13 Cálculo de primitivas

ACTIVIDADES INICIALES

13.I. Escribe los siguientes cocientes en la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ con grad(*R*) < grad(*Q*).

a) $\frac{x^3+2x^2-1}{x+2}$ **b)** $\frac{x^4-x^3+x^2+x}{x^2+x+2}$

a) $\frac{x^3+2x^2-1}{x+2} = x^2 - \frac{1}{x+2}$

b) $\frac{x^4-x^3+x^2+x}{x^2+x+2} = x^2-2x+1+\frac{4x-2}{x^2+x+2}$

13.II. Halla todas las raíces reales y complejas de los siguientes polinomios y da su factorización en polinomios irreducibles con coeficientes reales.

a) $P(x) = x^5+x^4-x^3+15x^2$ **b)** $Q(x) = x^4+10x^2+9$

a) $P(x) = x^5+x^4-x^3+15x^2 = x^2(x+3)(x^2-2x+5)$. Raíces: x = 0 doble, x = –3, x = 1+2i y x = 1 – 2i

b) $Q(x) = x^4+10x^2+9 = (x^2+1)(x^2+9)$. Raíces: $x = i$, $x = -i$, $x = 3i$ y $x = -3i$

13.III. Halla un polinomio de tercer grado con coeficientes reales sabiendo que dos de sus raíces son $x_1 = 1$ y $x_2 = 2+3i$.

$P(x) = (x-1)(x-2-3i)(x-2+3i) = (x-1)(x^2-4x+13) = x^3-5x^2+18x-13$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

13.1. Comprueba que $F(x) = \text{sen}^2 x$ es una primitiva de $f(x) = \text{sen } 2x$ y $G(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$, otra primitiva de $f(x)$. ¿En qué constante se diferencian?

Como $F'(x) = 2\text{sen } x \cos x = \text{sen } 2x$ y $G'(x) = \text{sen } 2x$, ambas son primitas de $f(x)$ y, por tanto, $F(x) = G(x) + C$ para todo x. Para calcular la constante se toma x = 0, $F(0) = 0$ y $G(0) = -\frac{1}{2}$, $0 = -\frac{1}{2} + C$, luego $C = \frac{1}{2}$.

13.2. Calcula la derivada de las funciones $f(x) = \text{arctg}x$ y $(x) = -\text{arctg}\frac{1}{x}$. Y, sin calculadora, obtén el valor de $\text{arctg}7 + \text{arctg}\frac{1}{7}$.

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $g'(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Como $f(x)$ y $g(x)$ tienen la misma derivada, son primitivas de la función $F(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y, por tanto, $f(x) = g(x) + C$ y como $f(1) = -g(1)$, entonces $f(1) = -f(1) + C$, por tanto, $C = 2f(1) = \frac{\pi}{2}$. Así pues, $\text{arctg}(x) + \text{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ para todo x. En particular, $\text{arctg}7 + \text{arctg}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{2}$.

13.3. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \left(\operatorname{sen} x - e^x + \sqrt{x}\right) dx$

c) $\int \left(1 + \sqrt[3]{x^2}\right) dx$

b) $\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$

d) $\int \sqrt[3]{x^2 \sqrt{x}}\, dx$

a) $\int \left(\operatorname{sen} x - e^x + \sqrt{x}\right) dx = -\cos x - e^x + \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C = \cos x - e^x + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

b) $\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{1}{\frac{1}{3}+1} x^{\frac{1}{3}+1} - \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{1}{x} + C$

c) $\int \left(1 + \sqrt[3]{x^2}\right) dx = x + \frac{1}{\frac{2}{3}+1} x^{\frac{2}{3}+1} + C = x + \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + C$

d) $\int \sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}\, dx = \int \sqrt[6]{x^5}\, dx = \frac{1}{\frac{5}{6}+1} x^{\frac{5}{6}+1} + C = \frac{6}{11}\sqrt[6]{x^{11}} + C$.

13.4. Calcula, en cada caso, la función $f(x)$ que verifica las condiciones dadas:

a) $f'(x) = \cos x + x\sqrt{x}$ **y** $f(\pi) = 0$

b) $f'(x) = \frac{3}{1+x^2} - e^x$ **y** $f(0) = 1$

c) $f'(x) = x - 2\cos x$ **y la gráfica de f corta a la bisectriz del 2.º cuadrante en el punto de abscisa $x = \pi$.**

a) $\int \left(\cos x + x\sqrt{x}\right) dx = \int \left(\cos x + x^{\frac{3}{2}}\right) dx = \operatorname{sen} x + \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C = f(x)$

Para calcular C se utiliza $f(\pi) = 0$, $0 = \operatorname{sen}\pi + \frac{2}{5}\sqrt{\pi^5} + C \Rightarrow C = -\frac{2}{5}\sqrt{\pi^5}$.

Luego $f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{2}{5}\sqrt{\pi^5}$

b) $3\int \frac{1}{1+x^2}\, dx - \int e^x\, dx = 3\operatorname{arctg}(x) - e^x + C = f(x)$

$f(0) = 3\operatorname{arctg}(0) - e^0 + C = 1 \Rightarrow C = 2$

Luego: $f(x) = 3\operatorname{arctg}(x) - e^x + 2$

c) $\int (x - 2\cos x)\, dx = \frac{1}{2}x^2 - 2\operatorname{sen} x + C = f(x)$ y se sabe que $f(\pi) = -\pi$.

$f(\pi) = \frac{1}{2}\pi^2 - 2\operatorname{sen}\pi + C = -\pi \Rightarrow C = -\frac{1}{2}\pi^2 - \pi$

Luego: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\pi^2 - \pi$

13.5. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+3}}\,dt$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln t)}{t}\,dt$

b) $\displaystyle\int \frac{e^{2s}}{1+e^{2s}}\,ds$

e) $\displaystyle\int \frac{e^{s}}{1+e^{2s}}\,ds$

c) $\displaystyle\int (x^2+1)^{20}\cdot 5x\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+3}}\,dt=\int \frac{2t+2}{2\sqrt{t^2+2t+3}}\,dt=\sqrt{t^2+2t+3}+C$

b) $\displaystyle\int \frac{e^{2s}}{1+e^{2s}}\,ds=\frac{1}{2}\int \frac{2e^{2s}}{1+e^{2s}}\,ds=\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2s}\right)+C$

c) $\displaystyle\int (x^2+1)^{20}\cdot 5x\,dx=\frac{5}{2}\int (x^2+1)^{20}\cdot 2x\,dx=\frac{5}{42}(x^2+1)^{21}+C$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln t)}{t}\,dt=\text{sen }(\ln t)+C$

e) $\displaystyle\int \frac{e^{s}}{1+e^{2s}}\,ds=\int \frac{e^{s}}{1+(e^{s})^2}\,ds=\text{arctg }(e^{s})+C$

f) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx=\int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,dx=\text{arcsen }(x^2)+C$

13.6. Halla las primitivas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=2x(\text{sen } x^2)(\cos^4 x^2)$

b) $\displaystyle\int \text{tg}(3x+2)\,dx$

a) $\displaystyle f(x)=\int 2x(\text{sen } x^2)(\cos^4 x^2)\,dx=-\frac{1}{5}\int 2x(-\text{sen } x^2)(5\cos^4 x^2)\,dx=-\frac{1}{5}\cos^5 x^2+C$

b) $\displaystyle\int \text{tg}(3x+2)\,dx=-\frac{1}{3}\int \frac{-3\text{sen}(3x+2)}{\cos(3x+2)}\,dx=-\frac{1}{3}\ln\left|\cos(3x+2)\right|+C$

13.7. Calcula las derivadas de $f(x)=\text{tg}^2 x$ y $g(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, simplifícalas al máximo y explica qué observas.

$$f'(x)=2\text{tg } x\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{2\text{sen } x}{\cos^3 x}$$

$$g'(x)=\frac{2\text{sen } x}{\cos^3 x}$$

Sus derivadas son iguales, luego son dos primitivas de $h(x)=\dfrac{2\text{sen } x}{\cos^3 x}$. Como $f(x) = g(x) + C$, mirando su valor en $x = 0$, se tiene que $0 = f(0) = g(0) + C = 1 + C$, $\text{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2}-1$.

13.8. Obtén las siguientes primitivas:

a) $\int (x^2 - 5x + 1)\cos x\, dx$

b) $\int \text{arctg}\, x\, dx$

c) $\int \text{arcsen}\, x\, dx$

d) $\int (x^7 - 3x + 1)\,\text{sen}\, x\, dx$

e) $\int \sqrt{x}\ln x\, dx$

f) $\int x(\ln x)^2 dx$

g) $\int (1 - x)e^{-x} dx$

h) $\int e^{3x}\cos x\, dx$

a) $\int (x^2 - 5x + 1)\cos x\, dx$

f	g'
$x^2 - 5x + 1$	$\cos x$
$2x - 5$	$\text{sen}\, x$
2	$-\cos x$
0	$-\text{sen}\, x$

$$\int (x^2 - 5x + 1)\cos x\, dx = (x^2 - 5x + 1)\text{sen}\, x - (2x - 5)(-\cos x) + 2(-\text{sen}\, x) + C =$$
$$= (x^2 - 5x - 1)\text{sen}\, x + (2x - 5)\cos x + C$$

b) $\int \text{arctg}\, x\, dx$

f	g'
$\text{arctg}\, x$	1
$\frac{1}{1+x^2}$	x

$$\int \text{arctg}\, x\, dx = x\,\text{arctg}\, x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\,\text{arctg}\, x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

c) $\int \text{arcsen}\, x\, dx$

f	g'
$\text{arcsen}\, x$	1
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	x

$$\int \text{arcsen}\, x\, dx = x\,\text{arcsen}\, x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\,\text{arcsen}\, x + \sqrt{1-x^2} + C$$

d) $\int (x^7 - 3x + 1)\text{sen}\, x\, dx$

f	g'
$x^7 - 3x + 1$	$\text{sen}\, x$
$7x^6 - 3$	$-\cos x$
$42x^5$	$-\text{sen}\, x$
$210x^4$	$\cos x$
$840x^3$	$\text{sen}\, x$
$2520x^2$	$-\cos x$
$5040x$	$-\text{sen}\, x$
5040	$\cos x$
0	$\text{sen}\, x$

$$\int (x^7 - 3x + 1)\,\text{sen}\, x\, dx = (x^7 - 3x + 1)(-\cos x) - (7x^6 - 3)(-\text{sen}\, x) +$$
$$+ 42x^5\cos x - 210x^4\text{sen}\, x + 840x^3(-\cos x) - 2520x^2(-\text{sen}\, x) +$$
$$+ 5040x\cos x - 5040\text{sen}\, x + C = (-x^7 + 42x^5 - 840x^3 + 5043x - 1)\cos x +$$
$$+ (7x^6 - 210x^4 + 2520x^2 - 5043)\,\text{sen}\, x + C$$

e) $\int \sqrt{x}\ln x\, dx$

f	g'
$\ln x$	$\sqrt{x}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$

$$\int \sqrt{x}\ln x\, dx = \frac{2}{3}\ln x \cdot \sqrt{x^3} - \int \frac{2\sqrt{x^3}}{3x}dx = \frac{2}{3}\ln x \cdot \sqrt{x^3} - \frac{4}{9}\sqrt{x^3} + C =$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + C$$

f) $\int x(\ln x)^2 dx$

f	g'
$(\ln x)^2$	x
$\frac{2\ln x}{x}$	$\frac{1}{2}x^2$

$$\int x(\ln x)^2\,dx = \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \int x\ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}x^2\ln x + \int \frac{1}{2}x\,dx + C =$$
$$= \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C$$

g) $\int (1-x)e^{-x}dx$

f	g'
$1-x$	e^{-x}
-1	$-e^{-x}$
0	e^{-x}

$$\int (1-x)e^{-x}dx = -(1-x)e^{-x} - (-1)e^{-x} + C = xe^{-x} + C$$

h) $\int e^{3x}\cos x\,dx$

f	g'
e^{3x}	$\cos x$
$3e^{3x}$	$\text{sen } x$
$9e^{3x}$	$-\cos x$

$$\int e^{3x}\cos x\,dx = e^{3x}\text{sen } x + 3e^{3x}\cos x + \int 9e^{3x}(-\cos x)\,dx$$

Por tanto, $\int e^{3x}\cos x\,dx = \frac{e^{3x}(\text{sen}x + 3\cos x)}{10} + C$.

13.9. Calcula las siguientes primitivas previa descomposición en fracciones simples:

a) $\int \frac{dx}{2x+5}$

b) $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+3)(x+5)}$

c) $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}dx$

d) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$

a) $\int \frac{dx}{2x+5} = \frac{1}{2}\ln|2x+5| + C$

b) $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+3)(x+5)} = \int \frac{\frac{1}{24}}{x-1}dx + \int \frac{\frac{3}{8}}{x+3}dx + \int \frac{-\frac{5}{12}}{x+5}dx = \frac{1}{24}\left(\ln|x-1| + 9\ln|x+3| - 10\ln|x+5|\right) + C$

c) $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}dx = \int \frac{-1}{x-1}dx + \int \frac{3}{x-2}dx = -\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + C$

d) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx = \int (x^2+x+4)dx + \int \frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{5}{x-2}dx + \int \frac{-3}{x+2}dx =$

$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\ln|x| + 5\ln|x-2| - 3\ln|x+2| + C$

13.10. Determina las siguientes primitivas:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$ **b)** $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}\,dx$ **c)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$ **d)** $\displaystyle\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\,dx$

a) $$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)} = \int \frac{-dx}{x-1} + \int \frac{-dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{x-2} = -\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + \ln|x-2| + C$$

b) $$\int \frac{dx}{x^3+1} = \int \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)} = \int \frac{\frac{1}{3}dx}{x+1} + \int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2\left(\frac{x-1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

c) $$\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}\,dx = \int \frac{-1}{x-1}\,dx + \int \frac{3x-2}{x^2-2x+5}\,dx = -\ln|x-1| + \frac{3}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= -\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x^2-2x+5| + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$$

d) $$\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\,dx = \int \frac{x^3-6}{(x^2+2)(x^2+4)}\,dx = \int \frac{-x-3}{x^2+2}\,dx + \int \frac{2x+3}{x^2+4}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx - \frac{3}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx + \int \frac{2x}{x^2+4}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(x^2+2) - \frac{3}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \ln(x^2+4) + \frac{3}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

13.11. Calcula las siguientes primitivas:

a) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{1+e^x}{e^{2x}+1}\,dx$ **c)** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$

a) $$\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow t = 1+\sqrt{x};\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow 2(t-1)dt = dx$$

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{-2(t-1)(t-2)}{t}\,dt = -\int (2t-6)dt - 4\int \frac{dt}{t} =$$

$$= -t^2 + 6t - 4\ln|t| + C = -\left(1+\sqrt{x}\right)^2 + 6\left(1+\sqrt{x}\right) - 4\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + C$$

b) $$\int \frac{1+e^x}{e^{2x}+1}\,dx \Rightarrow t = e^x;\ dt = e^x dx \Rightarrow \frac{dt}{t} = dx$$

$$\int \frac{1+e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{1+t}{\left(t^2+1\right)t}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt + \int \frac{-t+1}{t^2+1}\,dt = \ln|t| - \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt + \int \frac{1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \ln|t| - \frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right| + \mathrm{arctg}\,(t) + C = x - \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}+1\right| + \mathrm{arctg}\left(e^x\right) + C$$

c) $$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx \Rightarrow t = \sqrt[3]{x};\ dt = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}\,dx \Rightarrow 3t^2dt = dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx = \int \frac{3t^2}{t+1}\,dt = 3\int (t-1)\,dt + 3\int \frac{1}{t+1}\,dt = \frac{3}{2}t^2 - 3t + 3\ln|t+1| + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} + 3\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right| + C$$

13.12. Halla las primitivas siguientes:

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$ **b)** $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x+5}{x}}\,dx$ **(llama** $\displaystyle\frac{x+5}{x}=t^2$ **)**

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx \Rightarrow\ t=\sqrt[6]{x};\ dt=\frac{dx}{6\left(\sqrt[6]{x}\right)^5}\Rightarrow 6t^5dt=dx$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx=\int \frac{6t^5\cdot t^3}{t^2+1}dt=6\int\left(t^6-t^4+t^2-1\right)dt+6\int\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{6}{7}t^7-\frac{6}{5}t^5+\frac{6}{3}t^3-6t+6\operatorname{arctg}(t)+C=$$

$$=\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+6\operatorname{arctg}(\sqrt[6]{x})+C$$

b) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x+5}{x}}\,dx$ (llama $\displaystyle\frac{x+5}{x}=t^2$) $\displaystyle\Rightarrow \frac{x+5}{x}=t^2\Rightarrow\ t^2=1+\frac{5}{x};\quad 2tdt=\frac{-5}{x^2}dx=-\frac{1}{5}\left(\frac{5}{x}\right)^2dx\Rightarrow dx=\frac{-10t}{\left(t^2-1\right)^2}dt$

$$\int\sqrt{\frac{x+5}{x}}\,dx=\int\frac{-10t^2}{\left(t^2-1\right)^2}dt=-\frac{5}{2}\int\frac{1}{(t-1)}dt+\frac{5}{2}\int\frac{-1}{(t-1)^2}dt+\frac{5}{2}\int\frac{1}{(t+1)}dt+\frac{5}{2}\int\frac{-1}{(t+1)^2}dt=$$

$$=\frac{5}{2}\left(-\ln|t-1|+\frac{1}{t-1}+\ln|t+1|+\frac{1}{t+1}\right)+C=\frac{5}{2}\left(-\ln\left|\sqrt{\frac{x+5}{x}}-1\right|+\frac{1}{\sqrt{\frac{x+5}{x}}-1}+\ln\left|\sqrt{\frac{x+5}{x}}+1\right|+\frac{1}{\sqrt{\frac{x+5}{x}}+1}\right)+C=$$

$$=\frac{5}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x}}\right|+\sqrt{x(x+5)}+C$$

13.13. Transforma en primitivas de polinomios o cocientes de polinomios las siguientes primitivas. (No es necesario que las resuelvas):

a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x\cos^2 x\,dx$ **b)** $\displaystyle\int\frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^3 x}dx$ **c)** $\displaystyle\int\frac{1}{\cos x}dx$

a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x\cos^2 x\,dx\Rightarrow\ t=\cos x;\ dt=-\operatorname{sen}x\,dx$

$$\int \operatorname{sen}^5 x\cos^2 x\,dx=-\int(1-\cos^2 x)^2\cos^2 x(-\operatorname{sen}x)dx=-\int(1-t^2)^2t^2dt$$

b) $\displaystyle\int\frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^3 x}dx\Rightarrow\ t=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right);\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

$$\int\frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^3 x}dx=\int\frac{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^4}{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^3}\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{32t^4}{\left(1+t^2\right)^2\left(1-t^2\right)^3}dt$$

c) $\displaystyle\int\frac{1}{\cos x}dx\Rightarrow\ t=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right);\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2};\quad\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\frac{2dt}{1-t^2}$

13.14. Haz lo mismo que en el ejercicio anterior con las primitivas siguientes:

a) $\displaystyle\int\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x}dx$ **b)** $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\cos^2 x\,dx$ **c)** $\displaystyle\int\operatorname{tg}^4 x\,dx$

a) $\displaystyle\int\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x}dx\Rightarrow\ t=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right);\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2};\quad\int\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x}dx=\int\frac{16t^3}{\left(1+t^2\right)^3\left(1-t^2\right)}dt$

b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\cos^2 x\,dx\Rightarrow t=\operatorname{tg}x;\quad dx=\frac{dt}{1+t^2};\quad\int\operatorname{sen}^4 x\cos^2 x\,dx=\int\frac{t^4}{\left(1+t^2\right)^7}dt$

c) $\displaystyle\int\operatorname{tg}^4 x\,dx\Rightarrow\quad t=\operatorname{tg}x;\quad dx=\frac{dt}{1+t^2};\quad\int\operatorname{tg}^4 x\,dx=\int\frac{t^4}{1+t^2}dt$

13.15. Prueba el recíproco del teorema de Liouville, es decir: la derivada de $f(x)e^{g(x)}$ con f y g funciones racionales, es $R(x)e^{g(x)}$ con R función racional.

