INTEGRAL DEFINIDA
ÁREAS Y VOLUMENES

Integral indefinida. Regla de Barrow

La siguiente regla, que se basa en el teorema fundamental del cálculo integral, relaciona la integral definida con las integrales indefinidas y permite calcular las integrales definidas.

La integral definida de una función f(x) continua en un intervalo cerrado [a, b] es igual a la diferencia de los valores que toma una primitiva F(x) cualquiera en los extremos superior e inferior del intervalo [a, b].

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Para calcular la integral $\int_a^b f(x)\cdot dx$ se siguen los siguientes pasos

- Se calcula integral indefinida correspondiente $\int f(x)\cdot dx = F(x) + C$
- Se toma una primitiva cualquiera, en particular se recomienda $C = 0$ y tomar F(x)
- Se calcula la integral definida aplicando la regla de Barrow

Ejemplo 1. Calcular $\int_{-2}^{3}(3x^2 - 2x + 7)dx$.

La integral indefinida correspondiente es $\int (3x^2 - 2x + 7)dx = x^3 - x^2 + 7x + C$.

Tomando la primitiva que resulta de hacer $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow:

$$\int_{-2}^{3}(3x^2 - 2x + 7)dx = \left[x^3 - x^2 + 7x\right]_{-2}^{3} = (3^3 - 3^2 + 7\cdot 3) - \left[(-2)^3 - (-2)^2 + 7(-2)\right] = 39 + 26 = 65$$

Ejemplo 2. Calcular la integral definida $\int_0^1 4x\cdot 2^x\, dx$

Se determina la integral indefinida por el método de integración por partes:

$$\int 4x\cdot 2^x\, dx = \left\{\begin{matrix} u = 4x \rightarrow du = 4\cdot dx \\ dv = 2^x\, dx \rightarrow v = \dfrac{2^x}{\mathrm{Ln}\, 2}\end{matrix}\right\} \frac{4x\cdot 2^x}{\mathrm{Ln}\, 2} - \int \frac{2^x}{\mathrm{Ln}\, 2} 4\, dx = \frac{4x\cdot 2^x}{\mathrm{Ln}\, 2} - \frac{4\cdot 2^x}{\mathrm{Ln}^2\, 2} + C$$

Tomando C = 0, se aplica la regla de Barrow

$$\int_0^1 4x\cdot 2^x\, dx = \left[\frac{4x\cdot 2^x}{\mathrm{Ln}\, 2} - \frac{4\cdot 2^x}{\mathrm{Ln}^2\, 2}\right]_0^1 = \left(\frac{4\cdot 1\cdot 2^1}{\mathrm{Ln}\, 2} - \frac{4\cdot 2^1}{\mathrm{Ln}^2\, 2}\right) - \left(\frac{4\cdot 0\cdot 2^0}{\mathrm{Ln}\, 2} - \frac{4\cdot 2^0}{\mathrm{Ln}^2\, 2}\right) = \frac{8\,\mathrm{Ln}\, 2 - 4}{\mathrm{Ln}^2\, 2}$$

Ejemplo 3. Calcular la integral definida $\int_5^{10} \frac{x}{\sqrt{x-1}}\, dx$

Se calcula la integral indefinida por el método de cambio de variable.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\, dx = \left\{\begin{matrix} x - 1 = t^2 : x = t^2 + 1 \\ dx = 2t\cdot dt\end{matrix}\right\} = \int \frac{t^2+1}{\sqrt{t^2}} 2t\cdot dt = 2\int (t^2 + 1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3} + t\right) + C =$$

$$= \left\{\begin{matrix} x - 1 = t^2 \\ t = \sqrt{x-1}\end{matrix}\right\} = 2\left(\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^3}{3} + \sqrt{x-1}\right) + C = \frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x-1} + C$$

Aplicando la regla de Barrow

$$\int_5^{10} \frac{x}{\sqrt{x-1}}\, dx = \left[\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x-1}\right]_5^{10} = \left(\frac{2}{3}(10+2)\sqrt{10-1}\right) - \left(\frac{2}{3}(5+2)\sqrt{5-1}\right) = \frac{44}{3}$$

