UNIDAD 1

SISTEMAS DE ECUACIONES. MÉTODO DE GAUSS

Página 30

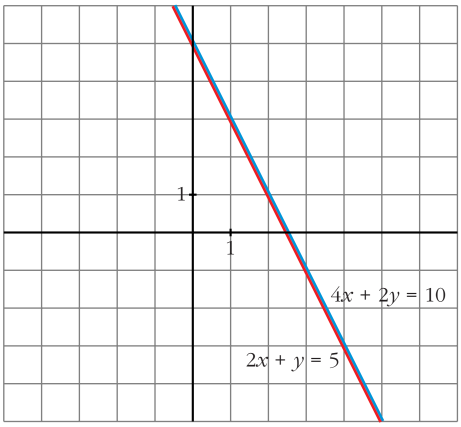
Ecuaciones y sistemas de ecuaciones con dos incógnitas

1. ¿Podemos decir que las dos ecuaciones siguientes son dos "datos distintos"? ¿No es cierto que la segunda dice lo mismo que la primera?

$$\begin{cases} 2x + \ \ y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$$

- **Represéntalas gráficamente y observa que se trata de la misma recta.**

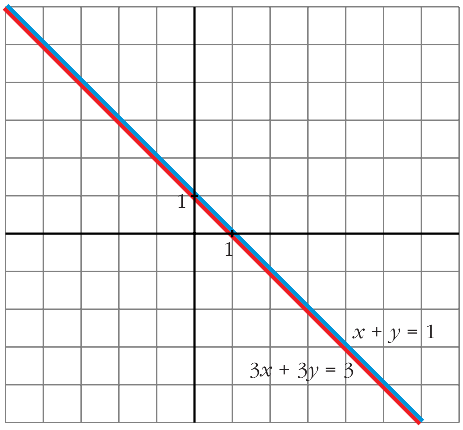
  Se trata de la misma recta.



- **Pon otro sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas en el que la segunda ecuación sea, en esencia, igual que la primera. Interprétalo gráficamente.**

$$\left.\begin{array}{r} x + \ \ y = 1 \\ 3x + 3y = 3 \end{array}\right\}$$

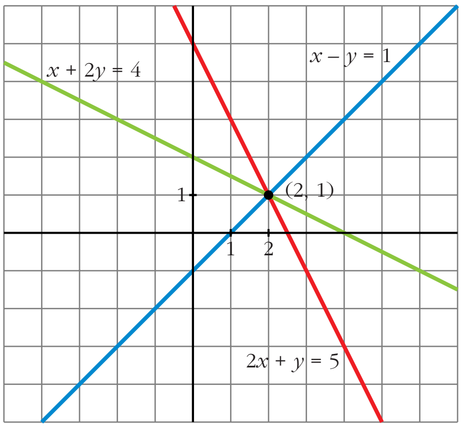
  Gráficamente son la misma recta:



2. Observa las ecuaciones siguientes:

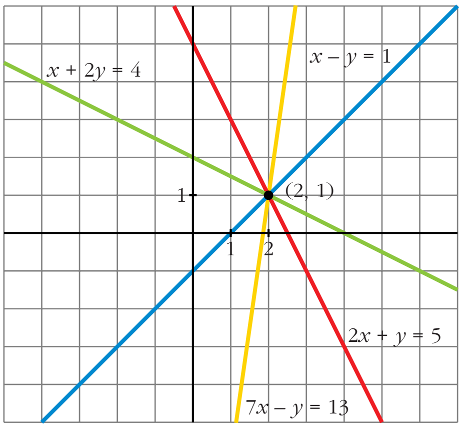
$$\begin{cases} 2x + \;\; y = 5 \\ \;\; x - \;\; y = 1 \\ \;\; x + 2y = 4 \end{cases}$$

- **Represéntalas y observa que las dos primeras rectas determinan un punto (con esos dos datos se responde a las dos preguntas: $x = 2, y = 1$) y que la tercera recta también pasa por ese punto.**



- **Da otra ecuación que también sea "consecuencia" de las dos primeras (por ejemplo: 2 · 1ª + 3 · 2ª), represéntala y observa que también pasa por $x = 2, y = 1$.**

$2 \cdot 1^ª + 3 \cdot 2^ª \quad \rightarrow \quad 7x - y = 13$

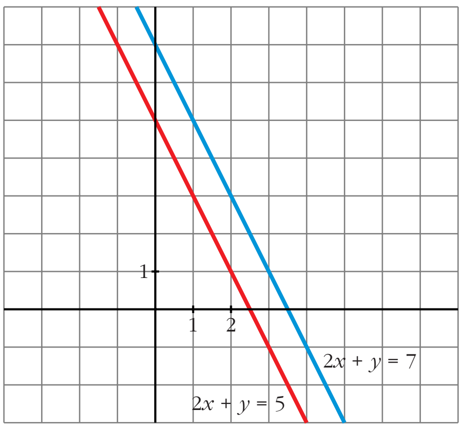


Página 31

3. Observa que ***lo que dice la segunda ecuación es contradictorio con lo que dice la primera:***

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

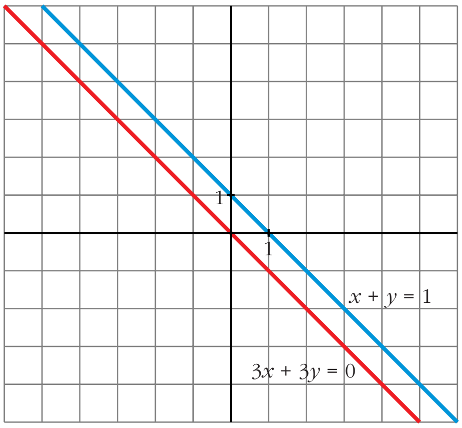
- **Represéntalas y observa que se trata de dos rectas paralelas, es decir, no tienen solución común, pues las rectas no se cortan en ningún punto.**



■ **Modifica el término independiente de la segunda ecuación del sistema que inventaste en el ejercicio 1 y representa de nuevo las dos rectas.**

Observa que lo que dicen ambas ecuaciones es ahora contradictorio y que se representan mediante rectas paralelas.

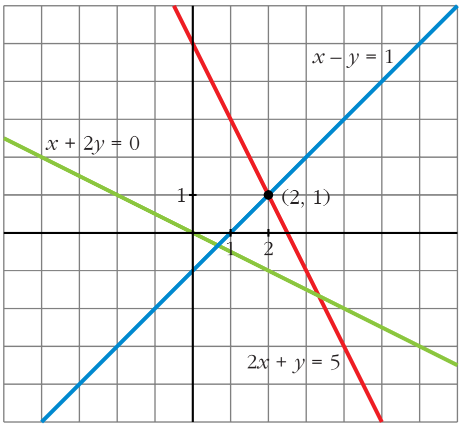
$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 3x + 3y &= 0 \end{aligned}\right\}$$ Rectas paralelas:



4. Fíjate ahora en este sistema formado por tres ecuaciones:

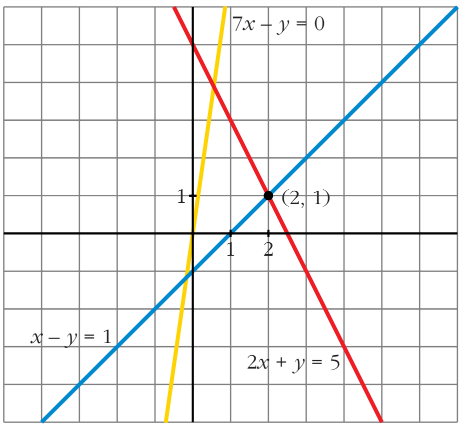
$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{2x + y} &\mathbf{= 5} \\ \mathbf{x - y} &\mathbf{= 1} \\ \mathbf{x + 2y} &\mathbf{= 0} \end{aligned}\right.$$

■ **Representa las tres rectas y observa que la tercera no pasa por el punto en el que se cortan las otras dos.**



■ **Modifica el término independiente de la recta que inventaste en el ejercicio 2. Observa que lo que dice después del cambio es contradictorio con las dos primeras ecuaciones y que, al representarla, no pasa por el punto de corte de ellas.**

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ x - y &= 1 \\ 7x - y &= 0 \end{aligned}\right\}$$



Página 33

1. Sin resolverlos, ¿son equivalentes estos sistemas?

a) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x+y=5} \\ \boldsymbol{2x-y=7} \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x+y-z=5} \\ \boldsymbol{x+y=7} \end{array}\right.$ c) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x+y-z=5} \\ \boldsymbol{x+y=7} \\ \boldsymbol{2x+2y-z=12} \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x+y-z=11} \\ \boldsymbol{x+2y-z=7} \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x+y=5} \\ \boldsymbol{3x=12} \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{z=2} \\ \boldsymbol{x+y=7} \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{z=2} \\ \boldsymbol{x+y=7} \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x+y-z=11} \\ \boldsymbol{y=-4} \end{array}\right.$

a) Hemos sustituido la segunda ecuación por el resultado de sumar las dos que teníamos.

b) Hemos sustituido la primera ecuación por el resultado de restarle a la segunda ecuación la primera.

c) En el primer sistema, la tercera ecuación se obtiene sumando las dos primeras. El resto es igual que en b).

d) Hemos sustituido la segunda ecuación por el resultado de restarle a la segunda ecuación la primera.

Página 35

1. Resuelve e interpreta geométricamente los siguientes sistemas:

a) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{2x+y=1} \\ \boldsymbol{3x+2y=4} \\ \boldsymbol{x+y=3} \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x+y+z=6} \\ \boldsymbol{y-z=1} \\ \boldsymbol{x+2y=7} \end{array}\right.$ c) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x+y+z=6} \\ \boldsymbol{x+y+z=0} \\ \boldsymbol{x-z=0} \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x+y+z=6} \\ \boldsymbol{y-z=1} \\ \boldsymbol{z=1} \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x+y=1 \\ 3x+2y=4 \\ x+y=3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to\ y=1-2x \\ \\ \to\ y=3-x \end{array}\Big\}\ 1-2x=3-x\ \to\ x=-2,\quad y=3-(-2)=5$

Veamos si cumple la 2ª ecuación: $3\cdot(-2)+2\cdot 5=-6+10=4$

Solución: $x=-2,\ y=5$. Son tres rectas que se cortan en el punto $(-2, 5)$.

b) $\left.\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ y-z=1 \\ x+2y=7 \end{array}\right\}$ La 3ª ecuación se obtiene sumando las dos primeras; podemos prescindir de ella.

