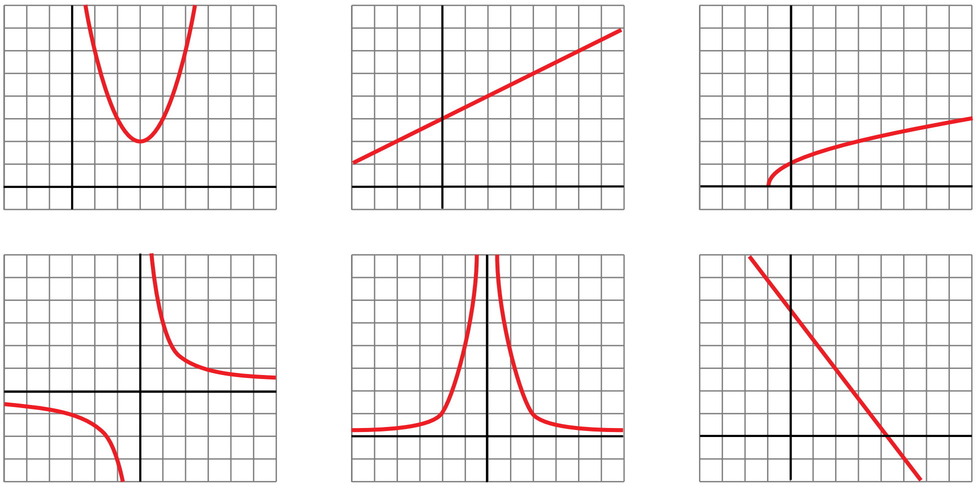
UNIDAD 4 LAS FUNCIONES ELEMENTALES

Página 98

1. ***Las siguientes gráficas corresponden a funciones, algunas de las cuales conoces y otras no. En cualquier caso, vas a trabajar con ellas.***



- **Las ecuaciones correspondientes a estas gráficas son:**

a) $y = \dfrac{4}{x^2}$ **b)** $y = \sqrt{x+1}$ **c)** $y = -\dfrac{4}{3}(x-2)+3$

d) $y = x^2 - 6x + 11$ **e)** $y = \dfrac{3}{x}$ **f)** $y = \dfrac{1}{2}x + 3$

Asigna a cada gráfica su ecuación haciendo uso, sucesivamente, de:

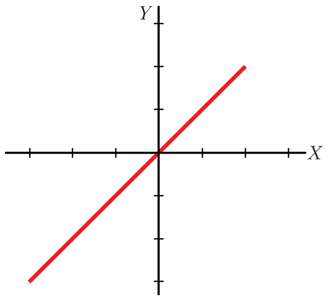
- **el conocimiento que ya tienes de algunas de ellas;**
- **la comprobación, mediante cálculo mental, de algunos de sus puntos;**
- **y, en caso de necesidad, recurriendo a la calculadora para obtener varios de sus puntos.**

Por orden: d), f), b), e), a) y c).

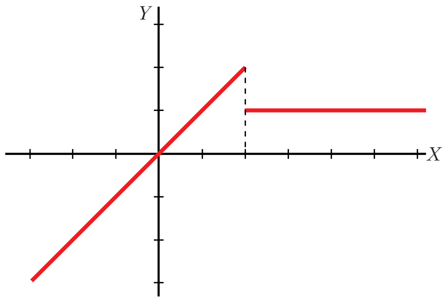
Página 99

2. ***Para representar la función*** $y = \begin{cases} x & \text{si } x \le 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ ***procedemos así:***

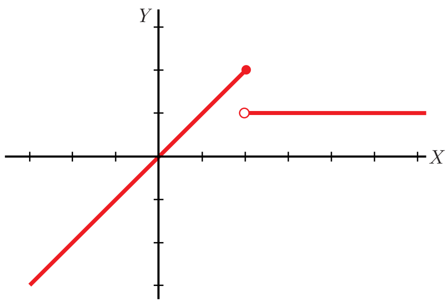
a) Representamos la función $y = x$ ***hasta la abscisa*** $x = 2$***.***



b) Representamos la función $y = 1$ ***desde*** $x = 2$ ***en adelante.***

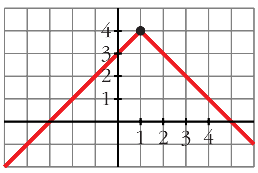


c) En $x = 2$ ***solo es válido el punto correspondiente a la primera rama (el signo = de la expresión*** $x \le 2$ ***sirve para incluir dicho valor). Lo tenemos en cuenta excluyendo, mediante un circulito, el punto de la otra rama.***



■ **Representa gráficamente la siguiente función:**

$$y = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < 1 \\ 5 - x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$



Página 101

1. Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x^2 + 1}$ **b)** $y = \sqrt{x - 1}$ **c)** $y = \sqrt{1 - x}$

d) $y = \sqrt{4 - x^2}$ **e)** $y = \sqrt{x^2 - 4}$ **f)** $y = 1/\sqrt{x^2 - 1}$

g) $y = 1/\sqrt{x - 1}$ **h)** $y = 1/\sqrt{1 - x}$ **i)** $y = 1/\sqrt{4 - x^2}$

j) $y = 1/\sqrt{x^2 - 4}$ **k)** $y = x^3 - 2x + 3$ **l)** $y = \dfrac{1}{x}$

m) $y = \dfrac{1}{x^2}$ **n)** $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ **ñ)** $y = \dfrac{1}{x^2 + 4}$

o) $y = \dfrac{1}{x^3 + 1}$

p) El área de un cuadrado de lado variable, l, es $A = l^2$.

a) $\mathbb{R}$ b) $[1, \infty)$ c) $(-\infty. 1]$

d) $[-2, 2]$ e) $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ f) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

g) $(1, \infty)$ h) $(-\infty, 1)$ i) $(-2, 2)$

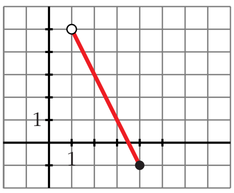
j) $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ k) $\mathbb{R}$ l) $\mathbb{R} - \{0\}$

m) $\mathbb{R} - \{0\}$ n) $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ ñ) $\mathbb{R}$

o) $\mathbb{R} - \{-1\}$ p) $l > 0$

Página 102

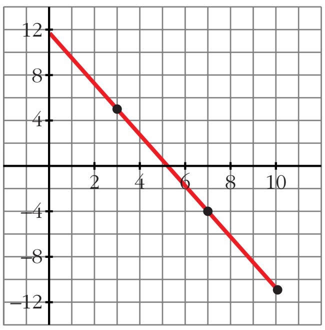
1. Representa la siguiente función: $y = -2x + 7$, $x \in (1, 4]$.



2. Una función lineal f cumple: $f(3) = 5$, $f(7) = -4$, $D(f) = [0, 10]$. ¿Cuál es su expresión analítica? Represéntala.

$m = \dfrac{-4 - 5}{7 - 3} = -\dfrac{9}{4}$

$y = 5 - \dfrac{9}{4}(x - 3) = -\dfrac{9}{4}x + \dfrac{47}{4}, \quad x \in [0, 10]$



Página 103

1. Por un consumo de gas de 10 m³ se han pagado 50 euros y por 16 m³ se han pagado 71 euros. ¿Cuánto habrá que pagar por 15 m³?

$m = \frac{71 - 50}{16 - 10} = \frac{21}{6} = 3{,}5$

$y = 50 + 3{,}5(x - 10) = 3{,}5x + 15$

La recta es $f(x) = 3{,}5x + 15$; luego $f(15) = 67{,}5$ euros.

2. El consumo de gasolina de cierto automóvil, por cada 100 km, depende de la velocidad a la que va. A 60 km/h consume 5,7 l y a 90 km/h consume 7,2 l. Estima cuánto consumirá si recorre 100 km a 70 km/h.

$m = \frac{7{,}2 - 5{,}7}{90 - 60} = \frac{1{,}5}{30} = 0{,}05$

$y = 5{,}7 + 0{,}05(x - 60) = 0{,}05x + 2{,}7$

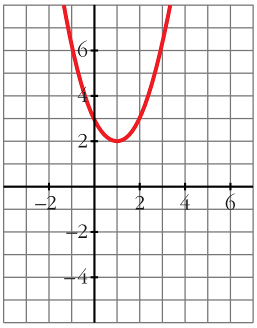
La recta es $f(x) = 0{,}05x + 2{,}7$; por tanto, $f(70) = 6{,}2$ litros.

