TEMA 4
FUNCIONES ELEMENTALES

4.1. Funciones lineales, cuadráticas y polinómicas

• 4.1.1. Funciones lineales.

Las funciones lineales o afines tienen por expresión analítica $f(x) = mx + n$.

Si *m* > 0, la función afín tiene por gráfica una recta creciente; por el contrario

Si *m* < 0 la gráfica de la función afín es una recta decreciente.

Si *m* = 0, se trata de una función polinómica de grado 0; se denominan también funciones constantes. Su representación gráfica es una recta horizontal que pasa por la ordenada *y* = *n*.

El dominio de estas funciones es todo R y su recorrido es *Rec*(*f*) = {*n*}.

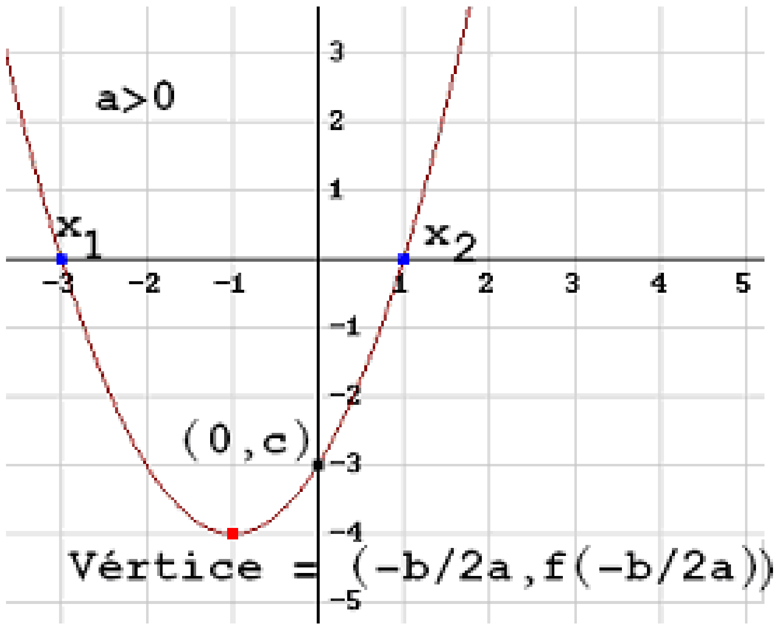
Si *n* = 0, *f(x)* se llama función de proporcionalidad y tiene la forma *f(x)* = *mx*.

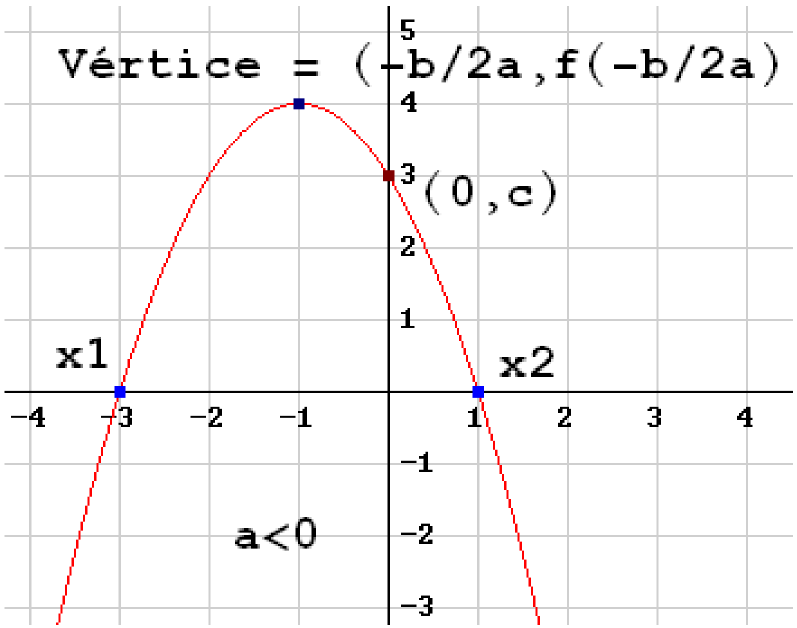
EJEMPLOS: $f(x) = 3x + 2$ $g(x) = -3x + 2$ $h(x) = 3x$ $i(x) = -3x$
$j(x) = 4$

4.1. Funciones lineales, cuadráticas y polinómicas

• 4.1.2. Funciones cuadráticas

La funciones cuadráticas son funciones polinómicas de segundo grado. La expresión analítica de estas funciones es $f(x) = ax^2 + bx + c$. Su representación gráfica es una parábola.





