2º de Bachillerato Ciencias

Matemáticas II

Ejercicios de Sistemas de ecuaciones resueltos

(Solucionario libro)

Colegio Maravillas

Recopilados por: Teresa González

1.- (7)

Discute estos sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss.

a) $\left.\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 1 \\ -x - y + z &= 0 \\ y - z &= 1 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} -2x + y - z &= 1 \\ 2x - 2y - z &= 3 \\ -y - 2z &= 7 \end{aligned}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$

Sistema incompatible

2.- (11)

Escribe mediante ecuaciones este sistema, y resuélvelo aplicando el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 1 \\ -2x + y - z &= -2 \\ -2y + z &= -1 \end{aligned}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \to \left.\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 1 \\ 5y - 5z &= 0 \\ -5z &= -5 \end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}\right.$$

3.- (12)

Determina la expresión matricial de este sistema, y resuélvelo como si fuera una ecuación matricial.

$$\left.\begin{aligned} -3x + y + 2z &= 0 \\ -x - 2y + z &= -2 \\ x - y + z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to B = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$$

$$|A| = 11 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

4.- (19)

Evalúa si se puede aplicar la regla de Cramer a este sistema, y si se puede, calcula $|A_x|$, $|A_y|$ y $|A_z|$ y resuelve el sistema.

$$\left.\begin{aligned} -x + 2y - z &= 2 \\ x - y + 2z &= 1 \\ -2x + z &= -1 \end{aligned}\right\}$$

El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \rightarrow \text{Se puede aplicar la regla de Cramer.}$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7 \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = 1$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -14 \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = 2$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -7 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = 1$$

5.- (14)

Utiliza el teorema de Rouché-Fröbenius para determinar si estos sistemas son compatibles, y resuélvelos aplicando el método de Gauss.

a) $\left.\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -2 \\ -x - y + 2z &= 0 \\ x - 4y + 3z &= -2 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 1 \\ -2x - 3y + z &= 0 \\ -x - z &= 7 \end{aligned}\right\}$

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & -2 \end{array}\right)$

$|A| = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango } (A^*) = 2$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} x - 4y + 3z &= -2 \\ -5y + 5z &= -2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-2 + 5\lambda}{5} \\ y = \dfrac{2 + 5\lambda}{5} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

$|A| = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 18 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A^*) = 3$

Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible

6.- (21)

Resuelve estos sistemas de ecuaciones mediante la regla de Cramer.

a) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y-3z=0 \\ x-\ \ y+4z=1 \\ 2x+3y-7z=-1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x+\ \ y-\ \ z=\ \ 0 \\ x-\ \ y+\ \ z=\ \ 1 \\ 2x+4y-4z=-1 \end{array}\right\}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas

Sistema compatible indeterminado

Consideremos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 3x+2y=3z \\ x-\ \ y=1-4z \end{array}\right\}$

$|A_x| = \begin{vmatrix} 3z & 2 \\ 1-4z & -1 \end{vmatrix} = 5z-2 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 3z \\ 1 & 1-4z \end{vmatrix} = 3-15z$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{5z-2}{-5} = \dfrac{2-5z}{5} \qquad y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{3-15z}{-5} = \dfrac{15z-3}{5}$

La solución es: $x = \dfrac{2-5\lambda}{5},\quad y = \dfrac{15\lambda-3}{5},\quad z=\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas

Sistema compatible indeterminado

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} x+y=z \\ x-y=1-z \end{array}\right\}$

$|A_x| = \begin{vmatrix} z & 1 \\ 1-z & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & z \\ 1 & 1-z \end{vmatrix} = 1-2z$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{1}{2} \qquad y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{1-2z}{-2} = \dfrac{2z-1}{2}$

La solución es: $x = \dfrac{1}{2},\quad y = \dfrac{2\lambda-1}{2},\quad z=\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

7.- (26)

Discute el sistema según los valores de a.

$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+\ \ z=0 \\ x-ay-3z=0 \\ 5x+3y-\ \ z=0 \end{array}\right\}$$

El sistema es homogéneo $\rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) $\rightarrow$ Sistema compatible

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -a & -3 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 7a+63$$

- Si $a \neq -9 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = -9 \rightarrow |A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2 < \text{n.º de incógnitas}$$

Sistema compatible indeterminado

8.- (27)

Resuelve este sistema en función de los valores de m.

$$\left.\begin{array}{r} -x+\ \ y-\ \ z=-1 \\ 4x-2y+\ 2z=2m \\ -3x-2y+mz=-4 \end{array}\right\}$$

Si $m \neq 2 \rightarrow |A| = 4-2m \neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2m & -2 & 2 \\ -4 & -2 & m \end{vmatrix} = -2m^2+6m-4 = -2(1-m)(2-m)$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 2m & 2 \\ -3 & -4 & m \end{vmatrix} = -2(m^2+m-7) \quad |A_z| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2m \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 22-10m$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-2(1-m)(2-m)}{4-2m} = -1+m$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-2(m^2+m-7)}{4-2m} = \frac{m^2+m-7}{m-2}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{22-10m}{4-2m} = \frac{5m-11}{m-2}$$

9.- (28)

Resuelve el sistema según los valores de a.