$F(x)=f(x)e^{g(x)} \Rightarrow F'(x)=f'(x)e^{g(x)}+f(x)g'(x)e^{g(x)}=(f'(x)+f(x)g'(x))e^{g(x)}$

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones racionales, entonces, $R(x)=f'(x)+f(x)g'(x)$ es una función racional pues la derivada de una función racional es racional y el producto y la suma de racionales es racional.

13.16. Utilizando la no elementalidad de $\int x^{2n}\cdot e^{ax^2}dx$, prueba que no son elementales las primitivas:

a) $\int \sqrt{\ln x}\, dx$ b) $\int \frac{1}{\sqrt{\ln x}} dx$ c) $\int \frac{e^{ax}}{\sqrt{x}} dx$

Indicación: pon ln $x = t^2$ en a) y b) y $x = t^2$ en c).

a) $\int \sqrt{\ln x}\, dx$ Llamando $x=e^{t^2}$; $dx=2te^{t^2}dt$; $\int \sqrt{\ln x}\, dx=\int \sqrt{\ln\left(e^{t^2}\right)}2te^{t^2}dt=2\int t^2e^{t^2}dt$ que no es elemental.

b) $\int \frac{1}{\sqrt{\ln x}} dx$ Llamando $x=e^{t^2}$; $dx=2te^{t^2}dt$; $\int \frac{1}{\sqrt{\ln x}} dx=\int \frac{2te^{t^2}}{\sqrt{\ln\left(e^{t^2}\right)}}dt=2\int e^{t^2}dt$ que no es elemental.

c) $\int \frac{e^{ax}}{\sqrt{x}} dx$ Llamando $x=t^2$; $dx=2tdt$; $\int \frac{e^{at^2}}{t}2t\, dt=2\int e^{at^2}dt$ que no es elemental.

EJERCICIOS

El concepto de primitiva de una función

13.17. Asocia a cada función $f(x)$ una primitiva $F(x)$.

$f(x)$	$F(x)$
$6\text{sen}^2(2x+1)\cos(2x+1)$	$\text{sen}(2x+1)^3$
$\cos(2x+1)$	$\frac{1}{2}\text{sen}(2x+1)$
$6(2x+1)^2\cos(2x+1)^3$	$\text{sen}(3(2x+1))$
$6\cos(6x+3)$	$\text{sen}^3(2x+1)$

$f(x)$	$F(x)$
$6\text{sen}^2(2x+1)\cos(2x+1)$	$\text{sen}^3(2x+1)$
$\cos(2x+1)$	$\frac{1}{2}\text{sen}(2x+1)$
$6(2x+1)^2\cos(2x+1)^3$	$\text{sen}(2x+1)^3$
$6\cos(6x+3)$	$\text{sen}(3(2x+1))$

13.18. Comprueba que $F(x)=\text{arcsen}\, x$ y $G(x)=-\arccos x$ son ambas primitivas de la misma función. ¿De qué función se trata? ¿En qué constante difieren?

$F'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ y $G'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, luego son ambas primitivas de $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Se calcula la constante en la que difieren: $F(x) = G(x) + C$; $F(0) = G(0) + C \Rightarrow 0=-\frac{\pi}{2}+C \Rightarrow C=\frac{\pi}{2}$.

13.19. Una primitiva de cierta función $f(x)$ es $F(x)=x^2-3x+1$. Encuentra otra primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pase por el punto $A(1, 5)$.

Las primitivas de $f(x)$ son de la forma $G(x)=x^2-3x+1+C$. Haciendo $x = 1$ se tiene $5=1-3+1+C \Rightarrow C=6$.

La primitiva buscada es $G(x)=x^2-3x+1+6$.

La integral indefinida. Primitivas inmediatas

13.20. Comprueba que:

a) $\int 6\text{sen}(x+1)\cos(x+1)\,dx = 3\text{sen}^2(x+1)+C$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}} = 4\sqrt[4]{x}+C$

c) $\int \sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2(ax+b)\sqrt{ax+b}}{3a}+C$

a) Se comprueba que, efectivamente, $\left(3\text{sen}^2(x+1)+C\right)' = 6\text{sen}(x+1)\cos(x+1)$.

b) Se comprueba que, efectivamente, $\left(4\sqrt[4]{x}+C\right)' = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$.

c) Se comprueba que, efectivamente, $\left(\frac{2(ax+b)\sqrt{ax+b}}{3a}+C\right)' = \left(\frac{2(ax+b)^{\frac{3}{2}}}{3a}+C\right)' = \sqrt{ax+b}$.

13.21. Calcula las siguientes primitivas inmediatas indicando de qué tipo son:

a) $\int \sqrt[5]{x^3}\,dx$

b) $\int \frac{4^x - 3\cdot 2^x}{2^x}\,dx$

c) $\int \frac{x^3+3x^2-5x+7}{x^2}\,dx$

d) $\int \frac{\text{sen}x+\cos x}{2}\,dx$

e) $\int \frac{2\sqrt{1-x^2}-3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

f) $\int e^{-x}\,dx$

g) $\int \frac{2+t^2}{1+t^2}\,dt$

a) $\int \sqrt[5]{x^3}\,dx$. Tipo $\int x^r\cdot dx = \frac{1}{r+1}\cdot x^{r+1}+C \Rightarrow \int \sqrt[5]{x^3}\,dx = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8}+C$

b) $\int \frac{4^x-3\cdot 2^x}{2^x}\,dx$. Tipo $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}+C \Rightarrow \int \frac{4^x-3\cdot 2^x}{2^x}\,dx = \int 2^x dx - 3\int dx = \frac{2^x}{\ln 2}-3x+C$

c) $\int \frac{x^3+3x^2-5x+7}{x^2}\,dx$. Tipo $\int x^r\cdot dx = \frac{1}{r+1}\cdot x^{r+1}+C$ y $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|+C$

$$\int \frac{x^3+3x^2-5x+7}{x^2}\,dx = \int x\,dx + 3\int dx - 5\int\frac{1}{x}\,dx + 7\int\frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2+3x-5\ln|x|-\frac{7}{x}+C$$

d) $\int \frac{\text{sen }x+\cos x}{2}\,dx$. Tipo $\int \cos x\,dx = \text{sen }x+C$ y $\int \text{sen }x\,dx = -\cos x+C$

$$\int \frac{\text{sen }x+\cos x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int \text{sen }x\,dx + \frac{1}{2}\int \cos x\,dx = -\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\text{sen }x+C$$

e) $\int \frac{2\sqrt{1-x^2}-3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. Tipo $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{arcsen }x+C$

$$\int \frac{2\sqrt{1-x^2}-3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\int dx - 3\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2x-3\text{arcsen }x+C$$

f) $\int e^{-x}dx$. Tipo $\int e^{f(x)}f'(x)\,dx = e^{f(x)}+C \Rightarrow \int e^{-x}dx = -e^{-x}+C$

g) $\int \frac{2+t^2}{1+t^2}\,dt$. Tipo $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{arctg }x+C \Rightarrow \int\frac{2+t^2}{1+t^2}\,dt = \int dt + \int \frac{1}{1+t^2}\,dt = t+\text{arctg}\,(t)+C$

13.22. (PAU) Calcula una primitiva de $y = \dfrac{x^2+3}{\sqrt{x}}$.

$$\int \frac{x^2+3}{\sqrt{x}}dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx + 3\int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + 6\sqrt{x} + C \Rightarrow f(x) = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + 6\sqrt{x}$$

13.23. (PAU) Determina *f*(*x*) sabiendo que:

$f'''(x) = 24x$ $\quad$ $f''(0) = 2$ $\quad$ $f'(0) = 1$ $\quad$ $f(0) = 0$

$f'''(x) = 24x$ entonces $f''(x) = 12x^2 + C$, como $f''(0) = 2$, se deduce que $C = 2$.

$f''(x) = 12x^2 + 2$ entonces $f'(x) = 4x^3 + 2x + C$, como $f'(0) = 1$, se deduce que $C = 1$.

$f'(x) = 4x^3 + 2x + 1$ entonces $f(x) = x^4 + x^2 + x + C$, como $f(0) = 0$, $C = 0$ y, por tanto, $f(x) = x^4 + x^2 + x$.

13.24. (PAU) De una función $y = f(x)$, $x > -1$, se sabe que tiene por derivada $y' = \dfrac{a}{1+x}$ donde *a* es una constante. Determina la función si, además, se sabe que $f(0) = 1$ y $f(1) = -1$.

$\displaystyle\int \frac{a}{1+x}dx = a\ln(1+x) + C = f(x)$. Como $f(0) = a \cdot 0 + C = 1 \Rightarrow C = 1$ y como $f(1) = a\ln 2 + 1 = -1 \Rightarrow a = \dfrac{-2}{\ln 2}$

La función es $f(x) = -\dfrac{2\ln(1+x)}{\ln 2} + 1 = -2\log_2(1+x) + 1$.

13.25. (PAU) Halla una función $F(x)$ que verifique que $x^5F'(x) + x^3 + 2x = 3$ para $x \neq 0$.

$$x^5F'(x) + x^3 + 2x = 3 \Rightarrow F'(x) = \frac{3-2x-x^3}{x^5} \Rightarrow F(x) = \int \frac{3-2x-x^3}{x^5}dx = -\frac{3}{4x^4} - \frac{2}{3x^3} + \frac{1}{x} + C$$

13.26. (PAU) Halla la ecuación de una curva $y = f(x)$, sabiendo que pasa por el punto (1, 1) y que la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa *x* es $3x + 1$.

Se sabe que $f'(x) = 3x+1$, luego $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + x + C$ y como $f(1) = 1$, C = $\dfrac{-3}{2}$.

La curva tiene ecuación $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + x - \dfrac{3}{2}$.

Otras primitivas inmediatas más generales

13.27. (PAU) De la función $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ se sabe que $f'(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$ y que $f(2) = 0$.

a) Determina *f*.

b) Halla la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto (0, 1).

a) $f(x) = \displaystyle\int \frac{3}{(x+1)^2}dx = -\frac{3}{x+1} + C$, como $f(2) = 0$, $C = 1$, $f(x) = -\dfrac{3}{x+1} + 1$

b) $F(x) = \displaystyle\int \left(-\frac{3}{x+1} + 1\right)dx = -3\ln|x+1| + x + C$, $1 = -3\ln(1) + C$, $C = 1$

$F(x) = -3\ln|x+1| + x + 1$

13.28. Observa estas dos integrales:

i) $\int \frac{2x}{x^2-5}\,dx = \ln\left|x^2-5\right| + C$ ii) $\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx = \ln\left(x^2+5\right) + C$

¿Por qué en la primera integral es preciso tomar el valor absoluto y en la segunda no?

Porque $x^2 + 5$ es siempre positivo y $x^2 + 5$ no lo es.

13.29. (TIC) Calcula estas integrales:

a) $\int \frac{\sqrt{5-3\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$ c) $\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx$ e) $\int \frac{x+2}{x^2+4x}\,dx$

b) $\int \sqrt{x+3}\,dx$ d) $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$ f) $\int \operatorname{sen} x \cos x\,dx$

a) $\int \frac{\sqrt{5-3\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx = -\frac{2}{9}\sqrt{(5-3\operatorname{tg} x)^3} + C$

b) $\int \sqrt{x+3}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3} + C$

c) $\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx = \frac{(\ln x^2)^2}{4} + C$

d) $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx = \ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$

e) $\int \frac{x+2}{x^2+4x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x\right| + C$

f) $\int \operatorname{sen} x \cdot \cos x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C$

13.30. (PAU) De todas las primitivas de la función $f(x) = 2\operatorname{tg} x \sec^2 x$, halla la que pasa por el punto $P\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$.

$F(x) = \int 2\operatorname{tg} x \sec^2 x\,dx = \frac{1}{\cos^2 x} + C \quad F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} + C = 1 \Rightarrow C = -1$

$F(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$

13.31. (PAU) Calcula $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$.

$\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2\sqrt{x}}{15}\left(3x^2 - 10x + 15\right) + C$

13.32. Calcula la primitiva de la función $f(x) = x\sqrt{x^2-1}$ que se anula en el punto de abscisa $x = 2$.

$F(x) = \int x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3} + C, \quad 0 = \sqrt{3} + C \Rightarrow C = -\sqrt{3} \Rightarrow F(x) = \frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3} - \sqrt{3}$

13.33. (PAU) Halla la función $F(x)$ tal que $F(0) = 2$, y que sea primitiva de la función $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$.

$F(x) = \int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \ln(e^x+1) + C \quad \ln 2 + C = 2 \Rightarrow C = 2 - \ln 2 \Rightarrow F(x) = \ln(e^x+1) + 2 - \ln 2$

13.34. (PAU) Calcula la integral: $\int\left(\sqrt{x^2+20x} + \left(x^2+20x\right)\right)(x+10)\,dx$.

$\int\left(\sqrt{x^2+20x} + \left(x^2+20x\right)\right)(x+10)\,dx = \frac{\sqrt{(x^2+20x)^3}}{3} + \frac{x^4}{4} + 10x^3 + 100x^2 + C$

13.35. (PAU) Calcula $\int e^{2x^2-x+3}(1-4x)\,dx$.

$$\int e^{2x^2-x+3}(1-4x)dx = -e^{2x^2-x+3} + C$$

Integración por partes

13.36. (TIC) Calcula:

a) $\int x\,2^x\,dx$ **e)** $\int \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x dx$ **i)** $\int x^3 e^{-x^2}\,dx$

b) $\int \frac{x\,dx}{2^x}$ **f)** $\int (x^2+x)e^{-2x+1}\,dx$ **j)** $\int x\ln x\,dx$

c) $\int x\,\text{arctg}(x+1)\,dx$ **g)** $\int \ln(x+1)\,dx$ **k)** $\int x^3(\ln x)^2 dx$

d) $\int x\ln x dx$ **h)** $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ **l)** $\int e^x\cos(3x)\,dx$

a) $$\int x\,2^x dx = x\frac{2^x}{\ln 2} - \int \frac{2^x}{\ln 2}dx = 2^x\left(\frac{x}{\ln 2} - \left(\frac{1}{\ln 2}\right)^2\right) + C$$

b) $$\int \frac{x\,dx}{2^x} = \int x2^{-x}dx = -x\frac{2^{-x}}{\ln 2} + \int \frac{2^{-x}}{\ln 2}\,dx = -2^{-x}\left(\frac{x}{\ln 2} + \left(\frac{1}{\ln 2}\right)^2\right) + C$$

c) $$\int x\,\text{arctg}(x+1)\,dx = \frac{1}{2}x^2\text{arctg}\,(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+(1+x)^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2\text{arctg}\,(x+1) - \left(\frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{-2x-2}{x^2+2x+2}dx\right) =$$

$$= \frac{x^2\text{arctg}\,(x+1)}{2} - \frac{x}{2} + \frac{\ln(x^2+2x+2)}{2} + C$$

d) $$\int \sqrt{x}\ln x\,dx = \frac{2\sqrt{x^3}\ln x}{3} - \int \frac{2\sqrt{x^3}}{3x}dx = \frac{2\sqrt{x^3}\ln x}{3} - \frac{4\sqrt{x^3}}{9} + C$$

e) $$\int \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x dx = \int x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx = \frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \int \frac{x^2}{(x+1)(x-1)}dx = \frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \int dx + \int \frac{1}{x^2-1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x + \int \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x + \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1}dx - \int \frac{\frac{1}{2}}{x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| = \frac{1}{2}(x+1)(x-1)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x + C$$

f)

f	*g'*
x^2+x	e^{-2x+1}
$2x+1$	$-\frac{1}{2}e^{-2x+1}$
2	$\frac{1}{4}e^{-2x+1}$
0	$-\frac{1}{8}e^{-2x+1}$

$$\int (x^2+x)e^{-2x+1}dx = e^{-2x+1}\left(-\frac{x^2+x}{2} - \frac{2x+1}{4} - \frac{1}{4}\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x+1}(x^2+2x+1) + C$$

g)

f	*g'*
ln(x+1)	1
$\frac{1}{x+1}$	x + 1

$$\int \ln(x+1)\,dx = (x+1)\ln(x+1) - \int \frac{x+1}{x+1}dx = (x+1)\ln(x+1) - x + C$$

h) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x + 1}{x} + C$

i) $\int x^3 \cdot e^{-x^2}\,dx = \frac{e^{-x^2}\left(x^2+1\right)}{-2} + C$

j) $\int x \ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$

k) $\int x^3 (\ln x)^2\,dx = \frac{1}{4}x^4(\ln x)^2 - \frac{1}{2}\int x^3 \ln x\,dx = \frac{1}{4}x^4(\ln x)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4\ln x - \int \frac{1}{4}x^3 dx\right) =$

$= \frac{1}{4}x^4(\ln x)^2 - \frac{1}{8}x^4\ln x + \frac{1}{32}x^4 + C$

l)

f	*g'*
cos(3*x*)	e^x
–3sen(3*x*)	e^x
–9cos(3*x*)	e^x

$\int e^x \cos(3x)\,dx = e^x\cos(3x) - e^x(-3\,\text{sen}(3x)) + \int e^x(-9\cos(3x))\,dx$

Despejando se obtiene:

$\int e^x\cos(3x)\,dx = \frac{e^x\cos(3x) - e^x(-3\,\text{sen}(3x))}{10} + C = \frac{e^x}{10}(\cos(3x) + 3\,\text{sen}(3x)) + C$

13.37. (TIC) Calcula realizando una tabla auxiliar con las integrales sucesivas:

a) $\int xx^6 \cos x\,dx$ **b)** $\int x^7 e^{7x} dx$ **c)** $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ **d)** $\int \left(x^3 + x^2 + 1\right)e^x dx$

a)

f	*g'*
x^6	cos *x*
$6x^5$	sen *x*
$30x^4$	–cos *x*
$120x^3$	–sen *x*
$360x^2$	cos *x*
720*x*	sen *x*
720	–cos *x*
0	–sen *x*