$\left.\begin{array}{l} x+y=6-z \\ y=1+z \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} x=6-z-y=6-z-1-z=5-2z \\ y=1+z \end{array}$

Solución: $x=5-2\lambda,\ y=1+\lambda,\ z=\lambda$. Son tres planos que se cortan en una recta.

c) $\left.\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ x+y+z=0 \\ x-z=0 \end{array}\right\}$ Las dos primeras ecuaciones son contradictorias.
El sistema es incompatible.
Los dos primeros planos son paralelos y el tercero los corta.

d) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ z = 1 \end{array}\right\}\quad \begin{array}{l} z = 1 \\ y = 1 + z = 2 \\ x = 6 - y - z = 6 - 2 - 1 = 3 \end{array}$

Solución: $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$. Son tres planos que se cortan en el punto $(3, 2, 1)$.

2. a) Resuelve el sistema: $\left\{\begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ x - \ \ y = 4 \end{array}\right.$

b) Añade una tercera ecuación de modo que siga siendo compatible.

c) Añade una tercera ecuación de modo que sea incompatible.

d) Interpreta geométricamente lo que has hecho en cada caso.

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ x - \ \ y = 4 \end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l} x = 3 - 2y \\ x = 4 + \ y \end{array}\right\}\quad \begin{array}{l} 3 - 2y = 4 + y \ \rightarrow \ -1 = 3y \ \rightarrow \ y = \dfrac{-1}{3} \\ x = 4 + y = 4 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{3} \end{array}$

Solución: $x = \dfrac{11}{3}$, $y = \dfrac{-1}{3}$

b) Por ejemplo: $2x + y = 7$ (suma de las dos anteriores).

c) Por ejemplo: $2x + y = 9$

d) En a) $\rightarrow$ Son dos rectas que se cortan en $\left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$.

En b) $\rightarrow$ La nueva recta también pasa por $\left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$.

En c) $\rightarrow$ La nueva recta no pasa por $\left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$. No existe ningún punto común a las tres rectas. Se cortan dos a dos.

Página 36

1. Reconoce como escalonados los siguientes sistemas y resuélvelos:

a) $\left\{\begin{array}{l} 3x \qquad\ \ = 7 \\ \ \ x - 2y = 5 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} 2x \qquad\qquad\ \ = 6 \\ \ \ x + y + 3z = 7 \\ 5x \qquad - \ \ z = 4 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} 2x \qquad\qquad\quad - 2t = 6 \\ \ \ x + y + 3z \qquad\ \ = 7 \\ 5x \quad - \ \ z + \ \ t = 4 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{l} 2x \qquad\ \ + 3z = 0 \\ \ \ x + 3y - \ \ z = 7 \\ 4x \qquad\qquad\ \ = 4 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x \qquad = 7 \\ x - 2y = 5 \end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{7}{3} \\ y = \dfrac{x - 5}{2} = \dfrac{-4}{3} \end{array}\right\}\qquad$ *Solución:* $x = \dfrac{7}{3}$, $y = \dfrac{-4}{3}$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x \qquad\qquad = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x \qquad - z = 4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2x \qquad\qquad = 6 \\ 5x \qquad - z = 4 \\ x + y + 3z = 7 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 3 \\ z = 5x - 4 = 11 \\ y = 7 - x - 3z = 7 - 3 - 33 = -29 \end{array}$

Solución: $x = 3, \ y = -29, \ z = 11$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x \qquad\qquad - 2t = 6 \\ x + y + 3z \qquad = 7 \\ 5x \qquad - z + t = 4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2x \qquad\qquad = 6 + 2t \\ 5x \qquad - z = 4 - t \\ x + y + 3z = 7 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 3 + t \\ z = 5x - 4 + t = 11 + 6t \\ y = 7 - x - 3z = -29 - 19t \end{array}$

Soluciones: $x = 3 + \lambda, \ y = -29 - 19\lambda, \ z = 11 + 6\lambda, \ t = \lambda$

d) $\left.\begin{array}{l} 2x \qquad + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \\ 4x \qquad\qquad = 4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 4x \qquad\qquad = 4 \\ 2x \qquad + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 1 \\ z = \dfrac{-2x}{3} = \dfrac{-2}{3} \\ y = \dfrac{7 - x + z}{3} = \dfrac{16}{9} \end{array}$

Solución: $x = 1, \ y = \dfrac{16}{9}, \ z = \dfrac{-2}{3}$

2. ¿Son escalonados estos sistemas? Resuélvelos:

a) $\left\{\begin{array}{l} z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ 2z = 2 \\ x - z + 2t = 5 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 7 \\ 2x - z = 4 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z + t = 3 \\ x - y = 2 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} 2y + z = 1 \\ 2y = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ 2z = 2 \\ x - z + 2t = 5 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2z = 2 \\ z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ x - z + 2t = 5 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} z = 1 \\ t = 3 - z = 2 \\ y = 4 - 3z + 2t = 5 \\ x = 5 + z - 2t = 2 \end{array}$

Solución: $x = 2, \ y = 5, \ z = 1, \ t = 2$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 7 \\ 2x - z = 4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2x = 4 + z \\ x + y = 7 - z \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 2 + \dfrac{z}{2} \\ y = 7 - z - x = 5 - \dfrac{3z}{2} \end{array}$

Soluciones: $x = 2 + \lambda, \ y = 5 - 3\lambda, \ z = 2\lambda$

c) $\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = 3 \\ x - y \qquad = 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x \qquad = 2 + y \\ x + z = 3 - y - t \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 2 + y \\ z = 3 - y - t - 2 - y = 1 - 2y - t \end{array}$

Soluciones: $x = 2 + \lambda, \ y = \lambda, \ z = 1 - 2\lambda - \mu, \ t = \mu$

d) $\left.\begin{array}{r} 2y + z = 1 \\ 2y \quad = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} 2y \quad = 1 \\ 2y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2} \\ z = 1 - 2y = 0 \\ x = 1 - 2y - z = 0 \end{array}$

Solución: $x = 0, \ y = \dfrac{1}{2}, \ z = 0$

Página 37

3. Transforma en escalonados y resuelve:

a) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x - y + 3z = -4} \\ \boldsymbol{x + y + z = 2} \\ \boldsymbol{x + 2y - z = 6} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + y + z = 6} \\ \boldsymbol{x - y - z = -4} \\ \boldsymbol{3x + y + z = 8} \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array}$ ▶ $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = -4 \\ 2y - 2z = 6 \\ 3y - 4z = 10 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a \end{array}$ ▶ $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = -4 \\ y - z = 3 \\ 3y - 4z = 10 \end{array}\right\}$

$\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3 \cdot 2^a \end{array}$ ▶ $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = -4 \\ y - z = 3 \\ -z = 1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} z = -1 \\ y = 3 + z = 2 \\ x = -4 + y - 3z = 1 \end{array}\right\}$

Solución: $x = 1, \ y = 2, \ z = -1$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 3x + y + z = 8 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array}$ ▶ $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ -2y - 2z = -10 \\ -2y - 2z = -10 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : (-2) \end{array}$ ▶ $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ y + z = 5 \end{array}\right\}$

(Podemos prescindir de la 3^a, pues es igual que la 2^a)

$\left.\begin{array}{r} x + y = 6 - z \\ y = 5 - z \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 6 - z - y = 6 - z - 5 + z = 1 \\ y = 5 - z \end{array}$

Soluciones: $x = 1, \ y = 5 - \lambda, \ z = \lambda$

4. Transforma en escalonado y resuelve:

$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x - y + 3z = 0} \\ \boldsymbol{3x - 2y - 5z + 7w = -32} \\ \boldsymbol{x + 2y - z + 3w = 18} \\ \boldsymbol{x - 3y + z + 2w = -26} \end{array}\right.$

$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z \quad = 0 \\ 3x - 2y - 5z + 7w = -32 \\ x + 2y - z + 3w = 18 \\ x - 3y + z + 2w = -26 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 1^a \end{array}$ ▶ $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z \quad = 0 \\ y - 14z + 7w = -32 \\ 3y - 4z + 3w = 18 \\ -2y - 2z + 2w = -26 \end{array}\right\}$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3 \cdot 2^a \\ 4^a + 2 \cdot 2^a \end{array}} \left.\begin{array}{rl} x - y + 3z & = 0 \\ y - 14z + 7w & = -32 \\ 38z - 18w & = 114 \\ -30z + 16w & = -90 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a : 2 \\ 15 \cdot 3^a + 19 \cdot 4^a \end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{rl} x - y + 3z & = 0 \\ y - 14z + 7w & = -32 \\ 19z - 9w & = 57 \\ 34w & = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} w = 0 \\ z = \dfrac{57 + 9w}{19} = 3 \\ y = -32 + 14z - 7w = 10 \\ x = y - 3z = 1 \end{array}\right\}$$

Solución: $x = 1,\ \ y = 10,\ \ z = 3,\ \ w = 0$

Página 40

1. Resuelve estos sistemas de ecuaciones mediante el método de Gauss:

a) $\left\{\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} 3x - 4y + 2z = 1 \\ -2x - 3y + z = 2 \\ 5x - y + z = 5 \end{array}\right.$ **c)** $\left\{\begin{array}{r} x - 2y = -3 \\ -2x + 3y + z = 4 \\ 2x + y - 5z = 4 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a + 2 \cdot 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right) \to$

$\to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \cdot (-1) \\ 3^a \cdot 5 + 2^a \cdot 3 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 24 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 5y + 4z = 2 \\ 2z = 24 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z = 3 \\ y = \dfrac{2 - 4z}{5} = -2 \\ x = 2 - y - z = 1 \end{array}\right\}$

Solución: $x = 1,\ \ y = -2,\ \ z = 3$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x - 4y + 2z = 1 \\ -2x - 3y + z = 2 \\ 5x - y + z = 5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a - 2 \cdot 3^a \\ 2^a - 3^a \\ 3^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -7 & -2 & 0 & -9 \\ -7 & -2 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right)$

Las dos primeras ecuaciones son contradictorias. El sistema es *incompatible*.

c) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = -3 \\ -2x + 3y + z = 4 \\ 2x + y - 5z = 4 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 4 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \end{array}\right) \to$

$\to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 5 \cdot 2^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x - 2y = -3 \\ -y + z = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -3 + 2y \\ z = -2 + y \end{array}$

Soluciones: $x = -3 + 2\lambda,\ \ y = \lambda,\ \ z = -2 + \lambda$

2. **Resuelve mediante el método de Gauss:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x - y + 2z = 2 \\ -x + 3y + z = 3 \\ x + y + 5z = 7 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} 2x - y + w = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 5x - y + z + w = 0 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{array}\right.$ **c)** $\left\{\begin{array}{l} 2x - y + w = 9 \\ x - 2y + z = 11 \\ 5x - y + z + w = 24 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} x - y + 2z = 2 \\ -x + 3y + z = 3 \\ x + y + 5z = 7 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} \text{1ª} \\ \text{2ª + 1ª} \\ \text{3ª − 1ª} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{l} x - y + 2z = 2 \\ 2y + 3z = 5 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x - y = 2 - 2z \\ 2y = 5 - 3z \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2 - 2z + y \\ y = \dfrac{5 - 3z}{2} = \dfrac{5}{2} - 1 = \dfrac{3z}{2} \end{array}$