EJEMPLOS: $f(x) = 3x^2 + 4x + 5$ $\quad g(x) = 2x^2 - 8x + 6$

4.1. Funciones lineales, cuadráticas y polinómicas

• 4.1.3. Funciones polinómicas

Diremos que una función $f(x)$ es polinómica si está definida por un polinomio, esto es, su expresión analítica viene determinada por $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ son números reales y $n, n-1, \ldots, 1$ son números naturales. La funciones lineales y cuadráticas son funciones polinómicas. El dominio de las funciones polinómicas es todo R.

4.1. EJERCICIOS

1. Determina la expresión analítica de una función lineal *f* que verifi*ca f*(1) = 3*, f*(–1) = 6 y cuyo dominio de definición es [–1,3]. Representa gráficamente dicha función.

2. Determina la expresión analítica de una función afín que verifica *f*(3) = 7 y cuya pendiente es –2, definida en [0,5).
3. Representa las funciones cuadráticas siguientes y determina su recorrido:

   a. $f_1(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{3}$ b. $f_2(x) = x^2 + 5x + 4$ c. $f_3(x) = x^2 + 4x + 6$
4. Representa las funciones: a. $f_1(x) = -x^2 - 2x - 3, x \in [-1,1)$

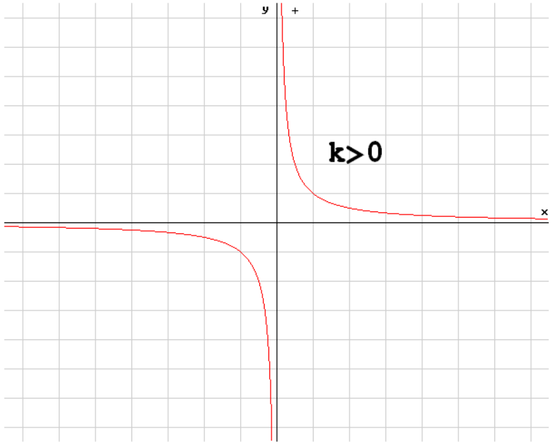
   b. $f_2(x) = x^2 - 9, x \in (-1,2) \cup (3,6)$ c. $f_3(x) = x^2 - 5x + 4, x \in [0,4]$

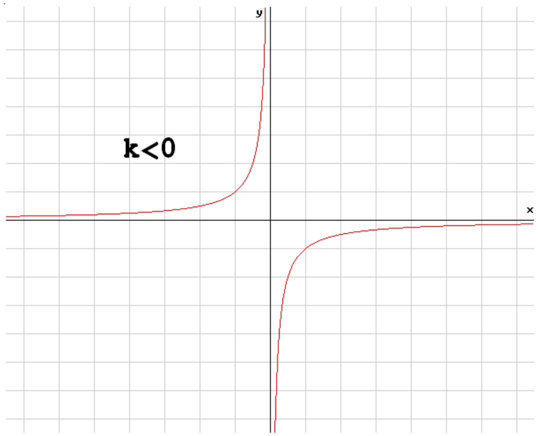
4.2. Funciones de proporcionalidad inversa

Las funciones de proporcionalidad inversa son funciones racionales cuya expresión analítica viene determinada por: $f(x)=\frac{k}{x}$ con $k\neq 0$.

A la constante *k* se la denomina constante de proporcionalidad.

