

# 4

# Sistemas lineales con parámetros



## 1. Teorema de Rouché

### ■ Piensa y calcula

Dado el siguiente sistema en forma matricial, escribe sus ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y = 2 \end{array} \right\}$$

### ● Aplica la teoría

1. Escribe los siguientes sistemas en forma matricial:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 2z = 5 \\ -x + 5z = 3 \end{cases} \end{array} \right\}$$

**Solución:**

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. Escribe en forma ordinaria el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

$$\left. \begin{array}{l} x - 2z = 1 \\ 3x + y + z = 3 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{array} \right\}$$

3. Discute los siguientes sistemas:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = 0 \\ 2x - 5y = -2 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 15 \\ 3x - 2y - 2z = -1 \\ -x + 3y + 3z = 3 \end{cases} \end{array} \right\}$$

**Solución:**

a) Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -13$$

Como el determinante de C es distinto de cero, el  $R(C) = 3$  y se tiene:

$R(C) = R(A) = 3 = \text{número de incógnitas} \Rightarrow$  Sistema compatible determinado.

b) Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Como el determinante de C es igual a cero, se halla el rango de A y C por Gauss:

$$\begin{aligned} R \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 15 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} &= \\ &= R \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 15 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a + 3 \cdot 1^a \\ 3^a - 2^a \end{matrix} = \\ &= R \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 3^a : 4 \end{matrix} = \end{aligned}$$

$$= R \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot 3^a - 2^a =$$

$$= R \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$R(C) = 2 < R(A) = 3 \Rightarrow$  Sistema incompatible.

4. Discute los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} \text{a) } 2x + y - z = 0 \\ \quad x + y = 1 \\ \quad -x + z = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

**Solución:**

a) Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Como el determinante de C es igual a cero, se halla el rango de A y C por Gauss:

$$R \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \cdot 1^a - 2^a \\ 1^a + 3^a \end{matrix} =$$

$$= R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$R(C) = R(A) = 2 <$  número de incógnitas  $\Rightarrow$  Sistema compatible indeterminado.

b) Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

Como el determinante de C es distinto de cero, el  $R(C) = 3$  y se tiene:

$R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas  $\Rightarrow$  Sistema compatible determinado.

## 2. Regla de Cramer y forma matricial

### ■ Piensa y calcula

Dado el siguiente sistema, resuélvelo matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

### ● Aplica la teoría

5. Resuelve por Cramer:

$$\begin{cases} \text{a) } 2x + y = 5 \\ \quad x + 3z = 16 \\ \quad 5y - z = 10 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 7z = 16 \\ 5x + 2y + z = 16 \end{cases}$$

**Solución:**

a) Determinante de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -29$$

La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & -1 \end{vmatrix}}{-29} = \frac{-29}{-29} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix}}{-29} = \frac{-87}{-29} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix}}{-29} = \frac{-145}{-29} = 5$$

b) Determinante de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 16 & 3 & -7 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 16 & -7 \\ 5 & 16 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 16 \\ 5 & 2 & 16 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

6. Resuelve por Cramer en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x + y = a \\ x + z = 0 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

**Solución:**

Determinante de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2-2a}{-2} = a-1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2a-2}{-2} = 1-a$$

7. Resuelve por Cramer:

$$\begin{cases} 4x + 4y + 5z + 5t = 0 \\ 2x + 3z - t = 10 \\ x + y - 5z = -10 \\ 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

**Solución:**

Determinante de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -290$$

La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 & 5 \\ 10 & 0 & 3 & -1 \\ -10 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-290} = \frac{-290}{-290} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 & 5 \\ 2 & 10 & 3 & -1 \\ 1 & -10 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-290} = \frac{290}{-290} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 10 & -1 \\ 1 & 1 & -10 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-290} = \frac{-580}{-290} = 2$$

$$t = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 10 \\ 1 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-290} = \frac{580}{-290} = -2$$

8. Resuelve matricialmente el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x - y + z = 6 \\ x + 5y = -3 \end{cases}$$

**Solución:**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -11 & 13 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = 2, y = -1, z = 1$$

9. Resuelve matricialmente el sistema:

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{107} \begin{pmatrix} -4 & 9 & 50 \\ 15 & -7 & -27 \\ 7 & 11 & -34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = -3, y = 2, z = 1$$

10. Resuelve matricialmente el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -7 \\ x + 4y + 2z = -1 \\ x - 4y = -5 \end{cases}$$

**Solución:**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & -4 & -10 \\ 2 & -1 & -3 \\ -8 & 5 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{La solución es: } x = -1, y = 1, z = -2$$

### 3. Resolución de sistemas de cuatro ecuaciones

#### ■ Piensa y calcula

Resuelve mentalmente el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

#### Solución:

Se elimina la 3ª ecuación porque es:  $1^a + 2^a$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \quad 2^a - 1^a \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -1$$

#### ● Aplica la teoría

I1. Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2t = 3 \\ 3x - y + z - t = 1 \\ 5x - 3y + 2z - 4t = -1 \\ 2x + y + z + t = 2 \end{cases}$$

#### Solución:

Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a - 5 \cdot 1^a \\ 4^a - 2 \cdot 1^a \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -7 \\ 0 & -8 & 2 & -14 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2^a = 0$$

El sistema no es de Cramer porque  $|C| = 0$ . Se resuelve por Gauss.

$$R \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{matrix} 3 \cdot 1^a - 2^a \\ 5 \cdot 1^a - 3^a \\ 2 \cdot 1^a - 4^a \end{matrix} =$$

$$= R \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 8 & -2 & 14 & 16 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{array} \right) \begin{matrix} 2 \cdot 2^a \\ \end{matrix} =$$

$$= R \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{array} \right) \begin{matrix} 2^a - 4 \cdot 3^a \\ \end{matrix} =$$

$$= R \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -8 \end{array} \right)$$

$R(C) = 3 = R(A) < \text{número de incógnitas} \Rightarrow$  Sistema compatible indeterminado. El sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} x + y + 2t = 3 \\ 4y - z + 7t = 8 \\ 3z - 5t = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 - 2t \\ 4y - z = 8 - 7t \\ 3z = -8 + 5t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 3 - 2t \\ 4y - \frac{5t-8}{3} = 8 - 7t \\ z = \frac{5t-8}{3} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{4-4t}{3}$$

$$\begin{cases} x + \frac{4-4t}{3} = 3 - 2t \\ y = \frac{4-4t}{3} \\ z = \frac{5t-8}{3} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{5-2t}{3}$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\begin{cases} x = \frac{5-2\lambda}{3} \\ y = \frac{4+4\lambda}{3} \\ z = \frac{-8+5\lambda}{3} \\ t = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

I2. Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + z + t = 1 \\ y + z - t = 1 \\ y + z - 2t = 2 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

#### Solución:

Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3^a - 2^a \\ \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

El sistema es de Cramer porque  $|C| \neq 0$ . Se puede resolver por Cramer, pero es más sencillo por Gauss.

La solución es:  $x = 3; y = 1; z = -1; t = -1$

**13.** Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x - y + z = 1 \\ 3x - y - z = 1 \\ 6x - y + z = 6 \end{cases}$$

**Solución:**

El sistema no es de Cramer porque no tiene el mismo número de incógnitas que de ecuaciones. Se resuelve por Gauss.

$$\begin{aligned} R \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} &= \\ &= R \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{matrix} = \\ &= R \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{matrix} = \\ &= R \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a : 10 \end{matrix} = R \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$R(C) = R(A) = 3 = \text{número de incógnitas} \Rightarrow$  El sistema es compatible determinado.

El sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3y - z = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 1 = 1 \\ 3y - 1 = 2 \\ z = 1 \end{cases} y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{matrix}$$

La solución es:  $x = 1, y = 1, z = 1$

**14.** Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - y + z = 5 \\ 2x + y - 4z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

**Solución:**

El sistema no es de Cramer porque no tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas. Se resuelve por Gauss.

$$\begin{aligned} R \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 1^a \end{matrix} &= \\ &= R \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -6 & -9 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a : 3 \\ 3^a : 3 \\ 4^a : (-1) \end{matrix} = \\ &= R \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a : 3 \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \\ 4^a - 3^a \end{matrix} = \\ &= R \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a : 3 \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \\ 4^a - 3^a \end{matrix} = R \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$R(C) = 3 < R(A) = 4 \Rightarrow$  El sistema es incompatible.

## 4. Discusión de sistemas con parámetros

### ■ Piensa y calcula

Discute, según los valores de  $k$ , el siguiente sistema:  $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = k \end{cases}$

**Solución:**

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ 0 = k - 6 \end{cases}$$

Para todo valor  $k \neq 6$  el sistema es incompatible.

Para  $k = 6$  el sistema se reduce a  $x + y = 3 \Rightarrow$  Compatible indeterminado.