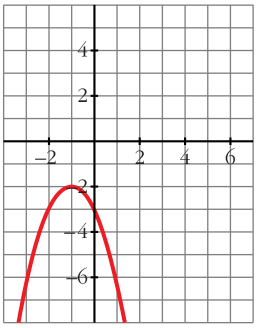
Página 104

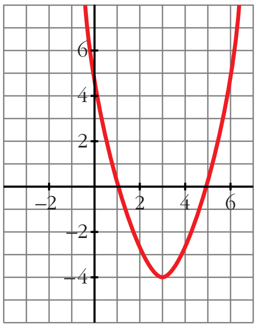
1. Representa las parábolas:

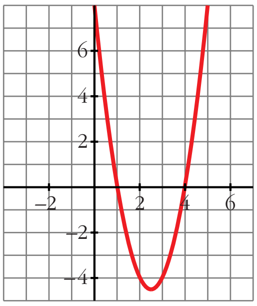
a) $y = x^2 - 2x + 3$ **b)** $y = -x^2 - 2x - 3$ **c)** $y = x^2 - 6x + 5$

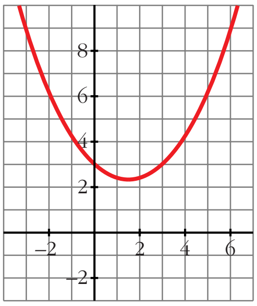
d) $y = 2x^2 - 10x + 8$ **e)** $y = \frac{1}{3}x^2 - x + 3$ **f)** $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$

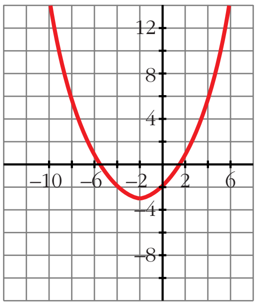
a)


b)


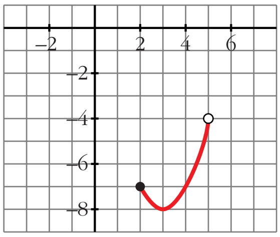
c)


d)


e)


f)


2. **Representa la función $y = x^2 - 6x + 1,\ x \in [2, 5)$.**



Página 105

1. **El consumo de gasolina de cierto coche por cada 100 km recorridos es: a 60 km/h → 5,7 l; a 90 km/h → 7,2 l; a 120 km/h → 10,5 l. Mediante una interpolación parabólica, estima su consumo a 110 km/h.**

$f(x) = m + n(x - 60) + p(x - 60)(x - 90)$

$$\left.\begin{array}{l} f(60) = 5{,}7 = m \\ f(90) = 7{,}2 = m + 30n \\ f(120) = 10{,}5 = m + 60n + 1\,800p \end{array}\right\} \begin{array}{l} m = 5{,}7 \\ n = 0{,}05 \\ p = 0{,}001 \end{array}$$

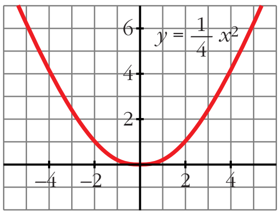
La parábola es $f(x) = 5{,}7 + 0{,}05(x - 60) + 0{,}001(x - 60)(x - 90)$.

Luego $f(110) = 9{,}2$ litros.

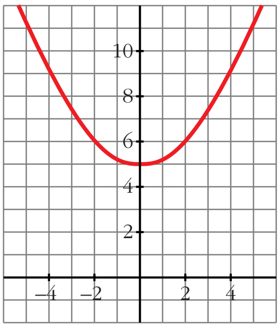
Página 106

1. **Representa $y = \frac{1}{4}x^2$. A partir de ella, representa:**

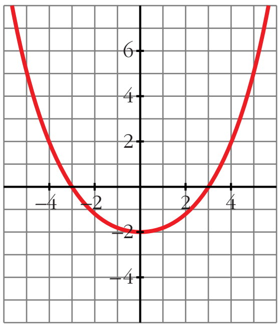
a) $y = \frac{1}{4}x^2 + 5$ **b)** $y = \frac{1}{4}x^2 - 2$ **c)** $y = -\frac{1}{4}x^2$



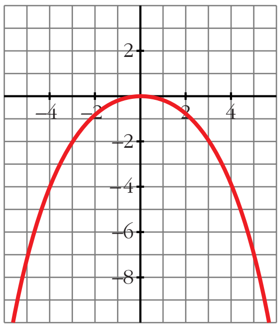
a)



b)



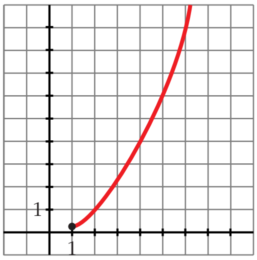
c)

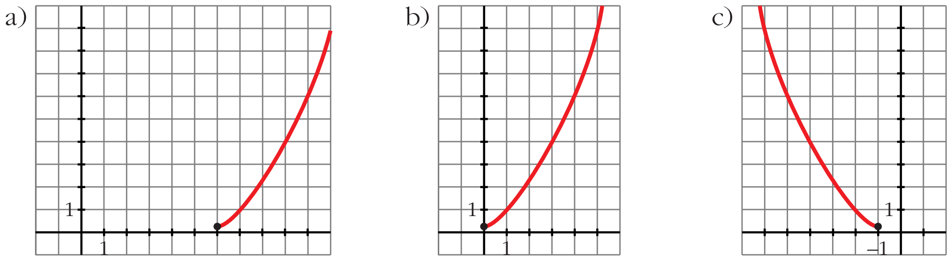


Página 107

1. **Representa** $y = f(x) = \frac{1}{4}x^2$ **para** $x \geq 1$**. A partir de ella, representa:**

a) $y = f(x-5)$ **b)** $y = f(x+1)$ **c)** $y = f(-x)$



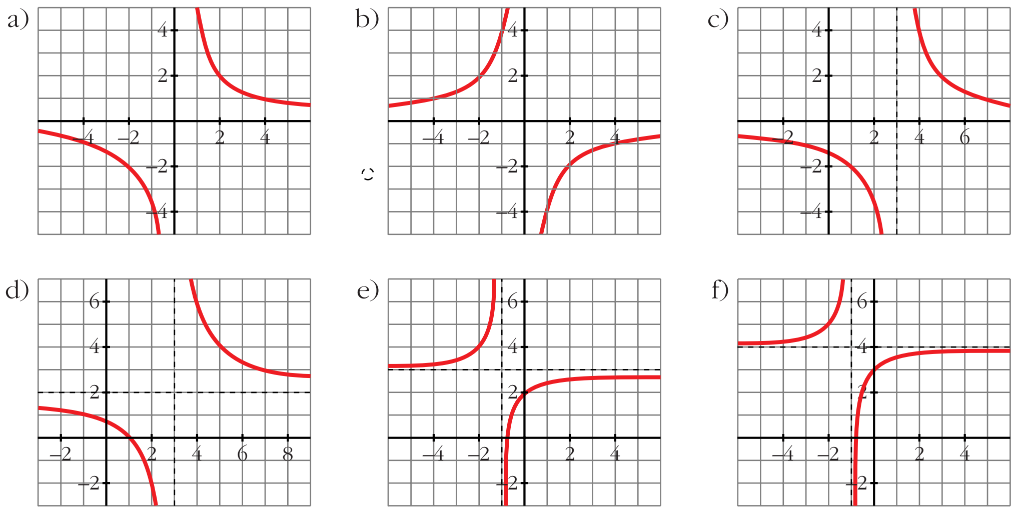


Página 108

1. **Representa:**

a) $y = \frac{4}{x}$ **b)** $y = -\frac{4}{x}$ **c)** $y = \frac{4}{x-3}$

d) $y = \frac{4}{x-3} + 2$ **e)** $y = \frac{3x+2}{x+1}$ **f)** $y = \frac{4x+3}{x+1}$

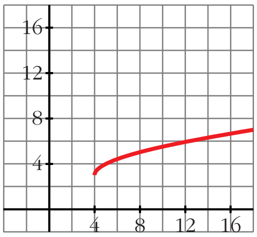


Página 109

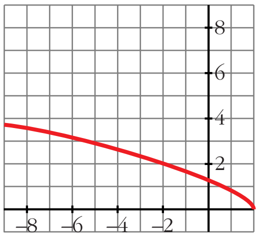
1. **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = 3 + \sqrt{x - 4}$ **b)** $y = \sqrt{2 - x}$ **c)** $y = \sqrt[3]{-x}$

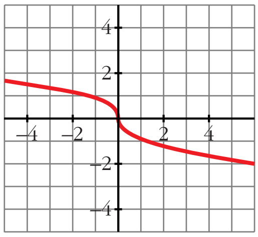
a)



b)



c)

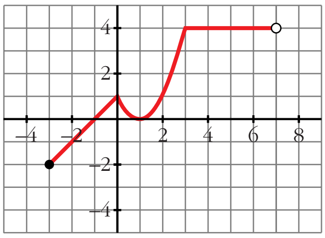


Página 110

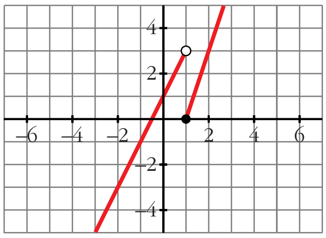
1. **Representa estas funciones:**

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \in [-3, 0) \\ x^2 - 2x + 1 & x \in [0, 3] \\ 4 & x \in (3, 7) \end{cases}$ **b)** $g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x < 1 \\ x^2 - 1 & x \geq 1 \end{cases}$

a)



b)

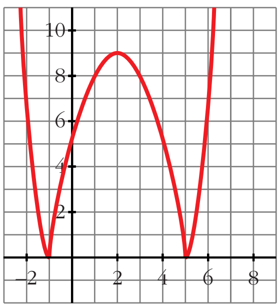


Página 111

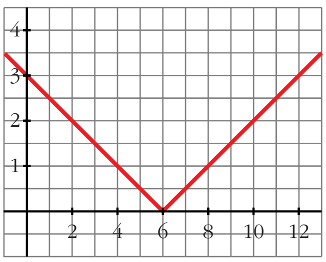
1. **Representa estas funciones:**

a) $y = |-x^2 + 4x + 5|$ **b)** $y = \left| \dfrac{x}{2} - 3 \right|$

a)



b)

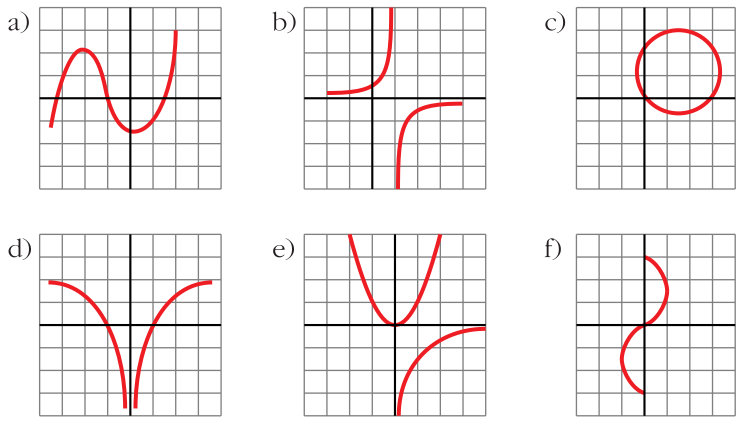


Página 116

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 **¿Cuáles de estas gráficas son funciones?**



Son funciones a), b) y d).