En las integrales definidas, que se resuelven por cambio de variable, puede resultar más rápido y sencillo cambiar los límites de integración mediante la ecuación del cambio de variable

$$\int_5^{10} \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx = \left\{\begin{array}{c} x-1=t^2 : x=t^2+1 : \left\{\begin{array}{l} \text{Sí } x=5 \Rightarrow t=2 \\ \text{Sí } x=10 \Rightarrow t=3 \end{array}\right\} \\ dx = 2t \cdot dt \end{array}\right\} = \int_2^3 \frac{t^2+1}{\sqrt{t^2}} 2t \cdot dt = 2\int_2^3 \left(t^2+1\right) \cdot dt =$$

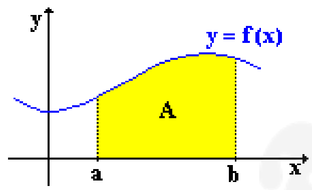
$$= 2\left[\frac{t^3}{3}+t\right]_2^3 = 2\left[\frac{3^3}{3}+3\right] - 2\left[\frac{2^3}{3}+2\right] = \frac{44}{3}$$

Propiedades

1. Si los límites de integración son iguales, la integral es nula.

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

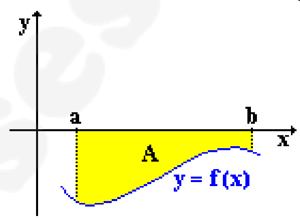
2. Si f(x) es positiva en $[a, b]$, la integral definida en este intervalo representa el área del recinto correspondiente y la integral es positiva.



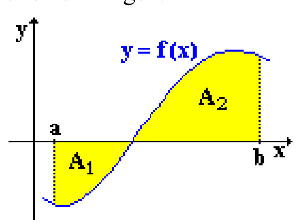
$$A = \int_a^b f(x) \cdot dx > 0$$

Si f es negativa en $[a, b]$, el valor opuesto de la integral definida en este intervalo representa el área del recinto correspondiente y la integral es negativa.

$$A = -\int_a^b f(x) \cdot dx \quad \text{teniendo en cuenta} \quad \int_a^b f(x) \cdot dx < 0$$



Si f cambia de signo en el intervalo $[a, b]$, la integral definida de f(x) en este intervalo representa la suma algebraica de las áreas de los recintos correspondientes. Es decir, la suma de las respectivas integrales definidas, que afectadas del signo correspondiente(positivo si está por encima, negativo si está por debajo), nos da el área del recinto limitado por la gráfica de f(x), el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = a$ y $x = b$, tal y como podemos ver en el margen.

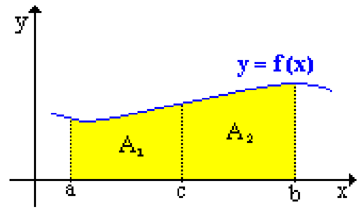


$$A = -A_1 + A_2$$

3. Si c es un punto interior al intervalo $[a, b]$, se verifica:

$$\int_a^c f(x)\cdot dx + \int_c^b f(x)\cdot dx = \int_a^b f(x)\cdot dx$$

Mediante la interpretación geométrica y si f(x) es definida positiva en $[a, b]$, fácilmente puede visualizarse esta propiedad, pues equivale a afirmar que el área del recinto total es la suma de las áreas de los recintos parciales.



$$A = A_1 + A_2 \Leftrightarrow \int_a^c f(x)\cdot dx + \int_c^b f(x)\cdot dx = \int_a^b f(x)\cdot dx$$

Esta propiedad es generalizable al tomar más puntos interiores en el intervalo $[a, b]$.

4. Al intercambiar los límites de integración, la integral definida cambia de signo.

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = -\int_b^a f(x)\cdot dx$$

esta propiedad es inmediata de demostrar a partir de las propiedades 1 y 3.

5. La integral definida de la suma o diferencia de dos funciones es la suma o diferencia de las integrales definida de ambas funciones.

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\cdot dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)\cdot dx$$

6. Si K es un número real, se verifica:

$$\int_a^b Kf(x)\cdot dx = K\cdot\int_a^b f(x)\cdot dx$$

7. Si $f(x) \le g(x) \forall x \in [a, b]$, entonces se verifica:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx \le \int_a^b g(x)\cdot dx$$

Cálculo del área limitada por la función y el eje OX.