El dominio de estas funciones es R – *{0}*. Su recorrido es R – *{0}*. La gráfica de las funciones de proporcionalidad son **hipérbolas** cuyas asíntotas son los ejes de coordenadas:





4.2. EJERCICIOS: Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $f_1(x)=\frac{3}{x}$ b) $f_2(x)=-\frac{3}{x}$ c) $f_3(x)=\frac{5}{x}$ d) $f_4(x)=\frac{6}{x}$ e) $f_5(x)=-\frac{6}{x}$ f) $f_6(x)=-\frac{4}{x}$

4.3. Funciones racionales.

Una función es racional si su expresión analítica es un cociente de polinomios: $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$.

$$Dom(f(x)) = \{x \in \mathbb{R} / q(x) \neq 0\}$$

EJEMPLO: Calcula el dominio de $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2+5x+4}$

4.3. EJERCICIOS

Calcula el dominio de definición de las siguientes funciones:

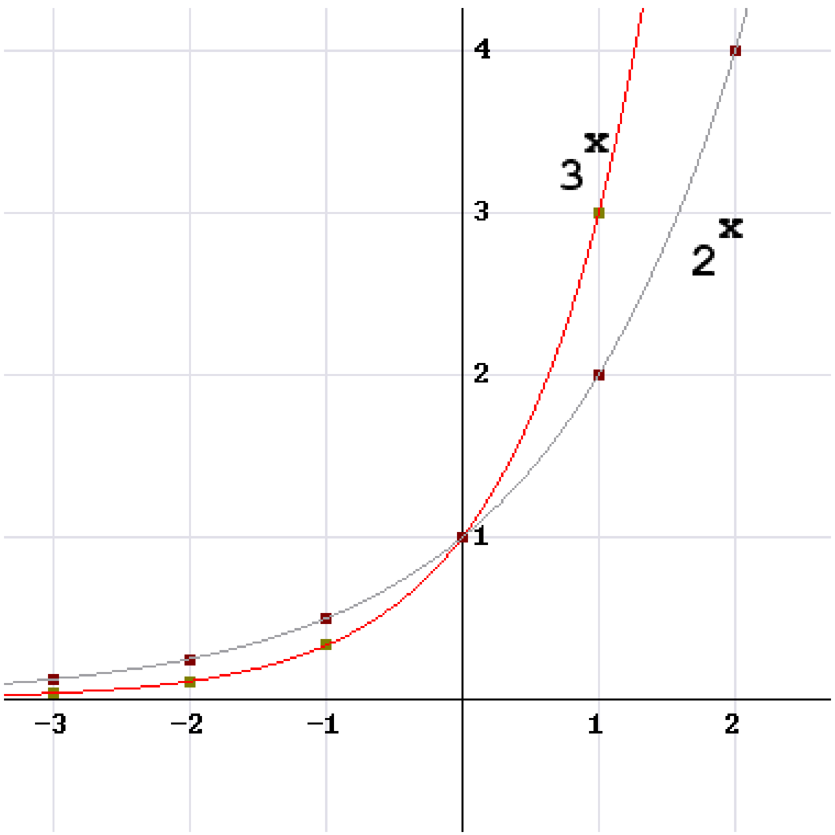
a) $f_1(x) = \dfrac{3x+2}{x^2+x-30}$

b) $f_2(x) = \dfrac{4x^2+3x-7}{3x^3+3x^2-36x}$

c) $f_3(x) = \dfrac{2x+5}{x^3-6x^2-x+30}$

4.4. Funciones exponenciales (1/3)

Las funciones exponenciales son aquellas cuya expresión analítica viene dada por $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$.