$x = 2 - 2z + \dfrac{5}{2} - \dfrac{3z}{2} = \dfrac{9}{2} - \dfrac{7z}{2}$

Soluciones: $x = \dfrac{9}{2} - 7\lambda, \quad y = \dfrac{5}{2} - 3\lambda, \quad z = 2\lambda$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x - y + w = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 5x - y + z + w = 0 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} \text{1ª} \\ \text{2ª} \\ \text{3ª − 1ª} \\ \text{4ª − 2 · 1ª} \end{array}$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} \text{1ª} \\ \text{2ª} \\ \text{3ª + 4ª} \\ \text{4ª} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{l} 2x - y + w = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 4x = 0 \\ x - z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \\ w = 0 \end{array}$

Solución: $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad w = 0$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x - y + w = 9 \\ x - 2y + z = 11 \\ 5x - y + z + w = 24 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & 24 \\ 5 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} \text{1ª} \\ \text{2ª} \\ \text{3ª − 1ª} \\ \text{4ª − 2 · 1ª} \end{array}$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -18 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} \text{1ª} \\ \text{2ª} \\ \text{3ª + 4ª} \\ \text{4ª} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -18 \end{array}\right) \to$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x - y + w = 9 \\ x - 2y + z = 11 \\ 4x = -3 \\ x - z = -18 \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{-3}{4} \qquad z = x + 18 = \frac{69}{4} \qquad y = \frac{x + z - 11}{2} = \frac{11}{4} \qquad w = 9 - 2x + y = \frac{53}{4}$$

Solución: $x = \frac{-3}{4},\ y = \frac{11}{4},\ z = \frac{69}{4},\ w = \frac{53}{4}$

Página 41

1. Discute, en función del parámetro k, estos sistemas de ecuaciones:

a) $\left\{\begin{array}{l} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k+1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k-3 & 0 & 0 & 3-k \end{array}\right)$

- *Si* $k = 3$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x - z = 2 - y \\ 4x = 3 - 2y \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{3 - 2y}{4} = \frac{3}{4} - \frac{y}{2}$$

$$z = x - 2 + y = \frac{3 - 2y}{4} - 2 + y = \frac{-5 + 2y}{4} = \frac{-5}{4} + \frac{y}{2}$$

Sistema *compatible indeterminado*.

Soluciones: $x = \frac{3}{4} - \lambda,\ y = 2\lambda,\ z = \frac{-5}{4} + \lambda$

- *Si* $k \neq 3$, es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = k \\ (k - 3)x = (3 - k) \end{array}\right\}$$

$x = \dfrac{3-k}{k-3} = -1$

$y = \dfrac{k-4x}{2} = \dfrac{k+4}{2} = 2 + \dfrac{k}{2}$

$z = x + y - 2 = -1 + 2 + \dfrac{k}{2} - 2 = -1 + \dfrac{k}{2}$

Solución: $x = -1, \; y = 2 + \dfrac{k}{2}, \; z = -1 + \dfrac{k}{2}$

b) $\left.\begin{array}{l} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} + 2^{\text{a}} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k+1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} - 1^{\text{a}} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k-3 & 0 & 0 & 2-k \end{array}\right)$

- *Si* $k = 3$, queda:

  $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$ El sistema es *incompatible.*

- Si $k \neq 3$, es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

  $\left.\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = k \\ (k-3)x = (2-k) \end{array}\right\}$

$x = \dfrac{2-k}{k-3}$

$y = \dfrac{k-4x}{2} = \dfrac{k^2+k-8}{2k-6}$

$z = x + y - 2 = \dfrac{2-k}{k-3} + \dfrac{k^2+k-8}{2(k-3)} - 2 = \dfrac{k^2-5k+8}{2k-6}$

Solución: $x = \dfrac{2-k}{k-3}, \; y = \dfrac{k^2+k-8}{2k-6}, \; z = \dfrac{k^2-5k+8}{2k-6}$

2. Discute estos sistemas de ecuaciones en función del parámetro k:

a) $\left\{\begin{array}{l} kx + y - z = 8 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + z = k \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ y + kz = 1 \\ x + 2y = k \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} kx + y - z = 8 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + z = k \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{\text{a}} - 2^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} k-1 & 0 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array}\right) \to$

$$\longrightarrow \begin{array}{l} 1^a + 2 \cdot 3^a \\ 2^a \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} k+3 & 0 & 0 & 8+2k \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array}\right)$$

- *Si* $k = -3$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \text{ Sistema } \textit{incompatible.}$$

- Si $k \neq -3$, es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} (k+3)x \qquad\qquad = 8 + 2k \\ \qquad x + y + z = 0 \\ \quad 2x \qquad + z = k \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{8+2k}{k+3}$$

$$z = k - 2x = \frac{k^2 - k - 16}{k+3}$$

$$y = -x - z = \frac{-k^2 - k + 8}{(k+3)}$$

Solución: $x = \dfrac{8+2k}{k+3}$, $y = \dfrac{-k^2 - k + 8}{(k+3)}$, $z = \dfrac{k^2 - k - 16}{k+3}$

b) $$\left.\begin{array}{l} x + \ y + \ z = 1 \\ \quad\ \ y + kz = 1 \\ x + 2y \qquad = k \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 1 & 2 & 0 & k \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & k-1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -1-k & k-2 \end{array}\right)$$

- *Si* $k = -1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \text{ Sistema } \textit{incompatible.}$$

- Si $k \neq -1$, es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \qquad\quad + \ z = 1 \\ \qquad y \qquad\quad + kz = 1 \\ \qquad\quad (-1-k)z = k - 2 \end{array}\right\}$$

$$z = \frac{k-2}{-1-k} = \frac{2-k}{1+k}$$

$$y + k\left(\frac{2-k}{1+k}\right) = 1 \quad \longrightarrow \quad y = 1 - \frac{2k - k^2}{1+k} = \frac{1 + k - 2k + k^2}{1+k} = \frac{1 - k + k^2}{1+k}$$

$$x = 1 - y - z = 1 - \frac{1 - k + k^2}{1 + k} - \frac{2 - k}{1 + k} = \frac{1 + k - 1 + k - k^2 - 2 + k}{1 + k} =$$

$$= \frac{-2 + 3k - k^2}{1 + k}$$

Solución: $x = \dfrac{-2 + 3k - k^2}{1 + k}, \quad y = \dfrac{1 - k + k^2}{1 + k}, \quad z = \dfrac{2 - k}{1 + k}$

Página 46

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 **Halla, si existe, la solución de los siguientes sistemas e interprétalos gráficamente:**

a) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x - y = 1 \\ 5x - y = 4 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - y = 3 \\ 5x + y = 8 \end{cases}$

Los resolvemos por el método de Gauss:

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a - 3 \cdot 2^a \\ 2^a \\ 3^a - 5 \cdot 2^a \\ 4^a - 2 \cdot 2^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{array}\right)$

Podemos prescindir de las dos últimas filas, pues coinciden con la primera. Quedaría:

$$4y = -1 \rightarrow y = \frac{-1}{4}$$

$$x - y = 1 \rightarrow x = 1 + y = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Solución: $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{-1}{4}\right)$

El sistema representa cuatro rectas que se cortan en el punto $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{-1}{4}\right)$.

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 5 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -9 & 3 \end{array}\right)$

De la 2ª ecuación, obtenemos $y = \dfrac{-1}{5}$; de la 3ª ecuación, obtenemos $y = \dfrac{-1}{3}$.

Luego, el sistema es *incompatible*.

El sistema representa tres rectas que se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a las tres.

2 **Comprueba que este sistema es incompatible y razona cuál es la posición relativa de las tres rectas que representa:**

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - \ y = 1 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

Si dividimos la 3ª ecuación entre 2, obtenemos: $x + 2y = 0$. La 1ª ecuación es $x + 2y = 5$. Son contradictorias, luego el sistema es *incompatible*.

La 1ª y la 3ª ecuación representan dos rectas paralelas; la 2ª las corta.

3 **Resuelve e interpreta geométricamente el sistema:**

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x + \ y = -1 \\ (3/2)x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3/2 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 2 \cdot 1^a \\ (2/3) \cdot 3^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 1^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} -x + 2y = 0 \\ 5y = -1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 2y = \dfrac{-2}{5} \\ y = \dfrac{-1}{5} \end{array}\right\}$$

Solución: $\left(\dfrac{-2}{5}, \dfrac{-1}{5}\right)$

Geométricamente, son tres rectas que se cortan en el punto $\left(\dfrac{-2}{5}, \dfrac{-1}{5}\right)$.

4 **Resuelve los siguientes sistemas reconociendo previamente que son escalonados:**

a) $\begin{cases} 2x - \ y = 7 \\ 11y = -69 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -y + z = 1 \\ 9z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - t = 2 \\ y + z = 4 \\ y + t - z = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - \ y = 0 \\ 2y = 1 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{r} 2x - \ y = 7 \\ 11y = -69 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{-69}{11} \\ x = \dfrac{7+y}{2} = \dfrac{4}{11} \end{array}\right\}$$

Solución: $\left(\dfrac{4}{11}, \dfrac{-69}{11}\right)$

b) $\left.\begin{array}{r} -y+\ z=1 \\ 9z=2 \\ 3x-y+\ z=3 \end{array}\right\}\quad z=\dfrac{2}{9}\qquad y=z-1=\dfrac{-7}{9}\qquad x=\dfrac{3+y-z}{3}=\dfrac{2}{3}$

Solución: $\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{-7}{9},\ \dfrac{2}{9}\right)$

c) $\left.\begin{array}{l} x+y-t\quad\ \ =2 \\ \quad\ y\quad\ +z=4 \\ \quad\ y+t-z=1 \end{array}\right\}\quad \begin{array}{l} z=\lambda \\ y=4-z \\ t=1-y+z=1-(4-z)+z=-3+2z \\ x=2-y+t=2-(4-z)-3+2z=-5+3z \end{array}$

Soluciones: $(-5+3\lambda,\ \ 4-\lambda,\ \ \lambda,\ \ -3+2\lambda)$

d) $\left.\begin{array}{l} 2x-3y+z=0 \\ 3x-\ \ y\qquad\ =0 \\ \qquad 2y\qquad\ =1 \end{array}\right\}\quad y=\dfrac{1}{2}\qquad x=\dfrac{y}{3}=\dfrac{1}{6}\qquad z=-2x+3y=\dfrac{7}{6}$

Solución: $\left(\dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{7}{6}\right)$