## ● Aplica la teoría

15. Discute, según los valores del parámetro  $a$ , los siguientes sistemas:

$$a) \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} (a+1)x + y + z = 0 \\ x + (a+1)y + z = 0 \\ x + y + (a+1)z = 0 \end{cases}$$

**Solución:**

$$a) \text{ Se calcula } |C| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2$$

$$a^3 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2, a = 1$$

Para todo valor de  $a \neq -2$  y  $a \neq 1$  se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas  $y$ , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de  $|C|$

• Para  $a = -2$  se tiene:

$$R \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= R \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1^a - 2^a \\ 2 \cdot 1^a + 3^a \end{matrix} =$$

$$= R \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a : 3 \\ 3^a : 3 \end{matrix} =$$

$$= R \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3^a - 2^a \\ 3^a - 2^a \end{matrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que  $R(C) = 2 < R(A) = 3$   $y$ , por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para  $a = 1$  se tiene:

$$R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Se tiene que  $R(C) = R(A) = 1 <$  número de incógnitas  $y$ , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

$$b) \text{ Se calcula } |C| = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = a^3 + 3a$$

$$a^3 + 3a = 0 \Rightarrow a^2(a+3) = 0 \Rightarrow a = -3, a = 0$$

Para todo valor de  $a \neq -3$  y  $a \neq 0$  se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas  $y$ , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de  $|C|$

• Para  $a = -3$  se tiene:

$$R \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1^a - 2^a \\ 2 \cdot 1^a + 3^a \end{matrix} =$$

$$= R \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a : 3 \\ = 2^a \end{matrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que  $R(C) = R(A) = 2 <$  número de incógnitas  $y$ , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para  $a = 0$  se tiene:

$$R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Se tiene que  $R(C) = R(A) = 1 <$  número de incógnitas  $y$ , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

16. Discute, según los valores del parámetro  $k$ , los siguientes sistemas:

$$a) \begin{cases} kx + y + z = 4 \\ x + y + z = k \\ x - y + kz = 2 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ kx + 2z = 0 \\ 2x - y + kz = 0 \end{cases}$$

**Solución:**

$$a) \text{ Se calcula } |C| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & k \end{vmatrix} = k^2 - 1$$

$$k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k = -1, k = 1$$

Para todo valor de  $k \neq -1$  y  $k \neq 1$  se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas  $y$ , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de  $|C|$

• Para  $k = -1$  se tiene:

$$R \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1^a + 2^a \\ 1^a + 3^a \end{matrix} = R \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Se tiene que  $R(C) = 2 < R(A) = 3$   $y$ , por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para  $k = 1$  se tiene:

$$R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1^a - 2^a \\ 1^a - 3^a \end{matrix} =$$

$$= R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3^a : 2 \\ 3^a : 2 \end{matrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Se tiene que  $R(C) = 2 < R(A) = 3$   $y$ , por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Se calcula  $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 0 & 2 \\ 2 & -1 & k \end{vmatrix} = -k^2 - k + 6$

$$k^2 + k - 6 = 0 \Rightarrow k = -3, k = 2$$

Para todo valor de  $k \neq -3$  y  $k \neq 2$  se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de  $|C|$

• Para  $k = -3$  se tiene:

$$R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a + 3 \cdot 1^a \\ 2 \cdot 1^a - 3^a \end{matrix} =$$

$$= R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que  $R(C) = R(A) = 2 <$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para  $k = 2$  se tiene:

$$R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \cdot 1^a - 2^a \\ 2^a - 3^a \end{matrix} =$$

$$= R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que  $R(C) = R(A) = 2 <$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

17. Discute, según los valores del parámetro  $a$ , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x + 10y = -4 \\ ax + y = 1 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$$

**Solución:**

Como hay más ecuaciones que incógnitas, se calcula el determinante de la matriz ampliada:

$$\text{Se calcula } |A| = \begin{vmatrix} 3 & 10 & -4 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 2a$$

$$2 - 2a = 0 \Rightarrow a = 1$$

Para todo valor de  $a \neq 1$  se verifica que:

$R(C) < R(A) = 3$  y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para  $a = 1$  se tiene:

$$R \begin{pmatrix} 3 & 10 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 10 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a - 1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \end{matrix} =$$

$$= R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a : 2 \\ 3^a : 7 \end{matrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que  $R(C) = R(A) = 2 =$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

18. Discute, según los valores del parámetro  $m$ , los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 1 \\ mx + z = 0 \\ x + (1+m)y + mz = m+1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} (2m+2)x + my + 2z = 2m-2 \\ 2x + (2-m)y = 0 \\ (m+1)x + (m+1)z = m-1 \end{cases}$$

**Solución:**

$$\text{a) Se calcula } |C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \\ 1 & 1+m & m \end{vmatrix} = -m^2 - m$$

$$m^2 + m = m(m+1) = 0 \Rightarrow m = -1, m = 0$$

Para todo valor de  $m \neq -1$  y  $m \neq 0$  se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de  $|C|$

• Para  $m = -1$  se tiene:

$$R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1^a + 2^a \\ 2^a + 3^a \end{matrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que  $R(C) = R(A) = 2 <$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para  $m = 0$  se tiene:

$$R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que  $R(C) = R(A) = 2 <$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

$$\text{b) Se calcula el } |C| = \begin{vmatrix} 2m+2 & m & 2 \\ 2 & 2-m & 0 \\ m+1 & 0 & m+1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2m(m+1)(m-1)$$

$$m(m+1)(m-1) = 0 \Rightarrow m = 0, m = -1, m = 1$$

Para todo valor de  $m \neq 0$ ,  $m \neq -1$  y  $m \neq 1$  se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de  $|C|$

• Para  $m = 0$  se tiene:

$$R \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} = 2 \cdot 3^a \\ 2^a : 2 \\ = \end{matrix}$$

$$= R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 1^a - 2^a \\ = \end{matrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que  $R(C) = R(A) = 2 <$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para  $m = -1$  se tiene:

$$R \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Se tiene que  $R(C) = 2 < R(A) = 3$  y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para  $m = 1$  se tiene:

$$R \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 3^a : 2 \end{matrix} = R \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a - 4 \cdot 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{matrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2^a$$

$$= R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Se tiene que  $R(C) = R(A) = 2 <$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.



## Preguntas tipo test

Contesta en tu cuaderno:

1 Un sistema lineal heterogéneo es compatible determinado si (C, matriz de los coeficientes, y A, matriz ampliada con los términos independientes):

- $R(C) < R(A)$   
  $R(C) = R(A) = N^\circ$  de incógnitas  
  $R(C) > R(A)$   
  $R(C) \neq R(A)$

2 Si tenemos el sistema lineal matricial  $CX = B$  tal que existe  $C^{-1}$ , la solución es:

- $X = BC$                         $X = BC^{-1}$   
  $X = CB$                         $X = C^{-1}B$

3 Un sistema lineal homogéneo:

- siempre es compatible.  
 siempre es incompatible.  
 unas veces es compatible y otras incompatible.  
 ninguna de las anteriores es cierta.

4 Un sistema lineal de tres ecuaciones con dos incógnitas:

- si  $R(C) = R(A) = 2$ , es compatible.  
 si  $R(A) = 3$ , es compatible.  
 si  $R(C) = 3$ , es compatible.  
 si  $R(C) = R(A) = 3$ , es compatible.

5 Un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas:

- si  $R(C) = R(A) = 2$ , es compatible determinado.  
 si  $R(C) \neq R(A)$ , es compatible determinado.  
 si  $R(C) = R(A) = 3$ , es compatible determinado.  
 si  $R(C) < R(A)$ , es compatible determinado.

6 Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro  $k$

$$\begin{cases} kx + ky - z = 2 \\ 3x - ky = 0 \\ 5x + ky = 0 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

- Es siempre incompatible.  
 Para  $k \neq 0$ , compatible determinado.  
 Para  $k = 0$ , compatible determinado.  
 Para  $k = 0$ , compatible indeterminado.

7 Se considera el sistema: 
$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ y + z = 2a \\ x + 2z = a^2 \end{cases}$$

donde  $a$  es un parámetro real.

Discutir el sistema en función del valor de  $a$

- Para  $a = 0$  no tiene solución, y para  $a = 1$ , compatible indeterminado.  
 Si  $a \neq 0$  incompatible, y si  $a = 0$ , compatible indeterminado.  
 Si  $a = 0$  incompatible, y si  $a \neq 0$ , compatible indeterminado.  
 Si  $a \neq 1$  incompatible, y si  $a = 1$ , compatible indeterminado.

8 Se considera el sistema: 
$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ y + z = 2a \\ x + 2z = a^2 \end{cases}$$

donde  $a$  es un parámetro real.

Resuelve el sistema para  $a = 0$

Resuelve el sistema para  $a = 1$

- Para  $a = 0$  no tiene solución; para  $a = 1$ ,  $x = -2z + 1, y = -z + 2$   
 Para  $a = 0, x = y = z = 0$ ; para  $a = 1$  no tiene solución.  
 Para  $a = 0, x = 2, y = -3, z = 5$ ; para  $a = 1, x = 1, y = 2, z = 3$   
 Para  $a = 0, x = -1, y = -2, z = -3$ ; para  $a = 1, x = 3, y = 2, z = 0$

9 Dado el sistema: 
$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

estudia su compatibilidad según los valores de  $a$

- Si  $a \neq 0, a \neq 2$ , compatible determinado; si  $a = 1$ , incompatible; si  $a = 2$  incompatible.  
 Si  $a \neq 1$ , compatible determinado; si  $a = 1$ , compatible indeterminado.  
 Si  $a \neq 0$ , compatible determinado; si  $a = 0$ , compatible indeterminado.  
 Si  $a \neq -1, a \neq 3$ , compatible determinado; si  $a = -1$ , incompatible; si  $a = 3$ , incompatible.

10 Dado el sistema: 
$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

resuélvelo cuando sea posible.

