5] = P[z \le 2{,}5] - P[z \le 1{,}5] = 0{,}0606$

d) $P[-1{,}87 \le z \le 1{,}25] = P[z \le 1{,}25] - P[z \le -1{,}87] = P[z \le 1{,}25] - P[z \ge 1{,}87] =$

$= P[z \le 1{,}25] - (1 - P[z < 1{,}87]) = 0{,}8637$



4 **Calcula k en cada uno de los siguientes casos:**

a) $P[z < k] = 0{,}8365$ **b) $P[z > k] = 0{,}8365$** **c) $P[z < k] = 0{,}1894$**

a) $k = 0{,}98$ b) $k = -0{,}98$ c) $k = -0{,}88$

Tipificación

5 **En un examen tipo test, la media fue 28 puntos, y la desviación típica, 10 puntos. Calcula la puntuación tipificada de los alumnos que obtuvieron:**

a) 38 puntos.

b) 14 puntos.

c) 45 puntos.

d) 10 puntos.

$\mu = 28; \quad \sigma = 10$

a) $\dfrac{38 - 28}{10} = 1$ b) $\dfrac{14 - 28}{10} = -1{,}4$

c) $\dfrac{45 - 28}{10} = 1{,}7$ d) $\dfrac{10 - 28}{10} = -1{,}8$

6 **Si en el mismo examen del problema anterior la puntuación tipificada de un alumno fue 0,8, ¿cuántos puntos obtuvo?**

¿Cuántos puntos corresponden a un valor tipificado de –0,2?

$0{,}8 \to 0{,}8 \cdot 10 + 28 = 36$

$-0{,}2 \to -0{,}2 \cdot 10 + 28 = 26$

7 **Las puntuaciones tipificadas de dos estudiantes fueron 0,8 y –0,4 y sus notas reales fueron 88 y 64 puntos.**

¿Cuál es la media y la desviación típica de las puntuaciones del examen?

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{88-\mu}{\sigma}=0{,}8\\[2ex]\dfrac{64-\mu}{\sigma}=-0{,}4\end{array}\right\}\begin{array}{l}88-\mu=0{,}88\sigma\\[2ex]64-\mu=-0{,}4\sigma\end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\[2ex]b\\[2ex]c\end{array}}\right\}88-0{,}8\sigma=64+0{,}4\sigma\ \rightarrow\ \sigma=20;\ \ \mu=72$$

La media es 72 y la desviación típica 20.

Cálculo de probabilidades en $N(\mu, \sigma)$

8 **En una distribución $N(43, 10)$, calcula las siguientes probabilidades:**

a) $P[x \geq 43]$ **b)** $P[x \leq 30]$

c) $P[40 \leq x \leq 55]$ **d)** $P[30 \leq x \leq 40]$

a) $P[x \geq 43] = 0{,}5$

b) $P[x \leq 30] = P\left[z \leq \dfrac{30-43}{10}\right] = P[z \leq -1{,}3] = 1 - 0{,}9032 = 0{,}0968$

c) $P[40 \leq x \leq 55] = P\left[\dfrac{40-43}{10} \leq z \leq \dfrac{55-43}{10}\right] = P[-0{,}3 \leq z \leq 1{,}2] = 0{,}5028$

d) $P[30 \leq x \leq 40] = P[-1{,}3 \leq z \leq -0{,}3] = P[0{,}3 \leq z \leq 1{,}3] = P[z \leq 1{,}3] - P[z \leq 0{,}3] =$

$= 0{,}9032 - 0{,}6179 = 0{,}2853$

9 **En una distribución $N(151, 15)$, calcula:**

a) $P[x \leq 136]$ **b)** $P[120 \leq x \leq 155]$

c) $P[x \geq 185]$ **d)** $P[140 \leq x \leq 160]$

a) $P[x \leq 136] = P\left[z \leq \dfrac{136-151}{15}\right] = P[z \leq -1] = P[z \geq 1] = 1 - P[z < 1] = 0{,}1587$