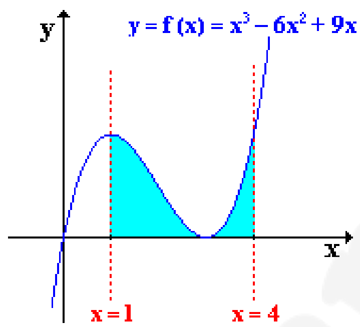
Se distinguen tres casos:

i. f(x) > 0 en [a, b]

Si f(x) > 0, el área del recinto limitado por y = f(x), el eje OX y las rectas x = a, x = b donde a < b es:

$$A(R) = \int_a^b f(x)dx$$

Ejemplo 4. Calcular el área plana limitada por la función $f(x) = x^3 - 6x^2 - 9x$, las rectas x = 1, x = 2 y el eje OX



$$A = \int_1^4 \left(x^3 - 6x^2 + 9x\right)\cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2}\right]_1^4 = \left(\frac{4^4}{4} - 2\cdot 4^3 + \frac{9\cdot 4^2}{2}\right) - \left(\frac{1^4}{4} - 2\cdot 1^3 + \frac{9\cdot 1^2}{2}\right) = \frac{21}{4}u^2$$

ii. f(x) < 0 en [a, b]

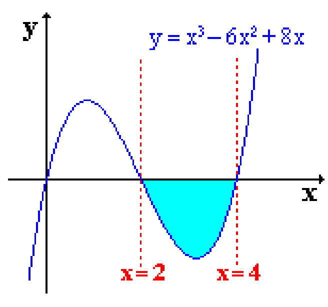
Si f(x) < 0, el área del recinto limitado por y = f(x), el eje OX y las rectas x = a, x = b donde a < b es:

$$A(R_1) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right| = A(R_2)$$

Ejemplo 5. Hallar el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = x^3 - 6x^2 + 8x$, el eje OX y las rectas x = 2 y x = 4.

Se esboza la gráfica de la función, y se delimita el área

$$y = x^3 - 6x^2 + 8x = x\cdot(x-2)\cdot(x-4) : 2 < x < 4$$

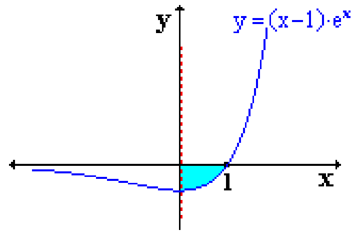


$$A(R) = \int_2^4 -\left(x^3 - 6x^2 + 8x\right)\cdot dx = -\int_2^4 \left(x^3 - 6x^2 + 8x\right)\cdot dx = -\left[\frac{x^4}{4} - 3x^3 + 4x^2\right]^4 = 4u^2$$

Ejemplo 6. Hallar el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = (x - 1)\cdot e^x$, el eje OX y la recta $x = 0$.

Se esboza la gráfica de la función, y se delimita el área. Puesto que solo dan un límite de integración($x = 0$), el otro se obtendrá por intersección de la función con el eje OX.

Punto de corte con OX: $\begin{cases} y = (x-1)\cdot e^x \\ y = 0 \end{cases} : 0 = (x-1)\cdot e^x : x - 1 = 0 : x = 1$



$$A = \int_0^1 -(x-1)\cdot e^x\,dx$$

Por comodidad es más sencillo primero calcular la indefinida y a continuación tomando la primitiva para $C = 0$, resolver la definida mediante la regla de Barrow.

$$\int (x-1)\cdot e^x\,dx = \begin{Bmatrix} u = x-1 \to du = dx \\ dv = e^x\,dx \to v = e^x \end{Bmatrix} = (x-1)\cdot e^x - \int e^x\,dx = (x-1)\cdot e^x - e^x + C = (x-2)\cdot e^x + C$$

Tomando como primitiva $F(x) = (x - 2)\cdot e^x$, se aplica la regla de Barrow

$$A = \int_0^1 -(x-1)\cdot e^x\,dx = \left[-(x-2)\cdot e^x\right]_0^1 = \left(-(1-2)\cdot e^1\right) - \left(-(0-2)\cdot e^0\right) = e - 2$$