$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+\ \ z=0 \\ x-ay-3z=0 \\ 5x+3y-\ \ z=0 \end{array}\right\}$$

- Si $a \neq -9 \rightarrow |A| = 7a+63 \neq 0$
  Como el sistema es homogéneo la solución es: $x=0,\ y=0,\ \text{y}\ z=0$
- Si $a=-9 \rightarrow |A|=0$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0 \rightarrow$ Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2x-3y=-z \\ x+9y=\ 3z \end{array}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -z & -3 \\ 3z & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 2 & -z \\ 1 & 3z \end{vmatrix} = 7z$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 0 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{7z}{21} = \frac{z}{3}$$

La solución es: $x=0,\quad y=\dfrac{\lambda}{3},\quad z=\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

10.- (40)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde a y b son números reales, halle los valores de a y b que hacen que las dos matrices conmuten, es decir, que hacen que se cumpla $AB=BA$.

(Cataluña. Año 2005. Serie 4. Cuestión 1)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = BA \rightarrow \left.\begin{array}{c} 1=1 \\ a+b=a+b \\ 0=0 \\ 1=1 \end{array}\right\}$$

Los productos son iguales para cualquier valor de a y de b.

11.- (41)

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \end{pmatrix}$.

¿Qué condiciones han de cumplir x, y y z para que las matrices A y B conmuten, es decir, para que $AB=BA$?

(Cantabria. Septiembre 2005. Bloque 2. Opción B)

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2z & y\\ 3x+4z & 3y\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}x & y\\ z & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3y & 2x+4y\\ z & 2z\end{pmatrix}$$

$$AB=BA\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+2z=x+3y\\ y=2x+4y\\ 3x+4z=z\\ 3y=2z\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}3y-2z=0\\ 2x+3y\qquad=0\\ 3x\qquad+3z=0\\ 3y-2z=0\end{array}\right\}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 3 & -2 & 0\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & -9 & 6 & 0\\ 0 & 3 & -2 & 0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & -9 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left.\begin{array}{r}2x+3y\qquad=0\\ -9y+6z=0\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-3\lambda\\ y=\ \ 2\lambda\\ z=\ \ 3\lambda\end{array}\right.\ \text{con } \lambda\in\mathbb{R}$$

12.- (42)

Escribe mediante ecuaciones estos sistemas.

a) $\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\\ 1 & 5\\ -6 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 4\\ 2\\ 5\end{pmatrix}$

a) $\left.\begin{array}{r}2x+3y+5z=3\\ x+2y-\ \ z=-1\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}a+4b=-1\\ 2a+3b=4\\ a+5b=2\\ -6a+7b=5\end{array}\right\}$

13.- (43)

Escribe en forma matricial estos sistemas de ecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r}x+2y-3z=-2\\ -x-\ \ y+2z=3\\ 3y-5z=0\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}x+y-\ \ z+t-\ \ v=-1\\ 2x-\qquad 3z+\qquad 6v=8\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}p+q+r-s=3\\ 2p-q+2s=5\\ q+3r-5s=-1\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}x+y-z=3\\ -x+z=-7\\ 2x+y+4z=5\\ 3y-9z=-1\end{array}\right\}$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

14.- (44)

Escribe en forma matricial, y luego resuelve empleando la matriz inversa.

a) $\left.\begin{array}{r} 4x - y = 18 \\ 3x + 2y = 8 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x - z = -7 \\ 2x + y - 3z = -26 \\ 4y + 2z = 0 \end{array}\right\}$

a) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$AX = B \to X = A^{-1}B$$

$$|A| = 11 \neq 0 \to A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{4}{11} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{4}{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -26 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$AX = B \to X = A^{-1}B$$

$$|A| = 6 \neq 0 \to A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7\\-26\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\\8\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}x=1\\y=-4\\z=8\end{cases}$$

15.- (45)

Discute los siguientes sistemas de ecuaciones lineales utilizando el teorema de Rouché-Fröbenius.

a) $\left.\begin{aligned}x+3y-5z&=-8\\3x+6y-5z&=0\\4x+9y-10z&=-8\end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned}8x-6y+2z&=-1\\3x+y-z&=10\\-x+3y-2z&=5\end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned}3a+2b-6c+3d&=7\\a-b+2c-d&=6\\6a-b&=3\end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned}a+5b&=7\\-2a+2b+3c&=-2\\-a+3b+2c&=1\\4b+c&=4\end{aligned}\right\}$

a) $A=\begin{pmatrix}1&3&-5\\3&6&-5\\4&9&-10\end{pmatrix}$ $\quad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-5&-8\\3&6&-5&0\\4&9&-10&-8\end{array}\right)$