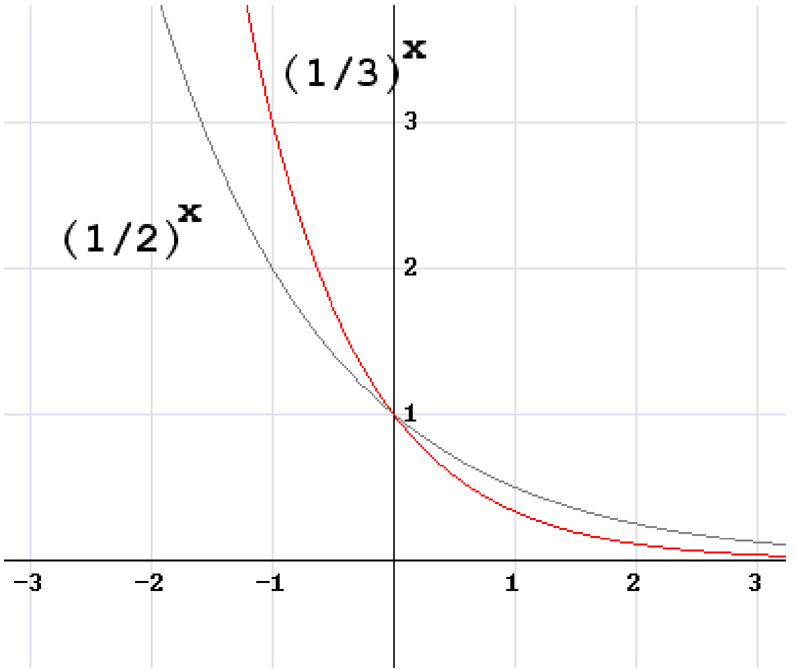


Si ***a>1***, las funciones exponenciales cumplen las siguientes propiedades:

- Son crecientes, mayor cuanto mayor sea **a** : crecimiento exponencial.
- Pasan por los puntos *(0,1)* y *(1,a)*
- Tienen una asíntota horizontal en *y=0*.
- Su dominio es todo R y su recorrido $(0,+\infty)$.

4.4. Funciones exponenciales (2/3)

Si **0<a<1**, las funciones exponenciales cumplen las siguientes propiedades:



- Son decrecientes, con un decrecimiento tanto mayor cuanto mayor sea **a** denominado decrecimiento exponencial

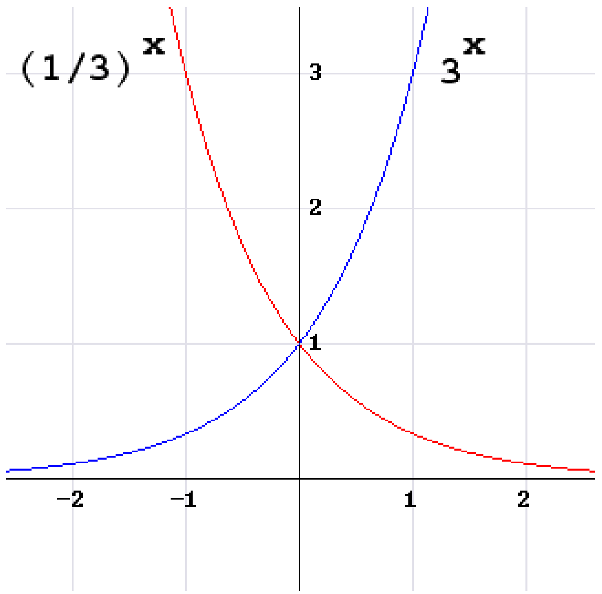
- Pasan por los puntos *(0,1)* y (1,a)

- Cuando x toma un valor infinitamente grande la función se aproxima a 0 (tienen una asíntota horizontal en y=0).

- Su dominio es todo R y su recorrido $(0,+\infty)$

4.4. Funciones exponenciales (3/3)

Si a>1 las gráficas de las funciones $f(x)=a^x$ y $g(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ son simétricas respecto del eje Y.



4.4. EJERCICIOS

1. De las siguientes funciones:

$a)\quad y=2^x \quad y=\left(\frac{1}{2}\right)^x \quad c)\quad y=\left(\frac{3}{2}\right)^x \quad d)\quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$

Determina si son crecientes o decrecientes, su dominio y recorrido y Su grafica

2. El crecimiento de poblaciones sigue un modelo exponencial de la forma $f(t)=c_0\cdot a^t$, donde t expresa el tiempo y c_0 el número de individuos de la población inicial. Si la población de una piscifactoria sigue un modelo de crecimiento exponencial y ha pasado de 1000 a 1562 peces en dos meses, halla:
   - La función que determina la población en relación con el tiempo transcurrido en meses.
   - ¿Cuál será la población al cabo de 5 meses?
   - ¿Cuánto tiempo tardará la piscifactoria en quintuplicar la población inicial?

4.5. Funciones logarítmicas (1/3).

Se definen las funciones logarítmicas como las funciones que tienen por expresión analítica $f(x) = \log_a x \quad a > 0$ y $a \neq 1$.