Se obtiene el mismo resultado aplicando el valor absoluto de la integral definida:

$$A = \left|\int_0^1 (x-1)\cdot e^x\,dx\right|$$

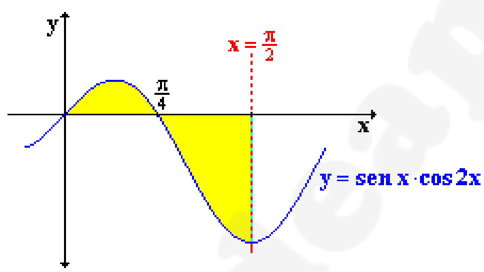
iii. f (x) no tiene signo constante en el intervalo [a, b]

En este caso $\int_a^b f(x)\cdot dx$ NO ES el área limitada por y = f (x), el eje OX y las rectas x = a, x = b siendo a < b. Para calcular el área habrá que descomponerla en áreas positiva y negativas, calcular estas segundas en valor absoluto, y sumarlas todas. Para la descomposición se tendrá en cuenta la propiedad 3.

Ejemplo 7. Calcular el área comprendida entre la función f (x) = sen x · cos 2x y las restas x = 0 y $x = \frac{\pi}{2}$.

Se esboza la gráfica de la función calculando los puntos de corte con el eje OX en el intervalo de integración.

Cortes con OX: $\left\{\begin{array}{c} y = \operatorname{sen}x\cdot\cos 2x \\ y = 0 \\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\end{array}\right. \Rightarrow \operatorname{sen}x\cdot\cos 2x = 0 : \left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen}x = 0 \rightarrow x = 0 \\ \cos 2x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}\end{array}\right.$



$$A = \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}x\cdot\cos 2x\cdot dx + \left|\int_{\pi/4}^{\pi/2}\operatorname{sen}x\cdot\cos 2x\cdot dx\right|$$

Se calcula primero la indefinida.

$$A = \int \operatorname{sen}x\cdot\cos 2x\cdot dx = \left\{\begin{array}{c}\operatorname{sen}mx\cdot\cos nx = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(m-n)\cdot x + \operatorname{sen}(m+n)\cdot x\right] \\ \operatorname{sen}x\cdot\cos 2x = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(1-2)\cdot x + \operatorname{sen}(1+2)\cdot x\right]\end{array}\right\} = \int \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(-x)+\cos 3x\right)\cdot dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos(-x)+\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x)\right)+C = \{\cos(-x) = \cos x\} = \frac{\cos x}{2}+\frac{\operatorname{sen}(3x)}{6}+C$$

tomando como primitiva de la función C = 0

$$F(x) = \frac{\cos x}{2}+\frac{\operatorname{sen}(3x)}{6}$$

sustituyendo en la integral definida:

$$A = \int_0^{\pi/4}\operatorname{sen}x\cdot\cos 2x\cdot dx + \left|\int_{\pi/4}^{\pi/2}\operatorname{sen}x\cdot\cos 2x\cdot dx\right| = \left[\frac{\cos x}{2}+\frac{\operatorname{sen}(3x)}{6}\right]_0^{\pi/4} + \left|\left[\frac{\cos x}{2}+\frac{\operatorname{sen}(3x)}{6}\right]_{\pi/4}^{\pi/2}\right| =$$

$$= \left(\frac{\cos \pi/4}{2}+\frac{\operatorname{sen}(3\,\pi/4)}{6}\right)-\left(\frac{\cos 0}{2}+\frac{\operatorname{sen}(3\cdot 0)}{6}\right)+\left|\left(\frac{\cos \pi/2}{2}+\frac{\operatorname{sen}(3\,\pi/2)}{6}\right)-\left(\frac{\cos \pi/4}{2}+\frac{\operatorname{sen}(3\,\pi/4)}{6}\right)\right| =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}/2}{2}+\frac{\sqrt{2}/2}{6}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{0}{6}\right)+\left|\left(\frac{0}{2}+\frac{-1}{6}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}/2}{2}+\frac{\sqrt{2}/2}{6}\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{2}+\left|\frac{-1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right| = \frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}$$

Otra forma de calcular el área entre el eje OX y una la función que no mantiene el signo en el intervalo de integración, es:

$$\int_a^b |f(x)| \cdot dx$$

Ejemplo 8. Calcular el área del recinto limitado por $y = x^3 - 3x$ y el eje OX.