$|A|=0$

$\begin{vmatrix}1&3\\4&9\end{vmatrix}=-3\neq 0\rightarrow \text{Rango }(A)=2$

$\begin{vmatrix}1&3&-8\\3&6&0\\4&9&-8\end{vmatrix}=0\rightarrow \text{Rango }(A^*)=2$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

b) $A=\begin{pmatrix}8&-6&2\\3&1&-1\\-1&3&-2\end{pmatrix}$ $\quad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}8&-6&2&-1\\3&1&-1&10\\-1&3&-2&5\end{array}\right)$

$|A|=-14\neq 0\rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
Sistema compatible determinado

c) $A=\begin{pmatrix}3&2&-6&3\\1&-1&2&-1\\6&-1&0&0\end{pmatrix}$ $\quad A^*=\left(\begin{array}{cccc|c}3&2&-6&3&7\\1&-1&2&-1&6\\6&-1&0&0&3\end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 6 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 110 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A^*) = 3$$

Rango $(A) \neq$ Rango $(A^*) \rightarrow$ Sistema incompatible

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 7 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 7 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 12 & 3 & 12 \\ 0 & 8 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Rango $(A^*) = 2$

Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

16.- (46)

Resuelve, aplicando la regla de Cramer, estos sistemas compatibles determinados.

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 2 \\ -3x - 2y = -1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3a + 2b + 2c = 1 \\ 2a + b + c = 0 \\ 3b + 2c = -1 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2a - 3b = 6 \\ -a + 5b = -3 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l} 3x + 5y = 33 + 2z \\ 3x = 19 - y \\ 10 + 3z = x + 2y \end{array}\right\}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3$ $\qquad$ $|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 4$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = 3$ $\qquad$ $y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = -4$

b) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$|A_a| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1$ $\quad$ $|A_b| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5$ $\quad$ $|A_c| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 7$

$a = \dfrac{|A_a|}{|A|} = -1$ $\qquad$ $b = \dfrac{|A_b|}{|A|} = -5$ $\qquad$ $c = \dfrac{|A_c|}{|A|} = 7$

c) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$|A_a| = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 21$ $\qquad$ $|A_b| = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$

$a = \dfrac{|A_a|}{|A|} = 3$ $\qquad$ $b = \dfrac{|A_b|}{|A|} = 0$

d) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 26 \neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$|A_x| = \begin{vmatrix} 33 & 5 & -2 \\ 19 & 1 & 0 \\ 10 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 130$ $\quad$ $|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 33 & -2 \\ 3 & 19 & 0 \\ 1 & 10 & -3 \end{vmatrix} = 104$ $\quad$ $|A_z| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 33 \\ 3 & 1 & 19 \\ 1 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 26$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = 5$ $\qquad$ $y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = 4$ $\qquad$ $z = \dfrac{|A_z|}{|A|} = 1$

17.- (47)

Resuelve, aplicando la regla de Cramer, estos sistemas compatibles indeterminados.

a) $\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 6 \\ -3x + y - 2z &= -3 \\ 2x - 3y + z &= -3 \end{aligned}\right\}$ $\qquad$ c) $\left.\begin{aligned} 2a - b &= 0 \\ 11a - b - 3c &= 0 \\ a - 2b + c &= 0 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x+y+z+t=4 \\ x-y+z=1 \\ y-z+t=1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 3p-3q+11r=0 \\ 4p+7r=0 \\ 5p+3q+3r=0 \\ -6p-6q+r=0 \end{array}\right\}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=7\neq 0 \to \left.\begin{array}{r} x+2y=6-z \\ -3x+y=-3+2z \end{array}\right\}$$

$$|A_x|=\begin{vmatrix} 6-z & 2 \\ -3+2z & 1 \end{vmatrix}=12-5z \qquad |A_y|=\begin{vmatrix} 1 & 6-z \\ -3 & -3+2z \end{vmatrix}=15-z$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{12-5z}{7} \qquad y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{15-z}{7}$$

La solución es: $x=\dfrac{12-5\lambda}{7}$, $y=\dfrac{15-\lambda}{7}$, $z=\lambda$ con $\lambda\in\mathbb{R}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=2\neq 0 \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=4-t \\ x-y+z=1 \\ y-z=1-t \end{array}\right\}$

$$|A_x|=\begin{vmatrix} 4-t & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1-t & 1 & -1 \end{vmatrix}=4-2t \to x=\frac{|A_x|}{|A|}=2-t$$

$$|A_y|=\begin{vmatrix} 1 & 4-t & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-t & -1 \end{vmatrix}=3-t \to y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{3-t}{2}$$

$$|A_z|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4-t \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{vmatrix}=1+t \to z=\frac{|A_z|}{|A|}=\frac{1+t}{2}$$

