

TEMA 10 – CÁLCULO DE PROBABILIDADES

ESPACIO MUESTRAL. SUCESOS

EJERCICIO 1 : En una urna hay 15 bolas numeradas de 2 al 16. Extraemos una bola al azar y observamos el número que tiene.

a) Describe los sucesos escribiendo todos sus elementos:

$A = \text{"Obtener par"}$ $B = \text{"Obtener impar"}$

$C = \text{"Obtener primo"}$ $D = \text{"Obtener impar menor que 9"}$

b) ¿Qué relación hay entre A y B ? ¿Y entre C y D ?

c) ¿Cuál es el suceso $A \cup B$? ¿y $C \cap D$?

Solución:

a) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$ $B = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$

$C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ $D = \{3, 5, 7\}$

b) $B = A'$; $D \subset C$

c) $A \cup B = E$ (Espacio muestral); $C \cap D = D$

EJERCICIO 2 : Consideramos el experimento que consiste en lanzar tres monedas al aire.

a) ¿Cuál es el espacio muestral? ¿Cuántos elementos tiene?

b) Describe los sucesos escribiendo todos sus elementos.: $A = \text{"Obtener dos caras y una cruz"}$

$B = \text{"Obtener al menos dos caras"}$ $C = \text{"Obtener al menos una cruz"}$

c) Halla los sucesos $B \cap C$ y C'

Solución:

a) $E = \{ (C, C, C), (C, C, +), (C, +, C), (+, C, C), (C, +, +), (+, C, +), (+, +, C), (+, +, +) \}$

Tiene 8 elementos.

b) $A = \{ (C, C, +), (C, +, C), (+, C, C) \}$

$B = \{ (C, C, C), (C, C, +), (C, +, C), (+, C, C) \}$

$C = \{ (C, C, +), (C, +, C), (+, C, C), (C, +, +), (+, C, +), (+, +, C), (+, +, +) \}$

c) $B \cap C = \{ (C, C, +), (C, +, C), (+, C, C) \}$

$C' = \{ (C, C, C) \}$

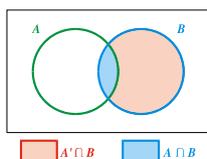
EJERCICIOS PROBABILIDAD

EJERCICIO 3 : Sean A y B los sucesos tales que: $P[A] = 0,4$ $P[A' \cap B] = 0,4$ $P[A \cap B] = 0,1$

Calcula $P[A \cup B]$ y $P[B]$.

Solución:

• Calculamos en primer lugar $P[B]$:



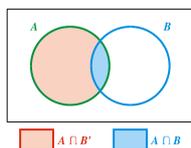
$$P[B] = P[A' \cap B] + P[A \cap B] = 0,4 + 0,1 = 0,5$$

• $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0,4 + 0,5 - 0,1 = 0,8$

EJERCICIO 4 : Sabiendo que: $P[A \cap B] = 0,2$ $P[B'] = 0,7$ $P[A \cap B'] = 0,5$

Calcula $P[A \cup B]$ y $P[A]$.

Solución:



$$P[A] = P[A \cap B'] + P[A \cap B] = 0,5 + 0,2 = 0,7$$

$$P[B] = 1 - P[B'] = 1 - 0,7 = 0,3$$

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0,7 + 0,3 - 0,2 = 0,8$$

EJERCICIO 5 : De dos sucesos A y B sabemos que: $P[A'] = 0,48$ $P[A \cup B] = 0,82$ $P[B] = 0,42$
 a) ¿Son A y B independientes? b) ¿Cuánto vale $P[A / B]$?

Solución:

a) $P[A'] = 1 - P[A] = 0,48 \rightarrow P[A] = 0,52$
 $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] \rightarrow 0,82 = 0,52 + 0,42 - P[A \cap B] \rightarrow P[A \cap B] = 0,12$
 $P[A] \cdot P[B] = 0,52 \cdot 0,42 = 0,2184$
 $P[A \cap B] = 0,12$ } $P[A \cap B] \neq P[A] \cdot P[B] \Rightarrow$ No son independientes.
 b) $P[A / B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{0,12}{0,42} = 0,29$

EJERCICIO 6 : Si A y B son dos sucesos tales que: $P[A] = 0,4$ $P[B / A] = 0,25$ $P[B'] = 0,75$
 a) ¿Son A y B independientes? b) Calcula $P[A \cup B]$ y $P[A \cap B]$.

