Ejercicios resueltos de probabilidad

1. El 70% de empresas tiene errores en sus activos financieros, el 60% tiene errores en sus pasivos financieros y el 40% tiene errores en sus activos y en sus pasivos financieros. Obtén razonadamente el porcentaje de empresas sin errores en sus activos, en sus pasivos o en ambos. De una muestra de 500 empresas, ¿cuántas se espera que no tengan errores ni en sus activos ni en sus pasivos financieros?

Solución:

Llamemos A = {tener errores en los activos financieros} y B = {tener errores en los pasivos financieros}. Entonces P(A) = 0'7, P(B) = 0'6 y $P(A \cap B)$ = 0'4.

El suceso "no tener errores en los activos financieros" es $\overline{A}$ y por tanto $P(\overline{A})$ = = 1 – P(A) = 1 – 0'7 = 0'3 lo que significa el 30%.

El suceso "no tener errores en los pasivos financieros" es $\overline{B}$ y por tanto $P(\overline{B})$ = = 1 – P(B) = 1 – 0'6 = 0'4 lo que significa el 40%.

El suceso "no tener errores en ambos" equivale a "no tener errores en los activos financieros y no tener errores en los pasivos financieros", es decir, $\overline{A} \cap \overline{B}$. Pero, por las leyes de Morgan, $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$. Entonces $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B})$ = = 1 – $P(A \cup B)$ = 1 – [P(A) + P(B) – $P(A \cap B)$] = 1 – (0'7 + 0'6 – 0'4) = 1 – 0'9 = = 0'1 lo que significa un 10%.

Según lo anterior se espera que un 10% de las empresas no tengan errores ni en sus activos ni en sus pasivos financieros. Si tenemos una muestra de 500 empresas podemos esperar que $500\frac{10}{100} = 50$ empresas no tengan errores ni en sus activos ni en sus pasivos financieros.

2. Un jugador de fútbol, especialista en lanzar penaltis, mete 4 de cada 5 que tira. Para los próximos tres penaltis se consideran los siguientes sucesos: A = {mete sólo uno de ellos}, B = {mete dos de los tres} y C = {mete el primero}. Halla la probabilidad de los sucesos $A \cup B$, $A \cap C$ y $B \cap C$.

Solución:

Llamemos M al suceso "meter penalti". Entonces $P(M) = \frac{4}{5}$ y por tanto $P(\overline{M}) = \frac{1}{5}$.

Observemos que el suceso A es equivalente a "meter el primero y no meter el segundo y no meter el tercero, o bien no meter el primero y meter el segundo y no meter el tercero, o bien no meter el primero y no meter el segundo y meter el tercero", que simbólicamente podemos escribir así:

$$A = (M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3) \cup (\overline{M}_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3) \cup (\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap M_3)$$

Los subíndices indican el número del penalti lanzado. Observemos también que cada uno de los sucesos encerrados entre paréntesis son incompatibles dos a dos, es decir, no es posible que ocurra simultáneamente "meter el primer penalti y no los dos siguientes" y "no meter los dos primeros y meter el tercero", por ejemplo. Esta última observación nos lleva necesariamente a:

$P(A) = P[(M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3) \cup (\overline{M}_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3) \cup (\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap M_3)] = P(M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3) + P(\overline{M}_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3) + P(\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap M_3)$ **(1)**, pues sabemos que si A, B y C son dos sucesos cualesquiera incompatibles dos a dos ($A \cap B = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$ y $B \cap C = \varnothing$) entonces $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$.

Hagamos notar, para terminar esta parte, que el hecho de meter o no un penalti no influye para nada en lo que ocurra en el lanzamiento del siguiente, es decir, meter o no meter el primer penalti es <u>independiente</u> de meter o no meter el segundo y de meter o no meter el tercero. Teniendo en cuenta esto podemos escribir **(1)** así:

(1) $= P(M_1) \cdot P(\overline{M}_2) \cdot P(\overline{M}_3) + P(\overline{M}_1) \cdot P(M_2) \cdot P(\overline{M}_3) + P(\overline{M}_1) \cdot P(\overline{M}_2) \cdot P(M_3) =$ $= \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{4}{125}+\frac{4}{125}+\frac{4}{125} = \frac{12}{125}$, pues también hemos de saber que si A, B y C son sucesos independientes dos a dos, entonces $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

Con todo lo anterior hemos demostrado que $P(A) = \frac{12}{125}$

Calculemos ahora P(B). Por un razonamiento semejante al anterior podemos escribir ahora $B = (M_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3) \cup (M_1 \cap \overline{M}_2 \cap M_3) \cup (\overline{M}_1 \cap M_2 \cap M_3)$ y por tanto $P(B) = P(M_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3) + P(M_1 \cap \overline{M}_2 \cap M_3) + P(\overline{M}_1 \cap M_2 \cap M_3) = P(M_1) \cdot P(M_2) \cdot P(\overline{M}_3) + P(M_1) \cdot P(\overline{M}_2) \cdot P(M_3) + P(\overline{M}_1) \cdot P(M_2) \cdot P(M_3) =$ $\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{16}{125}+\frac{16}{125}+\frac{16}{125} = \frac{48}{125}$. Resumiendo: $P(B) = \frac{48}{125}$

Hallemos por último P(C). Meter el primer penalti (con los penaltis segundo y tercero puede ocurrir cualquier cosa) se puede escribir simbólicamente así: $C = (M_1 \cap M_2 \cap M_3) \cup (M_1 \cap \overline{M}_2 \cap M_3) \cup (M_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3) \cup (M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3)$ y entonces $P(C) = P(M_1 \cap M_2 \cap M_3) + P(M_1 \cap \overline{M}_2 \cap M_3) + P(M_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3) +$ $+ P(M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3) = P(M_1) \cdot P(M_2) \cdot P(M_3) + P(M_1) \cdot P(\overline{M}_2) \cdot P(M_3) +$ $+ P(M_1) \cdot P(M_2) \cdot P(\overline{M}_3) + P(M_1) \cdot P(\overline{M}_2) \cdot P(\overline{M}_3) = \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}$ $+ \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{64}{125}+\frac{16}{125}+\frac{16}{125}+\frac{4}{125} = \frac{100}{125}$. En definitiva: $P(C) = \frac{100}{125}$