b) $P[120 \leq x \leq 155] = P[2{,}07 \leq z \leq 0{,}27] = 0{,}5873$

c) $P[x \geq 185] = P[z \geq 2{,}27] = 0{,}0116$

d) $P[140 \leq x \leq 160] = P[-0{,}73 \leq z \leq 0{,}6] = 0{,}5149$

10 **En una distribución $N(22, 5)$, calcula:**

a) $P[x \leq 27]$ **b)** $P[x \geq 27]$ **c)** $P[x \geq 12{,}5]$

d) $P[15 \leq x \leq 20]$ **e)** $P[17 \leq x \leq 30]$

a) $P[x \leq 27] = P[z \leq 1] = 0{,}8413$

b) $P[x \geq 27] = 0{,}1587$

c) $P[x \geq 12{,}5] = P[z \leq 1{,}9] = 0{,}9713$

d) $P[15 \leq x \leq 20] = P[-1{,}4 \leq z \leq -0{,}4] = 0{,}2638$

e) $P[17 \leq x \leq 30] = P[-1 \leq z \leq 1{,}6] = 0{,}7865$

11 **La talla media de los 200 alumnos de un centro escolar es de 165 cm y la desviación típica, 10 cm. Si las tallas se distribuyen normalmente, calcula la probabilidad de que un alumno elegido al azar mida más de 180 cm.**

¿Cuántos alumnos puede esperarse que midan más de 180 cm?

x es $N(165, 10)$; n = 200 alumnos

$$P[x > 180] = P\left[z > \frac{180 - 165}{10}\right] = P[z > 1{,}5] = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$$

$200 \cdot 0{,}0668 = 13{,}36 \approx 13$ alumnos

Página 275

12 **Los pesos de 2 000 soldados presentan una distribución normal de media 65 kg y desviación típica 8 kg. Calcula la probabilidad de que un soldado elegido al azar pese:**

a) Más de 61 kg **b) Entre 63 y 69 kg**

c) Menos de 70 kg **d) Más de 75 kg**

x es $N(65, 8)$

a) $P[x > 61] = P\left[z > \frac{61 - 65}{8}\right] = P[z > -0{,}5] = P[z < 0{,}5] = 0{,}6915$

b) $P[63 < x < 69] = P[-0{,}25 < z < 0{,}5] = 0{,}2902$

c) $P[x < 70] = P[z < 0{,}625] = 0{,}7357$

d) $P[x > 75] = P[z > 1{,}25] = 1 - P[z \le 1{,}25] = 0{,}1056$

13 **Para aprobar un examen de ingreso en una escuela, se necesita obtener 50 puntos o más. Por experiencia de años anteriores, sabemos que la distribución de puntos obtenidos por los alumnos es normal, con media 55 puntos y desviación típica 10.**

a) ¿Qué probabilidad hay de que un alumno apruebe?

b) Si se presentan al examen 400 alumnos, ¿cuántos cabe esperar que ingresen en esa escuela?

x es $N(55, 10)$

a) $P[x \ge 50] = P\left[z \ge \frac{50 - 55}{10}\right] = P[z \ge -0{,}5] = P[z \le 0{,}5] = 0{,}6915$

b) $400 \cdot 0{,}6915 = 276{,}6 \approx 277$ alumnos

14 **En una ciudad, las temperaturas máximas diarias durante el mes de julio se distribuyen normalmente con una media de 26 °C y una desviación típica de 4 °C. ¿Cuántos días se puede esperar que tengan una temperatura máxima comprendida entre 22 °C y 28 °C?**

x es $N(26, 4)$

$P[22 < x < 28] = P[-1 < z < 0{,}5] = 0{,}5328$

$0{,}5328 \cdot 31 = 16{,}52 \approx 17$ días

Binomial → Normal

15 **Si lanzamos un dado mil veces, ¿cuál es la probabilidad de que el número de cincos obtenidos sea menor que 100?**

x es $B(1\,000;\ 0,1667) \to x'$ es $N(166,67;\ 11,79)$

$P[x < 100] = P[x' \le 99,5] = P[z \le -5,70] = 0$

16 **Una moneda se lanza 400 veces. Calcula la probabilidad de que el número de caras:**

a) Sea mayor que 200.

b) Esté entre 180 y 220.