La solución es: $x=2-\lambda$, $y=\dfrac{3-\lambda}{2}$, $z=\dfrac{1+\lambda}{2}$, $t=\lambda$ con $\lambda=\mathbb{R}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 11 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 11 & -1 \end{vmatrix}=9\neq 0 \to \left.\begin{array}{r} 2a-b=0 \\ 11a-b=3c \end{array}\right\}$$

$$|A_a| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3c & -1 \end{vmatrix} = 3c \qquad |A_b| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 11 & 3c \end{vmatrix} = 6c$$

$$a = \frac{|A_a|}{|A|} = \frac{c}{3} \qquad b = \frac{|A_b|}{|A|} = \frac{2c}{3}$$

La solución es: $a = \dfrac{\lambda}{3}$, $b = \dfrac{2\lambda}{3}$, $c = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

d) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & 0 & 7 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & 0 & 7 \\ -6 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3p - 3q = -11r \\ 4p = -7r \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} p = -\dfrac{7}{4}\lambda \\ q = \dfrac{23}{12}\lambda \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \\ r = \lambda \end{cases}$$

18.- (49)

Discute el sistema de ecuaciones lineales según los distintos valores del parámetro m.

$$\left.\begin{array}{r} (m-2)x + y = 0 \\ x + (m-2)y = 0 \end{array}\right\}$$

Al ser un sistema homogéneo sabemos que es compatible para cualquier valor de m.

$$A = \begin{pmatrix} m-2 & 1 \\ 1 & m-2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m-2 & 1 \\ 1 & m-2 \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 3$$

$$m^2 - 4m + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \end{cases}$$

- Si $m \in \mathbb{R} - \{1, 3\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $m = 1$ o $m = 3 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 1 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

19.- (50)

Discute, en función de a, el sistema.

$$\left.\begin{aligned} ax + ay &= a \\ x - ay &= 1 \end{aligned}\right\}$$

(Castilla y León. Junio 2007. Prueba B. Cuestión 3)

$$A = \begin{pmatrix} a & a \\ 1 & -a \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} a & a & a \\ 1 & -a & 1 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 - a$$

$$-a^2 - a = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -1 \end{cases}$$

Al ser la última columna de la matriz A^* igual que la primera:

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-1, 0\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = -1$ o $a = 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 1 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

20.- (51)

El siguiente sistema de ecuaciones depende de un parámetro p. Discútelo según los valores de p.

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= p \\ 2x + 3y + z &= p \\ x + y - pz &= p \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -p \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & p \\ 2 & 3 & 1 & p \\ 1 & 1 & -p & p \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -p \end{vmatrix} = p \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & p \\ 2 & 3 & p \\ 1 & 1 & p \end{vmatrix} = -p$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

- Si $p \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $p = 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

21.- (52)

Discute el sistema según los valores de a.

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 2 \\ 5x + 2y + 4z &= -1 \\ 3x + y + a^2z &= 3a \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & a^2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & a^2 & 3a \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = 1 - a^2 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3a \end{vmatrix} = -3a - 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-1, 1\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = 1 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a = -1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

22.- (53)

Discute este sistema para los distintos valores de k.

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= 4 \\ 2x + y &= 5 \\ 4x - 3y &= k \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & k \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & k \end{vmatrix} = 5k - 65$$

- Si $k \neq 13 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $k = 13 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado

22.- (54)

Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los distintos valores del parámetro p.

$$\left.\begin{aligned} px + (p+1)z &= p \\ py + z &= p \\ y + pz &= p \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 & p+1 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 1 & p \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} p & 0 & p+1 & p \\ 0 & p & 1 & p \\ 0 & 1 & p & p \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} p & 0 & p+1 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 1 & p \end{vmatrix} = p(p^2-1) \qquad \begin{vmatrix} p & 0 & p \\ 0 & p & p \\ 0 & 1 & p \end{vmatrix} = p(p^2-p) = p^2(p-1)$$

- Si $p \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado

- Si $p = -1$, como $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema incompatible

- Si $p = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

  Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

- Si $p = 1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

23.- (55)

¿Qué valores debe tomar a en el siguiente sistema de ecuaciones lineales para que sea incompatible?

$$\left.\begin{aligned} x + (a-1)y + z &= 1 \\ 3x + ay + az &= 3 \end{aligned}\right\}$$

¿Y para que sea compatible?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ 3 & a & a \end{pmatrix}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & 1 & 1 \\ 3 & a & a & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = 3-2a \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a-3$$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas para cualquier valor de a
Sistema compatible indeterminado para cualquier valor de a

24.- (56)

Clasifica el siguiente sistema para los distintos valores del parámetro p.

$$\left.\begin{aligned} a+pb-2c&=0 \\ pb+c&=0 \\ 3a+2b-c&=0 \end{aligned}\right\}$$

Al ser un sistema homogéneo sabemos que es compatible para cualquier valor de p.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & p & -2 \\ 0 & p & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & p & -2 \\ 0 & p & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 8p-2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

- Si $p \neq \frac{1}{4} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $p = \frac{1}{4} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

25.- (58)

Averigüe si el siguiente sistema puede ser compatible indeterminado para algún valor de m.

$$\left.\begin{aligned} x+3y+2z&=0 \\ 2x+4y+3z&=0 \\ x+y+mz&=0 \end{aligned}\right\}$$

¿Es incompatible para algún valor de m?