- Si  $a \neq 1, x = 1, y = 1, z = 1 - a$   
 Si  $a = 1, x = 1/2, y = 1/2, z = (1 - a)/2$   
  $x = 1/2, y = 1/2, z = (1 - a)/2$  para  $a \neq 1$  y  $x = \lambda, y = 1 - \lambda, z = 0; \lambda \in \mathbb{R}$  para  $a = 1$   
 No se puede resolver porque  $R(C) \neq R(A)$

# Ejercicios y problemas

## 1. Teorema de Rouché

19. Discute los siguientes sistemas:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } 3x - y + 2z = 1 \\ \quad x + 4y + z = 3 \\ \quad 2x - 5y + z = -2 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{b) } 5x + 4y + 5z = 9 \\ \quad x - 2y = 1 \\ \quad 5x + 3y + 5z = 5 \end{array} \right\}$$

**Solución:**

a) Como  $|C| = 0$ , se halla el rango de C y de A por Gauss y se obtiene:

$R(C) = 2 = R(A) <$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Como  $|C| = -10$ , el  $R(C) = R(A) = 3$  y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

20. Discute los siguientes sistemas:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } 2x + y + 4z = 0 \\ \quad 4x - y + 2z = -4 \\ \quad 3x - y + z = -2 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{b) } 8x + y + 4z = 9 \\ \quad 5x - 2y + 4z = 6 \\ \quad x + y = 1 \end{array} \right\}$$

**Solución:**

a) Como  $|C| = 0$ , se halla el rango de C y de A por Gauss y se obtiene:

$R(C) = 2 < R(A) = 3$  y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Como  $|C| = 0$ , se halla el rango de C y de A por Gauss y se obtiene:

$R(C) = 2 = R(A) <$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

21. Discute los siguientes sistemas:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } 2x - y + z = -2 \\ \quad x + 2y + 3z = -1 \\ \quad x - 3y - 2z = 3 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{b) } x + 2y - 4z = 1 \\ \quad 2x + y - 5z = -1 \\ \quad x - y - z = -2 \end{array} \right\}$$

**Solución:**

a) Como  $|C| = 0$ , se halla el rango de C y de A por Gauss y se obtiene:

$R(C) = 2 < R(A) = 3$  y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Como  $|C| = 0$ , se halla el rango de C y de A por Gauss y se obtiene:

$R(C) = 2 = R(A) <$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

22. Discute y resuelve, si es posible, el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 4y - z + 2t = 0 \\ \quad x + y + z = 3 \\ \quad 5x - 2y - 4z - t = -12 \end{array} \right\}$$

**Solución:**

Como hay más incógnitas que ecuaciones, se pasa  $t$  al 2º miembro y se resuelve por Gauss, obteniéndose la solución:

$$x = \frac{3t - 2}{13}, y = \frac{9 - 7t}{13}, z = \frac{4t + 32}{13}$$

La solución en ecuaciones paramétricas es:

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{3\lambda - 2}{13} \\ y = \frac{9 - 7\lambda}{13} \\ z = \frac{4\lambda + 32}{13} \\ t = \lambda \end{array} \right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

## 2. Regla de Cramer y forma matricial

23. Resuelve por Cramer:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } 7x + 2y + 3z = 15 \\ \quad 5x - 3y + 2z = 15 \\ \quad 10x - 11y + 5z = 36 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{b) } 3x + 2y + 4z = 1 \\ \quad 2x + y + z = 0 \\ \quad x + 2y + 3z = 1 \end{array} \right\}$$

**Solución:**

a) Como  $|C| = -36$ , el sistema es de Cramer.

La solución es:

$$x = 2, y = -1, z = 1$$

b) Como  $|C| = 5$ , el sistema es de Cramer.

La solución es:

$$x = -\frac{1}{5}, y = 0, z = \frac{2}{5}$$

24. Resuelve por Cramer:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } x + y + z = 1 \\ \quad 3x - 4y = 5 \\ \quad 7x - y - 3z = 8 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{b) } x + 2y + 3z = 0 \\ \quad x + 2y + z = 0 \\ \quad 2x + 3y + 4z = 2 \end{array} \right\}$$

**Solución:**

a) Como  $|C| = 46$ , el sistema es de Cramer.

La solución es:

$$x = \frac{27}{23}, y = -\frac{17}{46}, z = \frac{9}{46}$$

b) Como  $|C| = -2$ , el sistema es de Cramer.

La solución es:

$$x = 4, y = -2, z = 0$$

# Ejercicios y problemas

25. Resuelve matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

$|C| = -5$ . Calculando la matriz inversa de los coeficientes se tiene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La solución es:  $x = -1, y = 0, z = 2$

26. Resuelve matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

$|C| = 2$ . Calculando la matriz inversa de los coeficientes se tiene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La solución es:  $x = 0, y = -2, z = 2$

## 3. Resolución de sistemas de cuatro ecuaciones

27. Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y - 2z + 2t = 2 \\ 2x - y + z - 4t = 1 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + z - 2t = 1 \end{cases}$$

**Solución:**

Como  $|C| = 0$ , el sistema no es de Cramer.

Se resuelve por Gauss:

La solución es:  $x = 1 + t, y = 1 - t, z = t$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \\ t = \lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$$

28. Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 8 \\ 2x - y - z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$$

**Solución:**

El sistema no es de Cramer porque tiene más ecuaciones que incógnitas. Se resuelve por Gauss:

$$x = 1, y = 2, z = -1$$

29. Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - 3y - z = -1 \\ x + 5y + 3z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 7y + 5z = 5 \end{cases}$$

**Solución:**

El sistema no es de Cramer porque tiene más ecuaciones que incógnitas. Se resuelve por Gauss:

$$x = \frac{1-z}{2}, y = \frac{1-z}{2}$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\begin{cases} x = \frac{1-\lambda}{2} \\ y = \frac{1-\lambda}{2} \\ z = \lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

30. Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + t = 1 \\ 2x - y - z - 3t = 2 \\ 7x - y - 6z - 8t = 7 \\ 4x + 3y - 7z - t = 4 \end{cases}$$

**Solución:**

Como  $|C| = 0$ , no se puede resolver por Cramer.

Se resuelve por Gauss:

$$x = z + t + 1, y = z - t$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu + 1 \\ y = \lambda - \mu \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$$

## 4. Discusión de sistemas con parámetros

31. Discute, según los valores del parámetro  $m$ , los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} mx + my = 6 \\ x + (m-1)y = 3 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{b) } (m+1)x + y + z &= 3 \\ x + 2y + mz &= 4 \\ x + my + 2z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

**Solución:**

a) Se calcula  $|C| = \begin{vmatrix} m & m \\ 1 & m-1 \end{vmatrix} = m^2 - 2m$

$$m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow m(m-2) = 0 \Rightarrow m = 2, m = 0$$

Para todo valor de  $m \neq 2$  y  $m \neq 0$  se verifica que:

$R(C) = R(A) = 2 =$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de  $|C|$

• Para  $m = 2$  se tiene:

$R(C) = R(A) = 1 <$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para  $m = 0$  se tiene:

$R(C) = 1 < R(A) = 2$  y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b)  $|C| = \begin{vmatrix} m+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & m & 2 \end{vmatrix} = -m^3 - m^2 + 6m$

$$m^3 + m^2 - 6m = 0 \Leftrightarrow m = 0, m = -3, m = 2$$

Para todo valor de  $m \neq 0$ ,  $m \neq -3$  y  $m \neq 2$  se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de  $|C|$

• Para  $m = 0$  se tiene:

$R(C) = 2 = R(A) <$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para  $m = -3$  se tiene:

$R(C) = 2 < R(A) = 3$  y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para  $m = 2$  se tiene:

$R(C) = 2 < R(A) = 3$  y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

32. Discute, según los valores del parámetro **a**, los siguientes sistemas:

$$\left. \begin{aligned} \text{b) } x + y + 2z &= 3 \\ 2x - y + az &= 9 \\ x - y - 6z &= 5 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \text{b) } x + y + 2z &= 2 \\ 2x - y + 3z &= 2 \\ 5x - y + az &= 6 \end{aligned} \right\}$$

**Solución:**

a) Se calcula  $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & -1 & -6 \end{vmatrix} = 2a + 16$

$$2a + 16 = 0 \Rightarrow a = -8$$

Para todo valor de  $a \neq -8$  se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de  $|C|$

• Para  $a = -8$  se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 <$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b)  $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & a \end{vmatrix} = -3a + 24$

$$3a - 24 = 0 \Rightarrow a - 8 = 0 \Rightarrow a = 8$$

Para todo valor de  $a \neq 8$  se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de  $|C| = 0$

• Para  $a = 8$  se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 <$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

33. Discute, según los valores del parámetro **k**, los siguientes sistemas:

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } 3x - 5y &= 6 \\ x + y &= k \\ x + 2y &= 2 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \text{b) } x + y &= 1 \\ 3x + 2y - z &= 3 \\ kx + 3y - 2z &= 0 \\ -x &- 4z = 3 \end{aligned} \right\}$$

**Solución:**

a) Como hay una ecuación más que incógnitas, se estudia el determinante de la matriz ampliada.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -11k + 22$$

$$-11k + 22 = 0 \Rightarrow k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2$$

Para todo valor de  $k \neq 2$  se verifica que:

$R(C) < R(A) = 3$  y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

Se estudian los valores que son raíces de  $|A|$

• Para  $k = 2$  se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 =$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

b) Como hay una ecuación más que incógnitas se estudia el determinante de la matriz ampliada.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ k & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} = k + 20$$

$$k + 20 = 0 \Rightarrow k = -20$$

Para todo valor de  $k \neq -20$  se verifica que:

$R(C) < R(A) = 3$  y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

Se estudian los valores que son raíces de  $|A|$

• Para  $k = -20$  se tiene:

$R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

## Para ampliar

34. Resuelve y clasifica los siguientes sistemas:

$$\left. \begin{array}{l} a) \ 3x + 2y - z = 4 \\ \quad x + y + z = 3 \\ \quad 2x - 3z = -1 \\ \quad 4x + 5z = 6 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} b) \ x - y + 3z + 14t = 0 \\ \quad 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ \quad 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{array} \right\}$$

### Solución:

a) Se resuelve por Gauss y se obtiene que el sistema es incompatible.

b) Se resuelve por Gauss y se obtiene:

$$x = y + 13t, z = -9t$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = \lambda + 13\mu \\ y = \lambda \\ z = -9\mu \\ t = \mu \end{array} \right\} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$$

35. Para cada valor del parámetro real  $k$ , se considera el sistema lineal de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 2k \\ 3x - 5y = k^2 \end{array} \right\}$$

Se pide:

- discutir el sistema según los valores de  $k$
- resolverlo en los casos en que sea compatible.