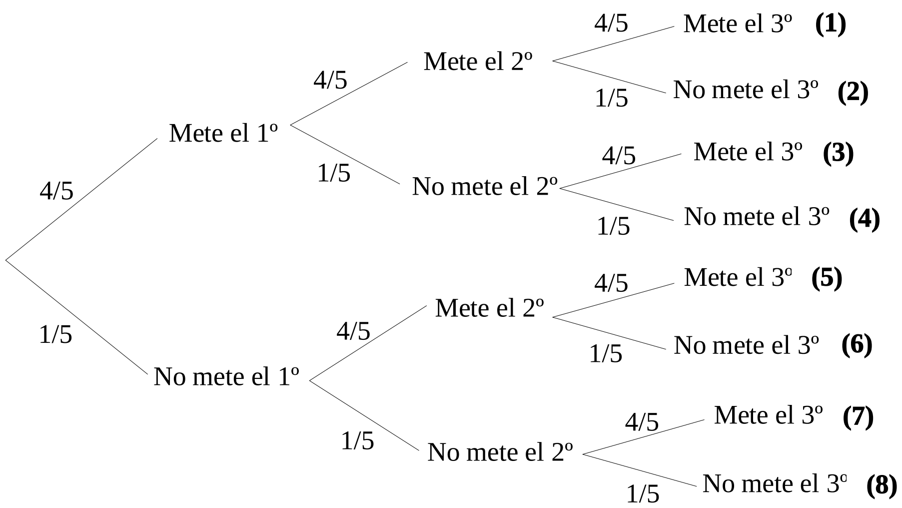
Ahora estamos ya en condiciones de hallar las probabilidades que se nos piden en el problema:

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{12}{125} + \frac{48}{125} = \frac{60}{125}$ (los sucesos A y B son claramente incompatibles).
- $A \cap C = M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \Rightarrow P(A \cap C) = P(M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3) =$ $= P(M_1) \cdot P(\overline{M}_2) \cdot P(\overline{M}_3) = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{4}{125}$
- $B \cap C = (M_1 \cap \overline{M}_2 \cap M_3) \cup (M_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3) \Rightarrow P(B \cap C) =$ $= P(M_1 \cap \overline{M}_2 \cap M_3) + P(M_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3) = P(M_1) \cdot P(\overline{M}_2) \cdot P(M_3) +$ $+ P(M_1) \cdot P(M_2) \cdot P(\overline{M}_3) = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{16}{125}+\frac{16}{125} = \frac{32}{125}$

Observaciones: Para calcular la probabilidad de $A \cap B$ es necesario calcular P(A) y P(B) pues son dos sucesos incompatibles, y por tanto la suma de las probabilidades de los mismos. Sin embargo P(C) no hubiera hecho falta pues se piden las probabilidades de $A \cap C$ y de $B \cap C$, cuyo cálculo no requiere como se ha visto de P(C) y se hallan de forma similar a como se puede hallar P(A) o P(B). Observemos además que A y C no son independientes y por tanto no es lícito utilizar la fórmula $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$. Lo mismo se puede decir de B y C.

Otra forma de hacer el ejercicio:

Todo lo anterior se podría haber simplificado bastante si utilizamos un diagrama de árbol como el siguiente:



Ahora hemos de observar que:

- $P(A \cup B) = P(\mathbf{(2)}) + P(\mathbf{(3)}) + P(\mathbf{(4)}) + P(\mathbf{(5)}) + P(\mathbf{(6)}) + P(\mathbf{(7)}) = \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{16}{125} + \frac{16}{125} + \frac{4}{125} + \frac{16}{125} + \frac{4}{125} + \frac{4}{125} = \frac{60}{125}$

- $P(A \cap C) = P(\mathbf{(4)}) = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{4}{125}$

- $P(B \cap C) = P(\mathbf{(2)}) + P(\mathbf{(3)}) = \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{16}{125} + \frac{16}{125} = \frac{32}{125}$

Esta forma de resolver el ejercicio es más práctica. En experimentos compuestos se ha de recordar que la probabilidad de un suceso elemental del mismo puede calcularse multiplicando las probabilidades de los sucesos elementales que conforman la experiencia compuesta. En el fondo el experimento lanzar sucesivamente tres penaltis es la experiencia compuesta de lanzar un penalti, luego otro y por fin el tercero. El uso de diagramas de árbol en este tipo de situaciones es fundamental para la correcta realización del ejercicio.

3. En una clase infantil hay 6 niñas y 10 niños. Si se escoge a 3 alumnos al azar, halla la probabilidad de:

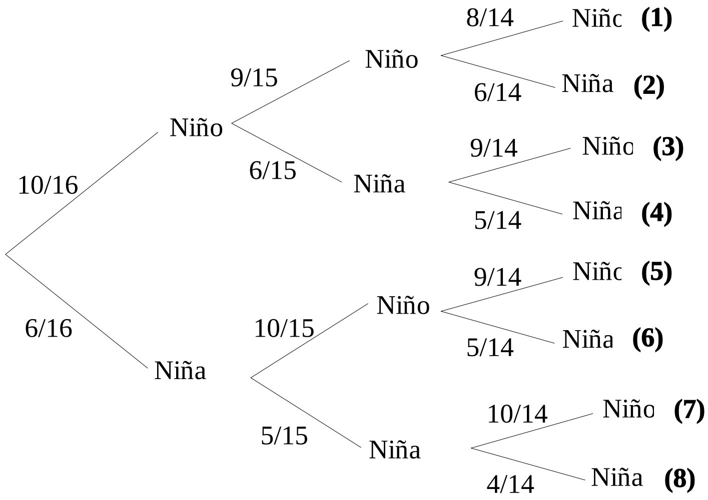
a) Seleccionar 3 niños.

b) Seleccionar 2 niños y una niña.

c) Seleccionar, al menos, un niño.

Solución:

Este ejercicio es similar al anterior. Observemos el siguiente diagrama:



a) P(seleccionar 3 niños) = P(**(1)**) = $\frac{10}{16}\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{8}{14} = \frac{720}{3360} = \frac{3}{14}$

b) P(seleccionar 2 niños y 1 niña) = P(**(2)**) + P(**(3)**) + P(**(5)**) = $\frac{10}{16}\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{6}{14} +$

$+ \frac{10}{16}\cdot\frac{6}{15}\cdot\frac{9}{14} + \frac{6}{16}\cdot\frac{10}{15}\cdot\frac{9}{14} = \frac{540}{3360} + \frac{540}{3360} + \frac{540}{3360} = \frac{1620}{3360} = \frac{27}{56}$

c) P(seleccionar, al menos, un niño) = 1 − P(no seleccionar ningún niño) = 1 − P(seleccionar tres niñas) = 1 − P(**(8)**) = $1 - \frac{6}{16}\cdot\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14} = 1 - \frac{120}{3360} =$

$= 1 - \frac{1}{28} = \frac{27}{28}$

4. Si los sucesos A y B son independientes y compatibles, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

a) $P(A \cap B) = P(B)$

b) $P(B \cup A) = P(A) + P(B)$

c) $P(\overline{A}/B) = P(\overline{A})$

Solución:

a) Como A y B son independientes $\Rightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Esta última expresión solamente es igual a P(B) si P(A) = 1.

b) $P(B \cup A) = P(B) + P(A) - P(B \cap A)$. Si fuera cierto la afirmación entonces $P(A) + P(B) = P(B) + P(A) - P(B \cap A) \Rightarrow P(B \cap A) = 0 \Rightarrow B \cap A = \varnothing$ y esto es imposible pues A y B son compatibles. Así pues la afirmación no es cierta.

c) $P(\overline{A}/B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(\overline{A}) \cdot P(B)}{P(B)} = P(\overline{A})$ y la afirmación es cierta. Obsérvese que $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P(B)$ porque al ser A y B independientes también lo son $\overline{A}$ y B (¡demuéstralo!).