(Cataluña. Junio 2006. Cuestión 2)

Al ser un sistema homogéneo sabemos que es compatible para cualquier valor de m.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = 2-2m$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

- Si $m \neq 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $m = 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

El sistema no es incompatible para ningún valor de m.

26.- (59)

Discute el sistema de ecuaciones lineales según los valores de b.

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ x + (1+b)y - bz &= 2b \\ x + by + (1+b)z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

(Extremadura. Junio 2006. Repertorio B. Ejercicio 4)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1+b & -b & 2b \\ 1 & b & 1+b & 1 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{vmatrix} = 2b^2 - 2b = 2b(b-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1+b & 2b \\ 1 & b & b \end{vmatrix} = -b^2 + 3b - 2 = -(b-1)(b-2)$$

- Si $b \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $b = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema incompatible
- Si $b = 1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

27.- (60)

Discutir la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a.

$$\left.\begin{aligned} x - y + z &= a \\ x + y - z &= 1 \\ 3x + 3y + az &= a \end{aligned}\right\}$$

(País Vasco. Julio 2006. Bloque A. Problema A)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & a \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & a & a \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & a \end{vmatrix} = 2a + 6 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & a \end{vmatrix} = 2a - 6$$

- Si $a \neq -3 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = -3 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema incompatible

28.- (61)

Estudie, según los valores del parámetro a, el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\left.\begin{aligned} ax + ay &= a \\ x - y + az &= a \\ x + 2y + 3z &= a \end{aligned}\right\}$$

(Murcia. Junio 2006. Bloque 1. Cuestión A)

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} a & a & 0 & a \\ 1 & -1 & a & a \\ 1 & 2 & 3 & a \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -a(a+6) \qquad \begin{vmatrix} a & a & a \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = -3a(a-1)$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-6, 0\} \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = -6 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a = 0 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

29.- (64)

Discute este sistema y resuélvelo cuando $m = 6$.

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + 3y &= 0 \\ x - 2y + mz &= m \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & m \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & m & m \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & m \end{vmatrix} = m - 7 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & m \end{vmatrix} = m$$

- Si $m \neq 7 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $m = 7 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema incompatible
- Si $m = 6 \rightarrow |A| = -1$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -18 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 12 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 18 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = -12 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = -6$$

29.- (65)

Se considera el sistema $\left.\begin{array}{r} x + y + az = 4 \\ ax + y - z = 0 \\ 2x + 2y - z = 2 \end{array}\right\}$, donde a es un parámetro real.

a) Discutir el sistema en función del valor de a.

b) Resolver el sistema para $a = 1$.

(Castilla y León. Septiembre 2007. Prueba A. Problema 1)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 4 \\ a & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2a^2 - a - 1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ a & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6a - 6$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$2a^2 - a - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}, 1\right\} \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema compatible determinado
- Si $a = -\dfrac{1}{2} \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a = 1 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

b) Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} y - z = -x \\ 2y - z = 2 - 2x \end{array}\right\}$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 2 - 2x & -1 \end{vmatrix} = 2 - x \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -x \\ 2 & 2 - 2x \end{vmatrix} = 2$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = 2 - x \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = 2$$

La solución es: $x = \lambda, \quad y = 2 - \lambda, \quad z = 2$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

30.- (66)

Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned}(m+2)x+(m-1)y-z&=3\\ mx-y+z&=2\\ x+my-z&=0\end{aligned}\right\}$$

a) Discútelo para los distintos valores de m.

b) Resuélvelo para $m=1$.