Solución:

a) $P[B'] = 1 - P[B] = 0,75 \rightarrow P[B] = 0,25$
 Como $P[B / A] = 0,25$ y $P[B] = 0,25$, tenemos que:
 $P[B / A] = P[B] \rightarrow A$ y B son independientes.
 b) Como A y B son independientes: $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B] = 0,4 \cdot 0,25 = 0,1$
 Así: $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0,4 + 0,25 - 0,1 = 0,55$

PROBLEMAS PROBABILIDAD

EJERCICIO 7 : En unas oposiciones, el temario consta de 85 temas. Se eligen tres temas al azar de entre los 85. Si un opositor sabe 35 de los 85 temas, ¿cuál es la probabilidad de que sepa al menos uno de los tres temas?

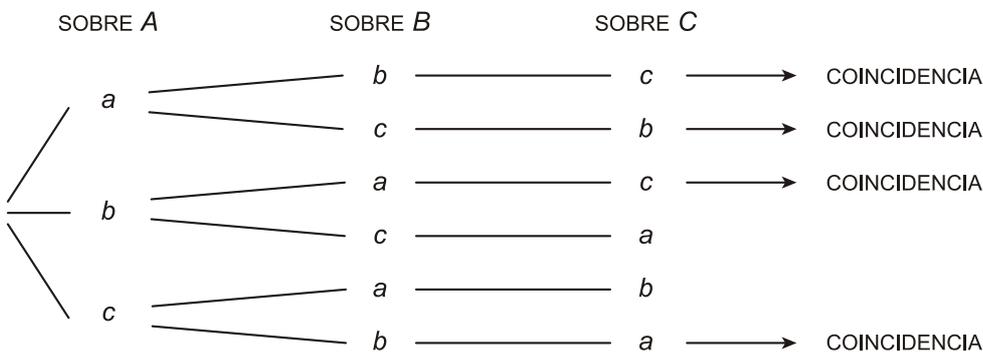
Solución:

Tenemos que hallar la probabilidad de que ocurra el siguiente suceso:
 $A =$ “el opositor conoce, al menos, uno de los tres temas”
 Para calcularla, utilizaremos el complementario. Si sabe 35 temas, hay $85 - 35 = 50$ temas que no sabe; entonces:
 $P[A] = 1 - P[A'] = 1 - P[\text{“no sabe ninguno de los tres”}] = 1 - \frac{50}{85} \cdot \frac{49}{84} \cdot \frac{48}{83} = 1 - 0,198 = 0,802$
 Por tanto, la probabilidad de que sepa al menos uno de los tres temas es de 0,802.

EJERCICIO 8 : Tenemos para enviar tres cartas con sus tres sobres correspondientes. Si metemos al zar cada carta en uno de los sobres, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de las cartas vaya en el sobre que le corresponde?

Solución:

Hacemos un diagrama que refleje la situación. Llamamos a los sobres A, B y C ; y a las cartas correspondientes a, b y c . Así, tenemos las siguientes posibilidades:



Vemos que hay seis posibles ordenaciones y que en cuatro de ellas hay al menos una coincidencia. Por tanto, la probabilidad pedida será: $P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 0,67$

EJERCICIO 9 :

- a) Dos personas eligen al azar, cada una de ellas, un número del 1 al 5. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos elijan el mismo número?
 b) Si son tres personas las que eligen al azar, cada una de ellas, un número del 1 al 5, ¿cuál es la probabilidad de que las tres elijan el mismo número?

Solución:

a) Para calcular la probabilidad, suponemos que el primero ya ha elegido número. La pregunta es: ¿cuál es a probabilidad de que el segundo elija el mismo número? $P = \frac{1}{5} = 0,2$

b) $P = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25} = 0,04$

EJERCICIO 10 : En un viaje organizado por Europa para 120 personas, 48 de los que van saben hablar inglés, 36 saben hablar francés, y 12 de ellos hablan los dos idiomas.

Escogemos uno de los viajeros al azar.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que hable alguno de los dos idiomas?
 b) ¿Cuál es la probabilidad de que hable francés, sabiendo que habla inglés?
 c) ¿Cuál es la probabilidad de que solo hable francés?