x es $B(400;\ 0,5) \to x'$ es $N(200,\ 10)$

a) $P[x > 200] = P[x' \ge 200,5] = P[z \ge 0,05] = 0,4801$

b) $P[180 < x < 220] = P[180,5 \le x' \le 219,5] = P[-1,95 \le z \le 1,95] = 0,9488$

17 **En un bombo de lotería tenemos 10 bolas idénticas numeradas del 0 al 9, y cada vez que hacemos la extracción de una bola la devolvemos al bombo.**

a) Si sacamos tres bolas, calcula la probabilidad de que el 0 salga una sola vez.

b) Si hacemos 100 extracciones, calcula la probabilidad de que el 0 salga más de 12 veces.

a) x es $B(3;\ 0,1)$

$P[x = 1] = 3 \cdot 0,1 \cdot 0,9^2 = 0,243$

b) x es $B(100;\ 0,1) \to x'$ es $N(10,\ 3)$

$P[x > 12] = P[x' \ge 12,5] = P[z \ge 0,83] = 0,2033$

PARA RESOLVER

18 **El tiempo necesario para que una ambulancia llegue a un centro deportivo se distribuye según una variable normal de media 17 minutos y desviación típica 3 minutos.**

Calcula la probabilidad de que el tiempo de llegada esté comprendido entre 13 minutos y 21 minutos.

x es $N(17,\ 3)$

$P[13 < x < 21] = P[-1,33 < z < 1,33] = 0,8164$

19 **En un estadio deportivo se quieren instalar focos para iluminar el campo de juego. El suministrador asegura que el tiempo de vida de los focos es, aproximadamente, normal con media de 1 500 horas y desviación típica de 200 horas.**

a) Escogiendo uno de los focos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que luzca por lo menos 1 000 horas?

b) Si se decide comprar 1 500 focos, ¿cuántos puede esperarse que luzcan por lo menos 1 000 horas?

x es $N(1\,500, 200)$

a) $P[x \geq 1\,000] = P[z \geq -2{,}5] = P[z \leq 2{,}5] = 0{,}9938$

b) $1\,500 \cdot 0{,}9938 = 1\,490{,}7 \approx 1\,491$ focos

20 **Justifica si pueden ser funciones de densidad las siguientes funciones:**

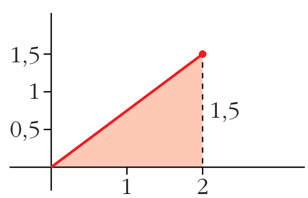
a) $f(x) = 0{,}5 + 0{,}5x, \quad x \in [0, 2]$

b) $f(x) = 0{,}5 - x, \quad x \in [0, 2]$

c) $f(x) = 1 - 0{,}5x, \quad x \in [0, 2]$

Veamos, en cada caso, si el área encerrada bajo la curva es 1:

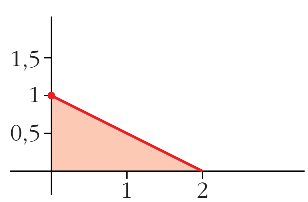
a)



$\text{Área} = \dfrac{1{,}5 \cdot 2}{2} = 1{,}5 \rightarrow$ No puede ser función de densidad

b) $f(2) = -1{,}5 < 0 \rightarrow$ No puede ser función de densidad, pues tendría que ser $f(x) \geq 0$

c)



$\left.\begin{array}{l} \text{Área} = \dfrac{1 \cdot 2}{2} = 1 \\ f(x) > 0 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sí puede ser función de densidad

21 **a) Calcula el valor de k para que la función sea una función de densidad.**

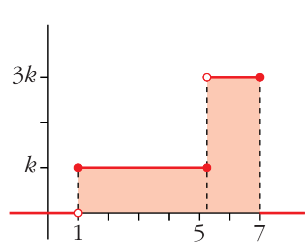
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ k, & 1 \leq x \leq 5 \\ 3k, & 5 < x \leq 7 \\ 0, & x > 7 \end{cases}$$

b) Halla las probabilidades:

$P[2 < x < 5]$ **y** $P[4 < x < 6]$

c) Obtén la expresión de la función de distribución.

a)



El área bajo la curva debe ser 1:

$\text{Área} = 4k + 2 \cdot 3k = 4k + 6k = 10k = 1 \rightarrow k = \dfrac{1}{10}$

b) $P[2 < x < 5] = (5 - 2) \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{10} = 0{,}3$.