$\int x^6\cos x\,dx = 6\cos x(x^5 - 20x^3 + 120x) + \text{sen}\,x(x^6 - 30x^4 + 360x^2 - 720) + C$

b)

f	*g'*
x^7	e^{7x}
$7x^6$	$\frac{1}{7}e^{7x}$
$42x^5$	$\frac{1}{7^2}e^{7x}$
$210x^4$	$\frac{1}{7^3}e^{7x}$
$840x^3$	$\frac{1}{7^4}e^{7x}$
$2520x^2$	$\frac{1}{7^5}e^{7x}$
5040*x*	$\frac{1}{7^6}e^{7x}$
5040	$\frac{1}{7^7}e^{7x}$
0	$\frac{1}{7^8}e^{7x}$

$\int x^7 e^{7x}dx = e^{7x}\left(\frac{x^7}{7} - \frac{x^6}{7} + \frac{6x^5}{7^2} - \frac{30x^4}{7^3} + \frac{120x^3}{7^4} - \frac{360x^2}{7^5} + \frac{720x}{7^6} - \frac{720}{7^7}\right) + C$

c)

f	g'
$\cos bx$	e^{ax}
$-b\text{sen } bx$	$\frac{1}{a}e^{ax}$
$-b^2\cos bx$	$\frac{1}{a^2}e^{ax}$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx - \frac{1}{a^2}e^{ax}(-b\text{sen } bx) + \int \frac{1}{a^2}e^{ax}(-b^2\cos bx) =$$

$$= \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\text{ sen } bx)}{a^2+b^2} + C \Rightarrow \text{(Despejando)}$$

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx - \frac{1}{a^2}e^{ax}(-b\text{sen } bx) \Rightarrow$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\text{sen } bx)}{a^2+b^2} + C$$

d)

f	g'
$x^3 + x^2 + 1$	e^x
$3x^2 + 2x$	e^x
$6x + 2$	e^x
6	e^x
0	e^x

$$\int (x^3+x^2+1)e^x\,dx = e^x(x^3-2x^2+4x-3)+C$$

13.38. Determina las funciones $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ que satisfacen la condición de que la pendiente de la recta tangente en un punto genérico $(x,\ y)$ de su gráfica viene dada por la expresión $x\,e^x$.

$$f(x) = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = e^x(x-1)+C$$

13.39. (PAU) Sea $f: (-1,\ 1) \to \mathrm{R}$ definida por $f(x) = \ln(1-x^2)$, calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (0, 1).

$$F(x) = \int \ln(1-x^2)dx = x\ln(1-x^2) - \int -\frac{2x^2}{1-x^2}dx = x\ln(1-x^2) - 2\int dx + 2\int \frac{1}{(1-x)(1+x)}dx =$$

$$= x\ln(1-x^2) - 2x + \int \frac{1}{1-x}dx + \int \frac{1}{1+x}dx = x\ln(1-x^2) - 2x - \ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| + C$$

Como pasa por (0, 1) sigue que $-\ln(1)+C=1 \Rightarrow C=1$ y la función es $F(x) = x\ln(1-x^2) - 2x - \ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| + 1$.

13.40. (PAU) Calcula la siguiente integral indefinida: $\int e^{ax}(x^2+bx+c)dx$ en función de los parámetros *a*, *b* y *c*.

$$\int e^{ax}(x^2+bx+c)\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}(x^2+bx+c) - \frac{1}{a}\int e^{ax}(2x+b)\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}(x^2+bx+c) - \frac{1}{a^2}e^{ax}(2x+b) + \frac{1}{a^2}\int 2e^{ax}\,dx =$$

$$= e^{ax}\left(\frac{x^2+bx+c}{a} - \frac{2x+b}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)+C$$

13.41. Basándote en el ejercicio precedente, calcula: $\int e^x(x^2-2x-1)\,dx$

Tomando en el ejercicio 40 a = 1, b = –2 y c = –1, se obtiene:

$$\int e^x(x^2-2x-1)\,dx = e^x(x^2-2x-1-(2x-2)+2)+C = e^x(x^2-4x+3)+C$$

13.42. Utiliza dos veces la integración por partes para calcular la función $f(x)$ que cumple $f(0) = 1$ y $f'(x) = e^x \cos x$.

$$f(x) = \int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \text{sen } x \, dx = e^x \cos x + e^x \text{sen } x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$f(x) = \int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x \cos x + e^x \text{sen } x}{2} + C$$. Como $f(0) = \frac{1}{2} + C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{e^x}{2}(\cos x + \text{sen } x + 1)$

Integración de funciones racionales

13.43. Encuentra dos números reales A y B tales que $\frac{4x-5}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$ y calcula $\int \frac{4x-5}{x^2-1} dx$.

$$\frac{4x-5}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \Rightarrow A(x-1) + B(x+1) = 4x-5 \text{ para todo } x$$

En particular si se hace $x = 1$, se obtiene $2B = -1$ y si se hace $x = -1$, $-2A = -9 \Rightarrow B = \frac{-1}{2}$ y $A = \frac{9}{2}$.

Luego $\frac{4x-5}{x^2-1} = \frac{\frac{9}{2}}{x+1} + \frac{\frac{-1}{2}}{x-1}$. Así, $\int \frac{4x-5}{x^2-1} dx = \frac{9}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} = \frac{9}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| + C$

13.44. (PAU) Se consideran las funciones reales $f(x) = 12x^3 - 8x^2 + 9x - 5$ y $g(x) = 6x^2 - 7x + 2$. Calcula la función $H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ que cumple $H(1) = 1$.

$$H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} dx = \int (2x+1)\, dx + \int \frac{12x-7}{6x^2-7x+2} dx = x^2 + x + \ln\left(6x^2 - 7x + 2\right) + C$$

Como $H(1) = 1 \Rightarrow 1 + 1 + \ln 1 + C = 1$, por tanto, $C = -1$, y la función es $H(x) = x^2 + x + \ln\left(6x^2 - 7x + 2\right) - 1$.

13.45. (TIC) Las siguientes integrales dan lugar a funciones tipo arco tangente. Para resolverlas, primero debes transformar las fracciones en otras de la forma: $\frac{a}{1+(ax+b)^2}$, cuya integral es ya inmediata:

$$\int \frac{a}{1+(ax+b)^2} dx = \text{arctg}\,(ax+b) + C$$

a) $\int \frac{2}{1+x^2} dx$

c) $\int \frac{1}{x^2 - 4x + 5} dx$

e) $\int \frac{1}{4+(x-3)^2} dx$

b) $\int \frac{1}{9+x^2} dx$

d) $\int \frac{1}{1+2x^2} dx$

f) $\int \frac{2}{x^2+10x+41} dx$

a) $\int \frac{2}{1+x^2} dx = 2\text{arctg } x + C$

b) $\int \frac{1}{9+x^2} dx = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} dx = \frac{1}{3}\text{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + C$

c) $\int \frac{1}{x^2-4x+5} dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+1} dx = \text{arctg}\,(x-2) + C$

d) $\int \frac{1}{1+2x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}}{1+\left(\sqrt{2}x\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\left(\sqrt{2}x\right) + C$

e) $\int \frac{1}{4+(x-3)^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x-3}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{2}\text{arctg}\left(\frac{x-3}{2}\right) + C$

f) $\int \frac{2}{x^2+10x+41} dx = \int \frac{2}{(x+5)^2+16} dx = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{x+5}{4}\right)^2+1} dx = \frac{1}{2}\text{arctg}\left(\frac{x+5}{4}\right) + C$

13.46. (TIC) Calcula estas integrales correspondientes a los 6 casos posibles de funciones racionales:

a) $\int \frac{3}{x+5}dx$ e) $\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}dx$ i) $\int \frac{1}{x^2+4}dx$

b) $\int \frac{dx}{2x-7}$ f) $\int \frac{1}{x^2-4}dx$ j) $\int \frac{1}{x^4+3x^2+2}dx$

c) $\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx$ g) $\int \frac{-x^2+3x+23}{x^3+4x^2-3x-18}dx$ k) $\int \frac{x^3+x^2+3x+2}{\left(x^2+2\right)^2}dx$

d) $\int \frac{x}{x^2+4x+7}dx$ h) $\int \frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$ l) $\int \frac{3x^4-2x^3+9x^2-3x+5}{(x-1)\left(x^2+1\right)^2}dx$

Caso 1. De 1.^{er} grado (solo una raíz real)

a) $\int \frac{3}{x+5}dx = 3\ln|x+5| + C$ b) $\int \frac{dx}{2x-7} = \frac{1}{2}\ln|2x-7| + C$

Caso 2. De 2.º grado sin raíces reales

c) $\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+2}dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$

d) $\int \frac{x}{x^2+4x+7}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+7}dx - 2\int \frac{1}{(x+2)^2+3}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4x+7\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx =$

$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4x+7\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right) + C$

Caso 3. Solo raíces reales distintas

e) $\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{-3}{x-1}dx + \int \frac{5}{x-2}dx = -3\ln|x-1| + 5\ln|x-2| + C$

f) $\int \frac{1}{x^2-4}dx = \int \frac{-\frac{1}{4}}{x+2}dx + \int \frac{\frac{1}{4}}{x-2}dx = -\frac{1}{4}\ln|x+2| + \frac{1}{4}\ln|x-2| + C$

Caso 4. Solo raíces reales, algunas iguales

g) $\int \frac{-x^2+3x+23}{x^3+4x^2-3x-18}dx = \int \frac{-2}{x+3}dx + \int \frac{-1}{(x+3)^2}dx + \int \frac{1}{x-2}dx = -2\ln|x+3| + \frac{1}{x+3} + \ln|x-2| + C$

h) $\int \frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}dx = \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{-1}{x-1}dx + \int \frac{3}{(x-1)^2}dx = \ln|x+1| - \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + C$

Caso 5. Algunas raíces complejas distintas

i) $\int \frac{1}{x^2+4}dx = \int \frac{-\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2-2x+2}dx + \int \frac{\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2+2x+2}dx =$

$= -\frac{1}{16}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx + \frac{1}{8}\int \frac{1}{(x-1)^2+1}dx + \frac{1}{16}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx + \frac{1}{8}\int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx =$

$= -\frac{1}{16}\ln\left(x^2-2x+2\right) + \frac{1}{8}\text{arctg}\,(x-1) + \frac{1}{16}\ln\left(x^2+2x+2\right) + \frac{1}{8}\text{arctg}\,(x+1) + C$

j) $\int \frac{1}{x^4+3x^2+2}dx = \int \frac{1}{x^2+1}dx + \int \frac{-1}{x^2+2}dx = \text{arctg}\,(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx = \text{arctg}\,(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$

Caso 6. Algunas raíces complejas repetidas

k) $\int \frac{x^3+x^2+3x+2}{\left(x^2+2\right)^2}dx = \int \frac{x+1}{x^2+2}dx + \int \frac{x}{\left(x^2+2\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}dx + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\left(x^2+2\right)^2}dx =$

$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2(x^2+2)} + C$

l) $\int \frac{3x^4-2x^3+9x^2-3x+5}{(x-1)\left(x^2+1\right)^2}dx = 3\int \frac{1}{x-1}dx - 2\int \frac{1}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx = 3\ln|x-1| - 2\text{arctg}\,x - \frac{1}{2(x^2+1)} + C$

13.47. (TIC) Calcula las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-1}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2x+1}\,dx$ e) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+x+1}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{2x^2}{9-x^2}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x-6}$ f) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2x-3}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-1}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{-1}{x+1}\,dx = \ln|x-1| - \ln|x+1| + C$

b) $\displaystyle\int \frac{2x^2}{9-x^2}\,dx = \int \frac{-2(9-x^2)+18}{9-x^2}\,dx = \int -2dx + \int \frac{18}{(3-x)(3+x)}dx = -2x + \int \frac{3}{x+3}\,dx + \int \frac{-3}{x-3}\,dx =$

$= -2x + 3\ln|x+3| - 3\ln|x-3| + C$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2x+1}\,dx = \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{-1}{(x+1)^2}\,dx = \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x-6} = \int \frac{\frac{1}{5}}{x-2}\,dx + \int \frac{-\frac{1}{5}}{x+3}\,dx = \frac{1}{5}\ln|x-2| - \frac{1}{5}\ln|x+3| + C$

e) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+x+1}\,dx = \int (x-1)dx + \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}x^2 - x + \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx =$

$= \dfrac{1}{2}x^2 - x + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$

f) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2x-3}\,dx = \int \frac{\frac{3}{4}}{x+3} + \int \frac{\frac{1}{4}}{x-1} = \frac{3}{4}\ln|x+3| + \frac{1}{4}\ln|x-1| + C$

Integración por cambio de variable

13.48. Calcula las siguientes primitivas realizando el cambio de variable que se indica:

a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+1}dx \qquad x^2=t$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}+4x-2} \qquad 2x-1=t^2$

a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+1}dx$, $x^2=t$; $2x\,dx = dt \Rightarrow \displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2) + C$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}+4x-2}$, $2x-1=t^2$; $2dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}+4x-2} = \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{\sqrt{2x-1}+2(2x-1)} = \frac{1}{2}\int \frac{2t\,dt}{t+2t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2\,dt}{1+2t} = \frac{1}{2}\ln|1+2t| + C = \frac{1}{2}\ln\left(1+2\sqrt{2x-1}\right) + C$$

13.49. (PAU) Calcula la siguiente primitiva: $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$.

Se hace $x = e^t \Rightarrow dx = e^t\,dt$

$\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx = \int e^t \operatorname{sen} t\,dt = e^t \operatorname{sen} t - \int e^t \cos t\,dt = e^t \operatorname{sen} t - e^t \cos t - \int e^t \operatorname{sen} t\,dt =$

$= x\operatorname{sen}(\ln x) - x\cos(\ln x) - \displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx \Rightarrow \int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx = \frac{x(\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x))}{2} + C$

13.50. (PAU) Sea la integral $\int e^{2x}\text{sen}\left(e^{x}\right) dx$.

a) Intégrala mediante el cambio $t = e^x$.

b) Calcula la constante de integración para que la función integral pase por el origen de coordenadas.

a) $t = e^x$; $dt = e^x\ dx$

$$\int e^{2x}\text{sen}\left(e^x\right)dx = \int t\text{sen}t\ dt = -t\cos t - \int -\cos t\ dt = -t\cos t + \text{sen}\ t + C = -e^x\cos(e^x) + \text{sen}\ (e^x) + C$$

b) $0 = -e^0\cos\ (e^0) + \text{sen}\ (e^0) + C \Rightarrow C = \cos\ (1) - \text{sen}\ (1)$

13.51. (TIC) Calcula las siguientes primitivas:

a) $\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}\, dx$	e) $\int \frac{dt}{\sqrt{a-bt}}$	i) $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}\, dx$
b) $\int \frac{4^x + 5\cdot 16^x}{1+16^x}\, dx$	f) $\int \frac{\sec^2\alpha}{2+3\text{tg}\ \alpha}\, d\alpha$	j) $\int \frac{x\ \text{arcsen}\ x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$
c) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx$	g) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\, dx$	k) $\int \frac{5+2x^2+\ln x}{3x}\, dx$
d) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\, dx$	h) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}\, dx$	l) $\int \frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}}\, dx$

a) $\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}\,dx$, $\sqrt{x} = t$; $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt$

$$\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{4t}{1+t}dt = \int \frac{4(t+1)}{1+t}dt - 4\int \frac{1}{1+t}dt = 4t - 4\ln|1+t| + C = 4\sqrt{x} - 4\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C$$

b) $\int \frac{4^x + 5\cdot 16^x}{1+16^x}\,dx$, $4^x = t$; $4^x\ln(4)\,dx = dt$

$$\int \frac{4^x+5\cdot 16^x}{1+16^x}\,dx = \frac{1}{\ln(4)}\int \frac{\ln(4)4^x(1+5\cdot 4^x)}{1+\left(4^x\right)^2}\,dx = \frac{1}{\ln(4)}\int \frac{1+5t}{1+t^2}\,dt = \frac{5}{2\ln(4)}\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt + \frac{1}{\ln(4)}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \frac{5}{2\ln(4)}\ln(1+t^2) + \frac{1}{\ln(4)}\text{arctg}\ t + C = \frac{5}{2\ln(4)}\ln(1+16^x) + \frac{1}{\ln(4)}\text{arctg}\ (4^x) + C$$

c) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx$, $e^x = t$; $e^x dx = dt \Rightarrow \int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{t}\right)t}\,dt = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \text{arctg}\ t + C = \text{arctg}\ (e^x) + C$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$, $x = t^6$; $dx = 6t^5dt$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{6t^5}{t^3+t^2}\,dt = \int \frac{6t^3}{t+1}\,dt = \int \left(6t^2 - 6t + 6\right)dt + \int \frac{-6dt}{t+1} = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right) + C$$

e) $\int \frac{dt}{\sqrt{a-bt}}$, $x = \sqrt{a-bt}$; $dx = \frac{-b}{2\sqrt{a-bt}}dt \Rightarrow \int \frac{dt}{\sqrt{a-bt}} = \int \frac{-2}{b}\,dx = -\frac{2}{b}x + C = \frac{-2\sqrt{a-bt}}{b} + C$

f) $\int \frac{\sec^2\alpha}{2+3\text{tg}\ \alpha}\,d\alpha$,

$$t = \text{tg}\ \alpha; dt = \frac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha = \sec^2\alpha\ d\alpha \Rightarrow \int \frac{\sec^2\alpha}{2+3\text{tg}\ \alpha}\,d\alpha = \int \frac{dt}{2+3t} = \frac{1}{3}\ln|2+3t| = \frac{1}{3}\ln|2+3\text{tg}\ \alpha| + C$$

g) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$, $\sqrt{x} = t$; $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt \Rightarrow \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{2t\left(1+t^2\right)}{1+t}\,dt = \int \left(2t^2 - 2t + 4\right)dt + \int \frac{-4}{1+t}\,dt =$

$$= \frac{2}{3}t^3 - t^2 + 4t - 4\ln|1+t| + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + 4\sqrt{x} - 4\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C$$

h) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}dx$, $1+x^3=t^2$; $3x^2dx=2t\,dt$

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}dx=\frac{1}{3}\int \frac{((1+x^3)-1)3x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx=\frac{1}{3}\int \frac{(t^2-1)2t}{t}dt=\frac{2}{3}\int (t^2-1)\,dt=\frac{2}{9}t^3-\frac{2}{3}t+C=\frac{2\sqrt{1+x^3}\,(x^3-2)}{9}+C$$

i) $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx$,

$$2^x=t;\quad 2^x\ln(2)\,dx=dt\quad \int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx=\frac{1}{\ln(2)}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{1}{\ln(2)}\text{arcsen}\,(t)+C=\frac{1}{\ln(2)}\text{arcsen}\,(2^x)+C$$

j) $\int \frac{x\,\text{arcsen}\,x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $t=\text{arcsen}\,x$; $dt=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$\int \frac{x\,\text{arcsen}\,x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int t\,\text{sen}t\;dt=-t\cos t+\int \cos t\;dt=-t\cos t+\text{sen}\;t+C=-\sqrt{1-x^2}\,\text{arcsen}\;x+x+C$$

k) Para resolver la tercera integral se hace el cambio: $\ln x=t$; $\frac{1}{x}dx=dt$

$$\int \frac{5+2x^2+\ln x}{3x}dx=\frac{5}{3}\int \frac{1}{x}dx+\frac{2}{3}\int xdx+\frac{1}{3}\int \frac{\ln x}{x}dx=\frac{5}{3}\ln|x|+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}\int t\;dt=\frac{5}{3}\ln|x|+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}(\ln x)^2+C$$

l) $\int \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}dx$, $\sqrt{x}=t$; $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt$ $\quad\int \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}dx=\int 2(\sqrt{a}+t)^2dt=\frac{2}{3}(\sqrt{a}+t)^3+C=\frac{2}{3}(\sqrt{a}+\sqrt{x})^3+C$