El dominio de todas estas funciones es el conjunto $(0, +\infty)$ ya que no se puede calcular el logaritmo de un número negativo o nulo.
El recorrido de las funciones logarítmicas es todo R.

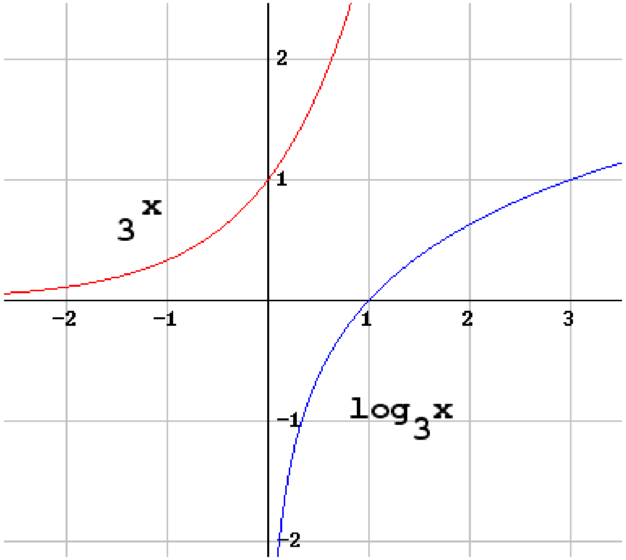
Las gráficas de estas funciones pasan por el punto (1,0) ya que $\log_a 1 = 0$, pues $a^0 = 1$.
También pasan por el punto (a,1) ya que $\log_a a = 1$, pues $a^1 = a$.

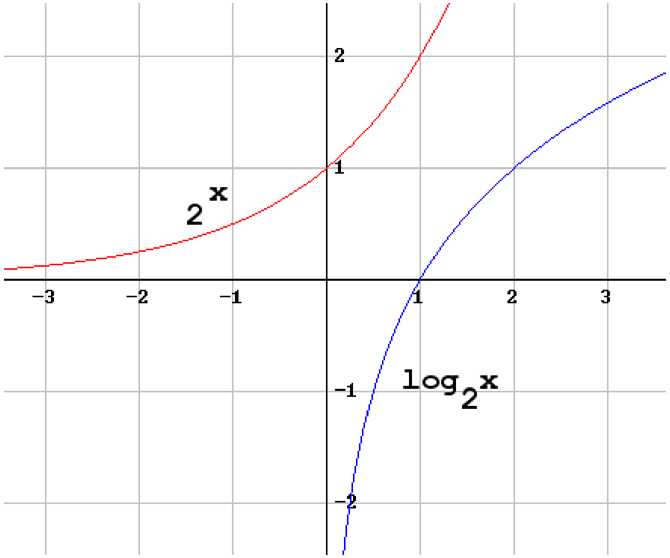
Si $a > 1$ las funciones son estrictamente crecientes, aunque tienen un crecimiento muy lento denominado “crecimiento logarítmico”. Para valores positivos muy próximos a 0 el valor de la función se hace infinitamente pequeño, es decir tienen una asíntota vertical en x=0.

4.5. Funciones logarítmicas (2/3)

Si $0 < a < 1$ las funciones son estrictamente decrecientes, aunque tienen un decrecimiento muy lento denominado “decrecimiento logarítmico”. Para valores positivos muy próximos a 0 el valor de la función se hace infinitamente grande, es decir, tienen una asíntota vertical en x=0.

EJEMPLOS:

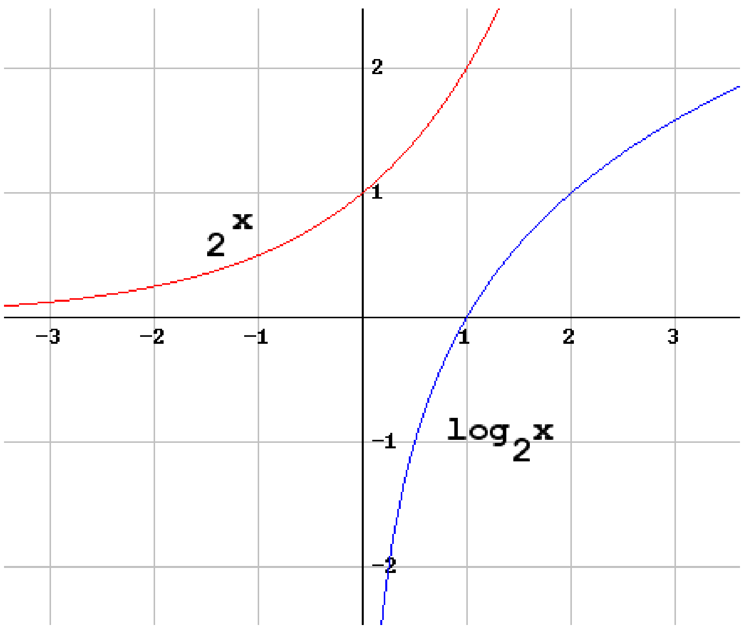


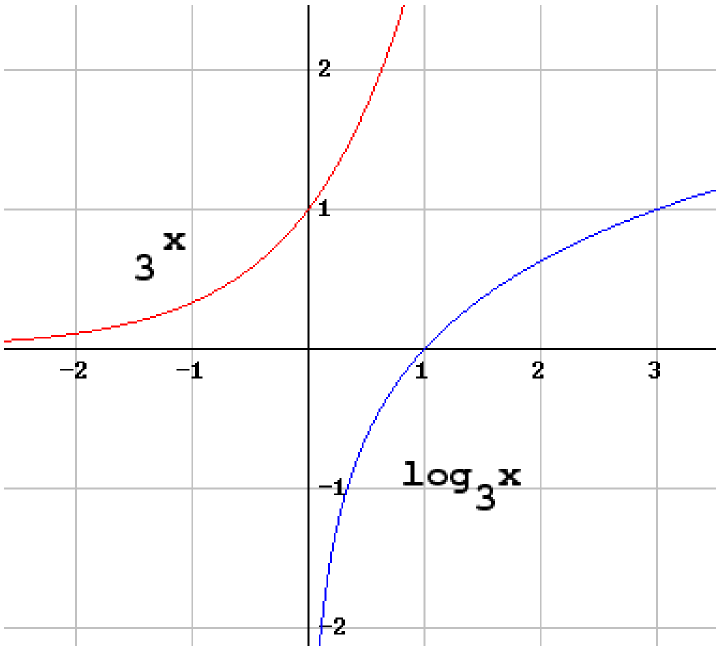


4.5. Funciones logarítmicas (3/3)

La función $f(x) = \log_a x$ podemos afirmar que esta función es la operación inversa de la exponencial de base a, es decir $g(x) = a^x$

EJEMPLOS:





4.5. EJERCICIOS

1 Determina si las siguientes funciones son crecientes o decrecientes sin hacer la gráfica de las mismas, y determina su dominio y recorrido. Luego determina su gráfica

a) $f(x) = \log_4(x)$

b) $g(x) = \log_{1,2}(x)$

c) $h(x) = \log_{0,5}(x)$

d) $i(x) = \log_{\sqrt{2}}(x)$

e) $j(x) = \log_6(x)$

f) $k(x) = \log_{0,2}(x)$

2. En la escala de Richter, la intensidad x de un terremoto, se relaciona con su energía E (en Ergios) por medio de la fórmula:

$$\log E = 11{,}4 + 1{,}5x$$

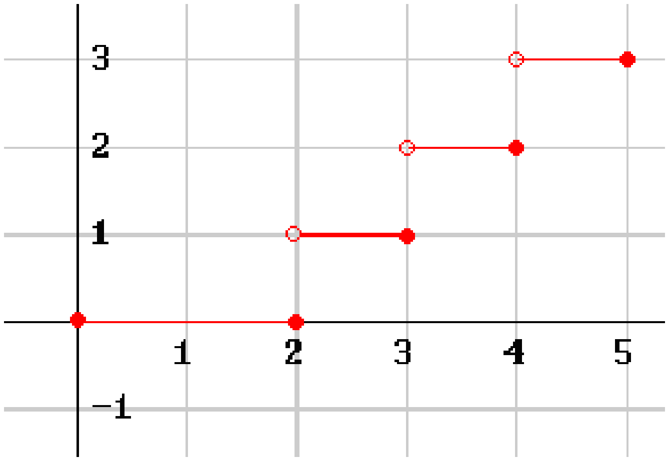
Calcula la intensidad del terremoto de San Francisco ocurrido en 1906 que tuvo una intensidad de 8,3 en la escala de Richter.