5 S **Resuelve estos sistemas de ecuaciones lineales:**

a) $\left\{\begin{array}{l} 2x+5y\qquad\ \ =16 \\ \ x+3y-2z=-2 \\ \ x\qquad\ +\ z=\ \ 4 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} 3x+2y+\ z=1 \\ 5x+3y+3z=3 \\ \ x+\ y+\ z=0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x+5y\qquad\ \ =16 \\ \ x+3y-2z=-2 \\ \ x\qquad\ +\ z=\ \ 4 \end{array}\right\}\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 1 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a}+2\cdot 3^{a} \\ 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 3 & 3 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow$

$\longrightarrow \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a}:3 \\ 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} 1^{a}-5\cdot 2^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow$

$\longrightarrow \left.\begin{array}{l} -3x\qquad\quad\ =6 \\ \quad x+y\qquad =2 \\ \quad x\qquad +z=4 \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} x=-2 \\ y=2-x=4 \\ z=4-x=6 \end{array}$

Solución: $(-2,\ 4,\ 6)$

b) $\left.\begin{array}{l} 3x+2y+\ z=1 \\ 5x+3y+3z=3 \\ \ x+\ y+\ z=0 \end{array}\right\}\ \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} 3^{a} \\ 2^{a} \\ 1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$

$\longrightarrow \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a}-5\cdot 1^{a} \\ 3^{a}-3\cdot 1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ -2\cdot 3^{a}+2^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$

$$\to \left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ -2y - 2z = 3 \\ 2z = 1 \end{array}\right\} \quad z = \frac{1}{2} \qquad y = \frac{3+2z}{-2} = -2 \qquad x = -y - z = \frac{3}{2}$$

Solución: $\left(\frac{3}{2}, -2, \frac{1}{2}\right)$

6 **Transforma en escalonados y resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 5x + 3y = -17 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -y + z = 1 \\ x - 2y - z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 7 \\ 5x + 3y = -17 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 2 & -1 & | & 7 \\ 5 & 3 & | & -17 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 3 \cdot 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -1 & | & 7 \\ 11 & 0 & | & 4 \end{pmatrix} \to \left.\begin{array}{r} 2x - y = 7 \\ 11x = 4 \end{array}\right\}$

$x = \frac{4}{11} \qquad y = 2x - 7 = \frac{-69}{11}$

Solución: $\left(\frac{4}{11}, \frac{-69}{11}\right)$

b) $\left.\begin{array}{r} -y + z = 1 \\ x - 2y - z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -2 & -1 & | & 2 \\ 3 & -1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & | & 2 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 \\ 3 & -1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \to$

$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & | & 2 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 5 & 4 & | & -3 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 5 \cdot 2^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & | & 2 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 9 & | & 2 \end{pmatrix} \to$

$$\to \left.\begin{array}{r} x - 2y - z = 2 \\ -y + z = 1 \\ 9z = 2 \end{array}\right\} \quad z = \frac{2}{9} \qquad y = z - 1 = \frac{-7}{9} \qquad x = 2 + 2y + z = \frac{2}{3}$$

Solución: $\left(\frac{2}{3}, \frac{-7}{9}, \frac{2}{9}\right)$

7 S **Resuelve:**

a) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 4y - z = 3 \\ 6x - 6y + 2z = -16 \\ x - y + 2z = -6 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 1 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 3 & 2 & 1 & | & 1 \\ 5 & 3 & 3 & | & 1 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a - 5 \cdot 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 4 & | & -2 \\ 0 & -2 & 8 & | & -4 \end{pmatrix} \to$

$$\rightarrow \begin{array}{l} \text{1ª} \\ \text{2ª} \\ \text{3ª} - 2 \cdot \text{2ª} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y - z = 1 \\ -y + 4z = -2 \end{array}\right\}$$

$y = 4z + 2$
$x = 1 - y + z = 1 - (4z + 2) + z = -1 - 3z$
$z = \lambda$

Soluciones: $(-1 - 3\lambda,\ 2 + 4\lambda,\ \lambda)$

b) $$\left.\begin{array}{r} 3x + 4y - z = 3 \\ 6x - 6y + 2z = -16 \\ x - y + 2z = -6 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & 3 \\ 6 & -6 & 2 & -16 \\ 1 & -1 & 2 & -6 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} \text{3ª} \\ \text{2ª} : 2 \\ \text{1ª} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 3 & -3 & 1 & -8 \\ 3 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} \text{1ª} \\ \text{2ª} - 3 \cdot \text{1ª} \\ \text{3ª} - 3 \cdot \text{1ª} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \\ 0 & 7 & -7 & 21 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} \text{1ª} \\ \text{2ª} : (-5) \\ \text{3ª} : 7 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y + 2z = -6 \\ z = -2 \\ y - z = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 3 + z = 3 - 2 = 1 \\ x = -6 + y - 2z = -6 + 1 + 4 = -1 \end{array}$$

Solución: $(-1, 1, -2)$

8 **Razona si estos sistemas tienen solución e interprétalos geométricamente:**

a) $\left\{\begin{array}{r} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} -x + 3y + 6z = 3 \\ 2/3x - 2y - 4z = 2 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 1 \end{array}\right\}$ Si dividimos la 2ª ecuación entre 2, obtenemos :

$x + 2y - z = \dfrac{1}{2}$, que contradice la 1ª.

El sistema es *incompatible*. Son dos planos paralelos.

b) $\left.\begin{array}{r} -x + 3y + 6z = 3 \\ (2/3)x - 2y - 4z = 2 \end{array}\right\}$ Si multiplicamos por $-\dfrac{2}{3}$ la 1ª ecuación, obtenemos:

$\dfrac{2}{3}x - 2y - 4z = -2$, que contradice la 2ª ecuación.

El sistema es *incompatible*. Son dos planos paralelos.

9 **S** **Resuelve, si es posible, los siguientes sistemas:**

a) $\left\{\begin{array}{r} x + 2y + z = 9 \\ x - y - z = -10 \\ 2x - y + z = 5 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \end{array}\right.$

$$\textbf{c)}\ \left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{-x+2y-\ \ z=1}\\ \boldsymbol{2x-4y+2z=3}\\ \boldsymbol{\ \ x+\ \ y+\ \ z=2}\end{array}\right. \qquad \textbf{d)}\ \left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{2x-3y+z=0}\\ \boldsymbol{3x-\ \ y\ \ \ \ \ \ =0}\\ \boldsymbol{4x+\ \ y-z=0}\end{array}\right.$$

a) $\left.\begin{array}{r}x+2y+z=\ \ \ 9\\ x-\ \ y-z=-10\\ 2x-\ \ y+z=\ \ \ 5\end{array}\right\}\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&9\\1&-1&-1&-10\\2&-1&1&5\end{array}\right)\xrightarrow{\begin{array}{l}1^{a}\\-2^{a}+1^{a}\\3^{a}-2\cdot1^{a}\end{array}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&9\\0&3&2&19\\0&-5&-1&-13\end{array}\right)\to$

$\xrightarrow{\begin{array}{l}1^{a}\\2^{a}\\2^{a}+2\cdot3^{a}\end{array}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&9\\0&3&2&19\\0&-7&0&-7\end{array}\right)\to\left.\begin{array}{r}x+2y+\ \ z=\ \ 9\\ 3y+2z=19\\ -7y\ \ \ \ \ \ \ \ \ =-7\end{array}\right\}$

$y=1 \qquad z=\dfrac{19-3y}{2}=8 \qquad x=9-2y-z=-1$

Solución: $(-1,\ 1,\ 8)$

b) $\left.\begin{array}{r}x+2y+z=3\\ 2x-\ \ y+z=-1\end{array}\right\}\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&3\\2&-1&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow{\begin{array}{l}1^{a}\\-2^{a}+2\cdot1^{a}\end{array}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&3\\0&5&1&7\end{array}\right)\to$

$\to\left.\begin{array}{r}x+2y=3-z\\ 5y=7-z\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}y=\dfrac{7}{5}-\dfrac{z}{5}\\[2ex] x=3-z-2y=3-z-\dfrac{14}{5}+\dfrac{2z}{5}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{3z}{5}\end{array}$

Si hacemos $z=5\lambda$, las soluciones son: $\left(\dfrac{1}{5}-3\lambda,\ \dfrac{7}{5}-\lambda,\ 5\lambda\right)$

c) $\left.\begin{array}{r}-x+2y-\ \ z=1\\ 2x-4y+2z=3\\ x+\ \ y+\ \ z=2\end{array}\right\}\ \left(\begin{array}{ccc|c}-1&2&-1&1\\2&-4&2&3\\1&1&1&2\end{array}\right)\xrightarrow{\begin{array}{l}3^{a}\\2^{a}\\1^{a}\end{array}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\2&-4&2&3\\-1&2&-1&1\end{array}\right)\to$

$\xrightarrow{\begin{array}{l}1^{a}\\2^{a}-2\cdot1^{a}\\3^{a}+1^{a}\end{array}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&-6&0&-1\\0&3&0&3\end{array}\right)\xrightarrow{\begin{array}{l}1^{a}\\2^{a}+2\cdot3^{a}\\3^{a}\end{array}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&0&0&5\\0&3&0&3\end{array}\right)$

La segunda ecuación es imposible: $0x+0y+0z=5$

El sistema es *incompatible*.

d) $\left.\begin{array}{r}2x-3y+z=0\\ 3x-\ \ y\ \ \ \ \ \ \ =0\\ 4x+\ \ y-z=0\end{array}\right\}\ \left(\begin{array}{ccc|c}2&-3&1&0\\3&-1&0&0\\4&1&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow{\begin{array}{l}1^{a}\\2^{a}\\3^{a}+1^{a}\end{array}}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-3&1&0\\3&-1&0&0\\6&-2&0&0\end{array}\right)\to$

$\xrightarrow{\begin{array}{l}1^{a}\\2^{a}\\3^{a}-2\cdot2^{a}\end{array}}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-3&1&0\\3&-1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left.\begin{array}{r}2x-3y+z=0\\ 3x-\ \ y\ \ \ \ \ \ \ =0\end{array}\right\}$

$y = 3x$

$z = -2x + 3y = -2x + 9x = 7x$

$x = \lambda$

Soluciones: $(\lambda, 3\lambda, 7\lambda)$

10 **Resuelve por el método de Gauss:**

S

a) $\left\{\begin{array}{l} x + 2z = 11 \\ x + y = 3 \\ y + z = 13 \\ x + y + z = 10 \end{array}\right.$
b) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z - t = 0 \\ x + y - z - t = -1 \\ x + y + z - t = 2 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} 2x + y + 3z = 0 \\ 4x + 2y - z = 0 \\ 6x + 3y + 2z = 0 \end{array}\right.$
d) $\left\{\begin{array}{l} x - 3y - z = -1 \\ x + 5y + 3z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 7y + 5z = 5 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} x + 2z = 11 \\ x + y = 3 \\ y + z = 13 \\ x + y + z = 10 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a \\ 4^a - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \\ 4^a - 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3 \cdot 4^a \\ 4^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 2z = 11 \\ y - 2z = -8 \\ z = 7 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} y = -8 + 2z = -8 + 14 = 6 \\ x = 11 - 2z = 11 - 14 = -3 \end{array}\right\}$