5. Dos niños escriben en un papel una vocal cada uno, ¿cuál es la probabilidad de que sea la misma?.

Solución:

Hemos de hallar la probabilidad de que los dos escriban la "a", o que los dos escriban la "e", o que los dos escriban la "i", o que los dos escriban la "o", o bien que los dos escriban la "u". Además, tengamos en cuenta que lo que escriba uno de los niños no depende para nada en lo que escriba el otro.

$P(aa \cup ee \cup ii \cup oo \cup uu) = P(aa) + P(ee) + P(ii) + P(oo) + P(uu) = P(a)P(a) +$
$+ P(e)P(e) + P(i)P(i) + P(o)P(o) + P(u)P(u) = \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{5} =$
$\dfrac{1}{25} + \dfrac{1}{25} + \dfrac{1}{25} + \dfrac{1}{25} + \dfrac{1}{25} = \dfrac{5}{25} = \dfrac{1}{5}$

6. Se ha comprobado que el 48% de los alumnos de Bachillerato de cierta región son aficionados a la música clásica y a la pintura, y que el 60% de los aficionados a la pintura también son aficionados a la música clásica. Si se elige al azar un alumno de Bachillerato de esa región, ¿qué probabilidad hay de que no sea aficionado a la pintura?

Solución:

Llamemos A = {ser aficionado a la música clásica} y B = {ser aficionado a la pintura}. Según el enunciado $P(A \cap B) = 0'48$ y $P(A/B) = 0'6$. Hemos de hallar $P(\overline{B})$. Pero como $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ entonces despejando, $P(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A/B)} \Rightarrow$

$P(B) = \dfrac{0'48}{0'6} = 0'8 \Rightarrow P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0'8 = 0'2$

7. En una clase hay 12 alumnos y 16 alumnas. El profesor saca a 4 a la pizarra.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que todas sean alumnas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que todos sean alumnos?

Solución:

Llamemos A_1 = {la primera es alumna}, A_2 = {la segunda es alumna}, A_3 = {la tercera es alumna}, A_4 = {la cuarta es alumna}, B_1 = {el primero es alumno}, B_2 = {el segundo es alumno}, B_3 = {el tercero es alumno} y B_4 = {el cuarto es alumno}.

a) P(todas alumnas) = P(1ª alumna y 2ª alumna y 3ª alumna y 4ª alumna) = $= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1 \cap A_2)\cdot P(A_4/A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ $= \dfrac{16}{28}\cdot\dfrac{15}{27}\cdot\dfrac{14}{26}\cdot\dfrac{13}{25} = \dfrac{43680}{491400} \cong 0'089$

b) P(todos alumnos) = P(1º alumno y 2º alumno y 3º alumno y 4º alumno) = $= P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) \cdot P(B_3/B_1 \cap B_2) \cdot P(B_4/B_1 \cap B_2 \cap B_3) =$ $\frac{12}{28} \cdot \frac{11}{27} \cdot \frac{10}{26} \cdot \frac{9}{25} = \frac{11880}{491400} \cong 0'024$

Se podría haber dibujado un diagrama de árbol, pero basta tenerlo en mente para la resolución del problema. Obsérvese cómo es la expresión que proporciona la probabilidad de la intersección de sucesos cuando, como en este caso, no son independientes.

8. Un estudiante hace dos pruebas en un mismo día. La probabilidad de que pase la primera es 0'6, la probabilidad de que pase la segunda es 0'8 y la de que pase ambas es 0'5. Se pide:

a) Probabilidad de que pase al menos una prueba.

b) Probabilidad de que no pase ninguna prueba.

c) ¿Son ambas pruebas sucesos independientes?

d) Probabilidad de que pase la segunda prueba en caso de no haber superado la primera.

Solución:

Llamemos A = {pasar primera prueba} y B = {pasar segunda prueba}. Se nos proporcionan tres probabilidades: P(A) = 0'6, P(B) = 0'8 y $P(A \cap B) = 0'5$.

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) + P(A \cap B) = 0'6 + 0'8 - 0'5 = 0'9$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0'9 = 0'1$

c) $P(A \cap B) = 0'5 \neq P(A) \cdot P(B) = 0'6 \cdot 0'8 = 0'48 \Rightarrow$ A y B no son independientes.

d) $P(B/\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})}$. Por un lado $P(B \cap \overline{A}) = P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) =$ $= 0'8 - 0'5 = 0'3$ y por otro lado $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0'6 = 0'4$. Así pues $P(B/\overline{A}) = \frac{0'3}{0'4} = 0'75$

9. En una muestra de 1.000 personas hay 300 que saben inglés, 100 que saben ruso y 50 ambos idiomas. Con estos datos averigua si son independientes o no los sucesos "saber inglés" y "saber ruso".

Solución:

Llamemos A = {saber inglés} y B = {saber ruso}. Entonces $P(A) = \frac{300}{1000} = 0'3$ $P(B) = \frac{100}{1000} = 0'1$ y $P(A \cap B) = \frac{50}{1000} = 0'05$. Para que los sucesos A y B sean independientes se ha de cumplir que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Pero $P(A) \cdot P(B) =$ $= 0'3 \cdot 0'1 = 0'03 \neq 0'05 = P(A \cap B)$. Así pues A y B no son independientes.