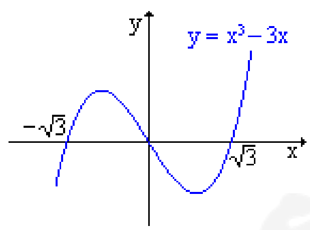
Se pide determinar el área que encierran una función y el eje OX, y puesto que no definen los límites de integración mediante rectas del tipo $x = x_o$, se ha de entender que el eje OX y la función se cortan al menos dos veces, y de esta forma poder delimitar un recinto plano.

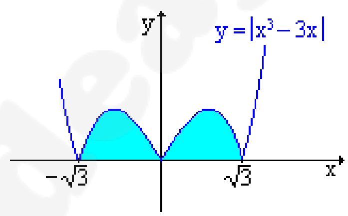
$$\left.\begin{matrix} y = x\cdot\left(x-\sqrt{3}\right)\cdot\left(x+\sqrt{3}\right) \\ y = 0 \end{matrix}\right\} : x\cdot\left(x-\sqrt{3}\right)\cdot\left(x+\sqrt{3}\right) = 0 : \begin{cases} x = 0 \\ x - \sqrt{3} = 0 : x = \sqrt{3} \\ x + \sqrt{3} = 0 : x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$A = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left|x^3 - 3x\right| \cdot dx$$

Teniendo en cuenta

$$f(x) = \left|x^3 - 3x\right| = \begin{cases} 3x - x^3 & \text{Sí } x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right) \\ x^3 - 3x & \text{Sí } x \in \left[-\sqrt{3}, 0\right] \cup \left[\sqrt{3}, +\infty\right) \end{cases}$$





$$A(R) = \int_{-\sqrt{3}}^{0} \left(x^3 - 3x\right)dx + \int_0^{\sqrt{3}} \left(3x - x^3\right)dx = \frac{9}{2}u^2$$

por simetría:

$$A(R) = 2\int_0^{\sqrt{3}} \left(3x - x^3\right)dx = 2\cdot\left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{3}} = 2\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}^2}{2} - \frac{\sqrt{3}^4}{4}\right) - 2\cdot\left(\frac{3\cdot 0^2}{2} - \frac{0^4}{4}\right) = \frac{9}{2}u^2$$

Área del recinto limitado por dos curvas.

El área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones $y = f_1(x), y = f_2(x)$ cuyos puntos de intersección tiene por abcisas x_1, x_2 siendo $x_1 < x_2$ y $f_1(x) \geq f_2(x), \forall x \in [x_1, x_2]$ es:

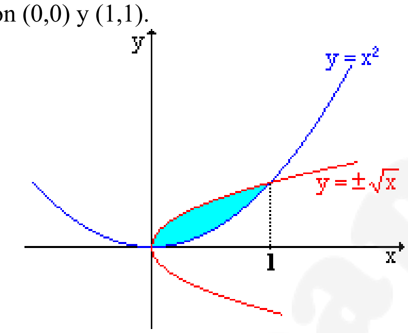
$$A(R) = \int_{x_1}^{x_2} (f_1(x) - f_2(x))dx$$

Ejemplo 9. Calcular el área del recinto limitado por las curvas $y = x^2, y = \pm\sqrt{x}$.

Se hallan los límites de integración calculando las abscisas de los puntos de intersección de las curvas.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \pm\sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Los puntos de intersección son (0,0) y (1,1).



Como $\sqrt{x} \geq x^2 \quad \forall x \in [0,1]$, el área del recinto determinado por ambas curvas es:

$$\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \int_0^1 \left(x^{1/2} - x^2\right) \cdot dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

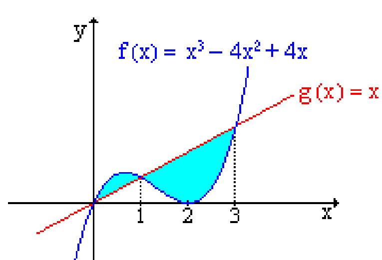
$$= \left(\frac{2}{3}\sqrt{1^3} - \frac{1^3}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt{0^3} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}u^2$$

Si $f_1(x)$ no es mayor o igual que $f_2(x)$ para todo x perteneciente al intervalo [a, b], el cálculo del área se debe descomponer en suma de integrales, calculando por separado las áreas en las que $f_1(x) \geq f_2(x)$ de las que $f_1(x) \leq f_2(x)$

Ejemplo 10. Calcular el área plana limitada por las funciones $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ y $g(x) = x$.