$P[4 < x < 6] = P[4 < x < 5] + P[5 < x < 6] = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0{,}4$.

c) Si $x \le 1 \;\rightarrow\; F(x) = 0$

Si $1 \le x \le 5 \;\rightarrow\; F(x) = (x - 1) \cdot \frac{1}{10} = \frac{x - 1}{10}$

Si $5 \le x \le 7 \;\rightarrow\; F(x) = \frac{4}{10} + (x - 5) \cdot \frac{3}{10} = \frac{4 + 3x - 15}{10} = \frac{3x - 11}{10}$

Si $x \ge 7 \;\rightarrow\; F(x) = 1$

Por tanto:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{x - 1}{10} \quad \text{si} \quad 1 \le x \le 5 \\ \dfrac{3x - 11}{10} \quad \text{si} \quad 5 \le x \le 7 \\ 1 \quad \text{si} \quad x \ge 7 \end{cases}$$

Página 276

22 **El número de visitantes que diariamente acuden a una exposición se distribuye según una normal $N(2\,000,\ 250)$.**

a) Halla la probabilidad de que un día determinado el número de visitantes no supere los 2 100.

b) Calcula la probabilidad de que un día cualquiera los visitantes sean más de 1 500.

c) En un mes de treinta días, ¿en cuántos días cabe esperar que el número de visitantes supere los 2 210?

$x \sim N(2\,000,\ 250) \;\rightarrow\; z \sim N(0,\ 1)$

a) $P[x \le 2\,100] = P[z \le 0{,}4] = 0{,}6554$

b) $P[x \ge 1\,500] = P[z \ge -2] = P[z \le 2] = 0{,}9772$

c) $P[x \ge 2\,210] = P[z \ge 0{,}84] = 0{,}2004$

$30 \cdot 0{,}2004 = 6{,}012 \;\rightarrow\;$ 6 días

23 **La duración de un tipo de pilas eléctricas sigue una distribución normal con media de 50 horas y desviación típica de 5 horas. Halla la probabilidad de que, eligiendo una pila al azar, dure entre 40 y 55 horas.**

x es $N(50,\ 5)$

$P[40 < x < 55] = P[-2 < z < 1] = 0{,}8185$

24 **La probabilidad de que una jugadora de golf haga hoyo en un lanzamiento a cierta distancia es 0,2.**

Si lanzara 1 000 veces y su capacidad de acierto se mantuviera, ¿qué probabilidad hay de que acierte más de 220 veces?

Se trata de una $B(1\,000;\ 0{,}2)$. La probabilidad la calculamos por aproximación normal:

$\mu = 1\,000 \cdot 0{,}2 = 200; \quad \sigma = \sqrt{1\,000 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 12{,}65$

x es $B(1\,000;\ 0{,}2) \rightarrow x'$ es $N(200;\ 12{,}65)$

$P[x > 220] = P[x' \geq 220{,}5] = P[z \geq 1{,}62] = 1 - 0{,}9474 = 0{,}0526$

25 **Una máquina produce tornillos. Sabemos por experiencia que el 4% de ellos son defectuosos. Se empaquetan automáticamente en cajas de 200 tornillos. Halla las siguientes probabilidades relativas al número de tornillos defectuosos en una caja tomada al azar:**

a) $\boldsymbol{x < 10}$ **b)** $\boldsymbol{x > 10}$ **c)** $\boldsymbol{x = 8}$

Se trata de una distribución binomial $B(n, p)$ donde $n = 200$ y $p = 0{,}002$.

Como $np > 3$ y $n(1 - p) > 3$, podemos aproximarla a una distancia normal.