10. La probabilidad de que un niño, cuando sea mayor, estudie una carrera universitaria es 1/6, y en el caso de una niña es 1/10. Si se toman al azar un niño y una niña, calcula las probabilidades siguientes:

a) Que los dos estudien una carrera universitaria.

b) Que ninguno de ellos estudie una carrera universitaria.

c) Que al menos uno de ellos estudie una carrera universitaria

Solución:

Llamemos A = {un niño, cuando sea mayor, estudie una carrera universitaria} y B = {una niña, cuando sea mayor, estudie una carrera universitaria}. Según el enunciado P(A) = 1/6 y P(B) = 1/10. Además A y B son claramente sucesos independientes pues el hecho de que un niño estudie, cuando sea mayor, una carrera universitaria no debe de influir en el hecho de que una niña lo haga también o no.

a) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{60}$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{60}\right) = 1 - \frac{15}{60} = \frac{45}{60}$. Este apartado también se podría haber hecho considerando que si A y B son independientes entonces $\overline{A}$ y $\overline{B}$ también lo son y por tanto $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} = \frac{45}{60}$

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{60} = \frac{15}{60}$

11. Juan y Pedro lanzan una pelota a un blanco. La probabilidad de que Juan dé en el blanco es 1/3 y la probabilidad de que dé Pedro es 1/4. Supóngase que Juan lanza primero y que los dos chicos se van turnando para lanzar:

a) Calcula la probabilidad de que el primer lanzamiento que dé en el blanco sea el segundo de Juan.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que Juan dé en el blanco antes de que lo haga Pedro?.

Solución:

Llamemos A = {Juan da en el blanco} y B = {Pedro da en el blanco}. Entonces $P(A) = \frac{1}{3}$ y $P(B) = \frac{1}{4}$. Además los sucesos A y B son independientes pues el hecho de Juan dé o no en el blanco no influye para que Pedro dé o no en el blanco.

a) Debe de ocurrir que Juan, que es el primero que lanza, no dé en el blanco, que luego tampoco dé Pedro y finalmente, en el siguiente lanzamiento, Juan consiga dar en el blanco. Este suceso se puede simbolizar así $\overline{A} \cap \overline{B} \cap A$, cuya probabilidad es $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap A) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

b) Observemos que Juan dará antes que Pedro si Juan da la primera vez que lanza. En caso contrario solamente dará antes que Pedro si éste falla y a continuación él acierta. En la siguiente tabla vemos las posibilidades:

Lanzamiento de Juan	**Suceso: Juan da en el blanco antes que Pedro**	**Probabilidad**
1	A	$\frac{1}{3}$
2	$\overline{A} \cap \overline{B} \cap A$	$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$
3	$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{A} \cap \overline{B} \cap A$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{3}$
4	$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{A} \cap \overline{B} \cap A$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{3}$
....	....	....
n	$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{A} \cap \overline{B} \cap \ldots$ $\ldots\ldots \cap \overline{A} \cap \overline{B} \cap A$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{3}$
....	....	....

Por tanto la probabilidad de que Juan dé en el blanco antes que Pedro debe de calcularse sumando todos los resultados de la última columna:

P(Juan da en el blanco antes que Pedro) $= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{3} +$

$+ \;........ + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{3} + ... = \frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+......+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+......\right).$

La expresión que hay entre paréntesis es la suma de los términos de una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$ que se obtiene mediante la fórmula $S_n=\frac{a_n\cdot r-a_1}{r-1}$, donde a_n es el término n–ésimo de la progresión, a_1 el primero y r la razón. En nuestro caso $S_n=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right).$

Obsérvese que cuando n tiende a infinito (es decir, cuando el número de lanzamientos se hace tan grande como sea necesario hasta que Juan dé en el blanco, mientras Pedro vaya fallando) la expresión $\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}$ tiende a cero

($\{2^n\} \to \infty$ cuando $n \to \infty$). Así pues $S_n = 2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ tiende a 2 y por tanto

P(Juan da en el blanco antes que Pedro) = $\frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$

12. Estudiando un determinado colectivo de personas resulta que: 2 de cada 5 son morenas, y 3 de cada 9 tienen los ojos azules, teniendo el resto los ojos de distinto color al azul. Calcula las siguientes probabilidades:

a) Que una persona sea morena y tenga los ojos azules.

b) Que una persona sea morena o no tenga los ojos azules

c) Que tres personas sean morenas.

d) Que dos personas sean morenas o tengan los ojos azules.

Solución:

Llamemos M = {ser morena} y A = {tener los ojos azules}. Entonces P(M) = 2/5 y P(A) = 3/9 = 1/3. Además ambos sucesos son claramente independientes pues el color del pelo o de la piel no debe de influir para nada en el color que se tenga de ojos.

a) $P(M \cap A) = P(M) \cdot P(A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$

b) $P(M \cup \overline{A}) = P(M) + P(\overline{A}) - P(M \cap \overline{A}) = P(M) + P(\overline{A}) - P(M) \cdot P(\overline{A}) = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} - \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} - \frac{4}{15} = \frac{6+10-4}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

c) $P(M \cap M \cap M) = P(M) \cdot P(M) \cdot P(M) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{125}$

d) $P[(M \cap M) \cup (A \cap A)] = P(M \cap M) + P(A \cap A) - P((M \cap M) \cap (A \cap A)) = P(M) \cdot P(M) + P(A) \cdot P(A) - P(M) \cdot P(M) \cdot P(A) \cdot P(A) = \frac{4}{25} + \frac{1}{9} - \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{25} + \frac{1}{9} - \frac{4}{225} = \frac{36+25-4}{225} = \frac{57}{225} = \frac{19}{75}$

13. En una clase, un 40% de alumnos aprobaron filosofía, y un 50% matemáticas. Se sabe que la probabilidad de aprobar filosofía si se ha aprobado matemáticas es 0'6.

a) ¿Qué porcentaje de alumnos aprobaron ambas asignaturas?

b) De los alumnos que aprobaron filosofía ¿qué porcentaje aprobó matemáticas?

Solución:

Sea F = {aprobar filosofía} y Mt = {aprobar matemáticas}. Entonces P(F) = 0'4 y P(Mt) = 0'5. Además se sabe también que P(F/Mt) = 0'6. Esto último nos indica que en este caso los sucesos F y Mt, por la razón que sea, no son independientes.

a) Como $P(F/Mt) = \frac{P(F \cap Mt)}{P(Mt)}$ entonces $P(F \cap Mt) = P(F/Mt) \cdot P(Mt) = 0'6 \cdot 0'5 = 0{,}3$ lo que significa un 30% de alumnos que aprueban filosofía y matemáticas.

b) P(Mt/F) = $\frac{P(Mt \cap F)}{P(F)} = \frac{0'3}{0'4}$ = 0’75 que es un 75%

14. Para la señalización de emergencia de un hospital se han instalado dos indicadores que funcionan independientemente. La probabilidad de que el indicador A se accione durante la avería es de 0’99, mientras que para el indicador B, la probabilidad es de 0’95:

a) Calcula la probabilidad de que durante una avería se accione un solo indicador.

b) Calcula la probabilidad de que durante una avería no se accione ninguno de los dos indicadores.