Se hallan los límites de integración calculando las abscisas de los puntos de intersección de las curvas.

$$\left.\begin{matrix} f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x \\ g(x) = x \end{matrix}\right\} : x^3 - 4x^2 + 4x = x : x^3 - 4x^2 + 3x = 0 : x(x-1)\cdot(x-3) = 0 : \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$



$$A = \int_0^1 (f(x) - g(x)) \cdot dx + \int_1^3 (g(x) - f(x)) \cdot dx = \int_0^1 \left[x^3 - 4x^2 + 4x - (x)\right] \cdot dx + \int_1^3 \left[x - \left(x^3 - 4x^2 + 4x\right)\right] \cdot dx =$$

$$=\int_0^1\left(x^3-4x^2+3x\right)\cdot dx+\int_1^3\left(-x^3+4x^2-3x\right)\cdot dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^1+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right]_1^3=$$

$$=\left(\frac{1^4}{4}-\frac{4\cdot 1^3}{3}+\frac{3\cdot 1^2}{2}\right)-\left(\frac{0^4}{4}-\frac{4\cdot 0^3}{3}+\frac{3\cdot 0^2}{2}\right)+\left(-\frac{3^4}{4}+\frac{4\cdot 3^3}{3}-\frac{3\cdot 3^2}{2}\right)-\left(-\frac{1^4}{4}+\frac{4\cdot 1^3}{3}-\frac{3\cdot 1^2}{2}\right)=$$

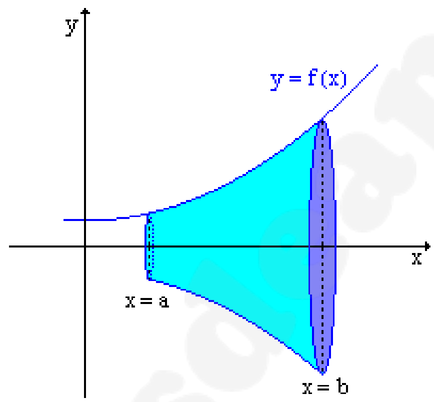
$$=\frac{37}{12}u^2$$

Cálculo de volúmenes de revolución.

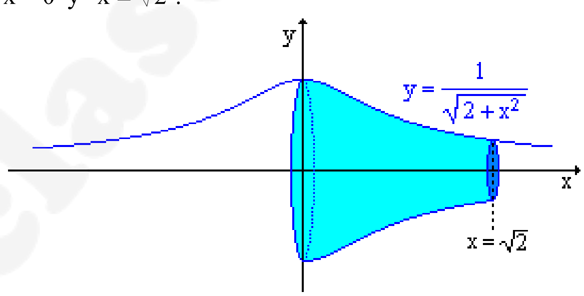
Los volúmenes de revolución se obtienen al hacer girar un área plana alrededor del eje OX o del eje OY.

El volumen de un sólido de revolución generado al hacer girar en torno al eje OX la región del plano limitada por la gráfica de una región continua $f(x)$ entre $x=a$ y $x=b$, viene dado por:

$$V_{OX}=\pi\int_a^b[f(x)]^2\,dx$$



Ejemplo 11. Calcular el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la curva $y=\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}$ en torno al eje OX, entre $x=0$ y $x=\sqrt{2}$.