13.52. (PAU) Calcula $\int x\left(\ln(1+x^2)+e^{-x}\right)dx$.

$$\int x\left(\ln(1+x^2)+e^{-x}\right)dx=\int x\ln(1+x^2)\;dx+\int xe^{-x}dx=\frac{1}{2}\int \ln t\;dt-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}(1+x^2)\left(\ln(1+x^2)-1\right)-e^{-x}(x+1)+C$$

13.53. (PAU) Utilizando el cambio de variable $t = e^x$, calcula $\int e^{x+e^x}dx$.

$$t=e^x;\,dt=e^xdx\Rightarrow \int e^{x+e^x}dx=\int e^xe^{e^x}dx=\int e^tdt=e^t+C=e^{e^x}+C$$

13.54. (PAU) Calcula $\int \sec^3 x\;dx$. Indicación: realiza el cambio sen $x=t$ para obtener una función racional.

sen $x=t$; $\cos x\;dx=dt$

$$\int \sec^3 x\;dx=\int \frac{\cos x}{\cos^4 x}dx=\int \frac{1}{(1-t^2)^2}dt=\int \frac{\frac{1}{4}}{t+1}dt+\int \frac{\frac{1}{4}}{(t+1)^2}dt+\int \frac{-\frac{1}{4}}{t-1}dt+\int \frac{\frac{1}{4}}{(t-1)^2}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|t+1|-\frac{1}{4}\frac{1}{t+1}-\frac{1}{4}\ln|t-1|-\frac{1}{4}\frac{1}{t-1}+C=\frac{1}{4}\ln|\text{sen}\;x+1|-\frac{1}{4}\frac{1}{\text{sen}\;x+1}-\frac{1}{4}\ln|\text{sen}\;x-1|-\frac{1}{4}\frac{1}{\text{sen}\;x-1}+C$$

13.55. (PAU) Calcula $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}$. Indicación: Realiza el cambio $\sqrt{x^2-2}-x=t$.

$$\sqrt{x^2-2}-x=t;\quad dt=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}-1\right)dx=\frac{x-\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x^2-2}}dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}=\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2}}\cdot\frac{x-\sqrt{x^2-2}}{x-\sqrt{x^2-2}}dx=\int \frac{1}{x-\sqrt{x^2-2}}\cdot\frac{x-\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x^2-2}}dx=\int \frac{1}{-t}dt=-\ln|t|=-\ln\left|\sqrt{x^2-2}-x\right|+C$$

13.56. (PAU) Dada la función $f(x) = \cos x - \cos^3 x$.

a) Halla su integral indefinida.

b) ¿Cuál es la primitiva de $f(x)$ que pasa por $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$?

a) Se hace el cambio $\operatorname{sen} x = t$; $\cos x\,dx = dt$.

$$\int \left(\cos x - \cos^3 x\right) dx = \int \cos x(1-\cos^2 x)\,dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$$

b) $\dfrac{\operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3} + C = 0 \Rightarrow C = -\dfrac{1}{3}$

Luego la primitiva buscada es $F(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^3 x - 1}{3}$.

13.57. (TIC) Calcula estas cuatro integrales:

a) $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$

b) $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$

c) $\int \cos^2 x\,dx$

d) $\int \cos^3 x\,dx$

a) $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$ Se hace por partes:

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x\,dx = -\operatorname{sen} x\cos x + \int (1-\operatorname{sen}^2 x)\,dx = -\operatorname{sen} x \cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x\,dx$$

Despejando, se obtiene: $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \dfrac{x - \operatorname{sen} x \cos x}{2} + C$

b) Haciendo el cambio: $\cos x = t$; $-\operatorname{sen} x\,dx = dt$

$$\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x dx = \int (1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x\,dx = -\int (1-t^2)\,dt = \frac{1}{3}t^3 - t + C = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$$

c) $\int \cos^2 x\,dx$ Usando el ejercicio anterior, se tiene que:

$$\int \cos^2 x\,dx = \int (1-\operatorname{sen}^2 x)\,dx = x - \int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{x + \operatorname{sen} x \cos x}{2} + C$$

d) Haciendo el cambio: $\operatorname{sen} x = t$; $\cos x\,dx = dt$

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x \cos x\,dx = \int (1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x\,dx = \int (1-t^2)\,dt = t - \frac{1}{3}t^3 + C = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$$

13.58. (TIC) Calcula las siguientes integrales:

a) $\int (2\text{sen}^2 x - 3\cos x)\, dx$

c) $\int \frac{\cos^3 x}{\text{sen}^2 x}\, dx$

b) $\int \cos^5 x\ \text{sen}^2 x\, dx$

d) $\int \frac{\cos x}{\text{sen}^3 x}\, dx$

a) $\int (2\text{sen}^2 x - 3\cos x)\, dx = 2\int \text{sen}^2 x\, dx - 3\int \cos x\, dx = x - \text{sen}\, x \cos x - 3\text{sen}\, x + C$ (Ver 57a)

b) $\int \cos^5 x\ \text{sen}^2 x\, dx$ Se hace el cambio: $\text{sen}\, x = t; \quad \cos x\, dx = dt$

$$\int \cos^5 x\ \text{sen}^2 x\, dx = \int \cos^4 x\ \text{sen}^2 x \cos x\, dx = \int \left(1-\text{sen}^2 x\right)^2 \text{sen}^2 x \cos x\, dx = \int (1-t^2)^2 t^2 dt = \int (t^6 - 2t^4 + t^2)\, dt =$$

$$= \frac{1}{7}t^7 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{7}\text{sen}^7 x - \frac{2}{5}\text{sen}^5 x + \frac{1}{3}\text{sen}^3 x + C$$

b) $\int \frac{\cos^3 x}{\text{sen}^2 x}\, dx$ Se hace el cambio: $\text{sen}\, x = t; \quad \cos x\, dx = dt$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\text{sen}^2 x}\, dx = \int \frac{(1-\text{sen}^2 x)}{\text{sen}^2 x}\cos x\, dx = \int \frac{1-t^2}{t^2}\, dt = \int \frac{1}{t^2}\, dt - \int dt = -\frac{1}{t} - t + C = -\frac{1}{\text{sen} x} - \text{sen}\, x + C$$

d) $\int \frac{\cos x}{\text{sen}^3 x}\, dx \qquad \text{cotg}\, x = t\ ; \quad \frac{-1}{\text{sen}^2 x}\, dx = dt$

$$\int \frac{\cos x}{\text{sen}^3 x}\, dx = \int \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} \cdot \frac{1}{\text{sen}^2 x}\, dx = -\int t\, dt = \frac{-t^2}{2} + C = -\frac{\text{cotg}^2 x}{2} + C$$

13.59. (TIC) Calcula estas dos integrales haciendo el cambio $\text{tg}\,\frac{x}{2} = t$:

a) $\int \frac{1}{2 + \cos x}\, dx$

b) $\int \frac{1}{2 + \text{sen}\, x}\, dx$

Como $\left(1 + \text{tg}^2 \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} dx = dt\ , \quad dx = \frac{2\, dt}{1+t^2} \quad$ y $\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad$ y $\quad \text{sen}\, x = \frac{2t}{1+t^2}$

$$\text{a)} \int \frac{1}{2+\cos x}\, dx = \int \frac{1}{2 + \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{2}{t^2+3}\, dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\left(\frac{\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$\text{b)} \int \frac{1}{2+\text{sen}\, x}\, dx = \int \frac{1}{2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{dt}{t^2+t+1} = \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\, dt}{\left(\frac{2\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\left(\frac{2\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\left(\frac{2\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

13.60. (TIC) Consulta las fórmulas de las sumas y restas de senos y cosenos y empléalas para calcular estas integrales:

a) $\int \cos(5x-3)\cdot \text{sen}(3x-1)\,dx$

c) $\int \text{sen}(2x+1)\cdot \text{sen}(3x+5)\,dx$

b) $\int \cos(2x+6)\cdot \cos(4x-2)\,dx$

d) $\int \text{sen}(2x+1)\cdot \cos(3x+5)\,dx$

a) $\int \cos(5x-3)\cdot \text{sen}(3x-1)\,dx$

Se usan: $2\text{sen}\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = \text{sen } a - \text{sen } b \Rightarrow \begin{cases} a = (5x-3)+(3x-1) = 8x-4 \\ b = (5x-3)-(3x-1) = 2x-2 \end{cases}$

$$\int \cos(5x-3)\cdot \text{sen}(3x-1)\,dx = \frac{1}{2}\int \text{sen}\,(8x-4)\,dx - \frac{1}{2}\int \text{sen}\,(2x-2)\,dx = -\frac{\cos(8x-4)}{16} + \frac{\cos(2x-2)}{4} + C$$

b) $\int \cos(2x+6)\cdot \cos(4x-2)\,dx$

Se usan: $2\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = \cos a + \cos b \Rightarrow \begin{cases} a = 6x+4 \\ b = 2x-8 \end{cases}$

$$\int \cos(2x+6)\cdot \cos(4x-2)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(6x+4)\,dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x-8)\,dx = \frac{\text{sen}\,(6x+4)}{12} + \frac{\text{sen}\,(2x-8)}{4} + C$$

c) $\int \text{sen}(2x+1)\cdot \text{sen}(3x+5)\,dx$

Se usan: $2\text{sen}\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\text{sen}\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = \cos b - \cos a \Rightarrow \begin{cases} a = 5x+6 \\ b = x+4 \end{cases}$

$$\int \text{sen}(2x+1)\cdot \text{sen}(3x+5)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(x+4)\,dx - \frac{1}{2}\int \cos(5x+6)\,dx = \frac{\text{sen}\,(x+4)}{2} - \frac{\text{sen}\,(5x+6)}{10} + C$$

d) $\int \text{sen}(2x+1)\cdot \cos(3x+5)\,dx$

Se usan: $2\text{sen}\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = \text{sen } a - \text{sen } b \Rightarrow \begin{cases} a = 5x+6 \\ b = x+4 \end{cases}$

$$\int \text{sen}(2x+1)\cdot \cos(3x+5)\,dx = \frac{1}{2}\int \text{sen}\,(5x+6)\,dx - \frac{1}{2}\int \text{sen}\,(x+4)\,dx = -\frac{\cos\,(5x+6)}{10} + \frac{\cos\,(x+4)}{2} + C$$

Integrales no elementales

13.61. Partiendo de que $\int \frac{e^{ax}}{x^n}dx$, $a \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$ **no es elemental, demuestra que las siguientes integrales no son elementales.**

a) $\int \dfrac{dx}{\ln x}$

b) $\int e^{e^x}dx$

c) $\int \ln(\ln x)\,dx$

a) $\int \dfrac{dx}{\ln x}$ Se hace el cambio: $e^t = x$; $e^t\,dt = dx \Rightarrow \int \dfrac{dx}{\ln x} = \int \dfrac{e^t}{t}dt$

b) $\int e^{e^x}dx$ Se hace el cambio: $t = e^x$; $dt = e^x dx \Rightarrow \int e^{e^x}dx = \int \dfrac{e^{e^x}}{e^x}e^x dx = \int \dfrac{e^t}{t}\,dt$

c) $\int \ln(\ln x)\,dx$ Se hace el cambio: $e^t = x$; $e^t\,dt = dx \Rightarrow \int \ln(\ln x)\,dx = \int \ln t \cdot e^t\,dt$

Ahora, integrando por partes, se tiene $\int \ln(\ln x)\,dx = \int \ln t \cdot e^t\,dt = \ln t \cdot e^t - \int \dfrac{e^t}{t}\,dt$

13.62. Utilizando la tabla de integración por partes demuestra que $\int \frac{e^x}{x}dx$ no es elemental.

Se calcula $\int \frac{e^x}{x}dx$ por partes:

Si se toma $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g'(x)=e^x$, se tiene:

f	g'
$\frac{1}{x}$	e^x
$-\frac{1}{x^2}$	e^x
$\frac{2}{x^3}$	e^x

Si se toma $f(x)=e^x$ y $g'(x)=\frac{1}{x}$, se tiene:

f	g'
e^x	$\frac{1}{x}$
e^x	$\ln x$
e^x	$x(\ln x-1)$

Se observa que tanto de una forma como de la otra se llega a sumas de infinitos sumandos y, por tanto, la integral no es elemental.

Actividades de síntesis

13.63. (TIC) Utiliza el método que creas más adecuado para resolver estas integrales:

a) $\int x^a \ln x\,dx$

b) $\int e^x \cos x\,dx$

c) $\int x\sqrt{x-3}\,dx$

d) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$

e) $\int \frac{4}{x^4-1}dx$

f) $\int x\ln\sqrt{1+x^2}dx$

g) $\int x\left(ax^2+b\right)^n dx$

h) $\int \frac{\pi}{\cos^2 \pi x}dx$

i) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$

j) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}dx$

k) $\int \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 dx$

l) $\int \frac{x^2}{x^3+x^2-2x}dx$

m) $\int x\sqrt{x^2-9}\,dx$

n) $\int \frac{x-3}{x^3+x^2+x}dx$

ñ) $\int \frac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x+2)^2}dx$

o) $\int \frac{(1+x)^3}{\sqrt{x}}dx$

p) $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}dx$

q) $\int \left(e^{\operatorname{sen} 3x}\right)^3 \cos 3x\,dx$

r) $\int \frac{5\cdot 2^x+3^x}{3^{x-1}}dx$

s) $\int \frac{2x+5}{x^2+x+1}dx$

a) $\int x^a \ln x\,dx$,

Si $a\neq -1$, se llama $f(x)=\ln x$, $g'(x)=x^a$.

$$\int x^a \ln x\,dx=\frac{1}{a+1}x^{a+1}\ln x-\frac{1}{a+1}\int x^{a+1}\frac{1}{x}dx=\frac{1}{a+1}x^{a+1}\ln x-\frac{1}{a+1}\cdot\frac{1}{a+1}x^{a+1}=\frac{1}{a+1}x^{a+1}\left(\ln x-\frac{1}{a+1}\right)+C$$

Si $a=-1$, $\int x^a \ln x\,dx=\int \frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$

b) $\int e^x \cos x\,dx$, Se procede haciendo la tabla de f y g':

f	g'
e^x	$\cos x$
e^x	$\operatorname{sen} x$
e^x	$-\cos x$

$\int e^x \cos x\,dx=e^x\operatorname{sen} x-e^x(-\cos x)-\int e^x\cos x\,dx$, por lo que

$\int e^x \cos x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x+\cos x)+C$

c) $\int x\sqrt{x-3}\,dx$ Haciendo $x - 3 = t^2$ y $dx = 2t\,dt$, se tiene:

$$\int x\sqrt{x-3}\,dx = \int (t^2+3)t\cdot 2t\,dt = 2\left(\frac{t^5}{5}+t^3\right) = \frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5} + 2\sqrt{(x-3)^3} + C$$

d) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$ Se denomina $\ln x = f(x)$ y $\frac{1}{x^3} = g'(x)$

Así pues, $\int \frac{\ln x}{x^3}dx = -\frac{1}{2}\ln x\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{2}\ln x\,\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2} + C$

e) $\frac{4}{x^4-1} = \frac{4}{(x^2+1)(x+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-1} = \frac{(Ax+B)(x^2-1)+C(x^2+1)(x-1)+D(x^2+1)(x+1)}{x^4-1}$

De la igualdad $4 = (Ax + B)(x^2 - 1) + C(x^2 + 1)(x - 1) + D(x^2 + 1)(x + 1)$, haciendo $x = 1$, es $4 = 4D$, con $x = -1$, es $4 = -4C$, con $x = 0$, es $4 = -B - C + D$ y con $x = 2$, es $4 = 6A + 3B + 5C + 15D$.

Así pues, $D = 1$, $C = -1$, $B = -2$ y $A = 0$, por lo que la integral pedida es:

$$\int \frac{4}{x^4-1}dx = -2\,\text{arctg}\,x - \ln|x+1| + \ln|x-1| + K$$

f) $\int x\ln\sqrt{1+x^2}\,dx$ $\quad x\ln\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}x\ln(1+x^2)$, por lo que se puede resolver $\int x\ln(1+x^2)dx$ que haciendo

$1 + x^2 = t$ y $2x\,dx = dt$ se transforma en $\frac{1}{2}\int \ln t = \frac{1}{2}(t\ln t - t)$.