$B(200;\ 0{,}02) \rightarrow N(4;\ 1{,}98)$

a) $P[x < 10] = P[x' < 9{,}5] = P\left[z < \dfrac{9{,}5 - 4}{1{,}98}\right] = P[z < 2{,}78] = 0{,}9973$

b) $P[x > 10] = P[x' > 10{,}5] = P\left[z > \dfrac{10{,}5 - 4}{1{,}98}\right] = P[z > 3{,}28] =$

$= 1 - P[z < 3{,}28] = 1 - 0{,}9995 = 0{,}0005$

c) $P[x = 8] = P[7{,}5 < x' < 8{,}5] = P\left[\dfrac{7{,}5 - 4}{1{,}98} < z < \dfrac{8{,}5 - 4}{1{,}98}\right] =$

$= P[1{,}77 < z < 2{,}27] = P[z < 2{,}27] - P[z > 1{,}77] =$

$= P[z < 2{,}27] - (1 - P[z < 1{,}77]) = 0{,}9884 - 1 + 0{,}9616 = 0{,}95$

26 **Un centro de enseñanza va a presentar, este curso, 240 alumnos al examen de selectividad y se sabe que, de ese centro, suele aprobar el 95% de los presentados. ¿Cuál es la probabilidad de que aprueben:**

a) más de 200,

b) más de 220,

c) más de 230,

d) más de 235 alumnos?

x es $B(240;\ 0{,}95) \rightarrow x'$ es $N(228;\ 3{,}38) \rightarrow z$ es $N(0, 1)$

a) $P[x > 200] = P[x' \geq 200{,}5] = P[z \geq -8{,}13] = 1$

b) $P[x > 220] = P[x' \geq 220{,}5] = P[z \geq -2{,}22] = 0{,}9868$

c) $P[x > 230] = P[x' \geq 230{,}5] = P[z \geq 0{,}74] = 0{,}2296$

d) $P[x > 235] = P[x' \geq 235{,}5] = P[z \geq 2{,}22] = 0{,}0132$

27 **Un examen tiene 38 preguntas del tipo Verdadero-Falso. El examen se aprueba si se contestan correctamente al menos 20 preguntas. Si se responde al azar, halla:**

a) La probabilidad de aprobar el examen.

b) La probabilidad de que el número de respuestas correctas esté entre 25 y 30.

x es $B(38;\ 0{,}5) \rightarrow x'$ es $N(19;\ 3{,}08)$

a) $P[x \geq 20] = P[x' \geq 19{,}5] = P[z \geq 0{,}16] = 0{,}4364$

b) $P[25 < x < 30] = P[25{,}5 \leq x' \leq 29{,}5] = P[2{,}11 \leq x' \leq 3{,}41] = 0{,}0171$

28 **En las últimas elecciones celebradas en un cierto país, la abstención fue del 25% del censo electoral.**

a) Si se seleccionan al azar tres individuos del censo, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno haya votado?

b) Si se toman al azar 100 miembros del censo, ¿cuál es la probabilidad de que se hayan abstenido al menos 30?

a) x es $B(3;\ 0{,}25)$

$P[x = 3] = 0{,}25^3 = 0{,}0156$

b) x es $B(100;\ 0{,}25) \rightarrow x'$ es $N(25;\ 4{,}33)$

$P[x \geq 30] = P[x' \geq 29{,}5] = P[z \geq 1{,}04] = 0{,}1492$

29 **Un examen tipo test tiene 50 preguntas y cada pregunta tres respuestas diferentes, solo una de las cuales es correcta. Para aprobar, hace falta responder correctamente a 25 preguntas; para un notable, 35; y para un sobresaliente, 45 respuestas.**

Un estudiante responde al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe? ¿Y la de que saque un notable? ¿Y un sobresaliente?

x es $B(50;\ 0{,}333) \rightarrow x'$ es $N(16{,}66;\ 3{,}33)$

$P[x \geq 25] = P[x' \geq 24{,}5] = P[z \geq 2{,}35] = 0{,}0094 \rightarrow$ probabilidad de aprobar

$P[x \geq 35] = P[x' \geq 34{,}5] = P[z \geq 5{,}36] = 0$

La probabilidad de sacar notable o sobresaliente es 0.

CUESTIONES TEÓRICAS

30 **¿Qué relación guardan dos curvas de la distribución normal que tienen la misma media y diferente desviación típica? ¿Y si tienen la misma desviación típica y diferente media?**

Si tienen la misma media, están centradas en el mismo valor de x; la que tenga de ellas la menor desviación típica es más "alargada".

