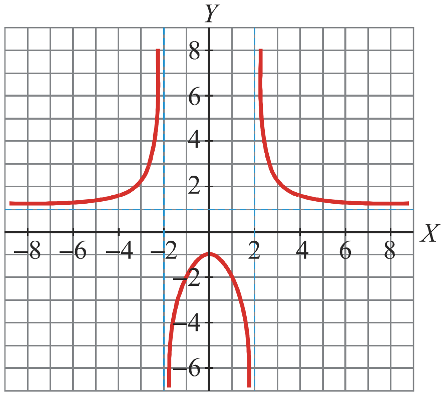
Ejercicio nº 1.-

Sobre la gráfica de *f(x),* halla :



a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

c) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

d) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

e) $\lim_{x\to 0} f(x)$

Solución:

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$

c) $\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$

d) $\lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

e) $\lim_{x\to 0} f(x)=-1$

Ejercicio nº 2.-

Representa gráficamente:

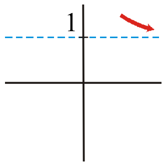
a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

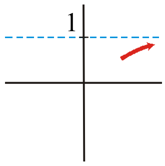
b) $\lim_{x\to-1} g(x)=0$

Solución:

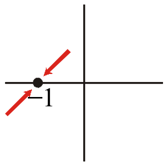
a)

o bien





b) Por ejemplo:



Ejercicio nº 3.-

Resuelve:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{4}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to -2} 3^{x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} tg\ x$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{4}\right)=-2+2=0$

b) $\lim\limits_{x\to -2} 3^{x+1}=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} tg\ x = tg\ \dfrac{\pi}{4}=1$

Ejercicio nº 4.-

Calcula el siguiente límite y estudia el comportamiento de la función por la izquierda y por la derecha de $x=0$:

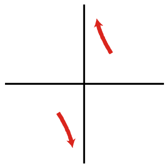
$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{x^2+2x}$$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{x^2+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{x(x+2)}$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{2x+1}{x^2+2x}=-\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{2x+1}{x^2+2x}=+\infty$$



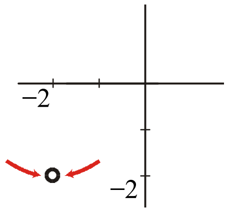
Ejercicio nº 5.-

Calcula el siguiente límite e interprétalo gráficamente:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{2x + 4}$$

Solución:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{2x + 4} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x-2)}{2(x+2)} = \lim_{x \to -2} \frac{x-2}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$



Ejercicio nº 6.-

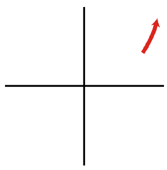
Halla los siguientes límites y representa gráficamente los resultados obtenidos:

a) $\lim_{x \to +\infty} (4 - x)^2$

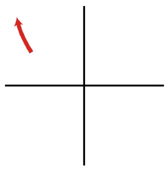
b) $\lim_{x \to -\infty} (4 - x)^2$

Solución:

a) $\lim_{x \to +\infty} (4 - x)^2 = +\infty$



b) $\lim_{x \to -\infty} (4 - x)^2 = +\infty$



Ejercicio nº 7.-

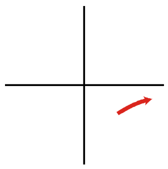
Resuelve los siguientes límites y representa los resultados obtenidos:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(1-x)^3}$

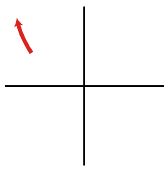
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3-x^3}{x^2}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(1-x)^3} = 0$

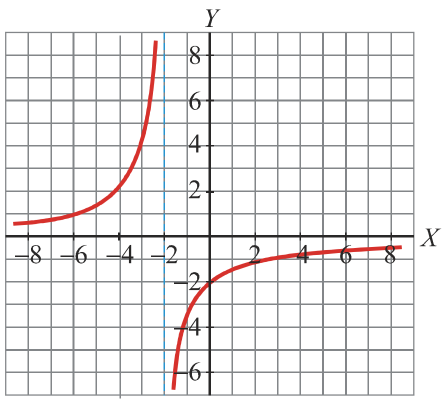


b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3-x^3}{x^2} = +\infty$



<u>Ejercicio nº 8.-</u>

Esta es la gráfica de la función $f(x)$:



a) ¿Es continua en $x = -2$?

b) ¿Y en $x = 0$?