### Solución:

a) Como hay una ecuación más que incógnitas, se estudia el determinante de la matriz ampliada.

$$|A| = -k^2 + 4k - 3$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0 \Rightarrow k = 1, k = 3$$

Para todo valor de  $k \neq 1$  y  $k \neq 3$  se verifica que:

$R(C) < R(A) = 3$  y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

Se estudian los valores que son raíces de  $|A|$

• Para  $k = 1$  se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 = \text{número de incógnitas } y$ , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

• Para  $k = 3$  se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 = \text{número de incógnitas } y$ , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

b) Para  $k = 1$  la solución es:

$$x = 7, y = 4$$

Para  $k = 3$  la solución es:

$$x = 3, y = 0$$

36. Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro  $m$ :

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 2z = 5 \\ -x + (m + 2)z = 3 \end{array} \right\}$$

- Discute el sistema para los distintos valores de  $m$
- Resuelve el sistema para  $m = 3$

### Solución:

a)  $|C| = m - 1$

$$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

Para todo valor de  $m \neq 1$  se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 = \text{número de incógnitas } y$ , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de  $|C|$

• Para  $m = 1$  se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 < \text{número de incógnitas } y$ , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para  $m = 3$  la solución del sistema es:

$$x = -3, y = 8, z = 0$$

37. Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real  $a$ :

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 2 \\ ax + y + 2z = 0 \\ x - y + az = 1 \end{array} \right\}$$

- Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro  $a$
- Resuelve el sistema para  $a = -1$
- Resuelve el sistema para  $a = 2$

### Solución:

a)  $|C| = a^2 + a = a(a + 1)$

$$a^2 + a = 0 \Rightarrow a(a + 1) = 0 \Rightarrow a = 0, a = -1$$

Para todo valor de  $a \neq -1$  y  $a \neq 0$  se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 = \text{número de incógnitas } y$ , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de  $|C|$

• Para  $a = -1$  se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 < \text{número de incógnitas } y$ , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para  $a = 0$  se tiene:

$R(C) = 2 < R(A) = 3$  y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Para  $a = -1$  la solución del sistema es:

$$x = 2 + y, z = 1$$

La solución en ecuaciones paramétricas es:

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{array} \right\} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Para  $a = 2$  la solución es:

$$x = 1, y = -1, z = -1/2$$

38. Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real  $\lambda$ :

$$\left. \begin{array}{l} x + y + \lambda z = \lambda^2 \\ y - z = \lambda \\ x + \lambda y + z = \lambda \end{array} \right\}$$

- a) Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro  $\lambda$   
 b) Resuelve cuando sea indeterminado.

**Solución:**

a)  $|C| = \lambda^2 + \lambda - 2$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2, \lambda = 1$$

Para todo valor de  $\lambda \neq -2$  y  $\lambda \neq 1$  se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de  $|C|$

• Para  $\lambda = -2$  se tiene:

$R(C) = 2 < R(A) = 3$  y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para  $\lambda = 1$  se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 <$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para  $\lambda = 1$  la solución del sistema es:

$$x = -2z, y = z + 1$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = -2\lambda \\ y = \lambda + 1 \\ z = \lambda \end{array} \right\} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

39. Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{l} ax + y - z = 0 \\ 2x + ay = 2 \\ -x + z = 1 \end{array} \right\}$$

- a) Discute el sistema según los valores del parámetro  $a$   
 b) Resuelve el sistema cuando tenga más de una solución.

**Solución:**

a)  $|C| = a^2 - a - 2$

$$a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1, a = 2$$

Para todo valor de  $a \neq -1$  y  $a \neq 2$  se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de  $|C|$

• Para  $a = -1$  se tiene:

$R(C) = 2 < R(A) = 3$  y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para  $a = 2$  se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 <$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para  $a = 2$  la solución del sistema es:

$$x = z - 1, y = 2 - z$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = \lambda - 1 \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right\} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

40. Sea el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} -x + ky + 2z = k \\ 2x + ky - z = 2 \\ kx - y + 2z = k \end{array} \right\}$$

- a) Discute la compatibilidad del sistema según los valores del parámetro  $k$   
 b) Resuelve el sistema para  $k = -1$   
 c) Resuelve el sistema para  $k = 2$

**Solución:**

a)  $|C| = -3k^2 - 6k - 3$

$$3k^2 + 6k + 3 = 0 \Rightarrow k^2 + 2k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1$$

Para todo valor de  $k \neq -1$  se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de  $|C|$

• Para  $k = -1$  se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 <$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para  $k = -1$  la solución del sistema es:

$$x = z + 1, y = z$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right\} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Para  $k = 2$  la solución del sistema es:

$$x = 2/3, y = 2/3, z = 2/3$$

41. Siendo  $a$  un número real cualquiera, se define el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - az = 1 \\ -y + z = 0 \\ ax + z = a \end{array} \right\}$$

- a) Discute el sistema en función del valor de  $a$   
 b) Encuentra todas sus soluciones para  $a = 1$

# Ejercicios y problemas

## Solución:

a)  $|C| = -a^2 + 2a - 1$

$$a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

Para todo valor de  $a \neq 1$  se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas  $y$ , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de  $|C|$

• Para  $a = 1$  se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 <$  número de incógnitas  $y$ , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para  $a = 1$  la solución del sistema es:

$$x = 1 - z, y = z$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right\} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

42. Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real  $\lambda$ :

$$\left. \begin{array}{l} y + z = 1 \\ (\lambda - 1)x + y + z = \lambda \\ x + (\lambda - 1)y - z = 0 \end{array} \right\}$$

donde  $\lambda$  es un número real.

a) Discute el sistema según los valores del parámetro  $\lambda$

b) Resuelve el sistema para  $\lambda = 0$

c) Resuelve el sistema para  $\lambda = 3$

## Solución:

a)  $|C| = \lambda^2 - \lambda$

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = 1$$

Para todo valor de  $\lambda \neq 0$  y  $\lambda \neq 1$  se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas  $y$ , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de  $|C|$

• Para  $\lambda = 0$  se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 <$  número de incógnitas  $y$ , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para  $\lambda = 1$  se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 <$  número de incógnitas  $y$ , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para  $\lambda = 0$  la solución del sistema es:

$$x = 1, y = 1 - z$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right\} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Para  $\lambda = 3$  la solución del sistema es:

$$x = 1, y = 0, z = 1$$

43. Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real  $\lambda$ :

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 5z = 0 \\ 2x - \lambda y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right\}$$

Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro  $\lambda$  y resuélvelo.

## Solución:

a)  $|C| = 4\lambda - 12$

$$4\lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$$

Para todo valor de  $\lambda \neq 3$  se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas  $y$ , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de  $|C|$

• Para  $\lambda = 3$  se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 <$  número de incógnitas  $y$ , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para  $\lambda = 3$  la solución del sistema es:

$$x = -3z, y = -2z$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = -3t \\ y = -2t \\ z = t \end{array} \right\} \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

Para  $\lambda \neq 3$  la solución del sistema es la solución trivial:

$$x = 0, y = 0, z = 0$$

44. Considera el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ -\lambda x + 3y + z = -7 \\ x + 2y + (\lambda + 2)z = -5 \end{array} \right\}$$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro  $\lambda$

b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

## Solución:

a)  $|C| = \lambda^2 + 3\lambda + 2$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2, \lambda = -1$$

Para todo valor de  $\lambda \neq -2$  y  $\lambda \neq -1$  se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas  $y$ , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de  $|C|$

• Para  $\lambda = -2$  se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 <$  número de incógnitas  $y$ , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para  $\lambda = -1$  se tiene:

$R(C) = 2 \neq R(A) = 3$   $y$ , por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Para  $\lambda = -2$ , la solución del sistema es:

$$x = -2z + 1, y = z - 3$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = t \end{array} \right\} \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

45. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} ax + 2y + 6z = 0 \\ 2x + ay + 4z = 2 \\ 2x + ay + 6z = a - 2 \end{array} \right\}$$

a) Discute el sistema en función del parámetro  $a$

b) Resuélvelo para  $a = 2$

**Solución:**

a)  $|C| = 2a^2 - 8$

$$a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = -2, a = 2$$

Para todo valor de  $a \neq -2$  y  $a \neq 2$  se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas  $y$ , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de  $|C|$

• Para  $a = -2$  se tiene:  $R(C) = 2 < R(A) = 3$   $y$ , por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para  $a = 2$  se tiene:  $R(C) = R(A) = 2 <$  número de incógnitas  $y$ , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para  $a = 2$  la solución del sistema es:

$$x = 3 - y, z = -1$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{array} \right\} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

46. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + z = 6 \\ -x - y + (a - 4)z = 7 \\ x + y + 2z = 11 \end{array} \right\}$$

a) Discute el sistema en función del parámetro real  $a$

b) Resuélvelo para  $a = 4$

**Solución:**

a)  $|C| = -2a + 4$

$$2a - 4 = 0 \Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

Para todo valor de  $a \neq 2$  se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas  $y$ , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de  $|C|$

• Para  $a = 2$  se tiene:  $R(C) = 2 < R(A) = 3$   $y$ , por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Para  $a = 4$  la solución del sistema es:

$$x = -5, y = -2, z = 9$$

47. Sea el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} (a + 1)x + 2y + z = a + 3 \\ ax + y = a \\ ax + 3y + z = a + 2 \end{array} \right\}$$

a) Discute el sistema en función del parámetro real  $a$

b) Resuelve el sistema en los casos en que resulte compatible determinado.