2 **Indica si los valores de x: 0; –2; 3,5; $\sqrt{2}$; –0,25 pertenecen al dominio de estas funciones:**

a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **b)** $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

c) $y = x - \sqrt{2}$ **d)** $y = \sqrt{x^2 + 4}$

e) $y = \sqrt{x - 3}$ **f)** $y = \sqrt{7 - 2x}$

a) 3,5; $\sqrt{2}$ b) Todos salvo –2

c) Todos d) Todos

e) 3,5 f) Todos

3 **Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{3}{x^2 + x}$ **b)** $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$

c) $y = \dfrac{x - 1}{2x + 1}$ **d)** $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 3}$

e) $y = \dfrac{2}{5x - x^2}$ **f)** $y = \dfrac{1}{x^2 - 2}$

a) $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$ b) $\mathbb{R} - \{2\}$

c) $\mathbb{R} - \{-1/2\}$ d) $\mathbb{R}$

e) $\mathbb{R} - \{0, 5\}$ f) $\mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

4 **Halla el dominio de definición de las funciones:**

a) $y = \sqrt{3 - x}$ **b)** $y = \sqrt{2x - 1}$

c) $y = \sqrt{-x - 2}$ **d)** $y = \sqrt{-3x}$

e) $y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$ **f)** $y = \sqrt{3x - x^2}$

g) $y = \sqrt{x^2 + 5}$ **h)** $y = \sqrt{x^2 - 10}$

a) $(-\infty, 3]$ b) $[1/2, +\infty)$

c) $(-\infty, -2]$ d) $(-\infty, 0]$

e) $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$ f) $[0, 3]$

g) $\mathbb{R}$ h) $[\sqrt{10}, +\infty)$

5 **Halla las pendientes de las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos:**

a) (3, 5) y (7, –2)

b) (3, –2) y (7, 8)

c) (1 500, 17) y (1 600, 41)

a) $m = \dfrac{-2-5}{7-3} = -\dfrac{7}{4}$; b) $m = \dfrac{8-(-2)}{7-3} = \dfrac{5}{2}$; c) $m = \dfrac{41-17}{1600-1500} = 0{,}24$

6 **Di cuál es la pendiente de cada una de las siguientes rectas:**

a) $y = 2x - 5$ **b)** $2x - y + 1 = 0$ **c)** $y = -x + 5$ **d)** $y = 5$

a) 2 b) 2 c) – 1 d) 0

7 **Escribe las ecuaciones de las siguientes rectas:**

a) Pasa por $P(1, -5)$ y $Q(10, 11)$.

b) Pasa por (–7, 2) y su pendiente es –0,75.

c) Corta a los ejes en (3,5; 0) y (0, –5).

d) Es paralela a $3x - y + 1 = 0$ y pasa por (–2, –3).

a) $m = \dfrac{11-(-5)}{10-1} = \dfrac{16}{9}$

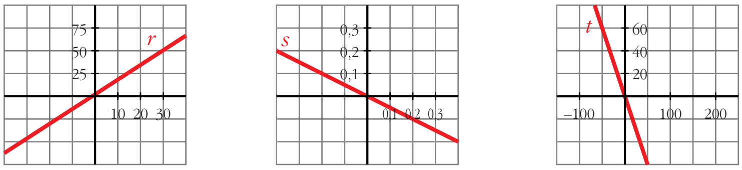
$$y = -5 + \frac{16}{9}(x - 1) = \frac{16}{9}x - \frac{61}{9}$$

b) $y = 2 - 0{,}75(x + 7) = -0{,}75x - 3{,}25$

c) $\dfrac{x}{3{,}5} + \dfrac{y}{-5} = 1 \Rightarrow y = 1{,}43x - 5$

d) $m = 3$; $y = -3 + 3(x + 2) = 3x + 3$

8 **¿Cuál es la pendiente de cada una de estas rectas? Escribe su ecuación.**

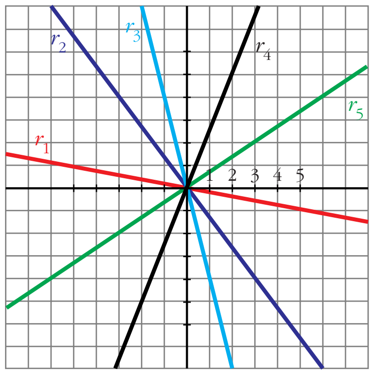


r: $m = \frac{5}{3}$; $y = \frac{5}{3}x$

s: $m = -\frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{2}x$

t: $m = -\frac{6}{5}$; $y = -\frac{6}{5}x$

9 **Asocia a cada recta su ecuación:**



a) $y = -4x$

b) $y = \frac{2}{3}x$

c) $y = -\frac{4}{3}x$

d) $y = -0{,}2x$

e) $y = 2{,}5x$

$r_1 \rightarrow y = -0{,}2x$

$r_2 \rightarrow y = -\frac{4}{3}x$

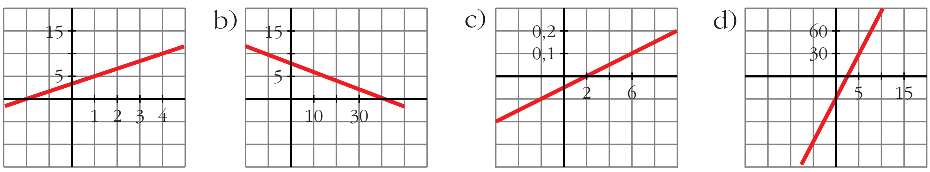
$r_3 \rightarrow y = -4x$

$r_4 \rightarrow y = 2{,}5x$

$r_5 \rightarrow y = \frac{2}{3}x$

Página 117

10 **Elige dos puntos en cada una de estas rectas y escribe su ecuación:**



a) $y = \frac{5}{3}x + \frac{10}{3}$

b) $y = -\frac{1}{5}x + 8$

c) $y = 0{,}025x - 0{,}05$

d) $y = 12x - 30$

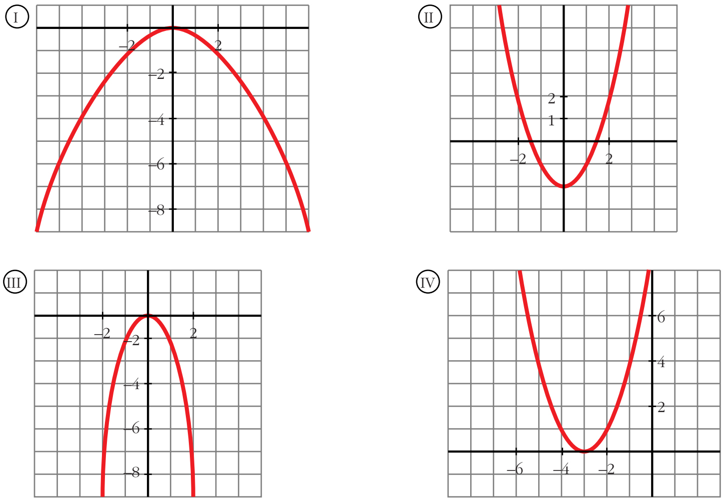
11 **Asocia a cada una de estas parábolas una de estas ecuaciones:**

a) $y = x^2 - 2$

b) $y = -0{,}25x^2$

c) $y = (x + 3)^2$

d) $y = -2x^2$



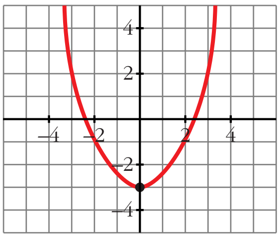
a) II b) I c) IV d) III

12 **Representa las siguientes parábolas hallando el vértice, los puntos de corte con los ejes de coordenadas y algún punto próximo al vértice:**

a) $y = 0,5x^2 - 3$ **b)** $y = -x^2 + 3$

c) $y = 2x^2 - 4$ **d)** $y = -\dfrac{3x^2}{2}$

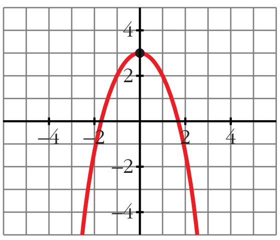
a)



Vértice: $(0, -3)$

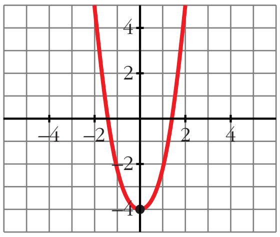
Corte con los ejes: $(-\sqrt{6}, 0)$, $(\sqrt{6}, 0)$, $(0, -3)$

b)



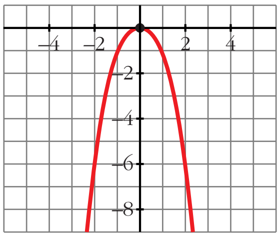
Vértice: $(0, 3)$

Corte con los ejes: $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, 3)$

c) 