Solución: $(-3, 6, 7)$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z - t = 0 \\ x + y - z - t = -1 \\ x + y + z - t = 2 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = 1 \\ -2y - 2t = -1 \\ z + t = 1 \\ -2t = 1 \end{array}\right\}$

$t = -\dfrac{1}{2}$ $\quad z = 1 - t = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$ $\quad y = \dfrac{2t - 1}{-2} = 1$ $\quad x = 1 - y - z - t = -1$

Solución: $\left(-1, 1, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x + \ \ y + 3z = 0 \\ 4x + 2y - \ \ z = 0 \\ 6x + 3y + 2z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{r} 2x + y + 3z = 0 \\ -7z = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z = 0 \\ y = -2x \\ x = \lambda \end{array}\right\}$ *Soluciones:* $(\lambda, -2\lambda, 0)$

d) $\left.\begin{array}{r} x - 3y - \ \ z = -1 \\ x + 5y + 3z = \ \ 3 \\ x + \ \ y + \ \ z = \ \ 1 \\ 3x + 7y + 5z = \ \ 5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \\ 4^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 3 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a + 2^a \\ 4^a - 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2y + z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 1 - 2y \\ x = 1 - y - z = 1 - y - 1 + 2y = y \\ y = \lambda \end{array}$

Soluciones: $(\lambda, \ \lambda, 1 - 2\lambda)$

11 **Clasifica los siguientes sistemas en compatibles o incompatibles:**

a) $\left\{\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ z = 0 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ z = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + y = 3 \\ x + y = 3 \\ z = 0 \end{array}\right\}$ *Compatible indeterminado.*

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \to$

$\to$ *Compatible determinado.*

PARA RESOLVER

12 **Estudia los siguientes sistemas y resuélvelos por el método de Gauss:**
S

a) $\left\{\begin{array}{r} x + \ \ y + \ \ z = \ \ 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 4x + \ \ y - z = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -5 & 6 & 29 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^{a} \\ 2^{a} - 2 \cdot 1^{a} \\ 3^{a} - 1^{a} \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -6 & 5 & 27 \end{array}\right) \to$

$\to \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} + 6 \cdot 2^{a} \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 23 & 69 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ y + 3z = 7 \\ 23z = 69 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z = 3 \\ y = 7 - 3z = -2 \\ x = 2 - y - z = 1 \end{array}\right\}$

El sistema es *compatible determinado*, con solución $(1, -2, 3)$.

b) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^{a} \\ 2^{a} + 1^{a} \\ 3^{a} + 1^{a} \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$

$\to \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} - 2 \cdot 2^{a} \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$ Sistema *compatible indeterminado*.

Lo resolvemos: $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y \quad\; = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 3x \\ z = -2x + 3y = -2x + 9x = 7x \\ x = \lambda \end{array}$

Soluciones: $(\lambda, 3\lambda, 7\lambda)$

Página 47

13 S **Estudia y resuelve estos sistemas por el método de Gauss:**

a) $\begin{cases} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y + z = -1 \\ x - y = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x - y + 3z - 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -7 & 1 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^{a} \\ 2^{a} + 4 \cdot 1^{a} \\ 3^{a} + 2 \cdot 1^{a} \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 6 & -1 & -3 \end{array}\right) \to$

$\to \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} - 2^{a} \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right) \to$ Sistema *compatible determinado*.

Lo resolvemos: $\left.\begin{array}{r} -x + y + 3z = -2 \\ 6y + 11z = -3 \\ z = 0 \end{array}\right\} \quad y = -\dfrac{1}{2} \quad x = y + 3z + 2 = \dfrac{3}{2}$

Solución: $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}, 0\right)$

b) $$\left.\begin{array}{r} y + z = -1 \\ x - y \quad = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3 \cdot 2^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sistema *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} x - y \quad = 1 \\ y + z = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 + y \\ z = -1 - y \\ y = \lambda \end{array}$$

Soluciones: $(1 + \lambda,\ \lambda,\ -1 - \lambda)$

c) $$\left.\begin{array}{r} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 5 \cdot 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & -3 & 9 \\ 0 & 12 & -7 & 19 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : 3 \\ 3^a - 2 \cdot 2^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Sistema *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + 2z = -3 \\ 2y - z = 3 \\ -z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = -1 \\ y = 1 \\ x = -3 + 2y - 2z = 1 \end{array}$$

Solución: $(1,\ 1,\ -1)$

d) $$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z - 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -14 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 48 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ -4 \cdot 2^a + 3 \cdot 3^a \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 28 & 0 \end{array}\right)$$

Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z - 14t = 0 \\ -3z + 29t = 0 \\ 28t = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} t = 0 \\ z = 0 \\ x = y \\ y = \lambda \end{array}$$

Soluciones: $(\lambda,\ \lambda,\ 0,\ 0)$

14 **S** **Discute los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x - y - z = k \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + kz = 0 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + ay + 4z = 0 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} x - 2y + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{l} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right.$

a) $$\left.\begin{array}{l} x - y - z = k \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + kz = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & k \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & k & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & k \\ 0 & 0 & 3 & 1-k \\ 0 & 3 & k+2 & -2k \end{array}\right)$$

Sistema *compatible determinado* para todo k.

b) $$\left.\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + ay + 4z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & a & 4 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & a-3 & 7 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-3 & 7 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 7 \cdot 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-10 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Si $a = 10 \to$ Sistema *compatible indeterminado*
- Si $a \neq 10 \to$ Sistema *compatible determinado*

c) $$\left.\begin{array}{l} x - 2y + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ m & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 3^a \\ 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \\ m & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -1 \\ m+1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Compatible determinado para todo m.

d) $$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & a & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & a & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 5 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & -1 & a+3 & -2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ -2 \cdot 3^a + 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 2-2a & 1 \end{array}\right)$$

$2 - 2a = 0 \to a = 1$

- Si $a = 1 \to$ Sistema *incompatible*
- Si $a \neq 1 \to$ Sistema *compatible determinado*

15 **S** **Discute los siguientes sistemas y resuélvelos cuando sea posible:**

a) $\left\{\begin{array}{l} 2x - y \quad = \ 4 \\ -x + y/2 = -2 \\ x + ky \ = \ 2 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} 2x + \ y - \ z = 1 \\ x - 2y + \ z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - y \quad = \ 4 \\ -x + y/2 = -2 \\ x + ky \ = \ 2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1/2 & -2 \\ 1 & k & 2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2 \cdot 2^a + 1^a \\ 2 \cdot 3^a - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k+1 & 0 \end{array}\right)$

- Si $k = -\dfrac{1}{2} \to$ Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$2x - y = 4 \to \left\{\begin{array}{l} y = 2x - 4 \\ x = \lambda \end{array}\right.$

Soluciones: $(\lambda, 2\lambda - 4)$

- Si $k \neq -\dfrac{1}{2} \to$ Sistema *compatible determinado*.

$\left.\begin{array}{r} 2x - \qquad y = 4 \\ (2k + 1)y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 2 \end{array}$

Solución: $(2, 0)$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x + \ y - \ z = 1 \\ x - 2y + \ z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 5 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & m - 15 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & m - 10 \end{array}\right)$

- Si $m = 10 \to$ Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$\left.\begin{array}{r} x - 2y + \ z = \ 3 \\ 5y - 3z = -5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{-5 + 3z}{5} = -1 + \dfrac{3z}{5} \\ x = 3 + 2y - z = 3 - 2 + \dfrac{6z}{5} - z = 1 + \dfrac{z}{5} \end{array}$

Haciendo $z = 5\lambda$.

Soluciones: $(1 + \lambda, -1 + 3\lambda, 5\lambda)$

- Si $m \neq 10 \to$ *Incompatible*

16 **S** **Resuelve por el método de Gauss el siguiente sistema e interprétalo geométricamente:**

$\left\{\begin{array}{l} x - 3y - \ z = -1 \\ x + 5y + 3z = \ 3 \\ x + \ y + \ z = \ 1 \\ 3x + 7y + 5z = \ 5 \end{array}\right.$

$$\left.\begin{array}{r} x - 3y - z = -1 \\ x + 5y + 3z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 7y + 5z = 5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{3^a \\ 2^a \\ 1^a \\ 4^a}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 3 \cdot 1^a}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a + 2^a \\ 4^a - 2^a}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2y + z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 1 - 2y \\ x = 1 - y - z = y \\ y = \lambda \end{array}$$

Soluciones: $(\lambda, \lambda, 1 - 2\lambda)$. Son cuatro planos con una recta en común.

17 S **Resuelve cada uno de los siguientes sistemas para los valores de m que lo hacen compatible:**

a) $\left\{\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = m \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \\ x + 2y + 5z = m \end{array}\right.$

a) $$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = m \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & m \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 4 \cdot 1^a}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & m - 12 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a : (-5) \\ 3^a - 2^a}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m - 7 \end{array}\right)$$

- Si $m = 7 \to$ Sistema *compatible determinado*

  $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ y = 1 \end{array}\right\} \; x = 3 - 2y = 1$

  Solución: $(1, 1)$

- Si $m \neq 7 \to$ Sistema *incompatible*

b) $$\left.\begin{array}{r} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \\ x + 2y + 5z = m \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & m \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \\ 4^a - 1^a}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & m - 2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \\ 4^a - 2^a}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m + 1 \end{array}\right)$$

- Si $m = -1 \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado*.

$$\left.\begin{array}{r} x - y - 2z = 2 \\ 3y + 7z = -3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{-3-7z}{3} = -1 - \dfrac{7z}{3} \\ x = 2 + y + 2z = 2 - 1 - \dfrac{7z}{3} + 2z = 1 - \dfrac{z}{3} \end{array}$$

Haciendo $z = 3\lambda$:

Soluciones: $(1 - \lambda, -1 - 7\lambda, 3\lambda)$

- Si $m \neq -1 \rightarrow$ Sistema *incompatible*

18 **S** **Discute y resuelve en función del parámetro:**

a) $\left\{\begin{array}{l} -x + my + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x - 3z = -2 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + y + z = 3 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} -x + my + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x - 3z = -2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & m & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} -3^a \\ 2^a \\ 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & m & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & m & 4 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ -2^a \\ 3^a + 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

- Si $m = 1 \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado*

$$\left.\begin{array}{r} x + 3z = 2 \\ y + 4z = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 2 - 3z \\ y = 4 - 4z \\ z = \lambda \end{array}\right\}$$

Soluciones: $(2 - 3\lambda, 4 - 4\lambda, \lambda)$

- Si $m \neq 1 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado*

$$\left.\begin{array}{r} x + 3z = 2 \\ y + 4z = 4 \\ (m-1)y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ z = 1 \\ x = 2 - 3z = -1 \end{array}\right\}$$