Así que la integral pedida es: $\int x\ln\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{4}(1+x^2)\left(\ln(1+x^2)-1\right) + C$

g) $\int x(ax^2+b)^n\,dx$

Si $n = -1$, es: $\int \frac{x}{ax^2+b}dx = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+b| + C$

Si $n \neq -1$, poniendo $ax^2 + b = t$ y $2ax\,dx = dt$, se tiene que:

$$\int x(ax^2+b)^n\,dx = \frac{1}{2a}\int t^n dt = \frac{1}{2a(n+1)}(ax^2+b)^{n+1} + C$$

h) $\int \frac{\pi\,dx}{\cos^2\pi x} = \text{tg}(\pi x) + C$

i) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$ Haciendo $x = t^6$ y $dx = 6t^5\,dt$, se tiene que resolver $6\int \frac{t^3-1}{t^2+1}\cdot t^5\,dt$

Como $t^8 - t^5 = (t^2 + 1)(t^6 - t^4 - t^3 + t^2 + t - 1) + (1 - t)$, la integral pedida es:

$$6\int (t^6-t^4-t^3+t^2+t-1)dt + 6\int \frac{1-t}{t^2+1}dt =$$

$$= 6\left(\frac{1}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{1}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{1}{4}\sqrt[6]{x^4}+\frac{1}{3}\sqrt[6]{x^3}+\frac{1}{2}\sqrt[6]{x^2}-\sqrt[6]{x}\right) + 6\,\text{arctg}\sqrt[6]{x} - 3\ln\left(\sqrt[6]{x^2}+1\right) + C$$

j) $\int \frac{\text{sen}\,x}{1+\text{tg}^2x}dx = \int \text{sen}\,x\cos^2x\,dx = -\frac{1}{3}\cos^3x + C$

k) $\int\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2dx$; $\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2x}+e^{-2x}-2)$ Así pues, $\int\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}-2x\right) + \text{C}$

l) $\int \frac{x^2\,dx}{x^3+x^2-2x}$: $\frac{x^2}{x^3+x^2-2x} = \frac{x}{x^2+x-2} = \frac{x}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$

Como $x = A(x - 1) + B(x + 2) \Rightarrow A = \frac{2}{3}$, $B = \frac{1}{3}$, por lo que: $\int \frac{x^2\,dx}{x^3+x^2-2x} = \frac{2}{3}\ln|x+2| + \frac{1}{3}\ln|x-1| + C$

m) $\int x\sqrt{x^2-9}\,dx$ Haciendo: $x^2 - 9 = t$ y $2x\,dx = dt$

$$\int x\sqrt{x^2-9}\,dx = \frac{1}{2}\int\sqrt{t}\,dt == \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{t^3} = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-9)^3}$$

n) $\int \frac{x-3}{x^3+x^2+x}dx$; $\quad \frac{x-3}{x^3+x^2+x} = \frac{x-3}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{A(x^2+x+1)+x(Bx+C)}{x^3+x^2+x}$

De la igualdad $x - 3 = A\,(x^2 + x + 1) + x\,(Bx + C)$, haciendo $x = 0$, es $-3 = A$; con $x = 1$, es $-2 = 3A + B + C$ y con $x = -1$, resulta $-4 = A + B - C$. Así pues, $A = -3$, $B = 3$ y $C = 4$, por lo que:

$\int \frac{x-3}{x^3+x^2+x}dx = -3 \ln |x| + \int \frac{3x+4}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$ y esta última integral se resuelve poniendo:

$$\int \frac{3x+4}{x^2+x+1}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+\frac{8}{3}}{x^2+x+1}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+1+\frac{5}{3}}{x^2+x+1}dx = \frac{3}{2}\ln\ (x^2+x+1) + \frac{5}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx \quad \text{y,}$$

finalmente, $\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$

Así pues, $\int \frac{x-3}{x^3+x^2+x}dx = -3\ln|x| + \frac{3}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + K$

ñ) $\int \frac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x+2)^2}dx$

$$\frac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x+2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2} = \frac{A(x+1)(x+2)^2+B(x+2)^2+C(x+1)^2(x+2)+D(x+1)^2}{(x+1)^2(x+2)^2}$$

De la igualdad $x^2 + 3x - 2 = A\,(x + 1)(x + 2)^2 + B\,(x + 2)^2 + C\,(x + 1)^2\,(x + 2) + D\,(x + 1)^2$, haciendo $x = -1$, $-4 = B$, con $x = -2$, es $-4 = D$, si $x = 0$, es $-2 = 4A + 4B + 2C + D$ y si $x = 1$ es $2 = 18A + 9B + 12C + 4D$, así que $B = -4$, $D = -4$, $4A + 2C = 18$; $18A + 12C = 54$, por lo que $A = 9$, $C = -9$ y la integral pedida es:

$$\int \frac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x+2)^2}dx = 9\ln|x+1| + \frac{4}{x+1} - 9\ln|x+2| + \frac{4}{x+2} + K$$

o) $\int \frac{(1+x)^3}{\sqrt{x}}dx$

$\frac{(1+x)^3}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}}$, así que $\int \frac{(1+x)^3}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x^3} + \frac{6}{5}\sqrt{x^5} + \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + C$

p) $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}dx \qquad$ Poniendo $\sqrt{x+1} = t$ y $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}dx = dt$, se tiene que:

$$\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}dx = 2\int \ln t^2 dt = 4\,(t\ln t - t) = 4\sqrt{x+1}\,\left(\ln\sqrt{x+1} - 1\right) + C$$

q) $\int \left(e^{\operatorname{sen}3x}\right)^3 \cos 3x\, dx \qquad$ Haciendo $e^{\operatorname{sen}3x} = t$ y $e^{\operatorname{sen}3x}\cdot 3\cos 3x\, dx = dt$, se tiene que:

$$\int \left(e^{\operatorname{sen}3x}\right)^3 \cos 3x\, dx = \frac{1}{3}\int t^2 dt = \frac{1}{9}t^3 = \frac{1}{9}\left(e^{\operatorname{sen}3x}\right)^3 + C$$

r) $\int \frac{5\cdot 2^x+3^x}{3^{x-1}}dx \qquad$ Operando: $\frac{5\cdot 2^x+3^x}{3^{x-1}} = 15\left(\frac{2}{3}\right)^x + 3$

Así pues $\int \frac{5\cdot 2^x+3^x}{3^{x-1}}dx = 15\int\left(\frac{2}{3}\right)^x dx + 3x = \frac{15}{\ln\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^x + 3x + C$

s) $\int \frac{2x+5}{x^2+x+1}dx \qquad$ Como $\frac{2x+5}{x^2+x+1} = \frac{2x+1+4}{x^2+x+1}$, se tiene que:

$$\int \frac{2x+5}{x^2+x+1}dx = \ln(x^2+x+1) + 4\int \frac{1}{x^2+x+1}dx = \ln(x^2+x+1) + 4\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

(ver el apartado n de este ejercicio para esta última integral)

13.64. (TIC) Resuelve las siguientes integrales por el método más conveniente:

a) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}dx$ c) $\int \cos\frac{x}{2}\cos x\,dx$ e) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$

b) $\int x^a (\ln x)^2\,dx$ d) $\int \frac{dx}{1+\text{sen}\,x - \cos x}$ f) $\int x\ln(x+a)\,dx$

a) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}dx$

Como, $\frac{x+2}{\sqrt{x+1}} = \frac{x+1+1}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, la integral dada se transforma en:

$\int \sqrt{x+1}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + 2\sqrt{x+1} + C$

b) $\int x^a(\ln x)^2dx$

Si $a = -1$, $x^a(\ln x)^2 = \frac{(\ln x)^2}{x}$, por lo que $\int x^a(\ln x)^2dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$

Si $a \neq -1$, haciendo $(\ln x)^2 = f$ y $x^a = g'$ es $\int x^a(\ln x)^2dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}(\ln x)^2 - \frac{2}{a+1}\int \ln x \cdot x^a dx$, siendo esta última integral la del 1.er apartado del ejercicio anterior, por lo que:

$\int x^a(\ln x)^2dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}(\ln x)^2 - \frac{2}{a+1}\cdot\frac{1}{a+1}x^{a+1}\left(\ln|x| - \frac{1}{a+1}\right) + C$

c) $\int \cos\frac{x}{2}\cos x\,dx$ Como $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$, se tiene que:

$\int \cos\frac{x}{2}\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos\frac{3x}{2}dx + \frac{1}{2}\int \cos\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\text{sen}\frac{3x}{2} + \text{sen}\frac{x}{2} = \frac{1}{3}\text{sen}\frac{3x}{2} + \text{sen}\frac{x}{2} + C$

d) $\int \frac{dx}{1+\text{sen}\,x - \cos x}$

Haciendo $\text{tg}\frac{x}{2} = t$ y $\left(1+\text{tg}^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}dx = dt$, es decir, $(1 + t^2)\,dx = 2dt$, se tiene: $\int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}}$

(Recordar: $\text{tg}\frac{x}{2} = t$ nos lleva a $\text{sen}\,x = \frac{2t}{1+t^2}$ y $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$)

Así pues, la integral dada se transforma en: $\int \frac{2dt}{1+t^2+2t-1+t^2} = \int \frac{2dt}{2t^2+2t} = \int \frac{1}{t(1+t)}dt$

Finalmente, $\frac{1}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} = \frac{A(1+t)+Bt}{t(1+t)}$ que, haciendo $t = -1$, nos lleva a $B = -1$ y con $t = 0$, $A = 1$:

$\int \frac{1}{t(1+t)}dt = \ln|t| - \ln|1+t|$ y la integral $\int \frac{dx}{1+\text{sen}\,x - \cos x} = \ln\left|\text{tg}\frac{x}{2}\right| - \ln\left|1+\text{tg}\frac{x}{2}\right| + C$

e) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx = \ln(e^x + e^{-x}) + C$

f) $\int x\ln(x+a)dx$. Haciendo $\ln(x+a) = f$ y $x = g'$ es: $\int x\ln(x+a)dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x+a) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+a}dx$

Finalmente, como $\frac{x^2}{x+a} = x - a + \frac{a^2}{x+a}$, la integral pedida resultará:

$\int x\ln(x+a)dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x+a) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2 - ax + a^2\ln(x+a)\right)$

13.65. (TIC) Calcula las integrales siguientes:

a) $\int \frac{x^2+2\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}+3}{2x}dx$ e) $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$ i) $\int \operatorname{sen}^5 x\, dx$ m) $\int \frac{x\, dx}{(x-2)(x^2-9)}$

b) $\int\left(\frac{x-2\sqrt{x}}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx$ f) $\int \sqrt{x}\left(1-x^2\right) dx$ j) $\int \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}dx$ n) $\int \frac{\operatorname{arctg}(\ln x)}{x\left(1+(\ln x)^2\right)}dx$

c) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ g) $\int \operatorname{tg} ax \cdot \sec^2 ax\, dx$ k) $\int \frac{5x^2-19x+2}{x^3-2x^2-5x+6}dx$ ñ) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$

d) $\int \frac{1}{x}\sec^2(\ln x)\, dx$ h) $\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}dx$ l) $\int 2^x \operatorname{sen} 2^x \cos 2^x dx$ o) $\int x^2\sqrt{1+x}\, dx$

a) $\int \frac{x^2+2\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}+3}{2x}dx = \frac{1}{2}\int x\, dx + \int x^{\frac{-2}{3}}dx - \frac{1}{2}\int x^{\frac{-1}{2}}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x}dx = \frac{1}{4}x^2 + 3\sqrt[3]{x} - \sqrt{x} + \frac{3}{2}\ln|x| + C$

b) $\int\left(\frac{x-2\sqrt{x}}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx = \int\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{6}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx = x-4\sqrt{x}-\frac{6}{x}-\ln|x|+C$

c) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2e^{\sqrt{x}} + C$

d) $\int \frac{1}{x}\sec^2(\ln x)dx$

Haciendo $\ln x = t$ y $\frac{1}{x}dx = dt$, se llega a $\int \sec^2 t\, dt = \operatorname{tg} t = \operatorname{tg}(\ln x) + C$

e) $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$

Poniendo $\operatorname{arctg} x = f$ y $x = g'$ es $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$, por lo que:

$\int x \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + C$

Nota: Obsérvese la simplificación de los cálculos al tomar $g(x) = \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ en lugar de la habitual $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

f) $\int \sqrt{x}(1-x^2)dx$

Poniendo $x = t^2$ y $dx = 2t\, dt$, se tiene: $2\int t(1-t^4)t\, dt = 2\frac{t^3}{3} - 2\frac{t^7}{7} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + C$

g) $\int \operatorname{tg} ax \cdot \sec^2 ax\, dx$

Haciendo $\operatorname{tg} ax = t$ y $a\sec^2 ax\, dx = dt$, se llega a: $\frac{1}{a}\int t\, dt = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}^2 ax + C$

h) $\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}dx$ El cambio más cómodo es llamar $x = \operatorname{sen}^2 t$ y $dx = 2\operatorname{sen} t\cos t$.

Así pues: $\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}2\operatorname{sen} t\cos t\, dt = 2\int \cos^2 t\, dt$, integral que utilizando las identidades trigonométricas $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, $\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = \cos 2t$, nos lleva a:

$\int (1+\cos 2t)\, dt = t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t = \operatorname{arcsen}\sqrt{x} + \sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x} = \operatorname{arcsen}\sqrt{x} + \sqrt{x-x^2} + C$

i) $\int \operatorname{sen}^5 x\, dx$ Como $\operatorname{sen}^5 x = \operatorname{sen}^4 x \operatorname{sen} x$, se pone $\cos x = t$ y $-\operatorname{sen} x\, dx = dt$, quedándonos, entonces:

$\int \operatorname{sen}^5 x\, dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x\, dx = -\int (1-t^2)^2 dt = -\frac{1}{5}t^5 - t + \frac{2}{3}t^3 = -\frac{1}{5}\cos^5 x - \cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x + C$

j) $\int \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}dx$ Haciendo $x^n = t$ y $nx^{n-1}dx = dt$ se tiene que: $\int \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}dx = \frac{1}{n}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{n}\operatorname{arctg} x^n + C$

k) $\int \frac{5x^2-19x+2}{x^3-2x^2-5x+6}dx$ Como $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$, se escribe:

$$\frac{5x^2-19x+2}{(x-1)(x-3)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+2}=\frac{A(x-3)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-3)(x+2)}$$

La igualdad $5x^2 - 19x + 2 = A(x - 3)(x + 2) + B(x - 1)(x + 2) + C(x - 1)(x - 3)$ nos lleva a $A = 2$, $B = -1$, $C = 4$ y la integral dada resulta $2\ln|x - 1| - \ln|x - 3| + 4 \ln|x + 2| + K$

l) $\int 2^x \operatorname{sen} 2^x \cos 2^x dx$ Haciendo sen $2^x = t$ y $\ln 2\cdot 2^x \cos 2^x\, dx = dt$: $\frac{1}{\ln 2}\int t\, dt = \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{2}$ $\operatorname{sen}^2 2^x + C$

m) $\int \frac{x\,dx}{(x-2)(x^2-9)}$

Como $\frac{x}{(x-2)(x^2-9)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+3}=\frac{A(x-3)(x+3)+B(x-2)(x+3)+C(x-2)(x-3)}{(x-2)(x^2-9)}$, se tiene que la igualdad $x = A\,(x - 3)(x + 3) + B\,(x - 2)(x + 3) + C\,(x - 2)(x - 3)$ nos lleva a $3 = 6B$, $-3 = 30C$, $2 = -5A$, por lo que

$A=-\frac{2}{5}$, $B=\frac{1}{2}$, $C=-\frac{1}{10}$ y la integral pedida resulta ser : $-\frac{2}{5}\ln|x - 2| + \frac{1}{2}\ln|x - 3| - \frac{1}{10}\ln|x + 3| + K$

n) $\int \frac{\operatorname{arctg}(\ln x)}{x\left(1+(\ln x)^2\right)}dx$

Llamando $\operatorname{arctg}(\ln x) = t$ y $\frac{1}{1+(\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x}dx = dt$, la integral se transforma en $\int t\,dt = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg}(\ln x))^2 + C.$

ñ) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$. Haciendo $\sqrt{x}=t$ y $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt$, se tiene que $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ se transforma en $\int \frac{2}{1+t^2}dt$:

$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \int \frac{2}{1+t^2}dt = 2 \operatorname{arctg} t = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C.$

o) $\int x^2\sqrt{1+x}\,dx$ Haciendo $1 + x = t^2$ y $dx = 2t\,dt$, se tiene:

$$\int (t^2-1)^2 t\cdot 2t\,dt = 2\left(\frac{t^7}{7}-2\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right)=2\sqrt{(1+x)^3}\left(\frac{(1+x)^2}{7}-\frac{2}{5}(1+x)+\frac{1}{3}\right)+C=\frac{2}{105}\sqrt{(1+x)^3}\,(15x^2-12x+8)+C$$

13.66. (TIC) Calcula las siguientes primitivas:

a) $\int\sqrt{1-4x^2}\,dx$ **b)** $\int\sqrt{6x-x^2-8}\,dx$ **c)** $\int\sqrt{1-(2x-1)^2}\,dx$ **d)** $\int\sqrt{3-x^2+2x}\,dx$

(Indicación: recuerda que para obtener $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ se utilizaba el cambio x = sen t)

a) $\int\sqrt{1-4x^2}dx = \int\sqrt{1-(2x)^2}dx$ Haciendo $2x = t$ y $2dx = dt$, se tiene que: $\int\sqrt{1-4x^2}dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{1-t^2}dt$

Poniendo ahora t = sen u y dt = cos $u\,du$ se tiene:

$$\frac{1}{2}\int\cos^2 u\,du=\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2}+\frac{\operatorname{sen} 2u}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen} t+t\sqrt{1-t^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen} 2x+2x\sqrt{1-4x^2}\right)+C$$

b) $\int\sqrt{6x-x^2-8}\,dx$ Como $6x - x^2 - 8 = 1 - (x - 3)^2$, se tiene que:

$\int\sqrt{6x-x^2-8}\,dx = \int\sqrt{1-(x-3)^2}dx$ que es igual que las anteriores poniendo $x - 3 = t$ y $dx = dt$:

$$\int\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen} t+t\sqrt{1-t^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen}(x-3)+(x-3)\sqrt{1-(x-3)^2}\right)+C$$

c) $\int\sqrt{1-(2x-1)^2}\,dx$ Haciendo $2x -1 = t$ y $2dx = dt$, se tiene que:

$$\int\sqrt{1-(2x-1)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{1}{4}\left(\operatorname{arcsen} t+t\sqrt{1-t^2}\right)=\frac{1}{4}\left(\operatorname{arcsen}(2x-1)+(2x-1)\sqrt{1-(2x-1)^2}\right)+C$$

d) $\int\sqrt{3-x^2+2x}\,dx$

Como $3 - x^2 + 2x = 4 - (x - 1)^2$, se tiene $\int\sqrt{4-(x-1)^2}\,dx$ Así, $x - 1 = 2t$ y $dx = 2dt$, que lleva a:

$$2\int\sqrt{4-4t^2}\,dt=4\int\sqrt{1-t^2}\,dt=2\left(\operatorname{arcsen} t+t\sqrt{1-t^2}\right)=2\left(\operatorname{arcsen}\frac{x-1}{2}+\frac{x-1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}\right)+C$$

13.67. Escribe como integral de un cociente de polinomios $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$ y resuélvela. (Indicación: haz el cambio $x = \text{tg } t$.)

Si $x = \text{tg } t$ y $dx = (1 + \text{tg}^2 t)\,dt$, la integral $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$ se transforma en: $\int \sqrt{1+\text{tg}^2 t}\cdot(1+\text{tg}^2 t)\,dt = \int \frac{1}{\cos^3 t}\,dt$

Poniendo ahora $\text{sen } t = u$ y $\cos t\,dt = du$, se tendría que $\int \frac{1}{\cos^3 t}\,dt = \int \frac{\cos t}{(1-\text{sen}^2 t)^2}\,dt = \int \frac{1}{(1-u^2)^2}\,du$.

Para resolver $\int \frac{1}{(1-u^2)^2}\,du$, se descomponen en fracciones simples la fracción $\frac{1}{(1-u^2)^2}$:

$$\frac{1}{(1-u^2)^2} = \frac{1}{(1+u)^2(1-u)^2} = \frac{A}{1+u} + \frac{B}{(1+u)^2} + \frac{C}{1-u} + \frac{D}{(1-u)^2} =$$

$$= \frac{A(1+u)(1-u)^2 + B(1-u)^2 + C(1-u)(1+u)^2 + D(1+u)^2}{(1+u)^2(1-u)^2}$$

Así pues: $1 = A(1 + u)(1 - u)^2 + B(1 - u)^2 + C(1 - u)(1 + u)^2 + D(1 + u)^2$, que hace que:
con $u = 1$, $1 = 4D$; con $u = -1$, $1 = 4B$; con $u = 0$, $1 = A + B + C + D$; con $u = 2$, $1 = 3A + B - 9C + 9D$

De este modo: $B = D = \frac{1}{4}$, $A + C = \frac{1}{2}$, $3A - 9C = -\frac{3}{2}$, por lo que $A = \frac{1}{4}$, $C = \frac{1}{4}$.