Vértice: (0, –4)

Corte con los ejes: $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$, (0, –4)

d) 

Vértice: (0, 0)

Corte con los ejes: (0, 0)

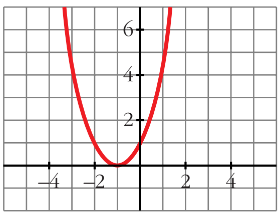
13 **Representa las siguientes funciones:**

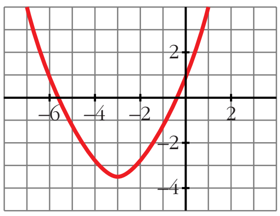
a) $y = x^2 + 2x + 1$

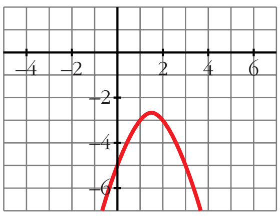
b) $y = \dfrac{x^2}{2} + 3x + 1$

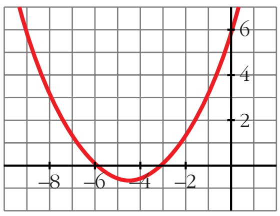
c) $y = -x^2 + 3x - 5$

d) $y = \dfrac{x^2}{3} + 3x + 6$

a) 

b) 

c) 

d) 

14 **En las siguientes parábolas, halla el vértice y comprueba que ninguna de ellas corta al eje de abscisas.**

Obtén algún punto a la derecha y a la izquierda del vértice y represéntalas gráficamente:

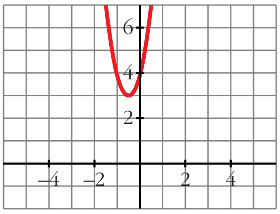
a) $y = 4(x^2 + x + 1)$

b) $y = 5(x + 2)^2 + 1$

c) $y = -x^2 - 2$

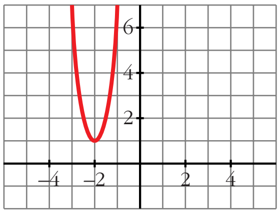
d) $y = -\frac{3}{4}(x^2 + 2)$

a)



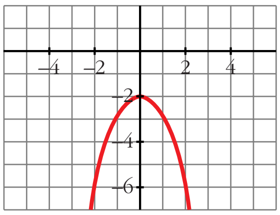
Vértice: $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$

b)



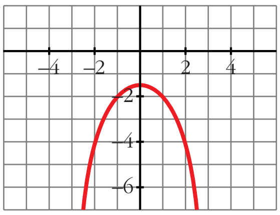
Vértice: $(-2, 1)$

c)



Vértice: $(0, -2)$

d)



Vértice: $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$

15 **Estima mediante interpolación lineal el valor correspondiente a $x = 1\,000$ y a $x = 1\,558$, conociendo estos valores:**

x	825	2 015
y	2 500	4 516

$$y = 2\,500 + \frac{144}{85}(x - 825)$$

$$y(1\,000) = 2\,796{,}47$$

$$y(1\,558) = 3\,741{,}79$$

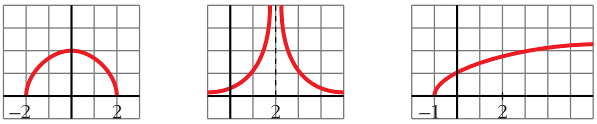
16 **Calcula mediante interpolación lineal el valor de y que falta en esta tabla:**

x	47	59	112
y	18	...	37

$$y = 18 + \frac{19}{65}(x - 47)$$

$$y(59) = \frac{1\,398}{65}$$

17 **Observando la gráfica de estas funciones, indica cuál es su dominio de definición:**

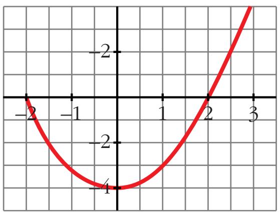


Los dominios son, por orden: $[-2, 2]$; $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ y $[-1, +\infty)$.

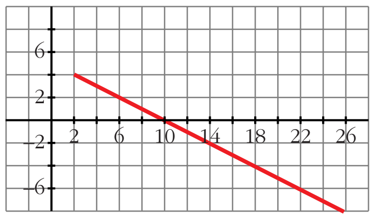
18 **Representa las siguientes funciones en las que se ha restringido voluntariamente su dominio:**

a) $y = x^2 - 4$, **si** $x \in [-2, 3]$ **b)** $y = 5 - \frac{x}{2}$, **si** $x \in [2, +\infty)$

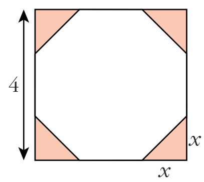
a)



b)



19 **De un cuadrado de 4 cm de lado, se cortan en las esquinas triángulos rectángulos isósceles cuyos lados iguales miden x.**



a) Escribe el área del octógono que resulta en función de x.

b) ¿Cuál es el dominio de esa función?

a) $A(x) = 16 - 2x^2$

b) $(0, 2)$

20 **Una empresa fabrica envases con forma de prisma de dimensiones x, $x/2$ y $2x$ cm.**

a) Escribe la función que da el volumen del envase en función de x.

b) Halla su dominio sabiendo que el envase más grande tiene 1 l de volumen.

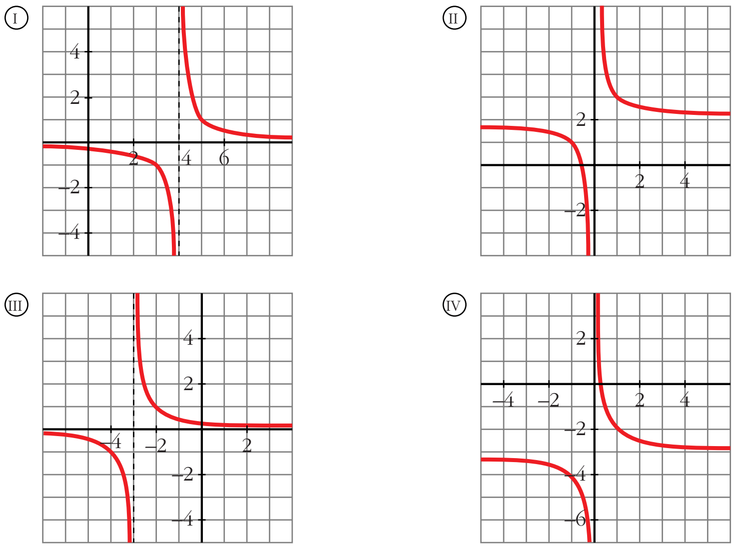
a) $V(x) = x^3$

b) $(0, 10)$

Página 118

21 **Asocia a cada una de las gráficas una de las siguientes expresiones analíticas:**

a) $y = \frac{1}{x} + 2$ **b)** $y = \frac{1}{x+3}$ **c)** $y = \frac{1}{x} - 3$ **d)** $y = \frac{1}{x-4}$



a) II b) III c) IV d) I

PARA RESOLVER

22 **El consumo de gasolina por cada 100 km de un automóvil es, dependiendo de la velocidad, 7,2 l a 90 km/h y 10,8 l a 110 km/h. Estima el consumo cuando la velocidad es 100 km/h.**

$y = 7{,}2 + 0{,}18\,(x - 90)$

$y(100) = 9\ l$

23 **La factura del gas de una familia, en enero, ha sido 24,82 euros por 12 m³, y en febrero 43,81 por 42 m³. ¿Cuánto pagarán si consumen 28 m³?**

$y = 24{,}82 + 0{,}633\,(x - 12)$

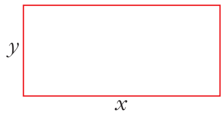
$y(28) = 34{,}95$ euros.

24 **El precio del billete de una línea de cercanías depende de los kilómetros recorridos. Por 57 km he pagado 2,85 euros y por 168 km, 13,4 euros. Calcula el precio de un billete para una distancia de 100 km.**

$y = 2{,}85 + 0{,}095\,(x - 57)$

$y(100) = 6{,}94$ euros.

25 **Un rectángulo tiene 20 cm de perímetro. Escribe la función que da el área de ese rectángulo en función de su base x. ¿Cuál es el dominio de esa función?**



$2x + 2y = 20; \quad A = x \cdot y$

$A(x) = 10x - x^2; \quad D = (0, 10)$

26 **Los gastos fijos mensuales de una empresa por la fabricación de x televisores son $G = 2\,000 + 25x$, en miles de euros, y los ingresos mensuales son $I = 60x - 0{,}01x^2$, también en miles de euros. ¿Cuántos televisores deben fabricarse para que el beneficio (ingresos menos gastos) sea máximo?**

$B(x) = I(x) - G(x) = 60x - 0{,}01x^2 - (2\,000 + 25x) = -0{,}01x^2 + 35x - 2\,000$

El máximo lo alcanza en el vértice de la parábola:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-35}{-0{,}02} = 1\,750$$

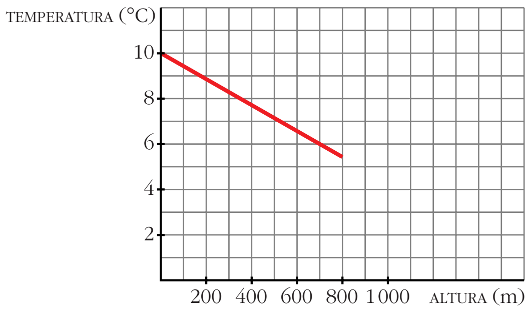
Han de fabricarse 1 750 televisiones.