**Solución:**

a)  $|C| = a + 1$

$$a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

Para todo valor de  $a \neq -1$  se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas  $y$ , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de  $|C|$

• Para  $a = -1$  se tiene:  $R(C) = R(A) = 2 <$  número de incógnitas  $y$ , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para  $a \neq -1$  la solución del sistema es:

$$x = 1, y = 0, z = 2$$

48. Se considera el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + my = 0 \\ x + mz = m \\ x + y + 3z = 1 \end{array} \right\}$$

a) Discute el sistema según los valores de  $m$

b) Resuelve el sistema para  $m = 6$

**Solución:**

a)  $|C| = m^2 - 5m$

$$m^2 - 5m = 0 \Rightarrow m(m - 5) = 0 \Rightarrow m = 0, m = 5$$

Para todo valor de  $m \neq 0$  y  $m \neq 5$  se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas  $y$ , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de  $|C|$

• Para  $m = 0$  se tiene:  $R(C) = R(A) = 2 <$  número de incógnitas  $y$ , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para  $m = 5$  se tiene:  $R(C) = 2 < R(A) = 3$   $y$ , por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Para  $m = 6$  la solución del sistema es:

$$x = -12, y = 4, z = 3$$

49. Sea el sistema homogéneo:

$$\left. \begin{array}{l} x + z = 0 \\ x + my + 2mz = 0 \\ 2x + my + (2m + 3)z = 0 \end{array} \right\}$$



# Ejercicios y problemas

- a) Calcula el valor de  $m$  para el que el sistema tenga soluciones distintas de la trivial.  
b) Halla las soluciones.

## Solución:

- a)  $|C| = 2m$   
 $2m = 0 \Rightarrow m = 0$   
Para todo valor de  $m \neq 0$ , la solución es la trivial.

- b) Para  $m = 0$  se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 <$  número de incógnitas  $y$ , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

La solución es:  $x = 0, z = 0$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array} \right\} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

## Problemas

50. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{array} \right\}$$

- a) estudia su compatibilidad.  
b) añade al sistema una ecuación de tal forma que el sistema resultante tenga solución única. Justifica la respuesta y encuentra dicha solución.  
c) añade al sistema dado una ecuación de tal forma que el sistema resultante sea incompatible. Justifica la respuesta.

## Solución:

- a)  $R(C) = R(A) = 2 <$  número de incógnitas  $y$ , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ z = 0 \end{array} \right\}$$

El sistema tiene como solución:

$$x = 1, y = -1, z = 0$$

- c) Se añade una ecuación contradictoria con las otras dos; por ejemplo, sumando y cambiando el término independiente:

$$3x + 2z = 0$$

51. Se considera el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x - y = a \\ x + a^2z = 2a + 1 \\ x - y + a(a - 1)z = 2a \end{array} \right\}$$

- a) Discute el sistema según los valores del parámetro real  $a$   
b) Resuelve el sistema para  $a = 3$

## Solución:

- a)  $|C| = a^2 - a$   
 $a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a - 1) = 0 \Rightarrow a = 0, a = 1$   
Para todo valor de  $a \neq 0$  y  $a \neq 1$  se verifica que:  
 $R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas  $y$ , por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de  $|C|$

- Para  $a = 0$  se tiene:

$R(C) = R(A) = 2 <$  número de incógnitas  $y$ , por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

- Para  $a = 1$  se tiene:

$R(C) = 2 <$   $R(A) = 3$   $y$ , por lo tanto, el sistema es incompatible.

- b) Para  $a = 3$  la solución del sistema es:

$$x = 5/2, y = -1/2, z = 1/2$$

52. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones en las incógnitas  $x, y, z, t$ :

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 0 \\ y + 2z + t = 0 \\ 2x + 2ky - t = 0 \end{array} \right\}$$

- a) Encuentra los valores de  $k$  para los que el rango de la matriz de los coeficientes del sistema es 2  
b) Resuelve el sistema anterior para  $k = 0$

## Solución:

- a) Estudiando la matriz de los coeficientes por Gauss se obtiene que si  $k = 3/2$ , el  $R(C) = 2$

- b) Para  $k = 0$ , la solución es:

$$x = t/2, y = 0, z = -t/2$$

La solución en ecuaciones paramétricas es:

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{\lambda}{2} \\ y = 0 \\ x = -\frac{\lambda}{2} \\ t = \lambda \end{array} \right\} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

53. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda x + 2y = 3 \\ -x + 2\lambda z = -1 \\ 3x - y - 7z = \lambda + 1 \end{array} \right\}$$

- a) Halla todos los valores del parámetro  $\lambda$  para los que el sistema correspondiente tiene infinitas soluciones.

- b) Resuelve el sistema para los valores de  $\lambda$  obtenidos en el apartado anterior.  
 c) Discute el sistema para los restantes valores de  $\lambda$

**Solución:**

- a)  $|C| = 2\lambda^2 + 12\lambda - 14$   
 $2\lambda^2 + 12\lambda - 14 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 6\lambda - 7 = 0 \Rightarrow \lambda = -7, \lambda = 1$   
 Se estudian los valores que son raíces de  $|C|$
- Para  $\lambda = -7$  se tiene:  $R(C) = 2 < R(A) = 3$  y, por lo tanto, el sistema es incompatible.
  - Para  $\lambda = 1$  se tiene:  $R(C) = R(A) = 2 <$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.
- b) Para  $\lambda = 1$  la solución del sistema es:  
 $x = 1 + 2z, y = 1 - z$   
 La solución, en ecuaciones paramétricas, es:
- $$\left. \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right\} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$
- c) Para todo valor de  $\lambda \neq -7$  y  $\lambda \neq 1$  se verifica que:  
 $R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

54. Discute el sistema, según el valor del parámetro  $m$ , y resuelve en los casos de compatibilidad.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y + z = 4 \\ 3x + y + mz = 6 \\ -2x - 10y - 2z = m - 4 \end{array} \right\}$$

**Solución:**

- a)  $|C| = 14m - 14$   
 $14m - 14 = 0 \Rightarrow m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$   
 Para todo valor de  $m \neq 1$  se verifica que:  
 $R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.  
 Se estudian los valores que son raíces de  $|C|$
- Para  $m = 1$  se tiene:  
 $R(C) = 2 < R(A) = 3$  y, por lo tanto, el sistema es incompatible.
- b) Para  $m \neq 1$  la solución del sistema es:  
 $x = \frac{3m^2 + 27m - 28}{14(m - 1)}, y = \frac{-m(2m - 3)}{14(m - 1)}, z = \frac{-m}{2(m - 1)}$

55. Dado el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + z = 1 \\ y + (a - 1)z = 0 \\ x + (a - 1)y + az = a \end{array} \right\}$$

- a) discute el sistema según el valor del parámetro  $a$   
 b) resuelve el sistema en todos los casos de compatibilidad.

**Solución:**

- a)  $|C| = -a^2 + 3a - 2$   
 $a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 1, a = 2$   
 Para todo valor de  $a \neq 1$  y  $a \neq 2$  se verifica que:  
 $R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.  
 Se estudian los valores que son raíces de  $|C|$
- Para  $a = 1$  se tiene:  
 $R(C) = R(A) = 2 <$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.
  - Para  $a = 2$  se tiene:  
 $R(C) = 2 < R(A) = 3$  y, por lo tanto, el sistema es incompatible.
- b) Para  $a = 1$  la solución es:  
 $x = 1 - z, y = 0$   
 La solución, en ecuaciones paramétricas, es:
- $$\left. \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array} \right\} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$
- Para  $a \neq 1$  y  $a \neq 2$ , la solución es:  
 $x = \frac{a - 1}{a - 2}, y = \frac{a - 1}{a - 2}, z = -\frac{1}{a - 2}$

56. Discute, según los valores del parámetro  $k$ , el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2y - z = k \\ 3x - 2z = 11 \\ y + z = 6 \\ 2x + y - 4z = k \end{array} \right\}$$

**Solución:**

- Como hay una ecuación más que incógnitas, se estudia el determinante de la matriz ampliada.  
 $|A| = 2k - 12$   
 $2k - 12 = 0 \Rightarrow k - 6 = 0 \Rightarrow k = 6$   
 Para todo valor de  $k \neq 6$  se verifica que:  $R(C) < R(A) = 3$  y, por lo tanto, el sistema es incompatible.  
 Se estudian los valores que son raíces de  $|A|$
- Para  $k = 6$  se tiene:  $R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

57. Discute, según los valores del parámetro  $k$ , el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 1 \\ x - y + 3z = -3 \\ 4x + 2y = k \end{array} \right\}$$

# Ejercicios y problemas

## Solución:

Como hay una ecuación más que incógnitas, se estudia el determinante de la matriz ampliada.

$$|A| = -2k^2 + 12k - 18$$

$$2k^2 - 12k + 18 = 0 \Rightarrow k^2 - 6k + 9 = 0 \Rightarrow k = 3$$

Para todo valor de  $k \neq 3$  se verifica que:  $R(C) < R(A) = 3$  y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

Se estudian los valores que son raíces de  $|A|$

- Para  $k = 3$  se tiene:  $R(C) = R(A) = 2 <$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

58. Discute, según los valores del parámetro  $k$ , el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} x + y + 5z &= 0 \\ 2x - 3y &= 0 \\ x - y + z &= 0 \\ x + 2y + 2kz &= k \end{aligned} \right\}$$

## Solución:

Como hay una ecuación más que incógnitas, se estudia el determinante de la matriz ampliada.

$$|A| = 0 \text{ para cualquier valor de } k$$

Se estudia el sistema por Gauss y se obtiene que para  $k = 7/2$ , el  $R(C) = 2 < R(A) = 3$  y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

Para  $k \neq 7/2$ , el  $R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

59. Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro  $m$  y resuélvelo cuando sea posible:

$$\left. \begin{aligned} x + 2z - 3 &= 0 \\ 3x + y + z + 1 &= 0 \\ 2y - z + 2 &= 0 \\ x - y + mz + 5 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

## Solución:

Como hay una ecuación más que incógnitas, se estudia el determinante de la matriz ampliada.