Si no es continua en alguno de los puntos, indica la causa de la discontinuidad.

Solución:

a) No es continua en $x = -2$ porque no está definida, ni tiene límite finito en ese punto. Tiene una rama infinita en ese punto (una asíntota vertical).

b) Sí es continua en $x = 0$.

Ejercicio nº 9.-

Halla el valor de *k* para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ k & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (2x+1) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \ = k \\ f(1) = 3 \end{array}\right\}$$

Para que sea continua en $x = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$.

Ha de ser $k = 3$.

Ejercicio nº 10.-

Sea la función:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$$

Halla sus asíntotas verticales y sitúa la curva respecto a ellas.

Solución:

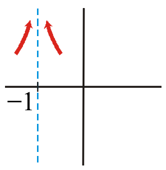
- $x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

  Solo tiene una asíntota vertical: $x = -1$

- Posición de la curva respecto a la asíntota:

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{(x+1)^2} = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$$



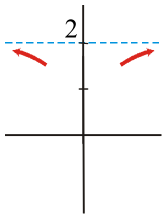
Ejercicio nº 11.-

Halla las ramas infinitas, cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, de la siguiente función y representa los resultados que obtengas:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1}$$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{x^2+1} = 2$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+1}{x^2+1} = 2$$



Con calculadora podemos comprobar que:

- Dando valores muy grandes y positivos $(x\to+\infty)$, la curva va por debajo de la asíntota $y=2$.
- Dando valores muy grandes y negativos $(x\to-\infty)$, la curva va por debajo de la asíntota $y=2$.

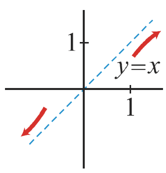
<u>Ejercicio nº 12.-</u>

Estudia y representa el comportamiento de la función cuando $x\to+\infty$ y cuando $x\to-\infty$. Si tiene alguna asíntota, representa la posición de la curva respecto a ella:

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$$

Solución:

- $\dfrac{x^3}{x^2+1} = x+\dfrac{-x}{x^2+1} \to$ Asíntota oblicua: $y=x$
- Cuando $x\to+\infty$, $\dfrac{-x}{x^2+1}<0 \to$ La curva está por debajo de la asíntota.
- Cuando $x\to-\infty$, $\dfrac{-x}{x^2+1}>0 \to$ La curva está por encima de la asíntota.
- Representación:



<u>Ejercicio nº 13.-</u>

Estudia la continuidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+2} & \text{si } x<-1\\ x^2-x & \text{si } -1\le x<2\\ 2 & \text{si } x\ge 2\end{cases}$$

Solución:

El primer tramo de función $y=\dfrac{1}{x+2}$ no está definido en $x=-2$, valor que pertenece a la semirrecta $x<-1$. Luego $f(x)$ es discontinua en $x=-2$.

En los otros dos tramos, hay una función cuadrática y una función constante, ambas continuas en todo $\mathbb{R}$. Estudiamos la continuidad de los puntos de ruptura:

- $x=-1$:

$$\left.\begin{array}{r}f(-1)=(-1)^2-(-1)=2\\ \lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{-1+2}=1\\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\left(x^2-x\right)=1+1=2\end{array}\right\}$$

No existe $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$, luego la función es discontinua en $x=-1$.

Se produce un salto en $x=-1$.

- $x=2$:

$$\left.\begin{array}{l}f(2)=2\\ \lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\left(x^2-x\right)=2\\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2} 2=2\end{array}\right\}\rightarrow \lim\limits_{x\to2} f(x)=f(2)=2$$

La función $f(x)$ es continua en $x=2$.

Luego $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ excepto en $x=-2$ y $x=-1$.