Así pues, $\int \frac{1}{(1-u^2)^2}\,du = \frac{1}{4}\ln|1+u| - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+u} - \frac{1}{4}\ln|1-u| + \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-u} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + \frac{1}{2}\,\frac{u}{1-u^2}$

Deshaciendo el cambio, se tendría:

$$\frac{u}{1-u^2} = \frac{\text{sen}\,t}{\cos^2 t} = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}}{\frac{1}{1+x^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{1+x^2}} = x\sqrt{1+x^2}$$

$$\frac{1+u}{1-u} = \frac{(1+u)^2}{1-u^2} = \frac{(1+\text{sen}\,t)^2}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}(1 + \text{sen}^2 t + 2\,\text{sen}\,t) = (1 + x^2)\left(1+1-\frac{1}{1+x^2}+2\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}\right) =$$

$$= (1 + x^2)\left(2-\frac{1}{1+x^2}+\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = (1 + x^2)\,\frac{2+2x^2-1+2x\sqrt{1+x^2}}{1+x^2} = (1 + x^2) + x^2 + 2x\sqrt{1+x^2} = \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2$$

Llevando estos cálculos a la integral inicial, se tendría finalmente:

$$\int\sqrt{1+x^2}\,dx = \int\frac{1}{(1-u^2)^2}\,du = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + \frac{1}{2}\,\frac{u}{1-u^2} = \frac{1}{4}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2 + \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right) + C$$

(Se utilizará este resultado en ejercicios posteriores).

13.68. (TIC) Calcula las siguientes primitivas:

a) $\int\sqrt{1+4x^2}\,dx$ **b)** $\int\sqrt{1+(2x-1)^2}\,dx$ **c)** $\int\sqrt{x^2+6x+10}\,dx$ **d)** $\int\sqrt{x^2+2x+5}\,dx$

a) $\int\sqrt{1+4x^2}\,dx$. Poniendo $2x = t$ y $2dx = dt$, se tendría:

$$\int\sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2} + \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(2x\sqrt{1+4x^2} + \ln\left(2x+\sqrt{1+4x^2}\right)\right) + C$$

b) $\int\sqrt{1+(2x-1)^2}\,dx$. Poniendo $2x - 1 = u$ y $2dx = du$, la integral dada se convierte en:

$$\frac{1}{2}\int\sqrt{1+u^2}\,du = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left((2x-1)\sqrt{1+(2x-1)^2} + \ln\left((2x-1)+\sqrt{1+(2x-1)^2}\right)\right)\right) + C$$

c) $\int\sqrt{x^2+6x+10}\,dx = \int\sqrt{1+(x+3)^2}\,dx = \frac{1}{2}\left((x+3)\sqrt{1+(x+3)^2} + \ln\left(x+3+\sqrt{1+(x+3)^2}\right)\right) + C$

d) $\int\sqrt{x^2+2x+5}\,dx = \int\sqrt{4+(x+1)^2}\,dx$. Poniendo $x + 1 = 2t$ y $dx = 2\,dt$, se tiene:

$$\int\sqrt{4+(x+1)^2}\,dx = \int\sqrt{4+4t^2}\cdot 2dt = 4\int\sqrt{1+t^2}\,dt = 2\left(\frac{x+1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2} + \ln\left(\frac{x+1}{2}+\sqrt{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}\right)\right) + C$$

13.69. Escribe como integral de un cociente de polinomios $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$ y resuélvela.

(Indicación: haz el cambio $x = \dfrac{1}{\text{sen}\,t}$).

Poniendo $x = \dfrac{1}{\text{sen}\,t}$ y $dx = \dfrac{-\cos t}{\text{sen}^2 t}dt$, la integral dada se transforma en $-\int \dfrac{\cos^2 t}{\text{sen}^3 t}dt$.

Haciendo en esta última integral cos $t = u$ y –sen $t\,dt = du$, nos lleva a $\int \dfrac{u^2}{(1-u^2)^2}du$, cociente de polinomios.

$$\frac{u^2}{(1-u^2)^2} = \frac{A}{1+u} + \frac{B}{(1+u)^2} + \frac{C}{1-u} + \frac{D}{(1-u)^2} = \frac{A(1+u)(1-u)^2 + B(1-u)^2 + C(1-u)(1+u)^2 + D(1+u)^2}{(1+u)^2(1-u)^2}$$

En la igualdad, $u^2 = A\,(1+u)(1-u)^2 + B\,(1-u)^2 + C\,(1-u)(1+u)^2 + D\,(1+u)^2$, con $u = 1$, es $1 = 4D$; con $u = -1$, es $1 = 4B$; si $u = 0$, $0 = A + B + C + D$; y si $u = 2$, es $4 = 3A + B - 9C + 9D$, por lo que $B = D = \dfrac{1}{4}$, $A + C = -\dfrac{1}{2}$ y también $3A - 9C = \dfrac{3}{2}$, así que $A = -\dfrac{1}{4}$ y $C = -\dfrac{1}{4}$ y la integral será :

$$\int \frac{u^2}{(1-u^2)^2}du = -\frac{1}{4}\ln|1+u| - \frac{1}{4}\frac{1}{1+u} + \frac{1}{4}\ln|1-u| + \frac{1}{4}\frac{1}{1-u} = \frac{1}{2}\frac{u}{1-u^2} - \frac{1}{4}\ln\frac{1+u}{1-u}$$

Así pues, deshaciendo el cambio, se tendría:

$$\frac{u}{1-u^2} = \frac{\cos t}{\text{sen}^2 t} = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = x\sqrt{x^2-1}$$

$$\frac{1+u}{1-u} = \frac{1+\cos t}{1-\cos t} = \frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} = \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2$$

Luego: $\displaystyle\int\sqrt{x^2-1}\,dx = \int\frac{u^2}{(1-u^2)^2}du = \frac{1}{2}\frac{u}{1-u^2} - \frac{1}{4}\ln\frac{1+u}{1-u} = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right) + C$

13.70. Calcula $\int \dfrac{x^2}{1-x^6}dx$ haciendo previamente un cambio de variable.

Si $x^3 = t$ y $3x^2\,dx = dt$, la integral dada se transforma en $\dfrac{1}{3}\displaystyle\int\frac{1}{1-t^2}dt$.

Como $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{A}{1+t} + \dfrac{B}{1-t} = \dfrac{A(1-t)+B(1+t)}{1-t^2}$, la identidad $1 = A\,(1-t) + B\,(1+t)$, lleva a $1 = 2B$, $1 = 2A$.

Así pues, $\displaystyle\int\frac{1}{1-t^2}dt = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}$ y se tendrá que: $\displaystyle\int\frac{x^2}{1-x^6}dx = \frac{1}{6}\ln\frac{1+x^3}{1-x^3} + C$

13.71. (TIC) Calcula las siguientes primitivas:

a) $\int \sqrt{x^2-4}\,dx$

b) $\int \sqrt{(x-2)^2-1}\,dx$

c) $\int \sqrt{x^2+6x+8}\,dx$

d) $\int \sqrt{x^2-4x}\,dx$

a) $\sqrt{x^2-4}\,dx$

Como $\sqrt{x^2-4} = 2\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2-1}$, haciendo $\frac{x}{2}=t$ y $\frac{1}{2}dx = dt$, se tiene:

$$\sqrt{x^2-4}\,dx = 2\int\sqrt{t^2-1}\cdot 2\,dt = 4\int\sqrt{t^2-1}\,dt = 4\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2-1}-\ln\left(\frac{x}{2}+\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2-1}\right)\right) = 2$$

$$\left(\frac{x\sqrt{x^2-4}}{4}-\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)\right)+C$$

b) $\int\sqrt{(x-2)^2-1}\,dx$. Si $x-2=t$ y $dx=dt$, se tiene:

$$\sqrt{t^2-1}\,dt = \frac{1}{2}\left((x-2)\sqrt{(x-2)^2-1}-\ln\left|x-2+\sqrt{(x-2)^2-1}\right|\right)+C$$

c) $\int\sqrt{x^2+6x+8}\,dx = \int\sqrt{(x+3)^2-1}\,dx$. Poniendo $x+3=t$ y $dx=dt$, se tiene:

$$\int\sqrt{t^2-1}\,dt = \frac{1}{2}\left((x+3)\sqrt{(x+3)^2-1}-\ln\left|x+3+\sqrt{(x+3)^2-1}\right|\right)+C$$

d) $\int\sqrt{x^2-4x}\,dx = \int\sqrt{(x-2)^2-4}\,dx = 2\sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-1}\,dx$

Poniendo $\frac{x-2}{2}=t$ y $\frac{1}{2}dx=dt$, se tiene:

$$\int\sqrt{x^2-4x}\,dx = 4\int\sqrt{t^2-1}\,dt = 4\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-1}-\ln\left|\frac{x-2}{2}+\sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-1}\right|\right) =$$

$$2\left(\frac{x-2}{4}\sqrt{x^2-4x}-\ln\left|\frac{x-2}{2}+\frac{\sqrt{x^2-4x}}{2}\right|\right) = 2\left(\frac{x-2}{4}\sqrt{x^2-4x}-\ln\left|\frac{x-2+\sqrt{x^2-4x}}{2}\right|\right)+C$$

13.72. Calcula $\int \text{sen}\sqrt{x}\,dx$ y $\int x^7\text{sen}\,x^4\,dx$ haciendo en cada caso un adecuado cambio de variable antes de utilizar el método de integración por partes.

$\int\text{sen}\sqrt{x}\,dx$: haciendo $x=t^2$ y $dx=2t\,dt$, se tiene: $\int\text{sen}\sqrt{x}\,dx = 2\int t\,\text{sen}\,t\,dt$

Poniendo $t=f$ y sen $t=g'$, es $2\left(-t\cos t+\int\cos t\,dt\right) = 2\,(\text{sen}\,t - t\cos t) = 2\left(\text{sen}\sqrt{x}-\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\right)+C$

$\int x^7\,\text{sen}\,x^4 dx$: si $x^4=t$ y $4x^3\,dx=dt$, se tiene: $\frac{1}{4}\int t\,\text{sen}\,t\,dt = \frac{1}{4}(\text{sen}\,t - t\cos t) = \frac{1}{4}(\text{sen}\,x^4 - x^4\cos x^4)+C$

PROBLEMAS

13.73. La integral $\int \frac{\text{sen } x + \cos x}{3 + \text{sen } 2x} dx$ es una integral racional en sen x y cos$x$, por lo que el cambio $t = \text{tg}\frac{x}{2}$ la resolvería. Pero el cálculo es mucho más cómodo si se busca una función $g(x)$ tal que $g'(x)$ = sen x + cos$x$, y se hace $g(x) = t$ y $g'(x)\,dx = dt$. Hazlo así.

Si $g'(x) = \text{sen } x + \cos x$, entonces $g(x) = -\cos x + \text{sen } x$, por lo que $g^2(x) = 1 - \text{sen } 2x$.

Así pues la integral $\int \frac{\text{sen } x + \cos x}{3 + \text{sen } 2x} dx$, se puede escribir como $\int \frac{g'(x)\,dx}{4 - g^2(x)}$ que, con $g(x) = t$ y $g'(x)\,dx = dt$, se transforma en $\int \frac{dt}{4 - t^2}$. Descomponiendo en fracciones simples:

$\frac{1}{4-t^2} = \frac{A}{2+t} + \frac{B}{2-t} = \frac{A(2-t)+B(2+t)}{4-t^2}$ y $1 = A\,(2 - t) + B\,(2 + t)$ lleva a $B = \frac{1}{4}$, $A = \frac{1}{4}$.

Luego $\int \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4}\ln|2+t| - \frac{1}{4}\ln|2-t| = \frac{1}{4}\ln\frac{|2+t|}{|2-t|}$

Así pues, $\int \frac{\text{sen } x + \cos x}{3 + \text{sen } 2x} dx = \frac{1}{4}\ln\frac{2 + \text{sen } x - \cos x}{2 + \cos x - \text{sen } x} + C$

13.74. Resuelve $\int \frac{e^x}{\left(3+e^x\right)\sqrt{e^x - 1}} dx$ con un adecuado cambio de variable.

Si $e^x - 1 = t^2$ y $e^x\,dx = 2t\,dt$, se tendría:

$$\int \frac{e^x}{\left(3+e^x\right)\sqrt{e^x-1}} dx = \int \frac{2t\,dt}{(t^2+4)\cdot t} = \int \frac{2\,dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2} = \text{arctg}\,\frac{t}{2} = \text{arctg}\,\frac{\sqrt{e^x-1}}{2} + C$$

13.75. (PAU) Al aplicar integración por partes para calcular $\int f(x)\,\text{sen}x\,dx$, donde f es una cierta función derivable, se obtiene: $\int f(x)\text{ sen } x\,dx = -f(x)\cos x + \int 3x^2 \cos x\,dx$.

Sabiendo que $f(1) = 2$, encuentra la expresión de f.

Si $\int f(x)\text{ sen } x\,dx = -f(x)\cos x + \int 3x^2\cos x\,dx$, se tiene que $f'(x) = 3x^2$, por lo que $f(x) = x^3 + C$.

Como $f(1) = 2$, es $2 = 1^3 + C$, luego $f(x) = x^3 + 1$.

13.76. En un examen se ha pedido a los estudiantes que resuelvan la integral $\int 2\text{sen } x \cos x\,dx$.

a) Adela la resolvió mediante el cambio de variable $u = \text{sen } x$.

b) Bruno la resolvió con el cambio de variable $u = \cos x$.

c) Cati lo hizo usando la fórmula $2\text{sen } x \cos x = \text{sen } 2x$.

Los tres alumnos dieron respuestas distintas, sin embargo, el profesor les dijo a los tres que la habían hecho bien.

Encuentra las tres respuestas dadas y explica por qué todas eran correctas sin ser iguales.

Adela: $u = \text{sen } x \Rightarrow du = \cos x\,dx \Rightarrow \int 2\text{sen } x \cos x\,dx = \int 2u\,du = u^2 + C = \text{sen}^2 x + C$

Bruno: $u = \cos x \Rightarrow du = -\text{sen } x\,dx \Rightarrow \int 2\text{sen } x\cos x\,dx = -\int 2u\,du = -u^2 + C = -\cos^2 x + C$

Cati: $2\text{sen } x\cos x = \text{sen } 2x \Rightarrow \int 2\text{sen } x\cos x\,dx = \int \text{sen } 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$

Las tres respuestas son correctas, pues difieren solo en una constante.

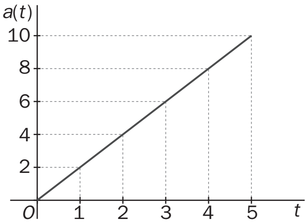
En efecto: $\text{sen}^2 x = -\cos^2 x + 1$; $-\frac{1}{2}\cos 2x = -\cos^2 x + \frac{1}{2}$

13.77. (PAU) Un punto se mueve en línea recta con una velocidad dada por la fórmula $v(t) = 12t - 5$ m/s. Calcula el espacio recorrido, $e(t)$, en cada instante t, sabiendo que $e(0) = 10$ m. ¿Cuál es la velocidad media entre $t = 0$ s y $t = 2$ s? Recuerda que la velocidad es la derivada del espacio respecto del tiempo.

Se sabe que $e(t) = \int v(t)dt = \int (12t-5)dt = 6t^2 - 5t + C$. Como $e(0) = 10 \Rightarrow C = 10 \Rightarrow e(t) = 6t^2 - 5t + 10$

La velocidad media es $v_m(0,2) = \dfrac{e(2)-e(0)}{2-0} = 7$ m/s.

13.78. La aceleración de un móvil que se mueve en una trayectoria rectilínea viene dada por la gráfica siguiente:



Si se sabe que para $t = 0$, su posición era $x(0) = 0$ y su velocidad inicial también era nula, $v(0) = 0$, determina las ecuaciones que dan la aceleración, la velocidad y la posición de dicho móvil para cualquier instante de tiempo. Recuerda que la aceleración es la derivada de la velocidad respecto del tiempo.

A la vista de la gráfica, se deduce la ecuación de la aceleración: $a(t) = 2t$. De este modo:

$v(t) = \int a(t)\,dt = \int 2t\,dt = t^2 + C.$ Como $v(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow v(t) = t^2$

$x(t) = \int v(t)\,dt = \int t^2\,dt = \dfrac{t^3}{3} + C.$ Como $x(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow x(t) = \dfrac{t^3}{3}$

13.79. Se trasplanta un árbol y se observa que su tasa de crecimiento a los x años es de $1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$ m por año. Si a los 5 años medía 5 m, ¿cuánto medía al ser trasplantado?

La tasa de crecimiento es la derivada de la función que mide la altura, luego $C(x) = \int 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}dx = x + \dfrac{1}{x+1} + C$. Como $5 = C(5) = 5 + \dfrac{1}{6} + C \Rightarrow C = -\dfrac{1}{6}$.

Luego: $C(x) = x + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{6} \Rightarrow C(0) = \dfrac{5}{6}$. Por tanto, al ser trasplantado medía $\dfrac{5}{6}$ m.

13.80. (TIC) Sea la función $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x + 12}{(x^2-4)^2}$.

a) Encuentra dos números reales A y B tales que: $f(x) = \dfrac{A}{(x+2)^2} + \dfrac{B}{(x-2)^2}$.

b) Basándote en el apartado anterior, calcula $\int f(x)\,dx$.

a) $\dfrac{3x^2+4x+12}{(x^2-4)^2} = \dfrac{A}{(x+2)^2} + \dfrac{B}{(x-2)^2} = \dfrac{A(x-2)^2 + B(x+2)^2}{(x+2)x^3(x-2)^2}$.

Así pues $3x^2 + 4x + 12 = x^2(A+B) + (-4A+4B)x + 4A + 4B$ con $A + B = 3$; $-4A + 4B = 4$; $4A + 4B = 12$

Como se puede observar, la última ecuación da la misma información que la primera, por lo que $A = 1$, $B = 2$.

b) Así pues, $\int \dfrac{3x^2+4x+12}{(x^2-4)^2}dx = -\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{2}{x-2} + C$

13.81. Halla el polinomio de segundo grado $P(x)$ tal que $P(0) = 1$, $P'(0) = 0$ y $\int \frac{P(x)}{x^3(x-1)^2}\,dx$ es una función racional.

Se pide encontrar el polinomio $P(x) = ax^2 + 1$, y tal que $\int \frac{ax^2+1}{x^3(x-1)^2}dx$ sea una función racional.

Si se descompone el integrando en fracciones simples, se obtendría:

$\frac{ax^2+1}{x^3(x-1)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x-1}+\frac{E}{(x-1)^2}$ y para que $\int \frac{ax^2+1}{x^3(x-1)^2}dx$ sea una función racional, debería ocurrir que $A = 0$ y $D = 0$, por lo que la descomposición tomaría la forma:

$$\frac{ax^2+1}{x^3(x-1)^2} = \frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{E}{(x-1)^2} = \frac{B(x-1)^2x+C(x-1)^2+Ex^3}{x^3(x-1)^2}$$

Así pues $ax^2 + 1 = (B + E)\,x^3 + x^2(-2B + C) + x(B - 2C) + C$, con lo que, identificando coeficientes, se tiene que: $C = 1$, $B - 2C = 0$, $-2B + C = a$ y $B + E = 0$, es decir, $C = 1$, $B = 2$, $a = -3$, $E = -2$.