$$|A| = -18m - 36$$

$$18m + 36 = 0 \Rightarrow m + 2 = 0 \Rightarrow m = -2$$

Para todo valor de  $m \neq -2$  se verifica que:

$R(C) < R(A) = 4$  y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

Se estudian los valores que son raíces de  $|A|$

- Para  $m = -2$  se tiene:

$R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

60. Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro  $a$ :

$$\left. \begin{aligned} ax + z + t &= 1 \\ ay + z - t &= 1 \\ ay + z - 2t &= 2 \\ az - t &= 0 \end{aligned} \right\}$$

## Solución:

$$|C| = a^3$$

$$a^3 = 0 \Rightarrow a = 0$$

Para todo valor de  $a \neq 0$  se verifica que:

$R(C) = R(A) = 4 =$  número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de  $|C|$

- Para  $a = 0$  se tiene:

$R(C) = 2 < R(A) = 3$  y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

## Para profundizar

61. Discute y resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los valores de los parámetros  $a$  y  $b$ :

$$\left. \begin{aligned} 3x - y + 2z &= 1 \\ x + 4y + z &= b \\ 2x - 5y + az &= -2 \end{aligned} \right\}$$

## Solución:

$$|C| = 13a - 13 \Rightarrow |C| = 0 \Rightarrow a = 1$$

Para  $a \neq 1$ ,  $|C| \neq 0$  y se cumple que  $R(A) = R(C) = 3 = n^\circ$  de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado para cualquier valor de  $b$

- Estudio para  $a = 1$

Permutando la columna de las  $y$  con la de las  $x$  y pasando la 2ª ecuación a la 3ª

$$\begin{aligned} R(A) &= R \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ -5 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} \begin{matrix} 5 \cdot 1^a - 2^a \\ 4 \cdot 1^a + 3^a \end{matrix} = \\ &= R \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 9 & 7 \\ 0 & 13 & 9 & 4+b \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 3^a - 2^a \end{matrix} = \\ &= R \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & b-3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cuando  $b \neq 3$   $R(C) = 2 < R(A) = 3 \Rightarrow$  El sistema es incompatible.

Cuando  $b = 3$   $R(C) = R(A) = 2 <$  número de incógnitas  $\Rightarrow$  El sistema es compatible indeterminado.

La solución es:

$$x = (7 - 9z)/13, y = (8 - z)/13$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{7-9\lambda}{13} \\ y &= \frac{8-\lambda}{13} \\ z &= \lambda \end{aligned} \right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

Para los valores de  $a \neq 1$ , la solución es:

$$\begin{aligned} x &= \frac{27-9b}{13(a-1)} + \frac{b+4}{13} \\ y &= \frac{3-b}{13(a-1)} + \frac{3b-1}{13} \\ z &= \frac{b-3}{a-1} \end{aligned}$$

62. Discute, según los valores de los parámetros  $\lambda$  y  $\mu$ , el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{aligned} \lambda x + y + z &= \mu \\ x + y + \lambda z &= 2 \\ 2x + y + \lambda z &= \mu \end{aligned} \right\}$$

**Solución:**

$$|C| = \lambda - 1 \Rightarrow |C| = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

Para  $\lambda \neq 1$ ,  $|C| \neq 0 \Rightarrow R(C) = R(A) = n^\circ$  de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado para cualquier valor de  $\mu$ .

• Estudio para  $\lambda = 1$

Permutando la columna de las  $z$  con la de las  $x$

$$\begin{aligned} R(A) &= R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mu \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & \mu \end{pmatrix} \begin{matrix} 1^a - 2^a = \\ 3^a - 1^a \end{matrix} \\ &= R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & \mu - 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cuando  $\mu \neq 2$ ,  $R(C) = 2 < R(A) = 3 \Rightarrow$  El sistema es incompatible.

Cuando  $\mu = 2$ ,  $R(C) = R(A) < n^\circ$  incógnitas  $\Rightarrow$  El sistema es compatible indeterminado.

63. Discute, según los valores de los parámetros  $a$  y  $b$ , el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{aligned} 2x - 5y + az &= -2 \\ 3x - y + 2z &= 1 \\ x + 4y + z &= b \end{aligned} \right\}$$

**Solución:**

$$|C| = 13a - 13 \Rightarrow |C| = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

Para  $a \neq 1$ ,  $|C| \neq 0$ ,  $R(C) = R(A) = n^\circ$  incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado para cualquier valor de  $b$ .

Estudiando por Gauss el rango de la matriz ampliada, se obtiene:

Si  $a = 1$  y  $b = 3 \Rightarrow R(C) = R(A) = 2 \Rightarrow$  El sistema es compatible indeterminado.

Si  $a = 1$  y  $b \neq 3 \Rightarrow R(C) = 2 < R(A) \Rightarrow$  El sistema es incompatible.

64. Calcula el valor de  $a$  y  $b$  para que el sistema siguiente sea compatible indeterminado:

$$\left. \begin{aligned} 2x - y + z &= 3 \\ x - y + z &= 2 \\ 3x - y - az &= b \end{aligned} \right\}$$

**Solución:**

$$|C| = a + 1 \Rightarrow |C| = 0 \Leftrightarrow a = -1$$

Para  $a = -1$  el  $R(C) = 2$

Se estudia por Gauss la matriz ampliada y se obtiene:

Para  $b = 4$  el  $R(A) = 2$

Por lo tanto, para  $a = -1$  y  $b = 4$ ,  $R(C) = R(A) = 2 \Rightarrow$  El sistema es compatible indeterminado.

65. Estudia, según los diferentes valores de  $a$  y  $b$ , la compatibilidad del sistema:

$$\left. \begin{aligned} 2x - y - 2z &= b \\ x + y + z &= 5 \\ 4x - 5y + az &= -10 \end{aligned} \right\}$$

**Solución:**

$$|C| = 3a + 24 \Rightarrow |C| = 0 \Leftrightarrow a = -8$$

Para  $a \neq -8$ ,  $|C| \neq 0$ ,  $R(C) = R(A) = n^\circ$  incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado para cualquier valor de  $b$ .

Estudiando por Gauss el rango de la matriz ampliada, se obtiene:

Si  $a = -8$  y  $b = 0 \Rightarrow$  El sistema es compatible indeterminado.

# Ejercicios y problemas

66. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= b \\ x + y + az &= 1 \end{aligned} \right\}$$

- a) discute el sistema en función de **a** y **b**  
b) resuelve el sistema para **a = b = -2**

**Solución:**

$$|C| = a^3 - 3a + 2 = (a - 1)^2 (a + 2) \Rightarrow |C| = 0 \Leftrightarrow a = 1, a = -2$$

Para  $a \neq 1$  y  $a \neq -2$ ,  $|C| \neq 0$ ,  $R(C) = R(A) = n^\circ$  incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado para cualquier valor de **b**

Estudiando por Gauss el rango de la matriz ampliada, se obtiene:

Si  $a = 1$  y  $b = 1$ ,  $R(C) = R(A) = 1 < n^\circ$  de incógnitas  $\Rightarrow$  El sistema es compatible indeterminado.

Si  $a = 1$  y  $b \neq 1$ ,  $R(C) = 1 < R(A) = 2 \Rightarrow$  El sistema es incompatible.

Si  $a = -2$  y  $b = -2$ ,  $R(C) = R(A) = 2 < n^\circ$  de incógnitas  $\Rightarrow$  El sistema es compatible indeterminado.

Si  $a = -2$  y  $b \neq -2$ ,  $R(C) = 2 < R(A) = 3 \Rightarrow$  El sistema es incompatible.

67. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{aligned} 2x - y + z &= 3 \\ x - y + z &= 2 \\ 3x - y - az &= b \end{aligned} \right\}$$

- a) halla los valores de **a** y **b** para los que el sistema sea compatible indeterminado y su solución sea una recta.  
b) halla la solución para los valores obtenidos en el apartado anterior.

**Solución:**

a)  $|C| = a + 1 \Rightarrow |C| = 0 \Leftrightarrow a = -1$

Para  $a \neq -1$ ,  $|C| \neq 0$ ,  $R(C) = R(A) = n^\circ$  incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado para cualquier valor de **b**

Estudiando por Gauss el rango de la matriz ampliada, se obtiene:

Si  $a = -1$  y  $b = 4$ ,  $R(C) = R(A) = 2 < n^\circ$  de incógnitas  $\Rightarrow$  El sistema es compatible indeterminado.

Si  $a = -1$  y  $b \neq 4$ ,  $R(C) = 2 < R(A) = 3 \Rightarrow$  El sistema es incompatible.

b) La solución para el caso  $a = -1$  y  $b = 4$  es:

$$x = 1, y - z = -1$$

en paramétricas:

$$\left. \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -1 + \lambda \\ z &= \lambda \end{aligned} \right\} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

## Paso a paso

68. Discute, según los valores de  $k$ , el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} (1-k)x + y + z &= 0 \\ x + (1-k)y + z &= k \\ x + y + (1-k)z &= k^2 \end{aligned} \right\}$$

**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

69. Resuelve el sistema cuando sea posible, según los valores de  $a$ , y clasifícalo.

$$\left. \begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= 1 \\ x + y + az &= 1 \\ x + y + z &= a \end{aligned} \right\}$$

**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

70. **Internet.** Abre: [www.editorial-bruno.es](http://www.editorial-bruno.es) y elige **Matemáticas, curso y tema.**

## Practica

71. Discute el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ 3x + y + 4z &= 5 \\ 2x - y + 3z &= 4 \end{aligned} \right\}$$

**Solución:**

Ejercicio 71

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

rango[C]  $\rightarrow$  2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

rango[A]  $\rightarrow$  2

$R(C) = R(A) = 2 < 3 =$  número de incógnitas.  
Sistema heterogéneo compatible indeterminado.