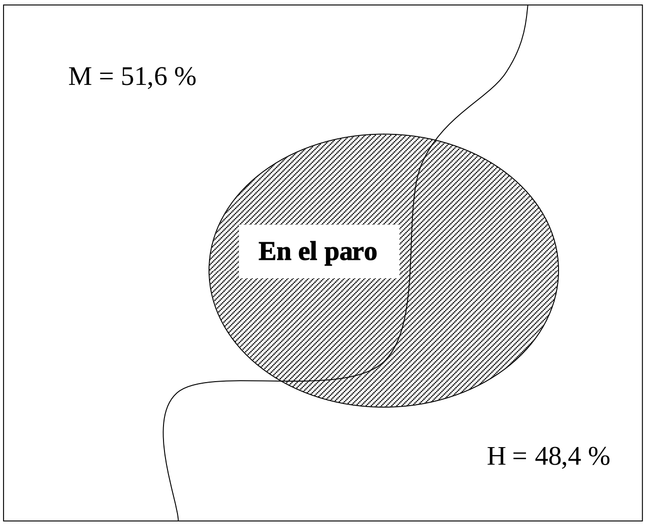
Solución:

a) $P[(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})] = P(A \cap \overline{B}) + P(B \cap \overline{A}) = P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A) = P(A) + P(B) - 2 \cdot P(A \cap B)$ = 0’99 + 0’95 – 2 · 0’99 · 0’95 = 0’99 + 0’95 – 1’881 = 0’059

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] =$
= 1 – (0’99 + 0’95 – 0’99 · 0’95) = 1 – 0’9995 = 0’0005

15. En 1994, en España, el 51’6% de la población en edad laboral (16 – 65 años) son mujeres y el 48’4% son hombres. De ellos, están en el paro el 31’4% de las mujeres y el 19’8% de los hombres. Elegida al azar una persona en edad laboral, ¿cuál es la probabilidad de que esté en el paro?

E = Población laboral en España en 1994



Solución:

Si llamamos H = {ser hombre en edad laboral} y M = {ser mujer en edad laboral} sabemos que P(M) = 0’516 y que P(H) = = 0’484. Además se conocen las probabilidades condicionadas siguientes: P(paro/M) = 0’314 y P(paro/H) = 0’198. Analizando con detenimiento el diagrama podemos concluir que:

P(paro) = P[(M ∩ paro) ∪ (H ∩ paro)] = P(M ∩ paro) + P(H ∩ paro) =
= P(M) · P(paro/M) + P(H) · P(paro/H) = 0’516 · 0’314 + 0’484 · 0’198 ≅ 0’258

Hemos de observar que estamos en las condiciones de aplicar el Teorema de la Probabilidad Total. De hecho la resolución anterior es la aplicación directa del mismo.

16. Una urna contiene 5 bolas rojas y 8 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por 2 del otro color. A continuación se extrae una segunda bola. Se pide:

a) Probabilidad de que la segunda bola sea verde.

b) Probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color.

Solución:

Llamemos R_1 = {sacar bola roja en la primera extracción}, R_2 = {sacar bola roja en la segunda extracción}, V_1 = {sacar bola verde en la primera extracción} y V_2 = {sacar bola verde en la segunda extracción}. El color que salga en la segunda extracción va a depender claramente de lo que haya salido en la primera: si salió bola roja en la primera extracción hemos de meter dos verdes en la urna con lo que tendremos en este caso 4 rojas (ya hemos extraído una) y 10 verdes; ahora bien, si salió bola verde en la primera extracción hemos de meter dos rojas y tendremos ahora 7 rojas y 7 verdes. Con las consideraciones anteriores y teniendo en cuenta los datos que ofrece el enunciado tendremos las probabilidades siguientes:

$P(R_1) = 5/13$, $P(V_1) = 8/13$, $P(R_2/R_1) = 4/14$, $P(V_2/R_1) = 10/14$, $P(R_2/V_1) = 7/14$ y $P(V_2/V_1) = 7/14$.

a) $P(V_2) = P[(V_2 \cap R_1) \cup (V_2 \cap V_1)] = P(V_2 \cap R_1) + P(V_2 \cap V_1) = P(V_2/R_1) \cdot P(R_1) + P(V_2/V_1) \cdot P(V_1) = \frac{10}{14} \cdot \frac{5}{13} + \frac{7}{14} \cdot \frac{8}{13} = \frac{106}{182} \cong 0'582$

b) $P[(R_1 \cap R_2) \cup (V_1 \cap V_2)] = P(R_1 \cap R_2) + P(V_1 \cap V_2) = P(R_2/R_1) \cdot P(R_1) + P(V_2/V_1) \cdot P(V_1) = \frac{4}{14} \cdot \frac{5}{13} + \frac{7}{14} \cdot \frac{8}{13} = \frac{76}{182} \cong 0'418$

Es posible ayudarse de un diagrama en árbol que aclare de una forma gráfica las posibilidades que se dan en el problema teniendo en cuenta, claro está, las condiciones que se imponen antes de extraer la segunda bola. Se deja al lector la construcción y resolución del ejercicio a partir del mencionado diagrama.

17. Dos profesores comparten un número de teléfono. De las llamadas que llegan, 2/5 son para el profesor A y 3/5 son para el profesor B. Sus ocupaciones docentes les alejan de este teléfono, de modo que A está fuera el 50% del tiempo y B el 25%. Calcula la probabilidad de estar presente un profesor cuando le llamen.

Solución:

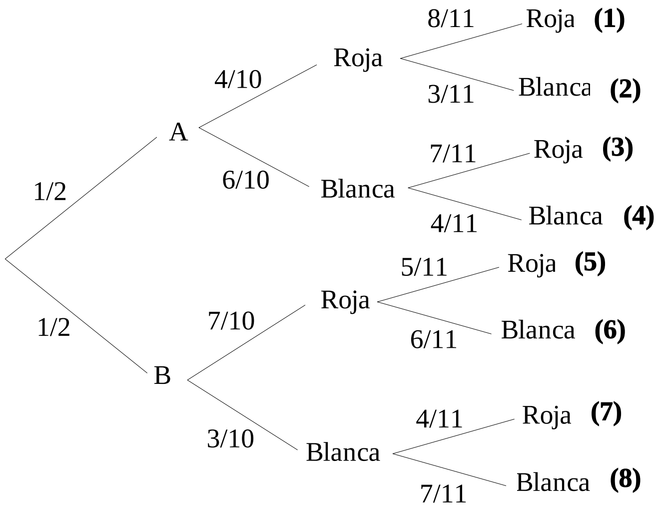
Sean A = {llamar al profesor A}, B = {llamar al profesor B}, F = {estar fuera}. El problema ofrece las siguientes probabilidades: $P(A) = 2/5 = 0'4$, $P(B) = 3/5 = 0'6$, $P(F/A) = 0'5$ y $P(F/B) = 0'25$. De estas dos últimas probabilidades se deduce claramente la probabilidades $P(\overline{F}/A) = 0'5$ (del tiempo que A está presente) y $P(\overline{F}/B) = 0'75$ (del tiempo que B está presente).