(Castilla-La Mancha. Junio 2004. Bloque 2. Pregunta B)

a) $A=\begin{pmatrix} m+2 & m-1 & -1\\ m & -1 & 1\\ 1 & m & -1\end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} m+2 & m-1 & -1 & 3\\ m & -1 & 1 & 2\\ 1 & m & -1 & 0\end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix} m+2 & m-1 & -1\\ m & -1 & 1\\ 1 & m & -1\end{vmatrix}=-m^2-m$ $\qquad \begin{vmatrix} m-1 & -1 & 3\\ -1 & 1 & 2\\ m & -1 & 0\end{vmatrix}=-3m+1$

- Si $m\in\mathbb{R}-\{-1,0\}\rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=3$
  Sistema compatible determinado
- Si $m=-1\rightarrow\begin{vmatrix} 1 & -2\\ -1 & -1\end{vmatrix}=-3\neq 0\rightarrow$ Rango $(A)\neq$ Rango $(A^*)=3$
  Sistema incompatible
- Si $m=0\rightarrow\begin{vmatrix} 2 & -1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-2\neq 0\rightarrow$ Rango $(A)=2\neq$ Rango $(A^*)=3$
  Sistema incompatible

b) Si $m=1\rightarrow|A|=-2$

$|A_x|=\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=-2$ $\qquad |A_y|=\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=2$ $\qquad |A_z|=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0$

$x=\dfrac{|A_x|}{|A|}=1$ $\qquad y=\dfrac{|A_y|}{|A|}=-1$ $\qquad z=\dfrac{|A_z|}{|A|}=0$

67.- (69)

Considere el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned}px+7y+8z&=1.370\\ x+y+z&=200\\ 7x+py+8z&=1.395\end{aligned}\right\}$$

a) Discútalo en función del parámetro p.

b) Resuelva el sistema para $p=6$.

(Cataluña. Septiembre 2006. Problema 6)

a) $A=\begin{pmatrix} p & 7 & 8\\ 1 & 1 & 1\\ 7 & p & 8\end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} p & 7 & 8 & 1.370\\ 1 & 1 & 1 & 200\\ 7 & p & 8 & 1.395\end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} p & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & p & 8 \end{vmatrix} = -p^2 + 16p - 63 \qquad \begin{vmatrix} p & 8 & 1.370 \\ 1 & 1 & 200 \\ 7 & 8 & 1.395 \end{vmatrix} = -205p + 1.410$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$-p^2 + 16p - 63 = 0 \to \begin{cases} p = 7 \\ p = 9 \end{cases}$$

- Si $p \in \mathbb{R} - \{7, 9\} \to$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema compatible determinado
- Si $p = 7$ o $p = 9 \to$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \to$ Sistema incompatible

b) Para $p = 6 \to |A| = -3$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1.370 & 7 & 8 \\ 200 & 1 & 1 \\ 1.395 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -255 \to x = \frac{|A_x|}{|A|} = 85$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 6 & 1.370 & 8 \\ 1 & 200 & 1 \\ 7 & 1.395 & 8 \end{vmatrix} = -180 \to y = \frac{|A_y|}{|A|} = 60$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 6 & 7 & 1.370 \\ 1 & 1 & 200 \\ 7 & 6 & 1.395 \end{vmatrix} = -165 \to z = \frac{|A_z|}{|A|} = 55$$

68.- (70)

Discute, según los valores del parámetro m, el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} y + mz = 0 \\ x + z = 0 \\ mx - y = m \end{array}\right\}$$

Resuélvelo, si es posible, para $m = 0$ y $m = 2$.

(Galicia. Junio 2006. Bloque 1. Opción 2)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ 1 & 0 & 1 \\ m & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & m & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ m & -1 & 0 & m \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ 1 & 0 & 1 \\ m & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ m & -1 & m \end{vmatrix} = -m$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

- Si $m \neq 0 \to$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \to$ Sistema incompatible
- Si $m = 0 \to$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 \to$ Sistema compatible indeterminado

Resolvemos para $m = 0$: $\left.\begin{array}{r} y = 0 \\ x + z = 0 \\ -y = 0 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array}\right.$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Para $m = 2$ el sistema es incompatible.

69.- (71)

Discute el siguiente sistema según el valor del parámetro k y resuélvelo cuando $k = -1$.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = k \\ (1+k)x + y + z = 2k \\ x + (1+k)y + z = 1 \end{array}\right\}$$

(Baleares. Junio 2007. Opción A. Cuestión 1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+k & 1 & 1 \\ 1 & 1+k & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 1+k & 1 & 1 & 2k \\ 1 & 1+k & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+k & 1 & 1 \\ 1 & 1+k & 1 \end{vmatrix} = k^2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1+k & 1 & 2k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - k$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1+k & 1 \end{vmatrix} = -k$$

- Si $k \neq 0 \to$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 \to$ Sistema compatible determinado
- Si $k = 0 \to$ Rango $(A) = 1 \neq$ Rango $(A^*) = 2 \to$ Sistema incompatible

Para $k = -1 \to |A| = 1$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 1 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = -2 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = 0$$

70.- (72)

Clasifica en función del parámetro el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} ax - 3y - 2z = 0 \\ -x + (5+a)z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \end{array}\right\}$$

y resuélvelo, si es posible, para $a = -4$.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2006. Bloque 3. Pregunta B)

Al ser un sistema homogéneo sabemos que es compatible para cualquier valor de a.