Solución: $(-1, 0, 1)$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + y + z = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & a & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 3^a \\ 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & a & 5 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & a-3 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ -2^a \\ 3^a - 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & a-2 & 2 \end{array}\right)$

- Si $a = 2 \rightarrow$ Sistema *incompatible*

• Si $a \neq 2 \;\rightarrow\;$ Sistema *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + \quad z = 0 \\ y + \quad z = -3 \\ (a-2)z = 2 \end{array}\right\}$$

$$z = \frac{2}{a-2}$$

$$y = -3 - z = -3 - \frac{2}{a-2} = \frac{4-3a}{a-2}$$

$$x = -y - z = \frac{-4+3a}{a-2} - \frac{2}{a-2} = \frac{3a-6}{a-2}$$

Solución: $\left(\dfrac{3a-6}{a-2}, \dfrac{4-3a}{a-2}, \dfrac{2}{a-2}\right)$

19 S **Discute los siguientes sistemas según los valores de α e interprétalos geométricamente:**

a) $\left\{\begin{array}{l} \alpha x - y = 1 \\ x - \alpha y = 2\alpha - 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x - y = 1 \\ 2x + 3y - 5z = -16 \\ x + \alpha y - z = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} \alpha x - y = 1 \\ x - \alpha y = 2\alpha - 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & -1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 2\alpha - 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\alpha \neq 0]{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \cdot \alpha - 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & -1 & 1 \\ 0 & 1-\alpha^2 & 2\alpha^2 - \alpha - 1 \end{array}\right)$

• Si $\alpha \neq 1$, queda:

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Sistema *compatible indeterminado*. Son dos rectas coincidentes.

• Si $\alpha = -1$, queda:

$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Sistema *incompatible*. Son dos rectas paralelas.

• Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -1 \;\rightarrow\;$ Sistema *compatible determinado*. Son dos rectas secantes.

b) $\left.\begin{array}{l} x - y = 1 \\ 2x + 3y - 5z = -16 \\ x + \alpha y - z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -16 \\ 1 & \alpha & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -18 \\ 0 & \alpha + 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 5 \cdot 3^a - 2^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -18 \\ 0 & 5\alpha & 0 & 13 \end{array}\right)$

• Si $\alpha \neq 0 \;\rightarrow\;$ Sistema *compatible determinado*. Son tres planos que se cortan en un punto.

• Si $\alpha = 0 \;\rightarrow\;$ Sistema *incompatible*. Los planos se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a los tres.

20 **S** **Se considera el sistema de ecuaciones lineales:**

$$\left\{\begin{array}{l} x + \quad 2y + 3z = 1 \\ x + \quad ay + 3z = 2 \\ 2x + (2 + a)y + 6z = 3 \end{array}\right.$$

a) Encuentra un valor de a para el cual el sistema sea incompatible.

b) Discute si existe algún valor del parámetro a para el cual el sistema sea compatible determinado.

c) Resuelve el sistema para $a = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} x + \quad 2y + 3z = 1 \\ x + \quad ay + 3z = 2 \\ 2x + (2 + a)y + 6z = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \\ 2 & (2+a) & 6 & 3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

a) $a = 2$

b) No existe ningún valor de a para el cual el sistema sea compatible determinado.

c) Si $a = 0$, queda:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1 \\ -2y \qquad\quad = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = -1/2 \\ x - 1 + 3z = 1 \quad \to \quad x = 2 - 3z \\ z = \lambda \end{array}$$

Soluciones: $\left(2 - 3\lambda, -\frac{1}{2}, \lambda\right)$

21 **S** **Considera el sistema de ecuaciones:**

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - 2y - \ z = \ \ 4 \\ x + 2y - 2z = -1 \\ x \qquad\ \ - \ z = \ \ 1 \end{array}\right.$$

a) ¿Existe una solución en la que y sea igual a 0?

b) Resuelve el sistema.

c) Interprétalo geométricamente.

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 2y - \ z = \ \ 4 \\ x + 2y - 2z = -1 \\ x \qquad\ \ - \ z = \ \ 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 4 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left.\begin{array}{l} x \qquad - z = \ \ 1 \\ \quad 2y - z = -2 \end{array}\right\}$$

a) $y = 0 \;\rightarrow\; \left.\begin{aligned} x - z &= 1 \\ -z &= -2 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} &z = 2 \\ &x = 1 + z = 3 \end{aligned}\right\}$

Solución: (3, 0, 2)

b) $\left.\begin{aligned} &x = 1 + z = 1 + 2y + 2 = 3 + 2y \\ &z = 2y + 2 \\ &y = \lambda \end{aligned}\right\}$

Soluciones: $(3 + 2\lambda, \lambda, 2\lambda + 2)$

c) Son tres planos que se cortan en una recta.

22 **Halla un número de tres cifras sabiendo que estas suman 9; que, si del número dado se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198, y que la cifra de las decenas es media aritmética de las otras dos.**

Llamamos x a la cifra de las unidades, y a la de las decenas y z a la cifra de las centenas.

$$z\ y\ x \;\rightarrow\; n^{\text{o}} = x + 10y + 100z$$

Tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} &x + y + z = 9 \\ &x + 10y + 100z - (z + 10y + 100x) = 198 \\ &y = \frac{x+z}{2} \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x + y + z &= 9 \\ -99x + 99z &= 198 \\ 2y &= x + z \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 9 \\ -x \qquad + z &= 2 \\ x - 2y + z &= 0 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 2^{\text{a}} \\ 1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} + 1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} + 1^{\text{a}} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} : 2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} + 2^{\text{a}} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} -x \quad + z &= 2 \\ y + 2z &= 11 \\ 3z &= 12 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} &z = 4 \\ &y = 11 - 2z = 11 - 8 = 3 \\ &x = z - 2 = 2 \end{aligned}\right\}$$

Solución: El nº es el 432.

23 S **Dos amigos invierten 20 000 € cada uno. El primero coloca una cantidad A al 4% de interés, una cantidad B al 5% y el resto al 6%. El otro invierte la misma cantidad A al 5%, la B al 6% y el resto al 4%.**

Determina las cantidades A, B y C sabiendo que el primero obtiene unos intereses de 1 050 € y el segundo de 950 €.

$$\left.\begin{array}{r} A + B + C = 20\,000 \\ 0{,}04A + 0{,}05B + 0{,}06C = 1\,050 \\ 0{,}05A + 0{,}06B + 0{,}04C = 950 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} A + B + C = 20\,000 \\ 4A + 5B + 6C = 105\,000 \\ 5A + 6B + 4C = 95\,000 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20\,000 \\ 4 & 5 & 6 & 105\,000 \\ 5 & 6 & 4 & 95\,000 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 4 \cdot 1^a \\ 3^a - 5 \cdot 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20\,000 \\ 0 & 1 & 2 & 25\,000 \\ 0 & 1 & -1 & -5\,000 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ -3^a + 2^a \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20\,000 \\ 0 & 1 & 2 & 25\,000 \\ 0 & 0 & 3 & 30\,000 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} A + B + C = 20\,000 \\ B + 2C = 25\,000 \\ 3C = 30\,000 \end{array}\right\} \begin{array}{l} C = 10\,000 \\ B = 5\,000 \\ A = 5\,000 \end{array}$$

Solución: $A = 5\,000$ €; $B = 5\,000$ €; $C = 10\,000$ €

Página 48

24 S **Una tienda ha vendido 600 ejemplares de un videojuego por un total de 6 384 €. El precio original era de 12 €, pero también ha vendido copias defectuosas con descuentos del 30% y del 40%. Sabiendo que el número de copias defectuosas vendidas fue la mitad del de copias en buen estado, calcula a cuántas copias se le aplicó el 30% de descuento.**

Llamamos x al nº de copias vendidas al precio original, 12 €; y al nº de copias vendidas con un 30% de descuento, $0{,}7 \cdot 12 = 8{,}4$ €; y z al nº de copias vendidas con un 40% de descuento, $0{,}6 \cdot 12 = 7{,}2$ €.

Así:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ 12x + 8{,}4y + 7{,}2z = 6\,384 \\ y + z = \dfrac{x}{2} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ 12x + 8{,}4y + 7{,}2z = 6\,384 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 12 & 8{,}4 & 7{,}2 & 6\,384 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ -2^a + 12 \cdot 1^a \\ -3^a + 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & 3{,}6 & 4{,}8 & 816 \\ 0 & 3 & 3 & 600 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a : 3 \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & 3{,}6 & 4{,}8 & 816 \\ 0 & 1 & 1 & 200 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 3^a \\ 2^a - 3{,}6 \cdot 3^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 1{,}2 & 96 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 600 \\ y + z = 200 \\ 1{,}2z = 96 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 80 \\ y = 120 \\ x = 400 \end{array}$$

Solución: El 30% de descuento se le aplicó a 120 copias.

25 S **Un cajero automático contiene 95 billetes de 10, 20 y 50 € y un total de 2 000 €. Si el número de billetes de 10 € es el doble que el número de billetes de 20 €, averigua cuántos billetes hay de cada tipo.**

Llamamos x al nº de billetes de 10 €; y al nº de billetes de 20 €; y z al nº de billetes de 50 €. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 95 \\ 10x + 20y + 50z = 2000 \\ x = 2y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + y + z = 95 \\ x + 2y + 5z = 200 \\ x = 2y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 3x + z = 95 \\ 4y + 5z = 200 \\ x = 2y \end{array}\right\}$$

$z = 95 - 3y$

$4y + 5(95 - 3y) = 200 \quad \to \quad 4y + 475 - 15y = 200 \quad \to \quad 275 = 11\,y$

$y = 25 \quad \to \quad z = 20 \quad \to \quad x = 50$

Solución: Hay 50 billetes de 10 €, 25 billetes de 20 € y 20 billetes de 50 €.

26 **Se dispone de tres cajas A, B y C con monedas de 1 euro. Se sabe que en total hay 36 euros. El número de monedas de A excede en 2 a la suma de las monedas de las otras dos cajas. Si se traslada 1 moneda de la caja B a la caja A, esta tendrá el doble de monedas que B. Averigua cuántas monedas había en cada caja.**

Llamamos x al nº de monedas que hay en la caja A, y al nº de monedas que hay en la caja B, y z al nº de monedas que hay en la caja C. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 36 \\ x = y + z + 2 \\ x + 1 = 2(y - 1) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + y + z = 36 \\ x - y - z = 2 \\ x + 1 = 2y - 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + y + z = 36 \\ x - y - z = 2 \\ x - 2y = -3 \end{array}\right\}$$

Sumando las dos primeras ecuaciones: $2x = 38 \quad \to \quad x = 19$

De la 3ª ecuación $\quad \to \quad y = \dfrac{x + 3}{2} = 11$

$z = 36 - y - x = 6$

Solución: Había 19 monedas en la caja A, 11 en la B y 6 en la C.