La probabilidad de estar presente un profesor cuando le llamen se puede representar así: $P[(\overline{F} \cap A) \cup (\overline{F} \cap B)] = P(\overline{F} \cap A) + P(\overline{F} \cap B) = P(\overline{F}/A) \cdot P(A) + P(\overline{F}/B) \cdot P(B) = 0'5 \cdot 0'4 + 0'75 \cdot 0'6 = 0'65$.

18. Tenemos dos urnas; una A con 4 bolas rojas y 6 blancas, y otra B con 7 bolas rojas y 3 blancas. Se selecciona al azar una urna, se extrae una bola y se coloca en la otra urna. A continuación, se extrae una bola de la segunda urna. Calcula la probabilidad de que las 2 bolas extraídas sean del mismo color.

Solución:

Obsérvese el siguiente diagrama. Hay que fijarse bien en las últimas ramificaciones: las probabilidades que aquí se contemplan proceden de la urna contraria a la de que parten, pues según las condiciones del problema la segunda bola que se saca procede de urna distinta a la primera.



La probabilidad de que las dos bolas extraídas sea del mismo color es:

$P(RR \cup BB) = P(RR) + P(BB) = P(\mathbf{(1)}) + P(\mathbf{(4)}) + P(\mathbf{(5)}) + P(\mathbf{(8)}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{8}{11}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{11}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{5}{11}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{11} = \frac{32}{220}+\frac{24}{220}+\frac{35}{220}+\frac{21}{220}=\frac{112}{220} \cong$
$\cong$ 0'509

19. Una bolsa contiene 3 monedas, una de las cuales está acuñada con 2 caras, mientras que las otras dos son normales. Se escoge una moneda al azar y se lanza sucesivamente 4 veces, obteniéndose 4 caras. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda elegida sea la de 2 caras? Razona la respuesta.

Solución:

Llamemos M_1 = {escoger la moneda acuñada con dos caras}, M_2 = {escoger la segunda moneda}, M_3 = {escoger la tercera moneda} y 4C = {salir cuatro caras en cuatro lanzamientos de una moneda}. Es claro que $P(M_1) = P(M_2) = P(M_3) = \frac{1}{3}$

La probabilidad pedida es, simbólicamente, $P(M_1/4C) = \frac{P(M_1 \cap 4C)}{P(4C)}$

La probabilidad del numerador es $P(M_1 \cap 4C) = P(4C/M_1) \cdot P(M_1) = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. Observemos que $P(4C/M_1) = 1$ porque si la moneda elegida es la acuñada con dos caras, sea cual sea el número de lanzamientos que hagamos con ella siempre saldrá cara.

Por otro lado $P(4C) = P[(M_1 \cap 4C) \cup (M_2 \cap 4C) \cup (M_3 \cap 4C)] = P(M_1 \cap 4C) + P(M_2 \cap 4C) + P(M_3 \cap 4C) = P(4C/M_1)\cdot P(M_1) + P(4C/M_2)\cdot P(M_2) + P(4C/M_1)\cdot P(M_1) = 1\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}+\frac{1}{48}+\frac{1}{48}=\frac{16+1+1}{48}=\frac{18}{48}=\frac{3}{8}$

Finalmente $P(M_1/4C) = \frac{P(M_1 \cap 4C)}{P(4C)} = \frac{1/3}{3/8} = \frac{8}{9}$

Hemos de volver a reseñar que sería útil la realización del problema utilizando adecuadamente un diagrama en árbol. Hacemos notar también que se ha aplicado en la resolución del mismo el teorema de la probabilidad total y el teorema de Bayes.

20. El despertador de Javier no funciona muy bien, pues el 20% de las veces no suena. Cuando suena, Javier llega tarde a clase con probabilidad 0'2, pero si no suena, la probabilidad de que llegue tarde es 0'9.

a) Determina la probabilidad de que llegue tarde a clase y haya sonado el despertador.

b) Determina la probabilidad de que llegue temprano.

c) Javier ha llegado tarde a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya sonado el despertador?

Solución:

Sean los sucesos S = {el despertador de Javier suena} y T = {Javier llega tarde a clase}. Entonces P(S) = 0'8, P(T/S) = 0'2 y $P(T/\overline{S}) = 0'9$.

a) $P(T \cap S) = P(T/S) \cdot P(S) = 0'2 \cdot 0'8 = 0'16$

b) La probabilidad de llegar tarde es $P(T) = P[(T \cap S) \cup (T \cap \overline{S})] = P(T \cap S) + P(T \cap \overline{S}) = P(T/S) \cdot P(S) + P(T/\overline{S}) \cdot P(\overline{S}) = 0'2 \cdot 0'8 + 0'9 \cdot 0'2 = 0'16 + 0'18 = 0'34$. Entonces la probabilidad de que llegue temprano es $P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0{,}34 = 0{,}66$

c) $P(S/T) = \dfrac{P(S \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0'16}{0'34} \cong 0'47$

21. En una universidad en la que no hay más que estudiantes de ingeniería, ciencias y letras, acaban la carrera el 5% de ingeniería, el 10% de ciencias y el 20% de letras. Se sabe que el 20% estudian ingeniería, el 30% ciencias y el 50% letras. Tomado un estudiante cualquiera al azar, se pide.

a) Probabilidad de que haya acabado la carrera y sea de ingeniería.

b) Si se tiene la carrera terminada, ¿cuál es la probabilidad de que sea de ingeniería?

Solución:

Sean I = {ser estudiante de ingeniería}, C = {ser estudiante de ciencias}, L = {ser estudiante de letras} y A = {acabar la carrera}. Entonces P(A/I) = 0'05, P(A/C) = 0'1, P(A/L) = 0'2, P(I) = 0'2, P(C) = 0'3 y P(L) = 0,5. Utilicemos el teorema de la probabilidad total y el teorema de Bayes.