73. Resuelve matricialmente el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 2x + 5y &= 4 \\ x + 3y + 2z &= 5 \end{aligned} \right\}$$

**Solución:**

Ejercicio 73

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$CX = B \Rightarrow X = C^{-1}B$

$$C^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 10 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución:  $x = -3, y = 2, z = 1$

72. Resuelve el sistema:

$$\left. \begin{aligned} 2x - y + z &= -8 \\ x + 3y - 2z &= 5 \\ 2x + y + 3z &= 4 \end{aligned} \right\}$$

**Solución:**

Ejercicio 72

$$\text{resolver} \left\{ \begin{aligned} 2x - y + z &= -8 \\ x + 3y - 2z &= 5 \\ 2x + y + 3z &= 4 \end{aligned} \right\} \rightarrow \{(x=-3, y=4, z=2)\}$$

Solución:  $x = -3, y = 4, z = 2$

74. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} x + 2y + z - 3t &= 2 \\ 2x + 5y + 3z - 8t &= 4 \\ x + 2y + 2z - 4t &= 3 \\ 3x + 6y + 5z - 11t &= 8 \end{aligned} \right\}$$

**Solución:**

Ejercicio 74

$$\text{resolver} \left\{ \begin{aligned} x + 2y + z - 3t &= 2 \\ 2x + 5y + 3z - 8t &= 4 \\ x + 2y + 2z - 4t &= 3 \\ 3x + 6y + 5z - 11t &= 8 \end{aligned} \right\} \rightarrow \{(t=z-1, x=3, y=z-2, z=z)\}$$

Solución:  $x = 3, y = z - 2, t = z - 1$

75. Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x - ay + z = 1 \\ x + y + z = a + 2 \end{cases}$$

- a) Resuélvelo para el valor de  $a$  que lo haga compatible indeterminado.  
 b) Resuelve el sistema que se obtiene para  $a = 2$

### Solución:

Ejercicio 75  
 a) Resuélvelo para el valor de  $a$  que lo haga compatible indeterminado.

$C(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow a \rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \rightarrow a \rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$

$|C(a)| \rightarrow -a^2 + 1$   
 resolver  $(-a^2 + 1 = 0) \rightarrow \{a = -1, a = 1\}$

$C(-1) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$   
 rango  $(C(-1)) \rightarrow 2$

$A(-1) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$   
 rango  $(A(-1)) \rightarrow 2$   
 Para  $a = -1$ ,  $R(C) = R(A) = 2 < 3 =$  número de incógnitas.  
 Sistema compatible indeterminado.

$C(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$   
 rango  $(C(1)) \rightarrow 2$

$A(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$   
 rango  $(A(1)) \rightarrow 3$   
 Para  $a = 1$ ,  $R(C) = 2 \neq R(A) = 3$   
 Sistema incompatible.

Es compatible indeterminado para  $a = -1$   
 Lo resolvemos para  $a = -1$

resolver  $\begin{cases} -x + y + z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \rightarrow \left\{ \left[ x = -\frac{3}{2}, y = -z + \frac{5}{2}, z = z \right] \right\}$

b) Resuelve el sistema que se obtiene para  $a = 2$

resolver  $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \rightarrow \{(x=0, y=1, z=3)\}$

Solución,  $x = 0, y = 1, z = 3$

76. Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \\ x - z = -1 \\ 3x - y + z = 10 \end{cases}$$

### Solución:

Ejercicio 76  
 resolver  $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \\ x - z = -1 \\ 3x - y + z = 10 \end{cases} \rightarrow \{(x=2, y=-1, z=3)\}$

Solución:  $x = 2, y = -1, z = 3$

77. Discute, según los valores del parámetro  $k$ , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} kx + y = 1 \\ x + (k+1)y = 1 \\ x + ky = 1 \end{cases}$$

### Solución:

Ejercicio 77

$C(k) = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k+1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \rightarrow k \rightarrow \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k+1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$

$A(k) = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix} \rightarrow k \rightarrow \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$

$|A(k)| \rightarrow k-1$   
 resolver  $(k-1=0) \rightarrow \{k=1\}$   
 Para  $k \neq 1$ ,  $R(C) < R(A) = 3$ , sistema incompatible.  
 Para  $k = 1$

$C(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$   
 rango  $(C(1)) \rightarrow 2$

$A(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$   
 rango  $(A(1)) \rightarrow 2$   
 Si  $k = 1$ ,  $R(C) = R(A) = 2 = n^\circ$  de incógnitas.  
 Sistema compatible determinado.

78. Clasifica el sistema siguiente según los valores del parámetro  $k$

$$\begin{cases} kx + y - 2z = 0 \\ -x - y + kz = 1 \\ x + y + z = k \end{cases}$$

**Solución:**

Problema 78

$$C(k) = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 \\ -1 & -1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow k \rightarrow \begin{pmatrix} k & 1 & -2 \\ -1 & -1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A(k) = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix} \rightarrow k \rightarrow \begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

$|C(k)| \rightarrow -k^2 + 1$   
 resolver  $(-k^2 + 1 = 0) \rightarrow \{(k = -1), (k = 1)\}$   
 Para  $k \neq -1, k \neq 1, R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas.  
 Sistema heterogéneo compatible determinado.

$$C(-1) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

rango  $\{C(-1)\} \rightarrow 2$

$$A(-1) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

rango  $\{A(-1)\} \rightarrow 2$   
 $R(C) = R(A) = 2 < 3 =$  número de incógnitas.  
 Sistema compatible indeterminado.

$$C(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

rango  $\{C(1)\} \rightarrow 2$

$$A(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

rango  $\{A(1)\} \rightarrow 3$   
 $R(C) \neq R(A)$ , sistema incompatible.

79. Dado el sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ kx - y + z = 0 \\ (k+1)x + y = 0 \end{cases}$$

averigua para qué valores de  $k$  tienen soluciones distintas de  $x = y = z = 0$ . Resuélvelo en tales casos.

**Solución:**

Problema 79

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow k^2 - k - 2$$

resolver  $(k^2 - k - 2 = 0) \rightarrow \{(k = -1), (k = 2)\}$   
 Tiene soluciones distintas de  $x = y = z = 0$  para  $k \neq -1, k \neq 2$   
 Para  $k = -1$

$$\text{resolver} \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \{(x = z, y = 0, z = z)\}$$

Solución  $x = z, y = 0$   
 Para  $k = 2$

$$\text{resolver} \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \rightarrow \left\{ \left\{ x = -\frac{1}{5}z, y = \frac{3}{5}z, z = z \right\} \right\}$$

Solución  $x = -z/5, y = 3z/5$

80. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - ay = 2 \\ ax - y = a + 1 \end{cases}$$

determina para qué valor o valores de  $a$  el sistema tiene una solución en la que  $y = 2$

**Solución:**

Problema 80

Resolvemos el sistema cuando  $y = 2$

$$\text{resolver} \begin{cases} x - 2a = 2 \\ a \cdot x - 2 = a + 1 \end{cases} \rightarrow \left\{ (a = 1, x = 4), (a = -\frac{3}{2}, x = -1) \right\}$$

Tiene la solución  $y = 2$  cuando  $a = 1$  o  $a = -3/2$



# Problemas propuestos

1. Sea A una matriz  $3 \times 3$  de columnas  $C_1, C_2$  y  $C_3$  (en ese orden). Sea B la matriz de columnas  $C_1 + C_2, 2C_1 + 3C_3$  y  $C_2$  (en ese orden). Calcula el determinante de B en función del de A

**Solución:**

$$|C_1 + C_2 \quad 2C_1 + 3C_3 \quad C_2| = \leftarrow$$

Si una columna está formada por dos sumandos, el determinante se descompone en la suma de dos determinantes, cada uno con uno de los sumandos y el resto de columnas iguales.

$$|C_1 \quad 2C_1 + 3C_3 \quad C_2| + |C_2 \quad 2C_1 + 3C_3 \quad C_2| = \leftarrow$$

$$|C_1 \quad 2C_1 + 3C_3 \quad C_2| =$$

La  $1^a$  y  $3^a$  columna son iguales. El determinante vale cero.

$$|C_1 \quad 2C_1 \quad C_2| + |C_1 \quad 3C_3 \quad C_2| =$$

$$|C_1 \quad 3C_3 \quad C_2| = 3|C_1 \quad C_3 \quad C_2| = -3|C_1 \quad C_2 \quad C_3| = -3|A|$$

2. Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$$

- a) Discútelo según los valores del parámetro a  
b) Resuélvelo en el caso  $a = 2$

**Solución:**

- a) Sea la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|C| = -a^2 + 3a - 2 \Rightarrow -a^2 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1, a = 2$$

Para todo valor  $a \neq 1, a \neq 2 \Rightarrow R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas  $\Rightarrow$  **Sistema compatible determinado.**

Para  $a = 1$

$$R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \cdot 1^a - 2^a \\ 3^a - 1^a \end{matrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$R(C) = 2 \neq R(A) = 3 \Rightarrow$  **Sistema incompatible.**

Para  $a = 2$

$$R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \cdot 1^a - 2^a \\ 3^a - 1^a \end{matrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= R \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(C) = 2 = R(A) = 2 \Rightarrow$  **Sistema compatible indeterminado.**

- b) Para  $a = 2$ , pasamos de la última matriz en la que hemos calculado el rango a forma de sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1 - z, y = 0$$

En paramétricas:  $x = 1 - \lambda; y = 0; z = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$

3. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + (k+1)y + 2z = -1 \\ kx + y + z = k \\ (k-1)x - 2y - z = k+1 \end{cases}$$

- a) discútelo según los valores del parámetro k  
b) resuélvelo cuando tenga infinitas soluciones.