27 **Midiendo la temperatura a diferentes alturas, se ha observado que por cada 180 m de ascenso el termómetro baja 1 °C. Si en la base de una montaña de 800 m estamos a 10 °C, ¿cuál será la temperatura en la cima?**

Representa gráficamente la función *altura-temperatura* y busca su expresión analítica.

☛ ***Haz una tabla de valores y represéntala. ¿Qué gráfica obtienes?***

$T(h) = 10 - \dfrac{h}{180}; \quad T(800) = 5{,}56$ °C

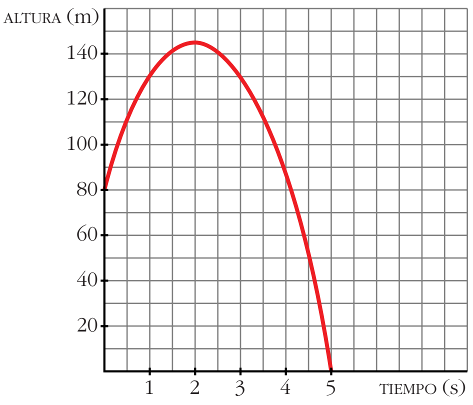


28 **Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba desde lo alto de un edificio. La altura que alcanza viene dada por la fórmula $h = 80 + 64t - 16t^2$ (t en segundos y h en metros).**

a) Dibuja la gráfica en el intervalo [0, 5].

b) Halla la altura del edificio.

c) ¿En qué instante alcanza su máxima altura?

a) 

b) 80 metros.

c) 2 segundos.

29 **El precio de venta de un artículo viene dado por la expresión $p = 12 - 0{,}01x$ (x = número de artículos fabricados; p = precio, en cientos de euros).**

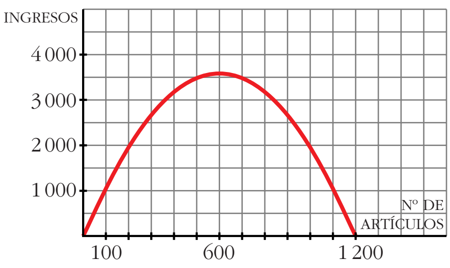
a) Si se fabrican y se venden 500 artículos, ¿cuáles serán los ingresos obtenidos?

b) Representa la función *Nº de artículos-Ingresos obtenidos*.

c) ¿Cuántos artículos se deben fabricar para que los ingresos sean máximos?

a) Si se venden 500 artículos, se ingresan 3 500 cientos de euros = 350 000 euros.

$I(x) = 12x - 0{,}01x^2$

b) 

c) Deben fabricar 600 artículos para obtener los ingresos máximos (360 000 euros).

30 **Un fabricante vende mensualmente 100 electrodomésticos a 400 euros cada uno y sabe que por cada 10 euros de subida venderá 2 electrodomésticos menos.**

a) ¿Cuáles serán los ingresos si sube los precios 50 euros?

b) Escribe la función que relaciona la subida de precio con los ingresos mensuales.

c) ¿Cuál debe ser la subida para que los ingresos sean máximos?

a) En este caso vendería 90 electrodomésticos a 450 euros cada uno; luego los ingresos serían de $450 \cdot 90 = 40\,500$ euros.

b) $I(x) = (400 + 10x)(100 - 2x) = -20x^2 + 200x + 40\,000$

(x = decenas de euros)

c) El máximo se alcanza en el vértice de la parábola:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-200}{-40} = 5 \to 50 \text{ euros}$$

Página 119

31 **El coste de producción de x unidades de un producto es igual a $(1/4)x^2 + 35x + 25$ euros y el precio de venta de una unidad es $50 - x/4$ euros.**

a) Escribe la función que nos da el beneficio total si se venden las x unidades producidas.

b) Halla el número de unidades que deben venderse para que el beneficio sea máximo.

☛ ***Los ingresos por la venta de x unidades son $x(50 - x/4)$ euros.***

a) $B(x) = 50x - \frac{x^2}{4} - \left(\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25\right) = -\frac{x^2}{2} + 15x - 25$

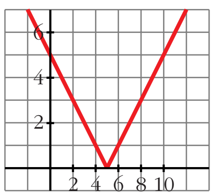
b) El máximo se alcanza en el vértice de la parábola:

$$x = \frac{-15}{-1} = 15$$

Deben venderse 15 unidades

32 **Representa la función $y = |x - 5|$ y comprueba que su expresión analítica en intervalos es:**

$$y = \begin{cases} -x + 5 & \text{si } x < 5 \\ x - 5 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

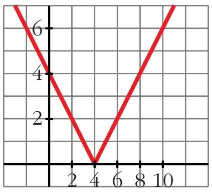


33 **Representa las siguientes funciones y defínelas por intervalos:**

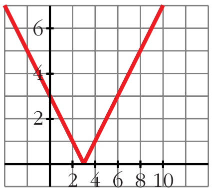
a) $y = |4 - x|$

b) $y = |x - 3|$

a) $y = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x < 4 \\ -4 + x & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$



b) $y = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x < 3 \\ x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

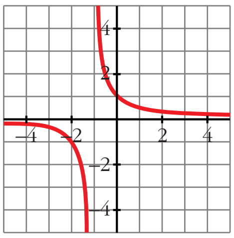


34 **Representa las siguientes funciones:**

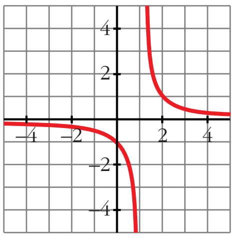
a) $y = \dfrac{1}{x + 1}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x - 1}$

c) $y = \dfrac{-1}{x}$ **d)** $y = \dfrac{-1}{x - 3}$

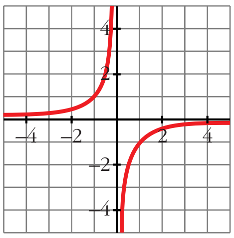
a)



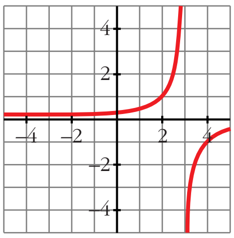
b)



c)



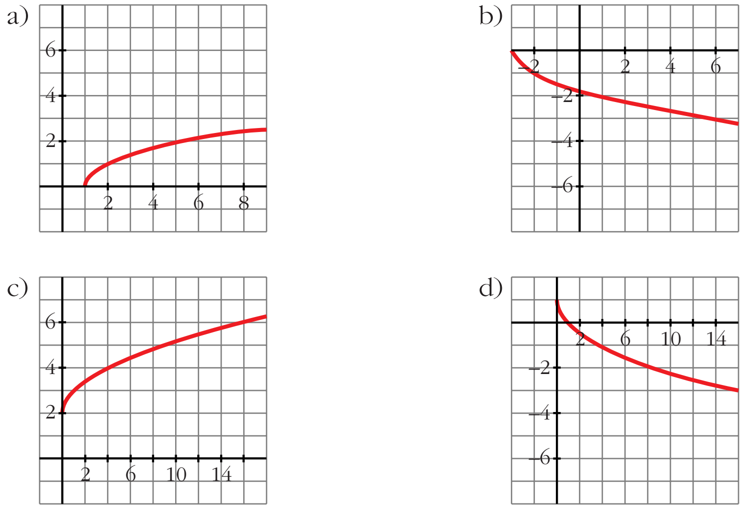
d)



35 **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = \sqrt{x - 1}$ **b)** $y = -\sqrt{x + 3}$

c) $y = 2 + \sqrt{x}$ **d)** $y = 1 - \sqrt{x}$

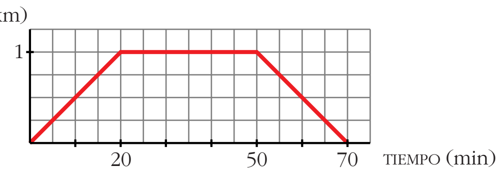


36 **Elena va a visitar a su amiga Ana y tarda 20 minutos en llegar a su casa, que está a 1 km de distancia. Está allí media hora y en el camino de vuelta emplea el mismo tiempo que en el de ida.**

a) Representa la función *tiempo-distancia*.

b) Busca su expresión analítica.

a)



b) $f(x) = \begin{cases} (1/20)x & \text{si } \ 0 \le x \le 20 \\ 1 & \text{si } \ 20 < x \le 50 \\ -1/20\,(x-70) & \text{si } \ 50 < x \le 70 \end{cases}$

37 **Halla el dominio de definición de las funciones:**

a) $y = \dfrac{3}{5x + 2x^2}$

b) $y = \dfrac{8}{x^3}$

c) $y = \dfrac{1}{x^3 + 8}$

d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

e) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 + 3}}$

f) $y = \sqrt[3]{x}$

g) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2 - x}}$

h) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 - x - 15}}$

a) $\mathbb{R} - \left\{0, -\frac{5}{2}\right\}$

b) $\mathbb{R} - \{0\}$

c) $\mathbb{R} - \{-2\}$

d) $(0, +\infty)$

e) $\mathbb{R}$

f) $\mathbb{R}$

g) $(-\infty, 2)$

h) $(-\infty; 2{,}5) \cup (3, +\infty)$

38 **Encuentra una función polinómica de segundo grado que pase por (0, 1), (1, 2) y (2, 3).**

Los puntos están alineados. Los tres pertenecen a la recta $y = x + 1$.