Solución:

Vamos a organizar los datos en una tabla, completando los que faltan:

	HABLAN FRANCÉS	NO HABLAN FRANCÉS	
HABLAN INGLÉS	12	36	48
NO HABLAN INGLÉS	24	48	72
	36	84	120

Llamamos $I =$ "Habla inglés", $F =$ "Habla francés".

a) Tenemos que hallar $P[I \cup F]$: $P[I \cup F] = P[I] + P[F] - P[I \cap F] = \frac{48 + 36 - 12}{120} = \frac{72}{120} = \frac{3}{5} = 0,6$

b) $P[F/I] = \frac{12}{48} = \frac{1}{4} = 0,25$

c) $P[F \cap \text{no } I] = \frac{24}{120} = \frac{1}{5} = 0,2$

EJERCICIO 11 : En una clase de 30 alumnos hay 18 que han aprobado matemáticas, 16 que han aprobado inglés y 6 que no han aprobado ninguna de las dos.

Elegimos al azar un alumno de esa clase:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado inglés y matemáticas?
 b) Sabiendo que ha aprobado matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado inglés?
 c) ¿Son independientes los sucesos "Aprobar matemáticas" y "Aprobar inglés"?

Solución:

Organizamos los datos en una tabla de doble entrada, completando los que faltan:

	APRUEBAN MATEMÁTICAS	NO APRUEBAN MATEMÁTICAS	
APRUEBAN INGLÉS	10	6	16
NO APRUEBAN INGLÉS	8	6	14
	18	12	30

Llamamos $M =$ "Aprueba matemáticas", $I =$ "Aprueba inglés".

a) $P[M \cap I] = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} = 0,33$

b) $P[I/M] = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} = 0,56$

c) $P[M] \cdot P[I] = \frac{18}{30} \cdot \frac{16}{30} = \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{15} = \frac{24}{75} = \frac{8}{25}$

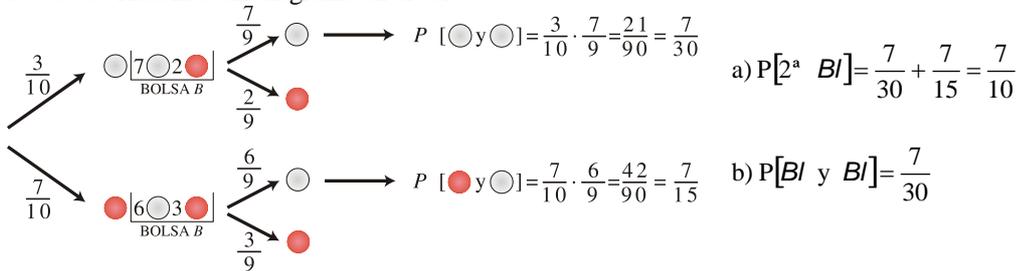
$P[M \cap I] = \frac{10}{30} \neq \frac{8}{25}$

Como $P[M \cap I] \neq P[M] \cdot P[I]$, los dos sucesos no son independientes.

EJERCICIO 12 : Tenemos dos bolsas, A y B. En la bolsa A hay 3 bolas blancas y 7 rojas. En la bolsa B hay 6 bolas blancas y 2 rojas. Sacamos una bola de A y la pasamos a B. Después extraemos una bola de B.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de B sea blanca?
 b) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas sean blancas?

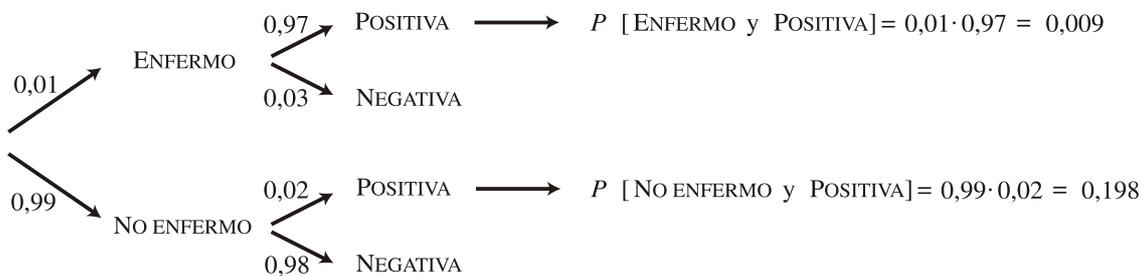
Solución: Hacemos un diagrama en árbol:



EJERCICIO 13 : El 1% de la población de un determinado lugar padece una enfermedad. Para detectar esta enfermedad se realiza una prueba de diagnóstico. Esta prueba da positiva en el 97% de los pacientes que padecen la enfermedad; en el 98% de los individuos que no la padecen da negativa. Si elegimos al azar un individuo de esa población:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo dé positivo y padezca la enfermedad?
- b) Si sabemos que ha dado positiva, ¿cuál es la probabilidad de que padezca la enfermedad?