Si tuvieran diferente media pero igual desviación típica, tendrían la misma forma, salvo que estarían centradas en distinto punto.

31 **Se sabe que las notas de un determinado examen siguen una distribución normal. El 15,87% tiene una nota superior a 7 puntos y el 15,87% una nota inferior a 5 puntos.**

a) ¿Cuál es la media del examen?

b) ¿Qué porcentaje de alumnos tiene una nota entre 6 y 7?

a) Si la proporción de personas que tienen nota superior a 7 es igual a la de las que tienen nota inferior a 5, la media es 6.

b) 50% – 15,87% = 34,13%

Página 277

32 **Se han lanzado dos dados 120 veces y se han anotado las sumas de los puntos obtenidos:**

SUMA	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
VECES	3	8	9	11	20	19	16	13	11	6	4

¿Se puede rechazar que esta distribución proviene de una normal?

Los resultados que se obtienen al lanzar dos dados y sumar sus puntuaciones son una distribución de variable discreta que, por supuesto, no es normal. Lo que se propone en este ejercicio es someter estos datos a la prueba de normalidad como si no supiéramos de dónde procede.

Sus parámetros son: media = 7,025; desviación típica = 2,43

EXTREMOS INTERVALOS x_k	EXTREMOS TIPIFICADOS z_k	$P[z \le z_k]$	$p_k = P[z_k \le z \le z_{k+1}]$	$120 \cdot p_k$	NÚMEROS TEÓRICOS	NÚMEROS OBTENIDOS	$\lvert$DIFER.$\rvert$
1,5	–2,27	0,0116	0,0198	2,376	2	3	1
2,5	–1,86	0,0314	0,0421	5,052	5	8	3
3,5	–1,45	0,0735	0,0757	9,084	9	9	0
4,5	–1,04	0,1492	0,1151	13,812	14	11	3
5,5	–0,63	0,2643	0,1486	17,832	18	20	2
6,5	–0,22	0,4129	0,1664	19,968	20	19	1
7,5	0,20	0,5793	0,1498	17,976	18	16	2
8,5	0,61	0,7291	0,1170	14,040	14	13	1
9,5	1,02	0,8461	0,0775	9,300	9	11	2
10,5	1,43	0,9236	0,0435	5,220	5	6	1
11,5	1,84	0,9671	0,0207	2,484	2	4	2
12,5	2,25	0,9878					

No se puede rechazar que esta muestra haya sido extraída de una distribución normal.

PARA PROFUNDIZAR

33 **En el proceso de fabricación de una pieza intervienen dos máquinas: la máquina A produce un taladro cilíndrico y la máquina B secciona las piezas con un grosor determinado. Ambos procesos son independientes.**

El diámetro del taladro producido por A, en milímetros, es $N(23; 0,5)$.

El grosor producido por B, en milímetros, es $N(11,5; 0,4)$.

a) Calcula qué porcentaje de piezas tienen un taladro comprendido entre 20,5 y 24 mm.

b) Encuentra el porcentaje de piezas que tienen un grosor entre 10,5 y 12,7 mm.

c) Suponiendo que solo son válidas las piezas cuyas medidas son las dadas en a) y b), calcula qué porcentaje de piezas aceptables se consiguen.

☛ ***Se supone que las medidas están dadas exactamente.***

a) $P[20,5 \le x \le 24] = P[-5 \le z \le 2] = 0,9772 \rightarrow 97,72\%$

b) $P[10,5 \le x \le 12,7] = P[-2,5 \le z \le 3] = 0,9925 \rightarrow 99,25\%$

c) $0,9772 \cdot 0,9925 = 0,9699 \rightarrow 96,99\%$

34 **Una vez corregido cierto examen, la calificación media fue 6,5 y la desviación típica 1,6. El profesor ha decidido que va a calificar con sobresaliente al 10% de la clase.**

¿Cuál es la nota mínima necesaria para obtener el sobresaliente?

$N(5,6; 1,6)$

$P[z \ge k] = 0,1 \rightarrow P[z \le k] = 0,9 \rightarrow k = 1,28$

$1,28 \cdot 1,6 + 6,5 = 8,548$. A partir de 8,5, aproximadamente.