$$A=\begin{pmatrix} a & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 5+a \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 5+a \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=-3a^2-21a-36$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-3\neq 0$$

$$-3a^2-21a-36=0\rightarrow\begin{cases} a=-3 \\ a=-4 \end{cases}$$

- Si $a\in\mathbb{R}-\{-4,-3\}\rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=3$
  Sistema compatible determinado
- Si $a=-4$ o $a=-3\rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=2$
  Sistema compatible indeterminado

Para $a=-4$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} -x=-z \\ 2x+3y=-4z \end{array}\right\}\rightarrow\begin{cases} x=\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ con $\lambda\in\mathbb{R}$

71.- (87)

Considera este sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} mx-y=1 \\ x-my=2m-1 \end{array}\right\}$$

a) Clasifica el sistema según los valores de m.

b) Calcula los valores de m para los que el sistema tiene una solución en la que $x=3$.

(Andalucía. Junio 2004. Opción A. Ejercicio 3)

a) $A=\begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & -m \end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{cc|c} m & -1 & 1 \\ 1 & -m & 2m-1 \end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & -m \end{vmatrix}=-m^2+1 \qquad \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 2m-1 \end{vmatrix}=2m^2-m-1$$

- Si $m\neq\pm 1\rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=2=$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $m=-1\rightarrow$ Rango $(A)=1\neq$ Rango $(A^*)=2\rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $m=1\rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=1<$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

b) Si $x=3\rightarrow\left.\begin{array}{r} 3m-y=1 \\ 3-my=2m-1 \end{array}\right\}\rightarrow y=3m-1\rightarrow 3-m(3m-1)=2m-1$

$$\rightarrow -3m^2-m+4=0\rightarrow\begin{cases} m=1 \\ m=-\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

72.- (90)

Demuestra que para que el sistema siguiente sea compatible tiene que suceder que: $c = a + b$.

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= a \\ 2x + z &= b \\ 4x - y + 2z &= c \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 1 & b \\ 4 & -1 & 2 & c \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ 2 & 0 & b \\ 4 & -1 & c \end{vmatrix} = -2a - 2b + 2c$$

El rango de la matriz A es 2. Para que el sistema sea compatible el rango de la matriz A^* también tiene que ser igual a 2. Para ello:

$$-2a - 2b + 2c = 0 \rightarrow c = a + b$$

73.- (94)

En un supermercado se venden huevos de categorías *XL*, *L* y *M*. Averigua el precio de una docena de cada tipo de huevos sabiendo que:

- Carmen compró una docena de cada categoría y pagó 4,90 €.
- Jesús pagó 9,60 € por 2 docenas *XL* y 4 docenas *M*.
- Esther se llevó 3 docenas *L* y 3 *M* y pagó 9,30 €.

Sean x, y, z los precios de cada docena de huevos de categorías *XL*, *L* y *M*, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 4{,}9 \\ 2x + 4z &= 9{,}6 \\ 3y + 3z &= 9{,}3 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x + y + z &= 4{,}9 \\ -2y + 2z &= -0{,}2 \\ y + z &= 3{,}1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x + y + z &= 4{,}9 \\ -2y + 2z &= -0{,}2 \\ 4z &= 6 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 1{,}8 \\ y &= 1{,}6 \\ z &= 1{,}5 \end{aligned}\right.$$

Así, la docena de huevos *XL* cuesta 1,80 €, la de categoría *L* vale 1,60 € y la de *M* 1,50 €.

74.- (95)

El bloque de pisos en el que vivo ha estado de obras. El administrador de la comunidad está tratando de descubrir cuánto cobran a la hora un electricista, un fontanero y un albañil. Sabe que:

- En el 4.º A el electricista estuvo 1 hora y el albañil 2 horas y tuvieron que pagar 78 € de mano de obra.

- En el 3.º D pagaron 85 € por las 2 horas que estuvo el fontanero y la hora que estuvo el albañil.
- En mi casa estuvieron 1 hora el fontanero, 1 hora el electricista y 3 horas el albañil y nos cobraron 133 €.

¿Cuánto cobra por hora cada profesional?

Sean x, y, z los precios por hora de trabajo del electricista, el fontanero y el albañil, respectivamente.

Entonces:

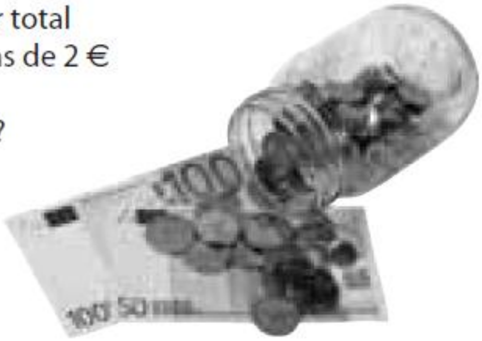
$$\left.\begin{array}{r} x+2z=78 \\ 2y+z=85 \\ x+y+3z=133 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+3z=133 \\ 2y+z=85 \\ x+2z=78 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+3z=133 \\ 2y+z=85 \\ -y-z=-55 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+3z=133 \\ 2y+z=85 \\ y=30 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=28 \\ y=30 \\ z=25 \end{array}\right.$$

El electricista cobra 28 €, el fontanero 30 € y el albañil 25 €.