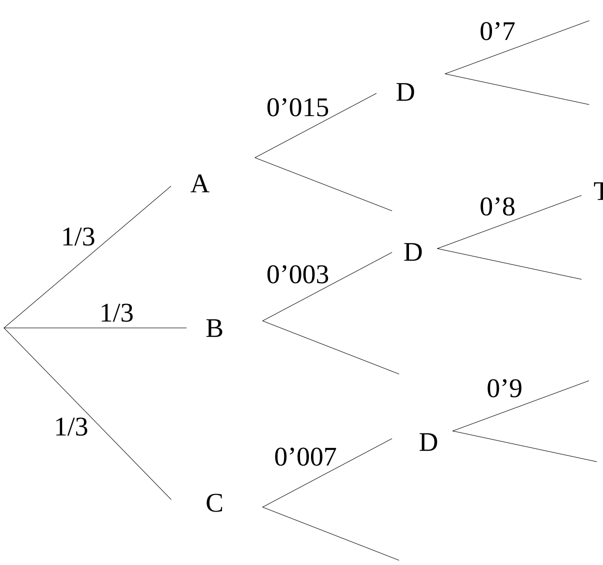
a) $P(A \cap I) = P(A/I) \cdot P(I) = 0'05 \cdot 0'2 = 0'01$

b) $P(I/A) = \dfrac{P(I \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A/I) \cdot P(I)}{P(A/I) \cdot P(I) + P(A/C) \cdot P(C) + P(A/L) \cdot P(L)} = \dfrac{0'05 \cdot 0'2}{0'05 \cdot 0'2 + 0'1 \cdot 0'3 + 0'2 \cdot 0'5} = \dfrac{0'01}{0{,}14} \cong 0'071$

22. Una fábrica produce tres tipos diferentes de bolígrafos, A, B y C. El número total de unidades producidas de cada uno de ellos es el mismo (un tercio del total). Salen defectuosos, sin embargo, un 15 por mil de todos los del tipo A, un 3 por mil de todos los del tipo B y un 7 por mil de todos los del tipo C. En un control de calidad se detectan el 70% de todos los bolígrafos defectuosos del tipo A, el 80% de los del tipo B y el 90% de los del tipo C. Los bolígrafos defectuosos en dicho control se tiran. Si se saca al azar uno de estos bolígrafos defectuosos que se han tirado, calcula la probabilidad de que sea del tipo A.

Solución:

Llamemos A = {bolígrafo del tipo A}, B = {bolígrafo del tipo B}, C = {bolígrafo del tipo C}, D = {bolígrafo defectuoso} y T = {tirar un bolígrafo}. Observemos el siguiente diagrama:



Entonces la probabilidad de que uno de los bolígrafos que se han tirado sea del tipo A se puede escribir $P(A/D \cap T) = \dfrac{P(A \cap D \cap T)}{P(D \cap T)} =$

$$\frac{P(A)\cdot P(D/A)\cdot P(T/(D\cap A))}{P(A)\cdot P(D/A)\cdot P(T/(D\cap A)) + P(B)\cdot P(D/B)\cdot P(T/(D\cap B)) + P(B)\cdot P(D/A)\cdot P(T/(D\cap B))}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot 0'015\cdot 0'7}{\frac{1}{3}\cdot 0'015\cdot 0'7 + \frac{1}{3}\cdot 0'003\cdot 0'8 + \frac{1}{3}\cdot 0'007\cdot 0'9} \cong 0'547$$

Es importante en casos como este hacer una reflexión acerca de la aplicación del teorema de Bayes. Obsérvese que el suceso $D \cap T$ es la unión de los tres sucesos siguientes, incompatibles además dos a dos: $A \cap D \cap T$, $B \cap D \cap T$ y $C \cap D \cap T$. Basta aplicar ahora en cada caso la probabilidad de la intersección de tres sucesos.

Haciendo uso del diagrama en árbol la resolución del ejercicio es casi inmediata y además todo lo anterior adquiere sentido.

23. El 35% de los créditos de un banco son para vivienda, el 50% son para industria y el 15% para consumo diverso. Resultan fallidos el 20% de los créditos para vivienda, el 15% de los créditos para industrias y el 70% de los créditos para consumo. Calcula la probabilidad de que se pague un crédito elegido al azar.

Solución:

Sean los sucesos V = {crédito para vivienda}, I = {crédito para industria}, C = {crédito para consumo diverso} y F ={un crédito resulta fallido}. Entonces tenemos que P(V) = 0'35, P(I) = 0'5, P(C) = 0'15, P(F/V) = 0'2, P(F/I) = 0'15 y P(F/C) = 0'7. Haciendo uso del teorema de la probabilidad total:

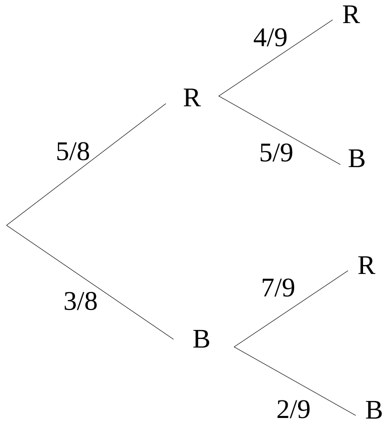
$P(F) = P[(F \cap V) \cup (F \cap I) \cup (F \cap C)] = P(F \cap V) + P(F \cap I) + P(F \cap C) = P(F/V) \cdot P(V) + P(F/I) \cdot P(I) + P(F/C) \cdot P(C) = 0'2 \cdot 0'35 + 0'15 \cdot 0'5 + 0'7 \cdot 0'15 = 0'25$. La probabilidad de que se conceda un crédito es la de que no resulte fallido, es decir, $P(\overline{F}) = 1 - P(F) = 1 - 0'25 = 0'75$

24. Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 blancas. Se selecciona una bola al azar, se descarta y se colocan 2 bolas de otro color en la urna. Luego se saca de la urna una segunda bola. Determina la probabilidad de que:

a) La segunda bola sea roja.

b) Ambas bolas sean del mismo color.

c) La primera sea roja si la segunda lo es.