Por tanto, el polinomio pedido es $P(x) = -3x^2 + 1$.

13.82. (TIC) Calcula $\int \frac{x^3}{(x-1)^2}\,dx$:

a) Usando fracciones simples. **b) Mediante el cambio $t = x - 1$.**

a) $\frac{x^3}{(x-1)^2} = x+2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}$ y, descomponiendo la fracción se tiene que: $\frac{3x-2}{(x-1)^2} = \frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$

Luego $\int \frac{x^3}{(x-1)^2}dx = \int (x+2)\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int \frac{3}{x-1}dx = \frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{x-1}+3\ln|x-1|+C$

b) Si se hace el cambio $\begin{cases} t = x-1 \\ dt = dx \end{cases}$ se tiene:

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2}dx = \int \frac{(t+1)^3}{t^2}dt = \int \left(t+3+\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{1}{2}t^2+3t+3\ln|t|-\frac{1}{t} = \frac{1}{2}(x-1)^2+3(x-1)+3\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$$

Observa que $\frac{1}{2}(x-1)^2+3(x-1) = \frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}+3x-3 = \frac{1}{2}x^2+2x+C'$

13.83. Encuentra en cada caso la función $y = f(x)$ tal que:

a) $f'(x) = -3x\,f(x)$ y que corta al eje vertical en el punto de ordenada 1.

b) $f'(x) = \frac{x}{f(x)+x^2f(x)}$ y $f(0) = -1$

c) $f'(x) = x^2f^2(x)+x^2-f^2(x)-1$ y la gráfica de f pasa por el origen.

a) Como $f'(x) = -3x\,f(x)$, entonces $-3x = \frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln f(x))'$. Así pues, $\int -3x\,dx = \int (\ln f(x))'dx$ y, por tanto, $-\frac{3}{2}x^2+C = \ln f(x)$. Se tiene entonces que $f(x) = e^{\left(-\frac{3}{2}x^2+C\right)} = e^{-\frac{3}{2}x^2}\cdot C'$ y como se sabe que $f(0) = 1$ se tiene que $C' = 1$. Luego la función buscada es $f(x) = e^{-\frac{3}{2}x^2}$.

b) $f'(x) = \frac{x}{f(x)+x^2f(x)} = \frac{x}{f(x)(1+x^2)}$ y, por tanto, $\frac{x}{(1+x^2)} = f'(x)\cdot f(x) = \frac{1}{2}\left((f(x))^2\right)'$

Así pues, $\int \frac{x}{(1+x^2)}dx = \frac{1}{2}\int \left((f(x))^2\right)'dx \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C = \frac{1}{2}(f(x))^2$

Luego puede ser $f(x) = \pm\sqrt{\ln(1+x^2)+C'}$ y como $f(0) = -1$, entonces debe ser $f(x) = -\sqrt{\ln(1+x^2)+1}$.

c) $f'(x) = f^2(x)(x^2-1)+x^2-1 = (f^2(x)+1)(x^2-1)$, luego $(x^2-1) = \frac{f'(x)}{(f^2(x)+1)} = (\text{arctg}\,(f(x)))'$

Así pues: $\int (x^2-1)\,dx = \int (\text{arctg}\,(f(x)))'dx$ y, por tanto, $\frac{1}{3}x^3-x+C = \text{arctg}\,(f(x)) \Rightarrow f(x) = \text{tg}\left(\frac{1}{3}x^3-x+C\right)$

y como $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$. Luego la función buscada es $f(x) = \text{tg}\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)$.

PROFUNDIZACIÓN

13.84. Calcula $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$ observando que $\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$ y obteniendo $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$ por partes.

Como $\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$, se tiene que: $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \text{arctg } x - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$

En $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \int x \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$, haciendo $f = x$ y $g' = \frac{x}{(1+x^2)^2}$, es $g(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x^2}$, por lo que:

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{x}{2}\,\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = -\frac{x}{2}\,\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\text{ arctg } x \Rightarrow \int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\text{ arctg } x + \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + C$$

13.85. (TIC) Obtén $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+9)^2}\,dx$ y $\int \frac{x^3}{(x^2+4)^2}\,dx$.

$\int \frac{2x+1}{(x^2+x+9)^2}\,dx \Rightarrow$ Si $x^2 + x + 9 = t$ y $(2x + 1)\,dx = dt$, la integral se transforma en $\int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2+x+9} + C$.

$\int \frac{x^3}{(x^2+4)^2}\,dx \Rightarrow$ Si $x^2 = t$ y $2x\,dx = dt$, la integral dada se transforma en $\frac{1}{2}\int \frac{t}{(t+4)^2}\,dt$

$$\frac{t}{(t+4)^2} = \frac{t}{t^2+8t+16} = \frac{1}{2}\,\frac{2t}{t^2+8t+16} = \frac{1}{2}\left(\frac{2t+8}{t^2+8t+16} - \frac{8}{(t+4)^2}\right) \Rightarrow \int \frac{t}{(t+4)^2}\,dt = \frac{1}{2}\ln(t^2 + 8t + 16) + \frac{4}{t+4}$$

Por tanto, $\int \frac{x^3}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{1}{4}\ln(x^2+4)^2 + \frac{2}{x^2+4} = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \frac{2}{x^2+4} + C$

13.86. Demuestra las siguientes fórmulas de reducción:

a) $\int \text{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\text{sen}^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2}x\,dx$ **con n par mayor que 2.**

b) $\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\,\text{sen } x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx$ **con n par mayor que 2.**

c) $\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{1}{2n-2}\,\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,dx$

a) $\int \text{sen}^n x\,dx = \int \text{sen}^{n-1}x \cdot \text{sen}x\,dx$, que llamando $f(x) = \text{sen}^{n-1}x$ y $g'(x) = \text{sen } x$, resulta ser:

$$\int \text{sen}^n x\,dx = -\text{sen}^{n-1}x \cdot \cos x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2}x \cdot \cos^2 x\,dx = -\text{sen}^{n-1}x\cos x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2}x\,(1 - \text{sen}^2 x)\,dx =$$

$$= -\text{sen}^{n-1}x\cos x + (n-1)\int (\text{sen}^{n-2}x - \text{sen}^n x)\,dx$$

Así pues $\int \text{sen}^n x\,dx = -\text{sen}^{n-1}x\cos x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2}x\,dx - (n-1)\int \text{sen}^n x\,dx$, es decir:

$$n\int \text{sen}^n x\,dx = -\text{sen}^{n-1}x\cos x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2}x\,dx \Rightarrow \int \text{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\text{sen}^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2}x\,dx$$

b) De forma análoga resultaría la fórmula pedida, pero podría ser más cómodo si se escribe:

$\int \cos^n x\,dx = \int \text{sen}^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx$ y, llamando $\frac{\pi}{2} - x = t$ y $-dx = dt$, quedaría $-\int \text{sen}^n t\,dt$, es decir, aplicando a:

$$-\left(-\frac{1}{n}\text{sen}^{n-1}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx\right) = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\,\text{sen } x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx$$

Obsérvese que estas fórmulas son válidas aunque n no fuera par. La observación de n par tiene sentido pues si n fuera impar sería mucho más cómodo hacer la integral directamente sin acudir a ninguna fórmula de reducción.

c) $\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$

Procediendo igual que en el ejercicio 84, se observa que $\frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$,

por lo que: $\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,dx$

Para resolver $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,dx$, sea $f(x) = x$, $g'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}(1+x^2)^{1-n}\,\frac{1}{1-n}$

De este modo: $\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} - \left(\frac{1}{2(1-n)}\,\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,dx \right)$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{-1}{2-2n}\,\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,dx - \frac{1}{2n-2}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2n-2}\,\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \left(1 - \frac{1}{2n-2}\right)\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,dx = \frac{1}{2n-2}\,\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,dx$$

13.87. Utilizando las fórmulas deducidas en los apartados a y b del ejercicio anterior, obtén:

a) $\int \cos^4 x\,dx$

b) $\int \operatorname{sen}^6 x\,dx$

a) $\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\cos^3 x \operatorname{sen} x + \frac{3}{4}\int \cos^2 x\,dx$

Finalmente, como $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, sustituyendo en la última integral, se tiene que:

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\cos^3 x \operatorname{sen} x + \frac{3}{8}\left(x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right) + C$$

b) $\int \operatorname{sen}^6 x\,dx = -\frac{1}{6}\operatorname{sen}^5 x \cos x + \frac{5}{6}\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$. Ahora, $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx = -\frac{1}{4}\operatorname{sen}^3 x \cos x + \frac{3}{4}\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$

Finalmente, como $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, sustituyendo en la última integral, se tiene que:

$$\int \operatorname{sen}^6 x\,dx = -\frac{1}{6}\operatorname{sen}^5 x \cos x + \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^3 x \cos x + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{6}\operatorname{sen}^5 x \cos x - \frac{5}{24}\operatorname{sen}^3 x \cos x + \frac{5}{16}\left(x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right) + C$$

13.88. Obtén $\int e^{-x}x^5\,dx$ de dos formas diferentes:

a) Por partes, utilizando el método de la tabla.

b) Utilizando que $\int e^{-x}x^5\,dx = e^{-x}\left(a_0 + a_1x + \cdots + a_5x^5\right) = I(x)$ y obteniendo los coeficientes a_i derivando.

a)

f	g'
x^5	e^{-x}
$5x^4$	$-e^{-x}$
$20x^3$	e^{-x}
$60x^2$	$-e^{-x}$
$120x$	e^{-x}
120	$-e^{-x}$
0	e^{-x}

Así pues,

$$\int e^{-x}\cdot x^5\,dx = -x^5e^{-x} - 5x^4e^{-x} - 20x^3e^{-x} - 60x^2e^{-x} - 120xe^{-x} - 120e^{-x} + C =$$

$= -e^{-x}\,(x^5 + 5x^4 + 20x^3 + 60x^2 + 120x + 120) + C$

b) $\int e^{-x}\cdot x^5\,dx = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5)\cdot e^{-x}$

Derivando: $e^{-x}\cdot x^5 = (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4)e^{-x} - e^{-x}\,(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5) \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{-x}\cdot x^5\,dx = -e^{-x}\left(a_5x^5 + (a_4 - 5a_5)x^4 + (a_3 - 4a_4)x^3 + (a_2 - 3a_3)x^2 + (a_1 - 2a_2)x + a_0 - a_1\right)$

Así pues, identificando coeficientes, se tendría:

$a_5 = -1$	$a_4 - 5a_5 = 0$	$a_3 - 4a_4 = 0$	$a_2 - 3a_3 = 0$	$a_1 - 2a_2 = 0$	$a_0 - a_1 = 0$
Es decir:	$a_4 = -5$	$a_3 = -20$	$a_2 = -60$	$a_1 = -120$	$a_0 = -120$

$\int e^{-x}\cdot x^5dx = -e^{-x}\,(x^5 + 5x^4 + + 20x^3 + 60x^2 + 120x + 120) + C$

(Igual, naturalmente, que con la integración directa usando la tabla).

13.89. a) Demuestra que si $r \neq 0$, $\int x^re^x\,dx = x^re^x - r\int x^{r-1}e^x\,dx$

b) Encuentra fórmulas análogas para: $\int \ln^n x\,dx$ y $\int x^n\text{sen}\,x\,dx$.

a) $\int x^re^x\,dx$. Poniendo $x^r = f$ y $e^x = g'$ es $\int x^re^x\,dx = x^re^x - r\int x^{r-1}e^x\,dx$

b) $\int \ln^n x\,dx$. Si $\ln^n x = f$ y $1 = g'$, se tendría $\int \ln^n x\,dx = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1} x\,dx$

$\int x^n\text{sen}\,x\,dx$. Si $x^n = f$ y $g' = \text{sen}\,x$, se tendría $\int x^n\text{sen}\,x\,dx = -x^n\cos x + n\int x^{n-1}\cos x\,dx$

13.90. Expresa como integrales de cocientes de polinomios las siguientes:

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}+2}{x+\sqrt[4]{x}}dx$ 　　　 **b) $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x-2}}}{x^2-2\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}}dx$**

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}+2}{x+\sqrt[4]{x}}dx$ Si $x = t^{12}$ y $dx = 12\,t^{11}\,dt$, se tendría $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}+2}{x+\sqrt[4]{x}}dx = 12\int \frac{t^4+2}{t^{12}+t^3}\,t^{11}\,dt = 12\int \frac{t^{12}+2t^8}{1+t^9}dt$

b) $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x-2}}}{x^2-2\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}}dx$ Si $\dfrac{x-1}{x-2} = t^6$, es decir, $x - 1 = t^6x - 2t^6 \Rightarrow 2t^6 - 1 = x\,(t^6 - 1) \Rightarrow x = \dfrac{2t^6-1}{t^6-1}$ y, de este modo, se tiene entonces: $dx = \dfrac{12t^5(t^6-1) - 6t^5(2t^6-1)}{(t^6-1)^2}dt = \dfrac{-6t^5}{(t^6-1)^2}dt$

Por tanto, $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x-2}}}{x^2-2\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}}dx = -6\int \frac{\frac{2t^6-1}{t^6-1}+t^2}{\left(\frac{2t^6-1}{t^6-1}\right)^2-2t^3}\,\frac{t^5}{(t^6-1)^2}\,dt$, que es una integral cociente de polinomios.

13.91. Demuestra que las siguientes integrales se pueden reducir a integrales de cocientes de polinomios.

a) $\int x^{-2}\sqrt[3]{1-x}\ dx$

b) $\int x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{5}{3}}\ dx$

c) $\int \sqrt[4]{x}(1-x)^2\ dx$

a) $\int x^{-2}\sqrt[3]{1-x}\ dx$. Si $1 - x = t^3$ y $-dx = 3t^2\ dt$, se tendría : $\int x^{-2}\sqrt[3]{1-x}\ dx = -\int \frac{1}{(1-t^3)^2}\cdot t\cdot 3t^2\ dt$

b) $\int x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{5}{3}}dx = \int\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\frac{5}{3}} x^2\ dx$ pues $2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$

Así, $\int x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{5}{3}}\ dx = \int x^2\sqrt[3]{\left(\frac{1-x}{x}\right)^5}\ dx$, que, haciendo $\frac{1-x}{x} = t^3$, es decir, $1 - x = xt^3 \Rightarrow 1 = x\ (t^3 + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{1}{t^3+1}$ y $dx = \frac{-3t^2}{(t^3+1)^2}\ dt$, se transformaría en $-3\int \frac{1}{(t^3+1)^2}\, t^5 \frac{t^2}{(t^3+1)^2}\ dt$, que es un cociente de polinomios.

c) $\int \sqrt[4]{x}(1-x)^2\ dx$: Poniendo $x = t^4$ y $dx = 4\,t^3\ dt$, se tendría: $\int \sqrt[4]{x}(1-x)^2\ dx = \int t(1-t^4)^2\ 4t^3\ dt$

13.92. Sean *p* y *q* números racionales. Demuestra que $\int x^p\,(1-x)^q\ dx$ se puede poner como integral de un cociente de polinomios si se cumple alguna de estas condiciones:

a) *p* es entero.

b) *q* es entero.

c) *p* y *q* son no enteros pero *p* + *q* sí.

En el ejercicio anterior, se ha visto que $\int x^p(1-x)^q\ dx$ con p y q racionales se podría poner como cociente de polinomios, al menos en estos tres casos:

a) $p = -2$ b) $q = 2$ c) $p + q = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = 2$

En general, procediendo exactamente igual que antes, si $p \in \mathbf{Z}$, o $q \in \mathbf{Z}$ o $p + q \in \mathbf{Z}$, la integral dada se convierte en cociente de polinomios:

En a, si $q = \frac{m}{n}$, se toma $1 - x = t^n$.

En c, si $p = \frac{m}{n}$, se toma $x = t^n$ y en b se escribe $x^p\ (1 - x)^q$ como $\left(\frac{1-x}{x}\right)^q x^{p+q}$,

y si $q = \frac{m}{n}$, se toma $\frac{1-x}{x} = t^n$.

13.93. El matemático ruso Tchebycheff demostró que las integrales $\int x^p(1-x)^q\,dx$ son elementales solamente en los tres casos citados en el ejercicio anterior. Utilizando este resultado, prueba las siguientes afirmaciones:

a) $\int \sqrt{1-x^3}\,dx$ no es elemental.

b) $\int (1-x^n)^{\frac{1}{m}}\,dx$ con n y m enteros positivos es elemental si y solo si m o n = 1, o m = n = 2.

c) $\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx$ no es elemental.

d) $\int \operatorname{sen}^p x \cos^q x\,dx$, siendo p y q números racionales, solo es elemental cuando alguno de los dos es un entero impar o cuando $p + q$ es un entero par.

e) $\int \dfrac{x}{\sqrt{1+x^n}}dx$ con n entero positivo, es elemental solo si n = 1, 2 ó 4. Calcula la integral en los tres casos.

f) $\int \operatorname{sen}^q x\,dx$ con q racional es elemental solo si q es entero.

a) Bastaría ver que $\int \sqrt{1-x^3}dx$ no responde a ninguno de los casos anteriores.

En efecto: en $\int \sqrt{1-x^3}dx$ poniendo $x^3 = t$, y $3x^2dx = dt$, se tendría: $\int \sqrt{1-x^3}\,dx = \dfrac{1}{3}\int \sqrt{1-t}\,\dfrac{dt}{\sqrt[3]{t^2}}$, es decir,

$\dfrac{1}{3}\int t^{-\frac{2}{3}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\,dt$ en la que $p = -\dfrac{2}{3} \notin \mathbf{Z}$, $q = \dfrac{1}{2} \notin \mathbf{Z}$ y $p + q = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{6} \notin \mathbf{Z}$.

b) $\int (1-x^n)^{\frac{1}{m}}\,dx$. Poniendo $x^n = t$ y $nx^{n-1}dx = dt$, se tendría: $\int (1-x^n)^{\frac{1}{m}}\,dx = = \dfrac{1}{n}\int (1-t)^{\frac{1}{m}}\,t^{\frac{1-n}{n}}\,dt$

Así pues, si m o $n = 1$, se está en uno de los dos casos: a o b.

Si $m = n = 2$, $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1-n}{n} = 0$ y se está en el caso c.