39 **Dada la siguiente tabla de valores, haz una estimación del valor de la función para $x = 3$ mediante interpolación cuadrática.**

x	**1**	**2,5**	**4**
***f*(*x*)**	**2**	**–1**	**8**

$f(x) = m + n(x-1) + p(x-1)(x-2{,}5)$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 2 \;\Rightarrow\; 2 = m \\ f(2{,}5) = -1 \;\Rightarrow\; -1 = m + 1{,}5n \\ f(4) = 8 \;\Rightarrow\; 8 = m + 3n + 4{,}5p \end{array}\right\} \begin{array}{l} m = 2 \\ n = -2 \\ p = 8/3 \end{array}$$

El polinomio es:

$$f(x) = 2 - 2(x-1) + \frac{8}{3}(x-1)(x-2{,}5)$$

Luego: $f(3) = \frac{2}{3} = 0{,}\widehat{6}$

40 **Una empresa ha obtenido las siguientes ganancias, en millones de euros:**

Año	**1995**	**1997**	**1999**
Euros	**1 700**	**2 200**	**3 500**

Determina mediante interpolación parabólica las ganancias de los años 1996 y 1998.

☛ ***Llama 1, 3 y 5 a los años que aparecen en la tabla.***

Hacemos:

Año	1	3	5
Ganancias	1 700	2 200	3 500

1996 $\longrightarrow$ Año 2

1998 $\longrightarrow$ Año 4

Así: $f(x) = m + n(x-1) + p(x-1)(x-3)$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1\,700 \;\Rightarrow\; 1\,700 = m \\ f(3) = 2\,200 \;\Rightarrow\; 2\,200 = 1\,700 + 2n \\ f(5) = 3\,500 \;\Rightarrow\; 3\,500 = 1\,700 + 4n + 8p \end{array}\right\} \begin{array}{l} m = 1\,700 \\ n = 250 \\ p = 100 \end{array}$$

El polinomio es:

$$f(x) = 1\,700 + 250(x-1) + 100(x-1)(x-3)$$

Año 1996 $\Rightarrow f(2) = 1\,850$

Año 1998 $\Rightarrow f(4) = 2\,750$

41 **Los alumnos matriculados en una universidad han sido:**

Año	**1992**	**1997**	**1998**
Número de alumnos	**10 400**	**13 200**	**13 400**

Obtén el polinomio interpolador de segundo grado y utilízalo para estimar el número de alumnos matriculados en 1994.

Llamando 1, 6 y 7 a los años que aparecen en la tabla, tenemos que:

$$f(x) = m + n(x-1) + p(x-1)(x-6)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 10\,400 \Rightarrow 10\,400 = m \\ f(6) = 13\,200 \Rightarrow 13\,200 = m + 5n \\ f(7) = 13\,400 \Rightarrow 13\,400 = m + 6n + 6p \end{array}\right\} \begin{array}{l} m = 10\,400 \\ n = 560 \\ p = -60 \end{array}$$

El polinomio es:

$$f(x) = 10\,400 + 560(x-1) - 60(x-1)(x-6)$$

Año 1994 $\Rightarrow f(3) = 11\,880$

42 **Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:**

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ **b)** $y = \sqrt{x^2 + 3}$

c) $y = \sqrt{5 - x^2}$ **d)** $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

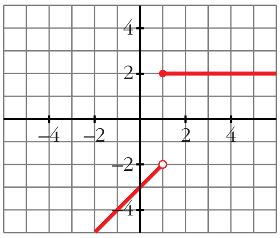
a) $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ b) $\mathbb{R}$

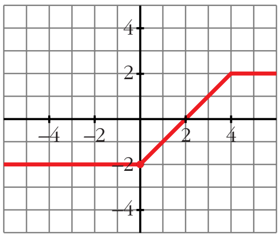
c) $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$ d) $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

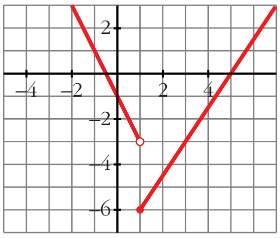
43 **Representa gráficamente las siguientes funciones:**

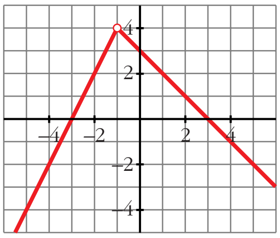
a) $y = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ **b)** $y = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ x - 2 & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } x < 1 \\ (3x - 15)/2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ **d)** $y = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -1 \\ -x + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

a)


b)


c)


d)


Página 120

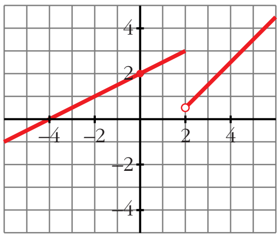
44 **Representa:**

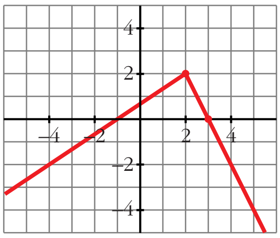
a) $y = \begin{cases} x/2 + 2 & \text{si } x \le 2 \\ x - 3/2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

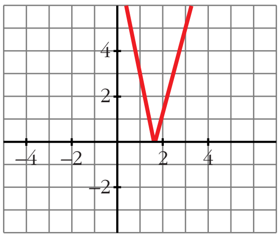
b) $y = \begin{cases} (2x + 2)/3 & \text{si } x < 2 \\ -2x + 6 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

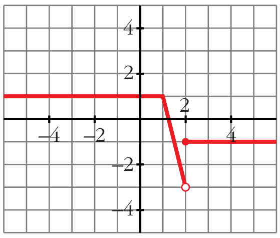
c) $y = \begin{cases} -4x + 7 & \text{si } x < 1{,}75 \\ 4x - 7 & \text{si } x \ge 1{,}75 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le 1 \\ -4x + 5 & \text{si } 1 < x < 2 \\ -1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

a)


b)


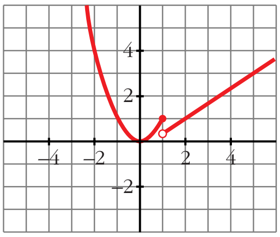
c)


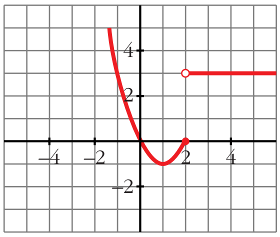
d)


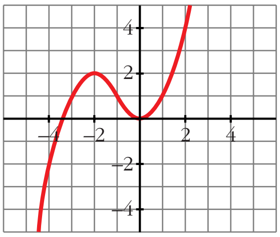
45 **Dibuja la gráfica de las siguientes funciones:**

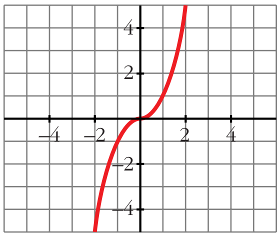
a) $y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ (2x-1)/3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \le 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} -x^2 - 4x - 2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$ d) $y = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

a)


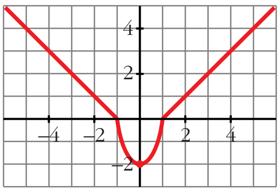
b)


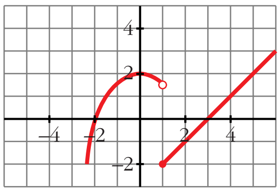
c)


d)


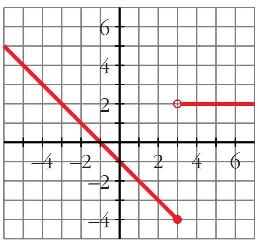
46 **Representa:**

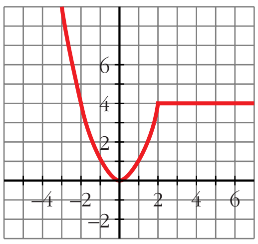
a) $y = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \le -1 \\ 2x^2 - 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} -x^2/2 + 2 & \text{si } x < 1 \\ x - 3 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

a)


b)


47 **Busca la expresión analítica de estas funciones:**

a)


b)


a) $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \le 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

48 **Representa y define como funciones "a trozos":**

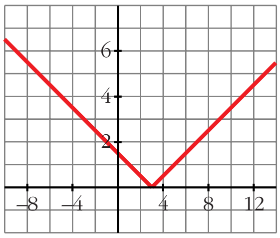
a) $y = \left| \dfrac{x - 3}{2} \right|$ **b)** $y = |3x + 6|$

c) $y = \left| \dfrac{2x - 1}{3} \right|$ **d)** $y = |-x - 1|$

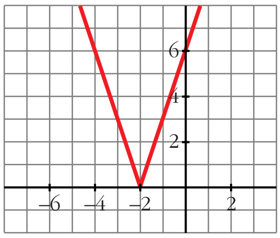
☛ ***Mira el ejercicio resuelto número 9.***

a) $y = \begin{cases} -\dfrac{x + 3}{2} & \text{si } x < 3 \\ \dfrac{x - 3}{2} & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} -3x - 6 & \text{si } x < -2 \\ 3x + 6 & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$

a)

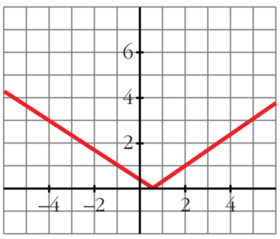


b)

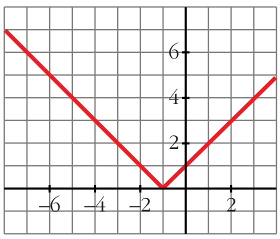


c) $y = \begin{cases} -\dfrac{2x + 1}{3} & \text{si } x < 1/2 \\ \dfrac{2x - 1}{3} & \text{si } x \ge 1/2 \end{cases}$ d) $y = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < -1 \\ x + 1 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$

c)



d)