27 **Un especulador adquiere 3 objetos de arte por un precio total de 2 millones de euros. Vendiéndolos, espera obtener de ellos unas ganancias del 20%, del 50% y del 25%, respectivamente, con lo que su beneficio total sería de 600 000 €. Pero consigue más, pues con la venta obtiene ganancias del 80%, del 90% y del 85%, respectivamente, lo que le da un beneficio total de 1,7 millones de euros. ¿Cuánto le costó cada objeto?**

Llamamos x a lo que le costó el 1er objeto (en millones de euros), y a lo que le costó el 2º objeto y z a lo que le costó el 3er objeto. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 0{,}2x + 0{,}5y + 0{,}25z = 0{,}6 \\ 0{,}8x + 0{,}9y + 0{,}85z = 1{,}7 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 2x + 5y + 2{,}5z = 6 \\ 8x + 9y + 8{,}5z = 17 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2{,}5 & 6 \\ 8 & 9 & 8{,}5 & 17 \end{array}\right) \to$$

$$\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 8 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0,5 & 2 \\ 0 & 1 & 0,5 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 3^a \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0,5 & 1 \end{array}\right) \left.\begin{array}{r} x + y + \quad z = 2 \\ 2y \qquad = 1 \\ y + 0,5z = 1 \end{array}\right\}$$

$$y = 0,5 \qquad z = \frac{1 - y}{0,5} = 1 \qquad x = 2 - y - z = 0,5$$

Solución: El 1^er^ objeto le costó 0,5 millones de euros (500 000 €), el 2º le costó 0,5 millones de euros (500 000 €) y el 3º le costó 1 millón de euros (1 000 000 €).

28 **Una empresa dispone de 27 200 € para actividades de formación de sus cien empleados. Después de estudiar las necesidades de los empleados, se ha decidido organizar tres cursos: A, B y C. La subvención por persona para el curso A es de 400 €, para el curso B es de 160 €, y de 200 € para el C. Si la cantidad que se dedica al curso A es cinco veces mayor que la correspondiente al B, ¿cuántos empleados siguen cada curso?**

Llamamos x al nº de empleados que siguen el curso A; y al nº de empleados que siguen el curso B, y z al nº de empleados que siguen el curso C. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad y + \quad z = 100 \\ 400x + 160y + 200z = 27\,200 \\ 400x \qquad\qquad = 5 \cdot 160y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + y + z = 100 \\ 10x + 4y + 5z = 680 \\ 400x \qquad = 800y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + y + z = 100 \\ 10x + 4y + 5z = 680 \\ x \qquad = 2y \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3y + \quad z = 100 \\ 24y + 5z = 680 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 100 - 3y \\ 24y + 5(100 - 3y) = 680 \end{array}$$

$$24y + 500 - 15y = 680 \rightarrow 9y = 180 \rightarrow y = 20 \rightarrow z = 40; \; x = 40$$

Solución: 40 empleados siguen el curso A, 20 empleados siguen el curso B y 40 siguen el curso C.

29 **Un automóvil sube las cuestas a 54 km/h, las baja a 90 km/h y en llano marcha a 80 km/h. Para ir de A a B tarda 2 horas y 30 minutos, y para volver de B a A, 2 horas y 45 minutos. ¿Cuál es la longitud de camino llano entre A y B si sabemos que la distancia entre A y B es de 192 km?**

Llamamos x a la longitud de camino llano entre A y B, y a la longitud de cuesta arriba yendo de A a B y z a la longitud de cuesta abajo yendo de A a B. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 192 \text{ km} \\ \dfrac{x}{80} + \dfrac{y}{54} + \dfrac{z}{90} = 2,5 \text{ horas} \\ \dfrac{x}{80} + \dfrac{y}{90} + \dfrac{z}{54} = 2,75 \text{ horas} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + \quad y + \quad z = 192 \\ 27x + 40y + 24z = 5\,400 \\ 27x + 24y + 40z = 5\,940 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 192 \\ 27 & 40 & 24 & 5\,400 \\ 27 & 24 & 40 & 5\,940 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 27 \cdot 1^a \\ 3^a - 27 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 192 \\ 0 & 13 & -3 & 216 \\ 0 & -3 & 13 & 756 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \cdot 3 + 2^a \cdot 13 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 192 \\ 0 & 13 & -3 & 216 \\ 0 & 160 & 0 & 5076 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{r} x + y + z = 192 \\ 13y - 3z = 216 \\ 160y = 5076 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = 31{,}725 \text{ km} \\ z = 65{,}475 \text{ km} \\ x = 94{,}800 \text{ km} \end{array}$$

Solución: La longitud de camino llano entre A y B es de 94,8 Km.

30 S **Tres amigos acuerdan jugar tres partidas de dados de forma que, cuando uno pierda, entregará a cada uno de los otros dos una cantidad igual a la que cada uno posea en ese momento. Cada uno perdió una partida, y al final cada uno tenía 24 €. ¿Cuánto tenía cada jugador al comenzar?**

Hacemos una tabla que resuma la situación:

	COMIENZO	1ª PARTIDA	2ª PARTIDA	3ª PARTIDA
1º QUE PIERDE	x	$x - y - z$	$2x - 2y - 2z$	$4x - 4y - 4z$
2º QUE PIERDE	y	$2y$	$-x + 3y - z$	$-2x + 6y - 2z$
3º QUE PIERDE	z	$2z$	$4z$	$-x - y + 7z$

$$\left.\begin{array}{r} 4x - 4y - 4z = 24 \\ -2x + 6y - 2z = 24 \\ -x - y + 7z = 24 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x - y - z = 6 \\ -x + 3y - z = 12 \\ -x - y + 7z = 24 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & -1 & 12 \\ -1 & -1 & 7 & 24 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a + 1^a \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 18 \\ 0 & -2 & 6 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a : 2 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & -1 & 3 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 24 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x - y - z = 6 \\ y - z = 9 \\ 2z = 24 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} z = 12 \\ y = 9 + z = 21 \\ x = 6 + y + z = 39 \end{array}\right\}$$

Solución: El jugador que perdió primero tenía 39 euros, el que perdió en 2º lugar tenía 21 € y el que perdió en 3er lugar tenía 12 €.

31 S **La edad de un padre es doble de la suma de las edades de sus dos hijos, mientras que hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos) la edad del padre era triple que la suma de las edades en aquel tiempo de sus hijos. Cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, entre los tres sumarán 150 años. ¿Qué edad tenía el padre cuando nacieron sus hijos?**

Hacemos una tabla:

	EDAD ACTUAL	HACE $y - z$ AÑOS	DENTRO DE $y + z$ AÑOS
PADRE	x	$x - y + z$	$x + y + z$
1er HIJO	y	$y - y + z = z$	$2y + x$
2º HIJO	z	$z - y + z = -y + 2z$	$y + 2z$

Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2(y + z) \\ x - y + z = 3(-y + 3z) \\ x + y + z + 2y + z + y + 2z = 150 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2y + 2z \\ x - y + z = -3y + 9z \\ x + 4y + 4z = 150 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x - 2y - 2z = 0 \\ x + 2y - 8z = 0 \\ x + 4y + 4z = 150 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -8 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 150 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 150 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a : 6 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 25 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 3^a \\ 3^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -50 \\ 0 & 1 & 1 & 25 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y - 2z = 0 \\ -5z = -50 \\ y + z = 25 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z = 10 \\ y = 25 - z = 15 \\ x = 2y + 2z = 50 \end{array}\right\} \text{Actualmente tienen estas edades.}$$

Solución: Cuando nació el 1^er^ hijo, el padre tenía 35 años; cuando nació el 2º hijo, tenía 40 años.

32
S **Un fabricante produce 42 electrodomésticos. La fábrica abastece a 3 tiendas, que demandan toda la producción. En una cierta semana, la primera tienda solicitó tantas unidades como la segunda y tercera juntas, mientras que la segunda pidió un 20% más que la suma de la mitad de lo pedido por la primera más la tercera parte de lo pedido por la tercera. ¿Qué cantidad solicitó cada una?**

Llamamos x a la cantidad que solicitó la 1ª tienda, y a la que solicitó la 2ª tienda y z a la que solicitó la 3ª tienda. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 42 \\ x = y + z \\ y = 1{,}2\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{z}{3}\right) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + y + z = 42 \\ x - y - z = 0 \\ 6y = 3{,}6x + 2{,}4z \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x + y + z = 42 \\ 60y = 36x + 24z \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x + y + z = 42 \\ 5y = 3x + 2z \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x - y - z = 0 \\ x + y + z = 42 \\ 3x - 5y + 2z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 42 \\ 3 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 42 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a + 2^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & 7 & 42 \end{array}\right) \left.\begin{array}{r} x - y - z = 0 \\ y + z = 21 \\ 7z = 42 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 6 \\ y = 21 - z = 15 \\ x = y + z = 21 \end{array}$$

Solución: La 1ª tienda solicitó 21 electrodomésticos; la 2ª, 15; y la 3ª, 6.

CUESTIONES TEÓRICAS

33 **¿Para qué valores de a y b será compatible este sistema?**

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=a \\ x-y-z=b \end{array}\right. \quad \text{¿Será determinado?}$$

El sistema es compatible indeterminado para cualquier valor de a y b. (Luego, no es determinado para ningún valor de a y b).

34 **Prueba que, si en un sistema de ecuaciones S sumamos a una ecuación otra multiplicada por un número, el sistema resultante, S', es equivalente al primero.**

Cualquier solución del primero también lo es del segundo, y al revés.

35 **Si tenemos un sistema compatible indeterminado de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas, ¿se puede conseguir un sistema incompatible añadiendo una tercera ecuación?**

Sí. Por ejemplo:

$$\text{Incompatible} \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} x+2y=3 \\ 2x+4y=6 \end{array}\right\} \text{Compatible indeterminado} \\ \;\; x+2y=1 \end{array}\right.$$

36 **Si a un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas incompatible le agregamos otra ecuación, ¿podríamos lograr que fuera compatible indeterminado? ¿Y determinado? Justifica las respuestas.**

No. Si el sistema es incompatible, las dos ecuaciones iniciales son contradictorias. Añadiendo otra ecuación, no podemos cambiar este hecho; el sistema seguirá siendo incompatible.

Página 49

37 S **¿Es posible convertir este sistema en compatible indeterminado cambiando un signo?**

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x-y+z=1 \\ x+y-z=1 \end{array}\right.$$

Sí. Si cambiamos la 2ª ecuación por $x+y+z=1$, o bien, si cambiamos la 3ª ecuación por $x+y+z=1$, el sistema resultante será compatible indeterminado.

38 S **Dadas las ecuaciones:** $\left\{\begin{array}{l} 3x-2y+z=5 \\ 2x-3y+z=-4 \end{array}\right.$

a) Añade una ecuación para que el sistema sea incompatible.

b) Añade una ecuación para que el sistema sea compatible determinado.