Solución: Hacemos un diagrama en árbol:



- a) $P[\text{Enfermo y Positiva}] = 0,0097$
- b) $P[\text{ENFERMO / POSITIVA}] = \frac{P[\text{ENFERMO y POSITIVA}]}{P[\text{POSITIVA}]} = \frac{0,0097}{0,0097 + 0,0198} = \frac{0,0097}{0,0295} = 0,33$

EJERCICIO 14 : Un estudiante realiza dos exámenes en un mismo día. La probabilidad de que apruebe el primero es 0,6. La probabilidad de que apruebe el segundo es 0,8; y la de que apruebe los dos es 0,5. Calcula:

- a) La probabilidad de que apruebe al menos uno de los dos exámenes.
- b) La probabilidad de que no apruebe ninguno.
- c) La probabilidad de que apruebe el segundo examen en caso de haber aprobado el primero.

Solución: Llamamos: $A =$ "aprobar el primer examen"

$B =$ "aprobar el segundo examen"

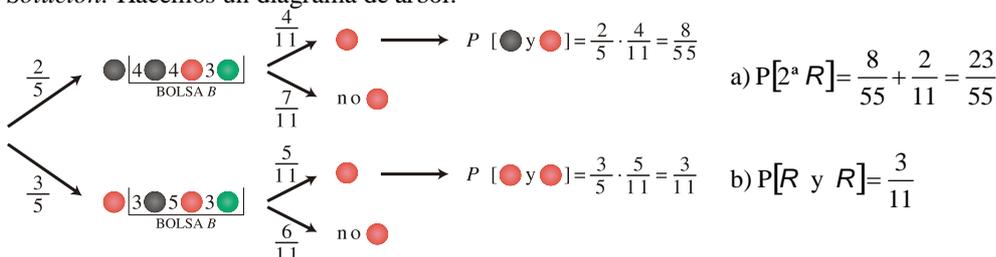
Tenemos entonces que: $P[A] = 0,6$; $P[B] = 0,8$; $P[A \cap B] = 0,5$

- a) $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0,6 + 0,8 - 0,5 = 0,9$
- b) $1 - P[A \cup B] = 1 - 0,9 = 0,1$
- c) $P[B/A] = \frac{P[B \cap A]}{P[A]} = \frac{0,5}{0,6} = 0,83$

EJERCICIO 15 : En una bolsa, A , hay 2 bolas negras y 3 rojas. En otra bolsa, B , hay 3 bolas negras, 4 rojas y 3 verdes. Extraemos una bola de A y la introducimos en la bolsa B . Posteriormente, sacamos una bola de B .

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea roja?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean rojas?

Solución: Hacemos un diagrama de árbol:

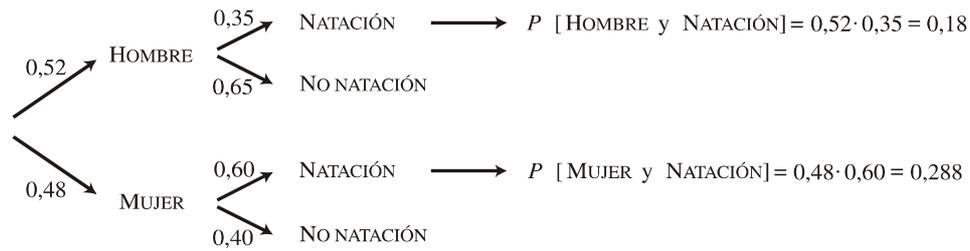


EJERCICIO 16 : En un club deportivo, el 52% de los socios son hombres. Entre los socios, el 35% de los hombres practica la natación, así como el 60% de las mujeres. Si elegimos un socio al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que practique la natación?

b) Sabiendo que practica la natación, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

Solución: Hacemos un diagrama en árbol:



a) $P[\text{Natación}] = 0,182 + 0,288 = 0,47$

b) $P[\text{MUJER} / \text{NATAción}] = \frac{P[\text{MUJER y NATAción}]}{P[\text{NATAción}]} = \frac{0,288}{0,47} = 0,613$