4.6. Funciones definidas a trozos.

En numerosas ocasiones, para poder definir las funciones que se presentan en la vida real requerimos el uso de varias funciones.

EJEMPLO: La función que determina los precios de un aparcamiento de una determinada entidad comercial durante las 5 primeras horas. Las dos primeras horas son gratuitas, y a partir de la segunda el coste es de 1 € por cada hora. Si tratamos de construir una función que represente esta situación, necesitamos varias funciones constantes encadenadas de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & 2 < x \leq 3 \\ 2 & 3 < x \leq 4 \\ 3 & 4 < x \leq 5 \end{cases}$$

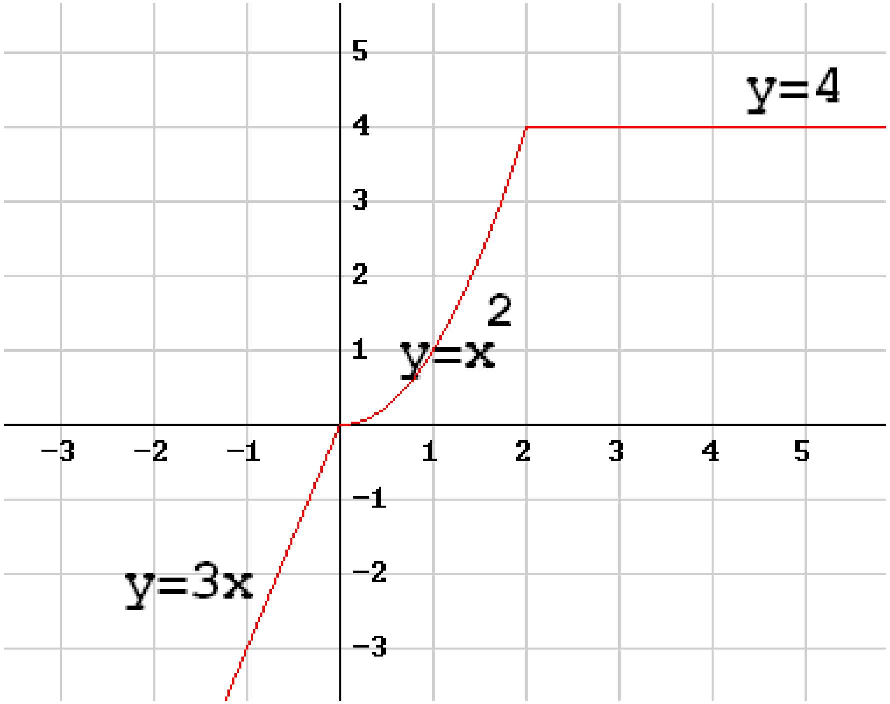


4.6. Funciones definidas a trozos.

EJEMPLO:

Representa la siguiente función y determina su dominio y recorrido:

$$f(x)=\begin{cases} 3x & x\le 0 \\ x^2 & 0<x\le 2 \\ 4 & x>2 \end{cases}$$



4.6. EJERCICIOS

1. Representa las siguientes funciones y determina en cada una de ellas su dominio y recorrido:

(a) $f_1(x) = \begin{cases} 2x & -1 \leq x \leq 1 \\ 3x-1 & 1 < x \leq 2 \\ 2 & 2 < x \leq 4 \end{cases}$

(b) $f_2(x) = \begin{cases} 1/x & x \leq 2 \\ x^2 & x > 2 \end{cases}$

(c) $f_3(x) = \begin{cases} 3-x & 0 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$

(d) $f_4(x) = \begin{cases} x^2-1 & -2 \leq x < 2 \\ x+1 & 2 < x \leq 3 \end{cases}$

2. La gráfica que aparece a continuación representa la función de costes de una empresa durante los primeros cuatro años de su creación. Obtén la expresión analítica de dicha función, su dominio y su recorrido.