49 **Representa y define como funciones "a trozos":**

a) $y = |x^2 - 4|$ **b)** $y = |x^2 - 2x - 4|$

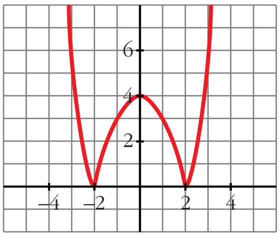
c) $y = \left| -\dfrac{x^2}{2} + 2 \right|$ **d)** $y = |x^2 + 2x - 2|$

☛ ***Mira el ejercicio resuelto número 9.***

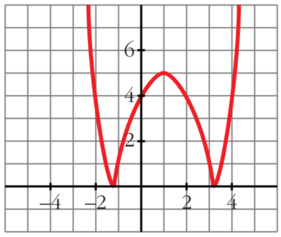
a) $y = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} x^2 - 2x - 4 & \text{si } x < -1{,}2 \\ -x^2 + 2x + 4 & \text{si } -1{,}2 \le x \le 3{,}2 \\ x^2 - 2x - 4 & \text{si } x > 3{,}2 \end{cases}$

a)



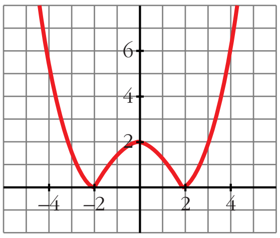
b)



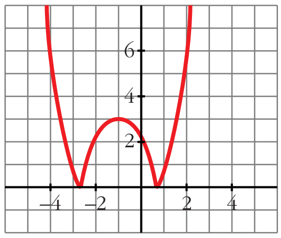
c) $y = \begin{cases} (x^2/2) - 2 & \text{si } x < -2 \\ (-x^2/2) + 2 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ (x^2/2) - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & \text{si } x < -2{,}7 \\ -x^2 - 2x + 2 & \text{si } -2{,}7 \le x \le 0{,}7 \\ x^2 + 2x - 2 & \text{si } x > 0{,}7 \end{cases}$

c)



d)



50 **A partir de la gráfica de $f(x) = 1/x$, representa:**

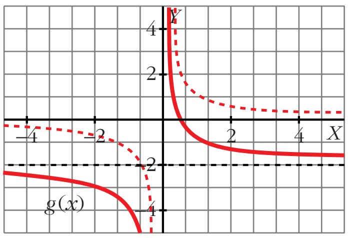
a) $g(x) = f(x) - 2$

b) $h(x) = f(x - 3)$

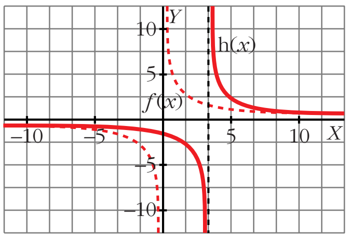
c) $i(x) = -f(x)$

d) $j(x) = |f(x)|$

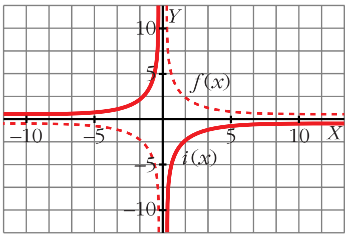
a)



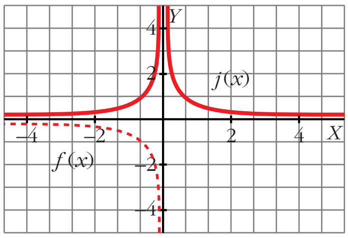
b)



c)

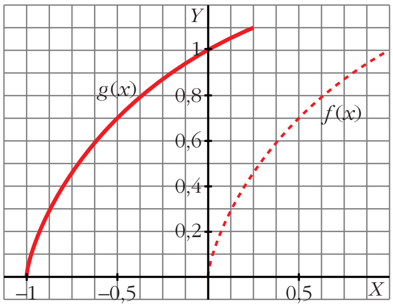


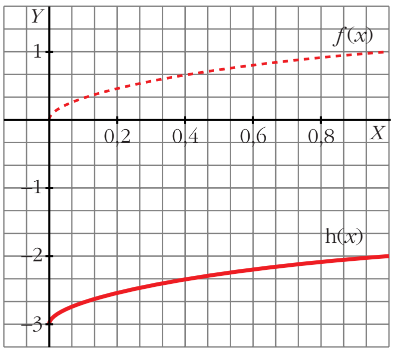
d)

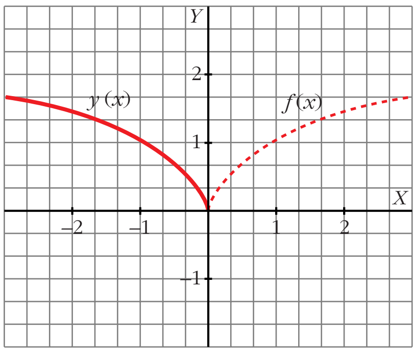


51 **Representa la función $f(x) = \sqrt{x}$ y dibuja, a partir de ella:**

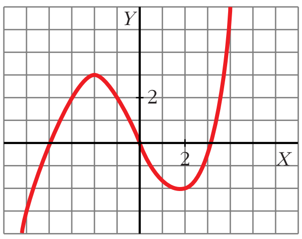
a) $g(x) = \sqrt{x+1}$ **b)** $h(x) = \sqrt{x} - 3$ **c)** $y = \sqrt{-x}$

a)


b)


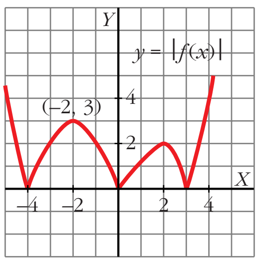
c)


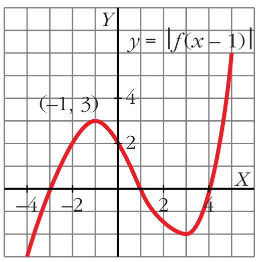
52 **Ésta es la gráfica de la función $y = f(x)$:**

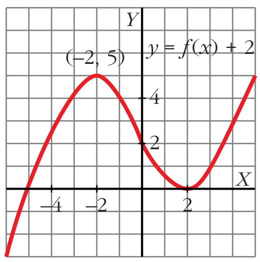


Representa, a partir de ella, las funciones:

a) $y = |f(x)|$ **b)** $y = f(x-1)$ **c)** $y = f(x) + 2$

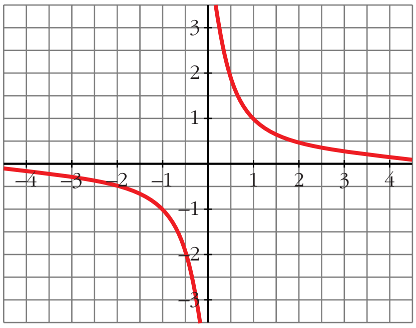
a)


b)


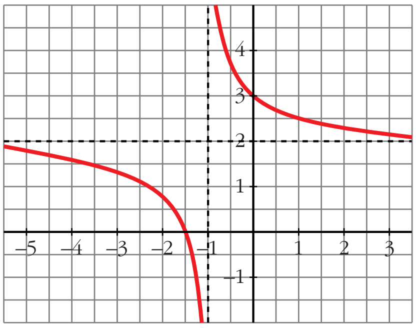
c)


53 **Utilizando la relación $\dfrac{\text{Dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \dfrac{\text{resto}}{\text{divisor}}$ podemos escribir la función $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$ de esta forma: $y = 2 + \dfrac{1}{x+1}$. Comprueba que su gráfica coincide con la de $y = 1/x$ trasladada 1 unidad hacia la izquierda y 2 hacia arriba.**

$y = \dfrac{1}{x}$

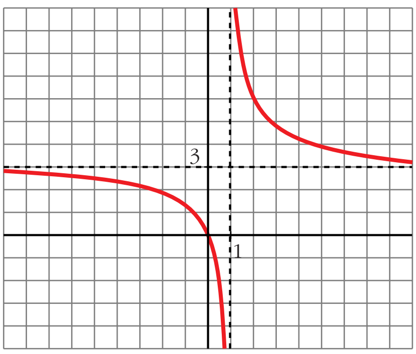


$y = 2 + \dfrac{1}{x+1}$

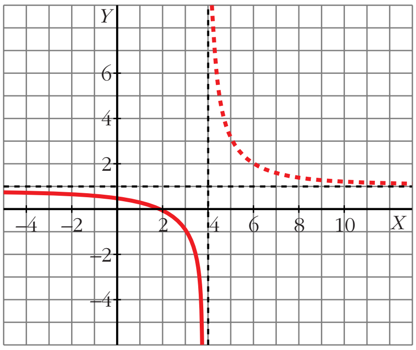


54 **Representa las funciones $y = \dfrac{3x}{x-1}$, $y = \dfrac{x-2}{x-4}$ utilizando el procedimiento del problema anterior.**

$y = \dfrac{3x}{x-1} = 3 + \dfrac{3}{x-1}$



$$y = \frac{x-2}{x-4} = 1 + \frac{2}{x-4}$$



Página 121

CUESTIONES TEÓRICAS

55 **Una parábola corta al eje de abscisas en $x = -1$ y en $x = 3$. La ordenada del vértice es $y = -4$. ¿Cuál es la ecuación de esa parábola?**