75.- (96)

Tengo ahorradas 20 monedas por un valor total de 29,50 €. Hay cuatro veces más monedas de 2 € que de 1 €. También hay monedas de 50 céntimos. ¿Cuántas monedas hay en total?



Sean x, y, z las monedas de 2 €, 1 € y 50 céntimos que tengo ahorradas, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=20 \\ 2x+y+0{,}5z=29{,}5 \\ x=4y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=20 \\ 20x+10y+5z=295 \\ x-4y=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=20 \\ 15x+5y=195 \\ x-4y=0 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=20 \\ 15x+5y=195 \\ 65y=195 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=12 \\ y=3 \\ z=5 \end{array}\right.$$

Hay 12 monedas de 2 €, 3 de 1 € y 5 de 50 céntimos.

76.- (97)

Pilar compra 200 acciones de la empresa *A*, 150 de *B* y 100 de *C* y paga 3.300 € mientras que Juan gasta 3.750 € por la compra de 50 acciones de *A*, 120 de *B* y 240 de *C*. Con estos datos, ¿es posible saber el precio de cada acción? ¿Y si cada acción tiene un precio entero comprendido entre 1 € y 12 €, ambos incluidos?

Sean x, y, z los precios de las acciones de las empresas *A*, *B* y *C*, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} 200x+150y+100z=3.300 \\ 50x+120y+240z=3.750 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 200 & 150 \\ 50 & 120 \end{vmatrix} = 16.500 \neq 0$$

Los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada son iguales a 2, como el sistema tiene 3 incógnitas, el sistema es compatible indeterminado. Es decir, el sistema tiene infinitas soluciones de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} 200x+150y+100z=3.300 \\ 50x+120y+240z=3.750 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+3y+2z=66 \\ 5x+12y+24z=375 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 4x+3y+2z=66 \\ 33y+86z=1.170 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{16\lambda-111}{11} \\ y=\dfrac{1.170-86\lambda}{33} \\ z=\lambda \end{array}\right. \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Con los datos no es posible determinar los precios de las acciones.

Si las acciones tienen un precio entero, el valor de la acción de la empresa *C* solo puede ser de 9 €, así las acciones de la empresa *A* valen 3 € y las de *B* 12 €.

77.- (100)

La liga de fútbol de un cierto país la juegan 21 equipos a doble vuelta. Este año, los partidos ganados valían 3 puntos, los empatados 1 punto y los perdidos 0 puntos. En estas condiciones, el equipo campeón de liga obtuvo 70 puntos.

Hasta el año pasado los partidos ganados valían 2 puntos y el resto, igual. Con el sistema antiguo, el actual campeón hubiera obtenido 50 puntos.

¿Cuántos partidos ganó, empató y perdió el equipo campeón?

(Aragón. Septiembre 2006. Opción A. Cuestión 1)

Sean x, y, z los partidos ganados, empatados y perdidos por el equipo, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=40 \\ 3x+y=70 \\ 2x+y=50 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=40 \\ 3x+y=70 \\ -x=-20 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=20 \\ y=10 \\ z=10 \end{array}\right.$$

El equipo ganó 20 partidos, empató 10 y perdió otros 10.

78.- (102)

En una caja hay monedas de tres tipos: de 2 €, de 1 € y de 50 céntimos.

Se sabe que, en total, hay 33 monedas y el valor conjunto de todas ellas es de 40 €. ¿Se puede determinar el número de cada tipo de monedas?

Si la respuesta es afirmativa, encuentra el número de cada uno de los tipos de moneda.

Si la respuesta es negativa, encuentra, al menos, dos conjuntos diferentes de 33 monedas de los tipos descritos y de manera que el valor total sea de 40.

(País Vasco. Junio 2002. Bloque E. Cuestión E)

Sean x, y, z el número de monedas de 2 €, 1 € y 50 céntimos que hay en la caja, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=33 \\ 2x+y+0{,}5z=40 \end{array}\right\}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada son iguales a 2, como el sistema tiene 3 incógnitas, el sistema es compatible indeterminado. Es decir, el sistema tiene infinitas soluciones de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=33 \\ 2x+y+0{,}5z=40 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=33 \\ -x+0{,}5z=-7 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7+0{,}5\lambda \\ y=26-1{,}5\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right. \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Respuesta abierta: dos soluciones posibles son 8 monedas de 2 €, 23 de 1 € y 2 de 50 céntimos, o bien, 9 monedas de 2 €, 20 de 1 € y 4 de 50 céntimos.