Justifica en cada caso el procedimiento seguido.

a) Para que sea incompatible, la ecuación que añadamos ha de ser de la forma:

$a(3x - 2y + z) + b(2x - 3y + z) = k$ con $k \neq 5a - 4b$.

Si tomamos, por ejemplo, $a = 1$, $b = 0$, $k = 1$, queda:

$3x - 2y + z = 1$

Añadiendo esta ecuación, el sistema sería incompatible.

b) Por ejemplo, añadiendo $y = 0$, queda:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \\ \quad\quad y \quad\quad = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3x \quad + z = 5 \\ 2x \quad + z = -4 \\ \quad y \quad\quad = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 9 \\ y = 0 \\ z = -22 \end{array}\right\} \text{ Compatible determinado}$$

39 S **Define cuándo dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes. Justifica si son equivalentes o no los siguientes sistemas:**

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y - z = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes cuando todas las soluciones del 1er sistema lo son también del 2º, y al revés.

Los dos sistemas dados no son equivalentes, puesto que el 1º es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones) y el 2º es determinado (solo tiene una solución).

40 S **Encuentra razonadamente dos valores del parámetro a para los cuales el siguiente sistema sea incompatible:**

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ ax + y + 2z = 1 \\ x \quad\quad + 3z = 2 \\ 2x \quad\quad + az = 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ ax + y + 2z = 1 \\ x \quad\quad + 3z = 2 \\ 2x \quad\quad + az = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & a & 3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a \\ 4^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & a & 3 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 4^a - 2 \cdot 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & a-6 & -1 \end{array}\right)$$

Si $a = 1$ o $a = 6$, el sistema es incompatible.

41 S **Sean S y S' dos sistemas equivalentes con solución única que tienen iguales los términos independientes. ¿Podemos asegurar que tienen iguales los coeficientes de las incógnitas?**

No. Por ejemplo, los sistemas:

$$S: \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad S': \begin{cases} 2x - \ \ y = 3 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

son equivalentes, con solución única $(2, 1)$, tienen iguales los términos independientes, pero no los coeficientes de las incógnitas.

PARA PROFUNDIZAR

42 **S** **Discute los siguientes sistemas en función del parámetro a y resuélvelos en el caso en que sean compatibles indeterminados:**

$$\textbf{a)} \begin{cases} x + \ \ y + \ \ z = a - 1 \\ 2x + \ \ y + az = a \\ x + ay + \ \ z = 1 \end{cases} \qquad \textbf{b)} \begin{cases} ax + \ \ y - z = 0 \\ 2x + ay \qquad = 2 \\ -x \qquad\quad + z = 1 \end{cases}$$

a) $\left.\begin{array}{l} x + \ \ y + \ \ z = a - 1 \\ 2x + \ \ y + az = a \\ x + ay + \ \ z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} - 2 \cdot 1^{a} \\ 3^{a} - 1^{a} \end{array}}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 0 & -1 & a-2 & -a+2 \\ 0 & a-1 & 0 & 2-a \end{array}\right)$$

- Si $a = 1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \text{Sistema } \textit{incompatible}$$

- Si $a = 2$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} + 3^{a} \\ 3^{a} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$\rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado*

Lo resolvemos en este caso:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ \quad y \qquad = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + \qquad z = 1 \rightarrow \ x = 1 - z \\ \qquad y \qquad = 0 \\ \qquad\qquad z = \lambda \end{array}\right\}$$

Soluciones: $(1 - \lambda, 0, \lambda)$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$ $\rightarrow$ Sistema *compatible determinado*

b) $\left.\begin{array}{rl} ax + \ \ y - z &= 0 \\ 2x + ay \quad &= 2 \\ -x \qquad + z &= 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & 0 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{matrix} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ a & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 1^a \end{matrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ a-1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \underset{a \neq 0}{\begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ -a \cdot 3^a + 2^a \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ -a^2 + a + 2 & 0 & 0 & 2 - a \end{array}\right)$$

$$-a^2 + a + 2 = 0 \quad \longrightarrow \quad a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} \begin{cases} a = -1 \\ a = \ \ 2 \end{cases}$$

- Si $a = -1$, queda:

  $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow$ Sistema *incompatible*

- Si $a = 2$, queda:

  $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left.\begin{array}{rl} -x \quad + z &= 1 \\ x + y \quad &= 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 1 + x \\ y = 1 - x \\ x = \lambda \end{array}$

  Sistema *compatible indeterminado*

  Soluciones: $(\lambda, 1 - \lambda, 1 + \lambda)$

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 2 \longrightarrow$ Sistema *compatible determinado*

43 S **Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro *a*. Interprétalo geométricamente:**

$$\left\{\begin{array}{r} \boldsymbol{ax + \ \ y + z - 4 = 0} \\ \boldsymbol{x + \ \ y + z + 1 = 0} \\ \boldsymbol{x - ay + z - 1 = 0} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} ax + \ \ y + z - 4 = 0 \\ x + \ \ y + z + 1 = 0 \\ x - ay + z - 1 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} ax + \ \ y + z = \ \ 4 \\ x + \ \ y + z = -1 \\ x - ay + z = \ \ 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ a-1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -a-1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

- Si $a = 1$, queda:

  $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow$ Sistema *incompatible*

  Los dos primeros planos son paralelos y el tercero los corta.

• Si $a = -1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$ Sistema *incompatible*

Los dos últimos planos son paralelos y el primero los corta.

• Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$ $\rightarrow$ Sistema *compatible determinado*. Son tres planos que se cortan en un punto.

PARA PENSAR UN POCO MÁS

44 **Resuelve el siguiente sistema:**

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + y + z + t = 17} \\ \boldsymbol{x + y + z + w = 16} \\ \boldsymbol{x + y + t + w = 15} \\ \boldsymbol{x + z + t + w = 14} \\ \boldsymbol{ y + z + t + w = 14} \end{array}\right.$$

Si sumas las cinco igualdades, obtendrás otra con la que se te pueden simplificar mucho los cálculos.

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = 17 \\ x + y + z + w = 16 \\ x + y + t + w = 15 \\ x + z + t + w = 14 \\ y + z + t + w = 14 \end{array}\right\}$$

Sumando las cinco igualdades, obtenemos:

$4x + 4y + 4z + 4t + 4w = 76$, es decir:

$4(x + y + z + t + w) = 76$, o bien:

$x + y + z + t + w = 19$

Por tanto:

$(x + y + z + t) + w = 17 + w = 19 \rightarrow w = 2$

$(x + y + z + w) + t = 16 + t = 19 \rightarrow t = 3$

$(x + y + t + w) + z = 15 + z = 19 \rightarrow z = 4$

$(x + z + t + w) + y = 14 + y = 19 \rightarrow y = 5$

$(y + z + t + w) + x = 14 + x = 19 \rightarrow x = 5$

45 **Nos dicen que x, y, z, t, w son números enteros y que k vale 36 ó 38. Decide razonadamente cuál de los dos es su valor y resuelve el sistema:**

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + y + z + t = 35} \\ \boldsymbol{x + y + z + w = 36} \\ \boldsymbol{x + y + t + w = 38} \\ \boldsymbol{x + z + t + w = 39} \\ \boldsymbol{ y + z + t + w = k} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = 35 \\ x + y + z + w = 36 \\ x + y + t + w = 38 \\ x + z + t + w = 39 \\ y + z + t + w = k \end{array}\right\}$$

Sumando las cinco igualdades, obtenemos:

$4x + 4y + 4z + 4t + 4w = 148 + k$, es decir:

$4(x + y + z + t + w) = 148 + k$, o bien:

$x + y + z + t + w = 37 + \dfrac{k}{4}$

Si x, y, z, t, w son números enteros, su suma también lo será; luego, k debe ser múltiplo de 4. Como nos dicen que vale 36 ó 38, tenemos que ha de ser $k = 36$ (pues 38 no es múltiplo de 4).

Resolvemos el sistema, ahora que sabemos que $k = 36$:

La suma de las cinco igualdades dará lugar a:

$$x + y + z + t + w = 37 + \frac{36}{4} = 37 + 9 = 46$$

Por tanto:

$$\begin{array}{lll} (x + y + z + t) + w = 35 + w = 46 & \to & w = 11 \\ (x + y + z + w) + t = 36 + t = 46 & \to & t = 10 \\ (x + y + t + w) + z = 38 + z = 46 & \to & z = 8 \\ (x + z + t + w) + y = 39 + y = 46 & \to & y = 7 \\ (y + z + t + w) + x = 36 + x = 46 & \to & x = 10 \end{array}$$

46 **Una cuadrilla de 5 obreros se compromete a podar los 222 árboles de una plantación. Trabajan de lunes a sábado. Cada día, cuatro de ellos podan y el quinto los atiende (repone herramientas, les da agua, recoge los troncos que caen...). Cada obrero poda el mismo número de árboles cada día, es decir, si Alberto poda 8 árboles un día, podará 8 árboles cada día que intervenga. Los resultados son:**

Lunes: 35 árboles podados.

Martes: 36 árboles podados.

Miércoles: 36 árboles podados.

Jueves: 38 árboles podados.

Viernes: 38 árboles podados.

Sábado: 39 árboles podados.

Calcula cuántos árboles diarios poda cada uno de los cinco obreros sabiendo que ninguno de ellos poda los seis días.

Llamamos:

w = nº de árboles diarios que poda el obrero que descansa el lunes.

t = nº de árboles diarios que poda el obrero que descansa el martes.

(Es otro el que descansa, pues la suma es diferente).

z = nº de árboles diarios que poda el que descansa el jueves.

(Es otro distinto, pues la suma es diferente).

y = nº de árboles diarios que poda el que descansa el sábado.

(Es otro, pues la suma es distinta a las anteriores).

x = nº de árboles diarios que poda el obrero que falta.

(Descansará el miércoles o el viernes; coincidirá con t o con z).

Así, el nº de árboles que se podan cada día será:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = 35 \\ x + y + z + w = 36 \\ x + y + t + w = 38 \\ x + z + t + w = 39 \\ y + z + t + w = k \\ k \text{ puede ser } 36 \text{ ó } 38 \end{array}\right\} \quad x,\ y,\ z,\ t,\ w \text{ son enteros}$$

Se trata de resolver este sistema.

Por el ejercicio anterior, sabemos que $k = 36$; y que:

$$x = 10,\ \ y = 7,\ \ z = 8,\ \ t = 10,\ \ w = 11$$

Por tanto, el que poda 11 árboles descansa el lunes, uno de los que podan 10 árboles descansa el martes, el que poda 8 árboles descansa el jueves y el viernes, el que poda 7 árboles descansa el sábado y el otro que poda 10 árboles, descansa el miércoles.