35 **En un examen de Matemáticas la puntuación media fue 5,8 y la desviación típica 2,2. Suponiendo que las puntuaciones se distribuyen normalmente, calcula:**

a) La puntuación máxima del 10% más bajo de la clase.

b) La puntuación mínima del 10% superior de la clase.

$P[x \le -k] = 0,1 \rightarrow P[x \le k] = 0,9 \rightarrow k = 1,28$

a) $-1,28 \cdot 2,2 + 5,8 = 2,984 \approx 3$

b) $1,28 \cdot 2,2 + 5,8 = 8,616 \approx 8,6$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

36 **El siguiente problema no tiene nada que ver con distribuciones de probabilidad, pero es bonito y merece la pena pensar en él. Anímate a resolverlo.**

Tienes dos jarras, una con vino y la otra con agua, y un vaso vacío.

Llenamos el vaso con vino de la primera y lo vertemos en la jarra de agua. Una vez mezclado, se vuelve a llenar el vaso con mezcla de la segunda y se vierte en la primera.

— ¿Hay más vino en el agua que agua en el vino? ¿Es al contrario? ¿Hay, acaso, la misma cantidad de vino en el agua que de agua en el vino? ¿O depende de las cantidades de cada una que tuviéramos al principio?

Posiblemente razones mejor sobre este problema si, previamente, resuelves este otro:

Héctor es aficionado a los coches y tiene un gran montón de cromos de ellos.

Leticia es aficionada a las motos y tiene un gran montón de cromos de motos.

Un día Héctor, complaciente, le regala un puñado de sus cromos (40) a Leticia. Como son del mismo tamaño, ella los mezcla con los suyos. Más tarde se pelean y Héctor le pide que le devuelva sus cromos y Leticia, muy digna, cuenta 40 cromos cualesquiera y se los da. Él los mezcla con los suyos.

— ¿Hay más cromos de motos entre los coches de Héctor o más cromos de coches entre las motos de Leticia?

Empecemos analizando el caso de los cromos de Héctor y de Leticia:

- El número de cromos que se intercambian es 40 en los dos casos. Luego, después de los cambios, los dos tienen la misma cantidad de cromos que tenían en un principio.

  Los cromos de motos que tiene Héctor son los que le faltan a Leticia (y Leticia sigue teniendo el mismo número de cromos que tenía en un principio; luego los cromos que le faltan de motos ahora son de coches).

  Por tanto, el número de cromos de motos que hay entre los coches de Héctor es el mismo número de cromos de coches que hay entre las motos de Leticia.

- Algo semejante ocurre con el agua y el vino: al final del proceso, la cantidad de líquido que hay en las dos jarras es la misma que había en un principio. Luego, la cantidad de agua que hay ahora en la jarra de vino es la que falta de agua en la jarra de agua (que está sustituida por vino).

  Por tanto, hay la misma cantidad de vino en el agua que de agua en el vino.

Página 278

RESUELVE TÚ

Estimando la población española en 40 millones, ¿en cuántos de ellos, aproximadamente, se dará la circunstancia de que sus padres y alguno de sus cuatro abuelos cumplan años el 1 de enero? (Para simplificar la resolución, olvidemos la posibilidad de nacer el 29 de febrero.)

P[una persona nazca el 1 de enero] = $\dfrac{1}{365}$

P[padre y madre nazcan el 1 de enero] = $\left(\dfrac{1}{365}\right)^2 = 7{,}5 \cdot 10^{-6}$

P[ninguno de los cuatro abuelos nazca el 1 de enero] = $\left(\dfrac{364}{365}\right)^4 = 0{,}9891$

P[alguno de los cuatro abuelos nazca el 1 de enero] = $1 - 0{,}9891 = 0{,}0109 = 1{,}09 \cdot 10^{-2}$

Por tanto:

$$P[\text{los padres y uno de los abuelos nazca el 1 de enero}] =$$

$$= 7{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}09 \cdot 10^{-2} = 8{,}175 \cdot 10^{-8}$$

$$8{,}175 \cdot 10^{-8} \cdot 40\,000\,000 = 3{,}27$$

Es probable que en España haya 3 personas con esas circunstancias.