Solución:

Consideremos los sucesos R_1 = {sacar la primera bola roja}, B_1 = {sacar la primera bola blanca}, R_2 = {sacar la segunda bola roja} y B_2 = {sacar la segunda bola blanca}. Entonces:

a) P(segunda bola roja) = $P(R_2) = P[(R_2 \cap R_1) \cup (R_2 \cap B_1)] = P(R_2 \cap R_1) + P(R_2 \cap B_1) = P(R_2/R_1) \cdot P(R_1) + P(R_2/B_1) \cdot P(B_1) = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} + \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{41}{72}$

b) P(ambas bolas del mismo color) = $P[(R_2 \cap R_1) \cup (B_2 \cap B_1)] = P(R_2 \cap R_1) + P(B_2 \cap B_1) = P(R_2/R_1) \cdot P(R_1) + P(B_2/B_1) \cdot P(B_1) = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{26}{72}$

c) P(la primera sea roja si la segunda lo es) = $P(R_1/R_2) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} =$

$$= \frac{P(R_2/R_1) \cdot P(R_1)}{P(R_2)} = \frac{\frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8}}{\frac{41}{72}} = \frac{\frac{20}{72}}{\frac{41}{72}} = \frac{20}{41}$$

25. De los créditos concedidos por un banco, un 42% lo son para clientes nacionales, un 33% para clientes de la Unión Europea y un 25% para individuos del resto del mundo. De esos créditos, son destinados a vivienda un 30%, un 24% y un 14% según sean nacionales, de la UE o del resto del mundo. Elegido un cliente al azar, ¿qué probabilidad hay de que el crédito concedido no sea para vivienda?

Solución:

Llamemos N = {crédito para clientes nacionales}, UE = {créditos para clientes de la unión europea}, RM = {crédito para clientes del resto del mundo} y V = {crédito destinado a vivienda}. Entonces $P(N) = 0'42$, $P(UE) = 0'33$, $P(RM) = 0'25$, $P(V/N) = 0'3$, $P(V/UE) = 0'24$ y $P(V/RM) = 0'14$. Aplicando el teorema de la probabilidad total se tiene:

$P(V) = P[(V \cap N) \cup (V \cap UE) \cup (V \cap RM)] = P(V \cap N) + P(V \cap UE) + P(V \cap RM) = P(V/N) \cdot P(N) + P(V/UE) \cdot P(UE) + P(V/RM) \cdot P(RM) = 0'3 \cdot 0'42 + 0'24 \cdot 0'33 + 0'14 \cdot 0'25 = 0'2402$. La probabilidad de que el crédito concedido no sea para vivienda será $P(\overline{V}) = 1 - P(V) = 1 - 0'2402 = 0'7598$

26. En cierta empresa se producen dos bienes A y B en la proporción 3 a 4. La probabilidad de que un bien de tipo A tenga defecto de fabricación es del 3%, y del tipo B, del 5%. Se analiza un bien, elegido al azar, y resulta correcto, ¿qué probabilidad existe de que sea del tipo A?

Solución:

Sean los sucesos A = {bien del tipo A}, B = {bien del tipo B}, D = {bien con defecto de fabricación}. Como la producción de los bienes A y B está en proporción de 3 a 4, P(A) = $\frac{3}{7}$ y P(B) = $\frac{4}{7}$. Además P(D/A) = 0'03 y P(D/B) = 0'05. Aplicando el teorema de Bayes se tiene:

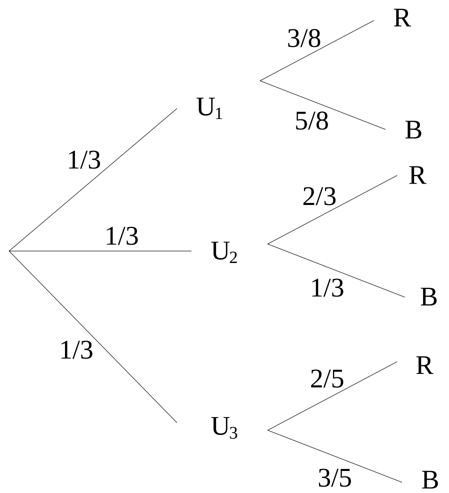
$$P(A/\overline{D}) = \frac{P(A\cap\overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(\overline{D}/A)\cdot P(A)}{P(\overline{D}/A)\cdot P(A)+P(\overline{D}/B)\cdot P(B)} = \frac{0'97\cdot\frac{3}{7}}{0'97\cdot\frac{3}{7}+0'95\cdot\frac{4}{7}} \cong$$

0'4337

27. Tenemos tres urnas: U_1 con 3 bolas rojas y 5 negras, U_2 con 2 bolas rojas y 1 negra y U_3 con 2 bolas rojas y 3 negras. Escogemos una urna al azar y extraemos una bola. Si la bola ha sido roja, ¿cuál es la probabilidad de haber sido extraída de la urna U_1?

Solución:

Si llamamos R = {extraer bola roja} y N = {extraer bola negra}, lo que se pide es $P(U_1/R)$. Haciendo uso del teorema de Bayes tenemos:



$$P(U_1/R)=\frac{P(U_1\cap R)}{P(R)} = \frac{P(R/U_1)\cdot P(U_1)}{P(R/U_1)\cdot P(U_1)+P(R/U_2)\cdot P(U_2)+P(R/U_3)\cdot P(U_3)}$$

$$= \frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\frac{3}{24}}{\frac{3}{24}+\frac{2}{9}+\frac{2}{15}} = \frac{\frac{3}{24}}{\frac{45+80+48}{360}} = \frac{\frac{3}{24}}{\frac{173}{360}} = \frac{1080}{4152} \cong 0'26$$

28. Se tiene una urna vacía y se lanza una moneda al aire. Si sale cara, se introduce en la urna una bola blanca y, si sale cruz, se introduce una bola negra. El experimento se repite tres veces y, a continuación, se introduce la mano en una urna, retirando una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que en la urna queden una bola blanca y otra negra?

Solución:

Para que en la urna queden una bola blanca y otra negra después de extraer una bola es porque en la misma había dos bolas blancas y una negra o bien dos bolas negras y una bola blanca. Llamemos 2BN = {después de repetir el experimento tres veces en la urna hay dos bolas blancas y una negra} y 2NB = {después de repetir el experimento tres veces en la urna hay dos bolas negras y una blanca}. Llamemos también C = {salir cara al lanzar una moneda} y X = {salir cruz al lanzar una moneda}. Entonces:

P(2BN) = P(salir dos caras y una cruz en tres lanzamientos de una moneda) = P(CCX) + P(CXC) + P(XCC) = $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

P(2NB) = P(salir dos cruces y una cara en tres lanzamientos de una moneda) = P(XXC) + P(XCX) + P(CXX) = $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

Llamemos ahora B = {extraer bola blanca} y N = {extraer bola negra}. El suceso del cual se pide hallar su probabilidad es $(2BN \cap B) \cup (2NB \cap N)$. Así pues:

$P[(2BN \cap B) \cup (2NB \cap N)] = P(2BN \cap B) + P(2NB \cap N) = P(B/2BN) \cdot P(2BN) +$
$+ P(N/2NB) \cdot P(2NB) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}=\frac{2}{8}+\frac{2}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$