$f(x) = k(x + 1)(x - 3) = k(x^2 - 2x - 3)$

Vértice $\rightarrow x = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$; $f(1) = -4k = -4 \Rightarrow k = 1$

La ecuación de la parábola será, por tanto: $f(x) = x^2 - 2x - 3$

56 **¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(0, n)$ y $B(1, n + m)$?**

$y = mx + n$

57 **Recuerda que la pendiente de una recta es lo que aumenta y por cada unidad que aumenta x. Demuestra que en la recta $y = mx + n$, m es la pendiente.**

☛ ***Calcula el valor de y cuando $x = a$ y cuando $x = a + 1$ y halla la pendiente.***

$$\left.\begin{array}{l} y(a) = m \cdot a + n \\ y(a+1) = m \cdot a + m + n \end{array}\right\} \; y(a+1) - y(a) = m = \text{pendiente}$$

58 **Encuentra los valores de c para que la función $y = -x^2 + 12x + c$ tenga con el eje de abscisas:**

a) Dos puntos de corte.

b) Un punto de corte.

c) Ningún punto de corte.

$$b^2 - 4ac = 144 + 4c$$

a) $144 + 4c > 0 \Rightarrow c > -36$

b) $144 + 4c = 0 \Rightarrow c = -36$

c) $144 + 4c < 0 \Rightarrow c < -36$

PARA PROFUNDIZAR

59 **Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:**

a) $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$ **b)** $y = \sqrt{\dfrac{x-9}{x}}$

☛ ***Halla los valores que anulan el numerador y el denominador y estudia el signo del cociente.***

a) $\dfrac{x+3}{x-2} \geq 0$ $\left\{\begin{array}{l} x+3 \geq 0 \\ x-2 > 0 \end{array}\right\} x > 2$ $\quad\left\{\begin{array}{l} x+3 \leq 0 \\ x-2 < 0 \end{array}\right\} x \leq -3$

Dominio = $(-\infty, -3] \cup (2, +\infty)$

b) $\dfrac{x-9}{x} \geq 0$ $\left\{\begin{array}{l} x-9 \geq 0 \\ x > 0 \end{array}\right\} x \geq 9$ $\quad\left\{\begin{array}{l} x-9 \leq 0 \\ x < 0 \end{array}\right\} x < 0$

Dominio = $(-\infty, 0) \cup [9, +\infty)$

60 **El precio del metro cuadrado de un material plástico para suelos depende de la cantidad que compremos, x, y viene dado por la función $f(x)$ definida así:**

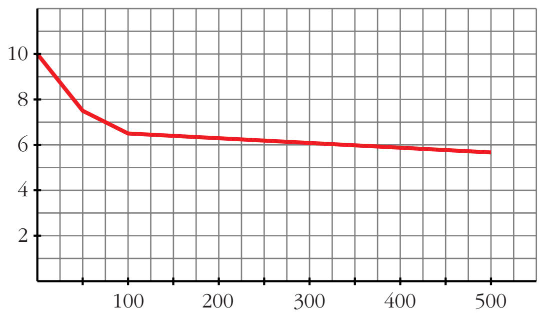
$$f(x) = \begin{cases} 10 - 0{,}05x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 50 \\ 7{,}5 - 0{,}02(x-50) & \text{si} \quad 50 < x < 100 \\ 6{,}5 - 0{,}002(x-100) & \text{si} \quad 100 \leq x \leq 500 \end{cases}$$

a) Representa gráficamente esta función.

b) ¿Cuál será el precio si compro 300 m²?

c) Para conseguir un precio inferior a 7 €/m², ¿cuántos metros cuadrados, como mínimo, tengo que comprar?

a)



Es continua en su dominio.

b) $f(300) = 6{,}1$

A 6,1 €/m^2, nos costará $6{,}1 \cdot 300 = 1\,830$ €

c) $7{,}5 - 0{,}02(x - 50) = 7 \;\Rightarrow\; x = 75$

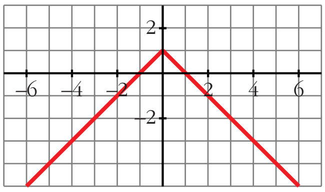
Como mínimo, 75 m^2.

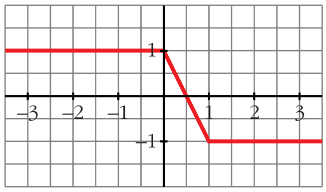
61 **Representa las siguientes funciones y exprésalas en intervalos:**

a) $y = 1 - |x|$ **b)** $y = |x - 1| - |x|$

a) $y = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \geq 0 \\ 1 + x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$





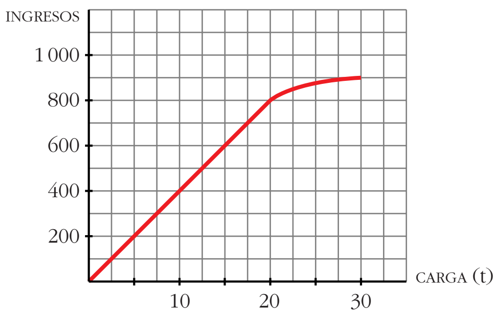
62 **Las tarifas de una empresa de transportes son:**

- **40 euros por tonelada de carga si ésta es menor o igual a 20 t.**
- **Si la carga es mayor que 20 t, se restará, de los 40 euros, tantos euros como toneladas sobrepasen las 20.**

a) Dibuja la función *ingresos de la empresa según la carga que transporte* (carga máxima: 30 t).

b) Obtén la expresión analítica y represéntala.

a)

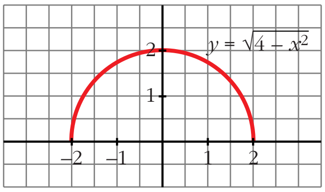


b) $f(x) = \begin{cases} 40x & \text{si } 0 \leq x \leq 20 \\ [40 - (x - 20)]x & \text{si } 20 < x \leq 30 \end{cases}$

Es decir: $f(x) = \begin{cases} 40x & \text{si } 0 \leq x \leq 20 \\ 60x - x^2 & \text{si } 20 < x \leq 30 \end{cases}$

63 **La gráfica de $y = \sqrt{4 - x^2}$ es una semicircunferencia con centro en el origen y radio 2. Compruébalo. ¿Cuál es su dominio? ¿Cuál será la función que representa la otra semicircunferencia?**

☛ ***Haz una tabla de valores y represéntala.***



Dominio = [–2, 2]

La función que representa la otra semicircunferencia es $y = -\sqrt{4 - x^2}$.

PARA PENSAR UN POCO MÁS

64 **De una función polinómica de segundo grado, $y = p(x)$, sabemos que tiene un máximo en el punto de abscisa $x_0 = 1$ y que $p(2) = 4$.**

a) ¿Cuánto vale $p(0)$?

b) ¿Tenemos suficientes datos para representarla? Escribe la ecuación de una parábola que cumpla estas condiciones y represéntala.

$p(x) = ax^2 + bx + c$

Máximo en el punto de abscisa $x_0 = 1 \Rightarrow \dfrac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow b = -2a$

$p(2) = 4 \Rightarrow 4 = 4a + 2b + c$

$4 = 4a + 2(-2a) + c$

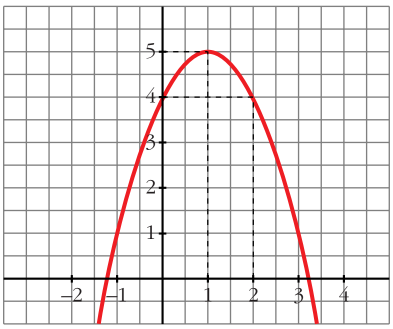
$4 = 4a - 4a + c$

$c = 4$

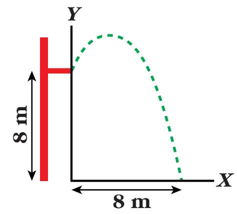
a) $p(0) = c = 4$

b) No tenemos suficientes datos; solo sabemos que: $p(x) = ax^2 - 2ax + 4$; $a < 0$

Un ejemplo podría ser $p(x) = -x^2 + 2x + 4$



65 **En una piscina hay un trampolín a 8 m del agua. Un nadador se lanza tomando impulso y elevándose 1 m antes de empezar a caer. El nadador alcanza el agua a 8 m del borde del trampolín.**



a) Si tomamos como origen de coordenadas la proyección del extremo del trampolín sobre el agua y el vértice de la parábola es (a, b), ¿cuánto vale b?

b) La ecuación del movimiento es $y = k(x - \alpha)^2 + 9$. Justifícala y halla k y α.

a) $b = 8 + 1 = 9$

b) El vértice es $(\alpha, 9)$, por eso la ecuación es $y = k(x - \alpha)^2 + 9$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Como } y(0) = 8 \Rightarrow 8 = k\alpha^2 + 9 \\ \text{Como } y(8) = 0 \Rightarrow 0 = k(8 - \alpha)^2 + 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} k = -1/\alpha^2 \\ k = -9/(8 - \alpha)^2 \end{array}$$

$$-\frac{1}{\alpha^2} = \frac{-9}{(8 - \alpha)^2} \Rightarrow (8 - \alpha)^2 = 9\alpha^2 \Rightarrow 8\alpha^2 + 16\alpha - 64 = 0$$

$$\alpha^2 + 2\alpha - 8 = 0 \Rightarrow \alpha = \begin{cases} 2 \rightarrow k = -1/4 \\ -4 \ \text{(vemos por la gráfica que no vale)} \end{cases}$$

La ecuación será, por tanto:

$$y = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 9$$