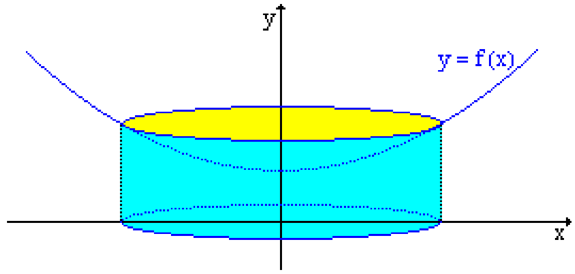


$$V=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\right]^2dx=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\frac{dx}{2+x^2}=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\frac{dx}{\left(\sqrt{2}\right)^2+x^2}=\pi\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_0^{\sqrt{2}}=$$

$$=\pi\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right]-\pi\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{0}{\sqrt{2}}\right]=\pi\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}1\right]=\frac{\pi^2\sqrt{2}}{8}u^3$$

El volumen de un sólido de revolución generado al hacer girar en torno al eje OY la región del plano limitada por la gráfica de una región continua $f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$, y el eje OX viene dado por:

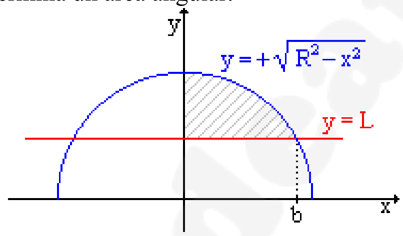
$$V_{OY} = 2\pi\int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx$$



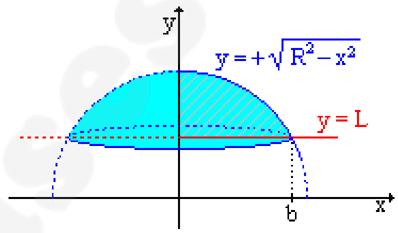
Este tipo de integral es muy útil para calcular volúmenes de cuerpos toroidales.

Ejemplo 12. Calcular el volumen del casquete esférico que se origina al hacer girar alrededor del eje OY la superficie plana limitada por la curva $y = +\sqrt{R^2 - x^2}$, la recta $y = L (L < R)$, y el eje OY.

La función representa una semicircunferencia positiva de radio R, que es cortada por una recta $y = L$, y que junto al eje OY, determina un área angular.



Si esta área rota alrededor del eje OY, genera un casquete esférico,



cuyo volumen se obtiene mediante la siguiente integral

$$V_{OY} = 2\pi\int_0^b x \cdot \left(\sqrt{R^2 - x^2} - L\right) \cdot dx$$

Para calcular el límite superior(b), se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{c} y = +\sqrt{R^2 - b^2} \\ y = L \end{array}\right\} : L = +\sqrt{R^2 - b^2} \ : \text{Elevando al cuadrado} : L^2 = R^2 - b^2 \Rightarrow b = +\sqrt{R^2 - L^2}$$

$$V_{OY} = 2\pi\int_0^{\sqrt{R^2-L^2}} x \cdot \left(\sqrt{R^2 - x^2} - L\right) \cdot dx$$

Para simplificar los cálculos se recomienda hacer por separado la integral indefinida

$$\int x \cdot \left(\sqrt{R^2 - x^2} - L\right) \cdot dx = \int \left(x \cdot \sqrt{R^2 - x^2} - L \cdot x\right) \cdot dx = -\frac{1}{2}\int \left(R^2 - x^2\right)^{1/2} \cdot (-2x) \cdot dx - \int L \cdot x \cdot dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\left(R^2 - x^2\right)^{3/2}}{3/2} - L\frac{x^2}{2} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{\left(R^2 - x^2\right)^3} - \frac{L}{2}x^2 + C$$

Tomando como primitiva $C = 0$

$$V_{OY} = 2\pi\int_0^{\sqrt{R^2-L^2}} x\cdot\left(\sqrt{R^2-x^2}-L\right)\cdot dx = 2\pi\left[-\frac{1}{3}\sqrt{\left(R^2-x^2\right)^3}-\frac{L}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{R^2-L^2}} =$$

$$= 2\pi\left[-\frac{1}{3}\sqrt{\left(R^2-\left(\sqrt{R^2-L^2}\right)^2\right)^3}-\frac{L}{2}\left(\sqrt{R^2-L^2}\right)^2\right]-2\pi\left[-\frac{1}{3}\sqrt{\left(R^2-0^2\right)^3}-\frac{L}{2}0^2\right]=$$

$$= 2\pi\left[-\frac{1}{3}L^3-\frac{L}{2}\left(R^2-L^2\right)\right]+\frac{2\pi}{3}R^3 = \frac{2\pi}{3}R^3-\pi LR^2+\frac{\pi}{3}L^3$$