**Solución:**

- a) Sean las matrices de los coeficientes y la ampliada:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ k-1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & k \\ k-1 & -2 & -1 & k+1 \end{pmatrix}$$

$$|C| = 2k^2 - 5k + 2 \Rightarrow 2k^2 - 5k + 2 = 0 \Rightarrow k = 2, k = 1/2$$

Para todo valor  $k \neq 2, k \neq 1/2 \Rightarrow R(C) = R(A) = 3 =$  número de incógnitas  $\Rightarrow$  **Sistema compatible determinado.**

Para  $k = 2$

$$R \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \cdot 1^a - 2^a \\ 1^a - 3^a \end{matrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= R \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$R(C) = R(A) = 2 \Rightarrow$  **Sistema compatible indeterminado.**

Para  $k = 1/2$

$$R \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & -2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \cdot 1^a \\ 2 \cdot 2^a \\ 2 \cdot 3^a \end{matrix} =$$

$$= R \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \cdot 2^a - 1^a \\ 1^a + 2 \cdot 3^a \end{matrix} =$$

$$= R \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 5 \cdot 2^a + 3^a \\ 5 \cdot 2^a + 3^a \end{matrix} = R \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

$R(C) = 2 \neq R(A) = 3 \Rightarrow$  **Sistema incompatible.**

- b) Nos queda el sistema:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ 5y + 3z = -4 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{-4 - 3z}{5} \Rightarrow x = \frac{7 - z}{5}$$

En paramétricas:  $x = \frac{7 - \lambda}{5}, y = \frac{-4 - 3\lambda}{5}, z = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$

4. Considera la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$

a) Halla los valores del parámetro  $m$  para los que el rango de  $A$  es menor que 3

b) Estudia si el sistema  $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  tiene solución para cada uno de los valores de  $m$  obtenidos en el apartado anterior.

**Solución:**

a) El rango de  $A$  será menor que 3 cuando  $|A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{vmatrix} = m^4 - 2m^3 + m^2$$

$$m^4 - 2m^3 + m^2 = 0 \Rightarrow m^2(m^2 - 2m + 1) =$$

$$= m^2(m-1)^2 = 0 \Rightarrow m = 0, m = 1$$

El rango de  $A$  será menor que 3 para:  $m = 0$  y  $m = 1$

b) Para  $m = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0 = 1 \\ 0 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  **Sistema incompatible.**

Para  $m = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x + y + z = 1$

Sistema **compatible indeterminado**, con solución:

$$\mathbf{x} = 1 - \lambda - \mu; \mathbf{y} = \lambda; \mathbf{z} = \mu$$

5. Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donde  $\lambda$  es un número real.

a) Encuentra los valores de  $\lambda$  para los que la matriz  $AB$  tiene inversa.

b) Dados  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  números reales cualesquiera, ¿puede ser el sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

compatible determinado con  $A$ , la matriz del enunciado?

**Solución:**

a) Se calcula el producto  $AB$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda & 3 + 2\lambda \\ 1 - \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Para que exista inversa,  $|AB| \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 + 2\lambda & 3 + 2\lambda \\ 1 - \lambda & 1 \end{vmatrix} = 2\lambda^2 + 3\lambda - 2$$

$$2\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2; \lambda = \frac{1}{2}$$

La matriz  $AB$  tiene inversa para todos los valores

$$\lambda \neq -2; \lambda \neq \frac{1}{2}$$

b) Se escribe el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + \lambda z = a \\ x - y - z = b \end{cases}$$

Para que el sistema sea compatible determinado, el rango de la matriz de los coeficientes debe ser igual al de la ampliada y al número de incógnitas. Como el  $R(A) < 3 = n^\circ$  de incógnita, se sigue que el sistema no puede ser compatible determinado.

$$R \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda & a \\ 1 & -1 & -1 & b \end{pmatrix} \right)_{1^a - 2^a} = R \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda & a \\ 0 & 3 & \lambda + 1 & a - b \end{pmatrix} \right) = 2$$

El rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada, igual a 2. Luego el **sistema es compatible indeterminado para cualquier valor de  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$**

6. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ se pide:}$$

a) resolver la ecuación matricial  $AX + X = B$ , donde  $X$  es una matriz  $2 \times 2$

b) resolver el sistema:  $\begin{cases} 2X + 2Y = A \\ 4X + 3Y = B \end{cases}$ , siendo  $X$  e  $Y$  dos matrices de orden  $2 \times 2$

**Solución:**

$$\text{a) } AX + X = B \Rightarrow (A + I)X = B \Rightarrow (A + I)^{-1} (A + I)X = (A + I)^{-1} B \Rightarrow X = (A + I)^{-1} B \quad [1]$$

Se calcula la matriz inversa de  $A + I$

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|A + I| = 1$$

$$(A + I)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la igualdad [1]

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

# Problemas propuestos

$$b) \begin{cases} 2X + 2Y = A \\ 4X + 3Y = B \end{cases}$$

Multiplicando por 2 la 1ª ecuación y restando la 1ª menos la 2ª:

$$Y = 2A - B$$

$$Y = 2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Multiplicando la 1ª por 3, la 2ª por 2 y restando la 2ª menos la 1ª:

$$2X = 2B - 3A$$

$$X = \frac{1}{2} \left[ 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

7. Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

- determina el rango de M según los valores del parámetro **a**
- determina para qué valores de **a** existe la matriz inversa de M. Calcula dicha matriz inversa para  $a = 2$

**Solución:**

- $|M| = -2a^3 + 2a \Rightarrow -2a^3 + 2a = 0 \Rightarrow a = -1, a = 0 \text{ y } a = 1$   
Para todo valor  $a \neq -1, a \neq 0 \text{ y } a \neq 1$ , el rango de M es 3  
Para  $a = -1$

$$R \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1^a + 2^a \\ 1^a - 3^a \end{matrix} = R \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Para  $a = 0$

$$R \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1^a - 3^a \end{matrix} = R \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

Para  $a = 1$

$$R \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a - 3^a \end{matrix} = R \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

- Para que exista inversa,  $|M| \neq 0$ . Luego existe inversa para  $a \neq -1, a \neq 0 \text{ y } a \neq 1$

Para  $a = 2$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; |M| = -12$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -6 & 6 & -6 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

8. Dado el sistema de ecuaciones con un parámetro real  $\lambda$  e incógnitas  $x, y, z$

$$\begin{cases} (\lambda + 2)x - y + z = 0 \\ 3x + (\lambda + 6)y - 3z = 0 \\ 5x + 5y + (\lambda - 2)z = 0 \end{cases}$$

se pide:

- calcular para qué valores de  $\lambda$  el sistema solo admite la solución  
 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$
- para cada valor de  $\lambda$  que hace indeterminado el sistema, obtener todas sus soluciones.
- explicar la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema cuando  $\lambda = -3$

**Solución:**

- Sea C la matriz de los coeficientes y A la matriz ampliada.

$$C = \begin{pmatrix} \lambda + 2 & -1 & 1 \\ 3 & \lambda + 6 & -3 \\ 5 & 5 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda + 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & \lambda + 6 & -3 & 0 \\ 5 & 5 & \lambda - 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|C| = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = -3$$

Para todo valor  $\lambda \neq 0, \lambda \neq -3$ ,  $R(C) = R(A) = 3 = n^\circ$  de incógnitas  $\Rightarrow$  Sistema es homogéneo compatible determinado con la solución  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

- Se estudian los dos valores de  $\lambda$

Para  $\lambda = 0$ , se tiene:

$$R \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -3 & 0 \\ 5 & 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \cdot 1^a - 2 \cdot 2^a \\ 5 \cdot 1^a - 2 \cdot 3^a \end{matrix} = R \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & 9 & 0 \\ 0 & -15 & -9 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$R(C) = R(A) = 2 < n^\circ$  de incógnitas  $\Rightarrow$  Sistema compatible indeterminado. Queda el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -5y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{5}z; y = \frac{3}{5}z$$

La solución en paramétricas es:

$$x = -\frac{1}{5}\mu; y = \frac{3}{5}\mu; z = \mu; \mu \in \mathbb{R}$$

Para  $\lambda = -3$ , se tiene:

$$R \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \\ -5 & -5 & -5 & 0 \end{pmatrix} = I$$

$R(C) = R(A) = I < n^\circ$  de incógnitas  $\Rightarrow$  Sistema compatible indeterminado.

Queda la ecuación:  $-x - y + z = 0 \Rightarrow x = -y + z$

La solución:  $x = -\beta + \mu; y = \beta; z = \mu; \beta, \mu \in \mathbb{R}$

- c) Para  $\lambda = -3$ , las tres ecuaciones son equivalentes. Corresponden a un solo plano.

9. A es una matriz  $3 \times 3$  tal que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- calcular el determinante de la matriz  $A^3$  y la matriz inversa de  $A^3$
- calcular la matriz fila  $X = (x, y, z)$ , que es solución de la ecuación matricial  $XA^3 = BA^2$ , donde B es la matriz fila  $B = (1, 2, 3)$
- calcular la matriz inversa de A

**Solución:**

a)  $|A^3| = -1$

Los adjuntos de los términos de la matriz  $A^3$  son:

$$A_{11}^3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{21}^3 = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{31}^3 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{12}^3 = -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -6 \quad A_{22}^3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{32}^3 = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{13}^3 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{23}^3 = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{33}^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$(A^3)^{-1} = -\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -6 & -7 & 4 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b)  $XA^3 = BA^2 \Rightarrow XA^3(A^3)^{-1} = BA^2(A^3)^{-1} \Rightarrow X = BA^2(A^3)^{-1}$

$$X = (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (5 \ 6 \ 2)$$

c)  $A^3 = A^2A \Rightarrow (A^3)^{-1}A^3 = (A^3)^{-1}A^2A \Rightarrow I = (A^3)^{-1}A^2A \Rightarrow A^{-1} = (A^3)^{-1}A^2$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$