Si $m \neq 1$, $n \neq 1$ ni $\dfrac{1}{m}$ ni $\dfrac{1-n}{n}$ son enteros y su suma $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} - 1$ tampoco, si m y n no son ambos igual a 2.

c) $\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx$. Haciendo $\operatorname{sen} x = \sqrt{t}$ y $\cos x\,dx = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$, la integral dada se transformaría en:

$\int \sqrt[4]{t}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt = \dfrac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt$ y ni p ni q son enteros ($p = -\dfrac{1}{4}$, $q = -\dfrac{1}{2}$), ni $p + q = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{4}$

d) Poniendo $\int \operatorname{sen}^p x\cos^q x\,dx = \int \operatorname{sen}^p x\cos^{q-1}\cos x\,dx$ y haciendo $\operatorname{sen} x = \sqrt{t}$ y $\cos x\,dx = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$

Como $\cos^{q-1}x = \left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)^{\frac{q-1}{2}}$, se tendría $\int t^{\frac{p}{2}}(1-t)^{\frac{q-1}{2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \dfrac{1}{2}\int t^{\frac{p-1}{2}}(1-t)^{\frac{q-1}{2}}\,dt$

Si p o q es un entero impar, $\dfrac{p-1}{2}$ o $\dfrac{q-1}{2}$ es entero.

Si $p + q$ es un entero par, resulta que $\dfrac{p-1}{2} + \dfrac{q-1}{2} = \dfrac{p+q}{2} - 1$ sería entero.

Pero si ni p ni q es un entero impar, $\dfrac{p-1}{2}$ ni $\dfrac{q-1}{2}$ es entero y si $p + q$ no es un entero par, $\dfrac{p+q}{2} - 1 \notin \mathbf{Z}$.

e) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^n}}dx$. Haciendo $x^n = t$ y $nx^{n-1}\,dx = dt$, se tendría $\displaystyle\frac{1}{n}\int t^{\frac{1}{n}} \cdot (1+t)^{-\frac{1}{2}} \cdot t^{\frac{1-n}{n}}\,dt = \frac{1}{n}\int t^{\frac{2}{n}-1}\,(1+t)^{-\frac{1}{2}}\,dt$

$q = -\dfrac{1}{2}$ no es entero.

Si $n = 1$ ó 2, $\dfrac{2}{n} - 1$ es entero. Si $n = 4$, $\dfrac{2}{n} - 1 - \dfrac{1}{2}$ es entero.

Pero si $n \neq 1, 2$ ó 4, $\dfrac{2}{n} - 1 \notin \mathbf{Z}$ y $\dfrac{2}{n} - 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{n} - \dfrac{3}{2}$ que es entero solamente si $n = 4$.

Si $n = 1$, es $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$, que, poniendo $1 + x = t^2$ y $dx = 2t\,dt$, se transforma en $\displaystyle\int \frac{t^2-1}{t}2t\,dt = 2\int (t^2-1)\,dt =$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{(1+x)^3}}{3} - \sqrt{1+x}\right) + C$$

Si $n = 2$, es $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ que, con $1 + x^2 = t$ y $2x\,dx = dt$, se transforma en $\displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \sqrt{t} = \sqrt{1+x^2} + C$

Finalmente, si $n = 4$, se tendría $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}dx$, que haciendo $x^2 = t$ y $2x\,dx = dt$, conduce a $\displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$.

Y poniendo ahora $t = \text{tg}\, u$ y $dt = \dfrac{1}{\cos^2 u}du$, resultaría $\displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos u}du = \frac{1}{2}\int \frac{\cos u}{1-\text{sen}^2 u}du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-y^2}dy$ con

$y = \text{sen}\, u$ y $dy = \cos u\, du$.

Finalmente como, $\dfrac{1}{1-y^2} = \dfrac{A}{1+y} + \dfrac{B}{1-y} = \dfrac{A(1-y)+B(1+y)}{1-y^2}$, de la igualdad $1 = A\,(1 - y) + B\,(1 + y)$, se obtiene $A = B = \dfrac{1}{2}$, por lo que $\displaystyle\int \frac{1}{1-y^2}dy = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\text{sen}\, u}{1-\text{sen}\, u}$

Si $t = \text{tg}\, u$ se tiene que: $1 + t^2 = \dfrac{1}{\cos^2 u}$, $\cos^2 u = \dfrac{1}{1-t^2}$, $\text{sen}\, u = \sqrt{1-\dfrac{1}{1+t^2}} = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

$$\frac{1+\text{sen}\, u}{1-\text{sen}\, u} = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}} = \frac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}-t} = \left(\sqrt{1+t^2}+t\right)^2,$$ por lo que $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\text{sen}\, u}{1-\text{sen}\, u} = \ln\left(\sqrt{1+t^2}+t\right)$

Así pues, $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}dx = \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+x^4}+x^2\right) + C$

f) $\displaystyle\int \text{sen}^q x\,dx$

Poniendo $\displaystyle\int \text{sen}^q x\,dx = \int \text{sen}^{q-1}\text{sen}\, x\,dx = \int (\text{sen}^2 x)^{\frac{q-1}{2}}\,\text{sen}\, x\,dx$

Haciendo $\cos x = \sqrt{t}$ y $-\text{sen}\, x\,dx = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt$, se tiene: $\displaystyle\int \text{sen}^q x\,dx = -\frac{1}{2}\int (1-t)^{\frac{q-1}{2}} \cdot t^{-\frac{1}{2}}\,dt$

Así pues, como $\displaystyle\int t^p(1-t)^q\,dt$ es elemental solo cuando p, q o $p + q$ son enteros, se tiene que esta integral sería elemental solo si $\dfrac{q-1}{2} \in \mathbf{Z}$ o $\dfrac{q-1}{2} - \dfrac{1}{2}$ sea entero, es decir, $\dfrac{q-1}{2} \in \mathbf{Z}$ o $\dfrac{q}{2} \in \mathbf{Z}$, o sea, $q \in \mathbf{Z}$.

Nota: Obsérvese que, en cualquier caso, esta integral se reduce al apartado d, $\displaystyle\int \text{sen}^q x \cos^p x\,dx$ con $p = 0$ y allí se vio que era elemental cuando alguno era entero impar, en este caso q, o cuando la suma era entero par, en este caso q, es decir, $\displaystyle\int \text{sen}^q x\,dx$ es elemental solo si $q \in \mathbf{Z}$.

13.94. a) Calcula $\int \frac{x^3+x+1}{(x+2)^4}dx$ sin descomponer en fracciones simples. Sugerencia: llama $x+2=t$.

b) Demuestra que si grad(*P*) < *m* + *n*, existen polinomios *q*(*x*) y *r*(*x*) con grad(*q*) < *m* y grad(*r*) < *n*, tales que: $\frac{P(x)}{(x-a)^m(x-b)^n} = \frac{q(x)}{(x-a)^m} + \frac{r(x)}{(x-b)^n}$.

c) Utiliza los apartados anteriores para obtener: $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x-3)^2}$

a) Se escribe el numerador, x^3+x+1 en potencias de $x+2$.

En concreto: $x^3+x+1=(x+2)^3+a\,(x+2)^2+b\,(x+2)+c=x^3+6x^2+12x+8+ax^2+4ax+4a+bx+2b+c$

Así pues: $a+6=0$, $12+4a+b=1$, $8+4a+2b+c=1$

Con lo que, despejando, se obtiene que: $a=-6$, $b=13$, $c=-9$

La integral dada se transforma entonces en:

$$\int \frac{1}{x+2}dx - 6\int\frac{1}{(x+2)^2}dx + 13\int\frac{1}{(x+2)^3}dx - 9\int\frac{1}{(x+2)^4}dx = \ln|x+2| + \frac{6}{x+2} - \frac{13}{2}\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{3}{(x+2)^3} + C$$

b) Se descompone en fracciones simples:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^m(x-b)^n} = \frac{A_1}{x-a}+\ldots+\frac{A_m}{(x-a)^m}+\frac{B_1}{x-b}+\ldots+\frac{B_n}{(x-b)^n} = \frac{A_1(x-a)^{m-1}+\ldots+A_m}{(x-a)^m}+\frac{B_1(x-b)^{n-1}+\ldots+B_n}{(x-b)^n}$$

y llamando $q(x)$ y $r(x)$ a estos nuevos numeradores resulta que grado $q(x) \le m-1$ y grado $r(x) \le n-1$, es decir, grado $q(x) < m$ y grado $r(x) < n$.

c) Utilizando el apartado b, se puede escribir que:

$$\frac{1}{(x-2)^2(x-3)^2} = \frac{ax+b}{(x-2)^2}+\frac{cx+d}{(x-3)^2} = \frac{(ax+b)(x-3)^2+(cx+d)(x-2)^2}{(x-2)^2(x-3)^2}$$

De la igualdad $1=(ax+b)(x-3)^2+(cx+d)(x-2)^2$, resulta que:

si $x=3$, $1=3c+d$

si $x=2$, $1=2a+b$

si $x=0$, $1=9b+4d$

si $x=-1$, $1=-16a+16b-9c+9d$

de donde se obtiene $a=2$, $b=-3$, $c=-2$, $d=7$ y el problema se reduce a calcular $\int\frac{2x-3}{(x-2)^2}dx$ y $\int\frac{-2x+7}{(x-3)^2}dx$

Procediendo igual que en el apartado a $2x-3=2(x-2)+1$ y $-2x+7=-2(x-3)+1$, por lo que se tiene que:

$$\int\frac{2x-3}{(x-2)^2}dx = \int\frac{2}{x-2}dx+\int\frac{1}{(x-2)^2}dx = 2\ln|x-2| - \frac{1}{x-2}$$

$$\int\frac{-2x+7}{(x-3)^2}dx = \int\frac{-2}{x-3}dx+\int\frac{1}{(x-3)^2}dx = -2\ln|x-3| - \frac{1}{x-3}$$

Así pues: $\int\frac{dx}{(x-2)^2(x-3)^2} = 2\ln\left|\frac{x-2}{x-3}\right| - \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} + C$

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la única respuesta correcta en cada caso:

1. **Sea f la primitiva en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ de la función $g(x) = \frac{1+\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$ que toma el valor $-\frac{3}{2}$ en $x = 0$.**

El valor de $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ es:

A) $\frac{\pi}{2}$ B) 0 C) 1 D) $\frac{\pi}{4}$ E) Ninguna de las anteriores.

La respuesta correcta es la B.

Toda las primitivas f de $g(x) = \frac{1+\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$ responden a la fórmula $f(x) = \int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{tg} x)^2 + C$.

La dada verifica $f(0) = -\frac{3}{2}$, por lo que $-\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + C$ y $C = -2$.

Así pues, la función es $f(x) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{tg} x)^2 - 2$, que en $\frac{\pi}{4}$ vale $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}(1 + 1)^2 - 2 = 0$.

2. **Si $F(x)$ es la primitiva de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}$ que pasa por el origen.**

A) $F(x) = \frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\frac{3x}{2}$ C) $F(x) = \operatorname{arcsen}\frac{2x}{3}$ E) Ninguna de las anteriores.

B) $F\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$ D) $F(1) = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{2}{3}$

La respuesta correcta es la D. $F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}} dx$ y $F(0) = 0$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}} dx = \int \frac{1}{3\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}x\right)^2}} dx = \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}x\right)^2}} dx = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{2x}{3} + C.$$

Como $F(0) = 0$, es $0 = \frac{1}{2}\cdot 0 + C$ y $C = 0$, siendo entonces $F(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{2x}{3}$, por lo que $F(1) = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{2}{3}$.

3. **Sea f una función derivable, definida en $[1, +\infty)$ tal que $f(x) \cdot f'(x) = 1$, siendo $f(8) = 4$. Entonces:**

A) $f^2(x) + f(x) = 2x$ C) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ E) $f(x) = \sqrt{x}$

B) $f(2) = 2$ D) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f^2(x)}{x} = 0$

La respuesta correcta es la B. Si $f(x) \cdot f'(x) = 1$, es que $\frac{1}{2}f^2(x) = x + c$. Como $f(8) = 4$, es $\frac{1}{2}\cdot 4^2 = 8 + c$, por lo que $c = 0$ y $f^2(x) = 2x$, es decir, $f(x) = \sqrt{2x}$.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas:

4. **Sea $f(x) = \frac{5(x+1)}{2x^2 + x - 3}$ e I el intervalo $(1, +\infty)$:**

A) Para todo $x \in I$, $f(x) = \frac{1}{x+\frac{3}{2}} + \frac{1}{x-1}$

B) La función $F(x) = \frac{1}{2}\ln|2x+3| + 2\ln|x-1|$ es una primitiva de f sobre I.

C) Existe una primitiva F de f sobre I tal que $F(2) = 5$.

D) Existe una primitiva F de f sobre I tal que $F(2) = \pi$.

E) Existe una primitiva F de f sobre I tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 5$.

Las respuestas correctas son B, C y D.

5. Juan, que no sabe derivar, dice que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son primitivas de una misma función:

A) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$, $g(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$

B) $f x) = \cos 2x$, $g(x) = -2\cos^2 x$

C) $f(x) = \ln(2x^2+1)$, $g(x) = \ln(24x^2+12)$

D) $f(x) = \text{sen}^{\sqrt{2}} x \cdot \cos^8 x - \cos x$, $g(x) = \cos^5 x\, \text{sen}^{\sqrt{2}} x + \cos x$

E) $f(x) = \text{arctg}\, x$, $g(x) = -\text{arctg}\, \dfrac{1}{x}$

Dos funciones son primitivas de una misma función sólo si difieren en una constante.

A: $g(x) = \dfrac{2x+1}{x+1} = \dfrac{x+1}{x+1} + \dfrac{x}{x+1} = 1 + f(x)$, luego A es verdadera.

B: $f(x) - g(x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x + 2\cos^2 x = 3\cos^2 x - \text{sen}^2 x$, por lo que B es falsa.

C: $g(x) = \ln\left[12\left(2x^2+1\right)\right] = \ln 12 + \ln(2x^2+1) = \ln 12 + f(x)$ y C es verdadera.

D: $g(x) - f(x) = 2\cos x + \text{sen}^{\sqrt{2}} x \cos^5 x\,(1 - \cos^3 x)$ por lo que D es falsa.

E: $f(x) - g(x) = \text{arctg}\, x + \text{arctg}\, \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$, con lo que E es verdadera .

6. Sea f la función definida en R por la fórmula $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ y F la primitiva de f tal que $F(0) = 0$:

A) $F(1) = \dfrac{\pi}{4}$

B) Si G: $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to$ R con $G(x) = F(\text{tg}\, x)$, entonces $G(x)\, G'(x) = x$

C) $F\left(\dfrac{1}{2}\right) + F\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

D) Sea H: $(0, +\infty) \to$ R con $H(x) = F\left(\dfrac{1}{x+1}\right) + F\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$. Entonces $H(0) = \dfrac{\pi}{4}$

E) Para todo x positivo, $H'(x) = 0$

$F(x)$ es la función $F(x) = \text{arctg}\, x$.

$F(1) = \text{arctg}\, 1 = \dfrac{\pi}{4}$ y A es verdadera.

$G(x) = F(\text{tg}\, x) = \text{arctg}(\text{tg}\, x) = x$, por lo que $G'(x) = 1$ y $G(x)\, G'(x) = x$ con lo que B es también verdadera.

$F\left(\dfrac{1}{2}\right) + F\left(\dfrac{1}{3}\right) = \text{arctg}\dfrac{1}{2} + \text{arctg}\dfrac{1}{3} = \alpha$ con $\text{tg}\alpha = \text{tg}\left(\text{arctg}\dfrac{1}{2} + \text{arctg}\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1$, por lo que $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ y C es verdadera.

$H(0) = F(1) + F(0) = \text{arctg}\, 1 + \text{arctg}\, 0 = \dfrac{\pi}{4}$ y D es verdadera.

$H(x) = \text{arctg}\dfrac{1}{x+1} + \text{arctg}\dfrac{x}{x+2} = \alpha$ con $\text{tg}\,\alpha = \text{tg}\left(\text{arctg}\dfrac{1}{x+1} + \text{arctg}\dfrac{x}{x+2}\right) = \dfrac{\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+2}}{1 - \left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{x}{x+2}\right)} = \dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x+2} = 1$,

por lo que H es constante y $H'(x) = 0$, con lo que E es también verdadera.

Así pues, son verdaderas las cinco respuestas.

7. Las primitivas de $f(x) = 6$ sen x cos x son las funciones:

A) $F(x) = 3\,\text{sen}^2 x + C$ **C)** $F(x) = -\frac{3}{2}\cos 2x + C$ **E)** $F(x) = -3\cos^2 x + C$

B) $F(x) = 3\cos^2 x + C$ **D)** $F(x) = 3\cos 2x + C$

$\int 6\,\text{sen}\,x\cos x\,dx = \int 6t\,dt = 3t^2 = 3\,\text{sen}^2 x + C$ por lo que A es verdadera.

B es falsa pues las funciones $3\cos^2 x$ y $3\,\text{sen}^2 x$ no difieren en una constante sino en $3\cos 2x$.

C es verdadera pues $3\,\text{sen}^2 x + \frac{3}{2}\cos 2x = 3\,\text{sen}^2 x + \frac{3}{2}\cos^2 x - \frac{3}{2}\text{sen}^2 x = \frac{3}{2}\text{sen}^2 x + \frac{3}{2}\cos^2 x = \frac{3}{2}$, es decir, difieren en una constante, por lo que si la respuesta A es verdadera, C también lo es.

D es falsa pues las funciones dadas por D y C difieren en $\frac{9}{2}\cos 2x$.

E es verdadera ya que las funciones dadas por A y E difieren en una constante: $3\,\text{sen}^2 x - (-3\cos^2 x) = 3$.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas:

8. Sea $f(x)$ una función continua.
a) $F(x)$ es la primitiva de f que pasa por el origen.
b) $F(x)$ se ha obtenido tomando $C = 0$ en la expresión $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

A) a $\Leftrightarrow$ b **C)** b $\Rightarrow$ a pero a $\not\Rightarrow$ b **E) Ninguna de las anteriores.**

B) a $\Rightarrow$ b pero b $\not\Rightarrow$ a **D) a y b se excluyen entre sí.**

La respuesta correcta es la E.

Las afirmaciones a y b no tienen nada que ver, por ejemplo, $f(x) = e^x$. Según a, $F(x)$ sería $e^x - 1$ y en b $F(x) = e^x$.

Nota: Si $f(x)$ fuera una función polinómica, la respuesta sería a $\Leftrightarrow$ b.

Señala el dato innecesario para contestar:

9 La aceleración de una partícula está dada por $\frac{dv}{dt} = a + bt + c\cos(2\pi t)$. Se pide la velocidad, v, en $t = 2$ y se dispone de los siguientes datos:

a) $v(0)$ **b)** $v\left(-\frac{1}{4}\right)$ **c)** $v\left(-\frac{1}{2}\right)$ **d)** $v(-1)$

A) Puede eliminarse el dato a. C) Puede eliminarse el dato c. E) No puede eliminarse ningún dato.
B) Puede eliminarse el dato b. D) Puede eliminarse el dato d.

La respuesta correcta es la B. Como $\frac{dv}{dt} = a + bt + c\cos(2\pi t)$, se tiene que $v(t) = at + \frac{b}{2}t^2 + \frac{c}{2\pi}\,\text{sen}\,(2\pi t) + d$, por lo que $v(2) = 2a + 2b + d$ y basta calcular a, b y d.

b) $v\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}a + \frac{1}{32}b - \frac{1}{2\pi}c + d.$

Así pues, los valores que nos hacían falta, a, b y d los podemos obtener con los datos a, c y d.

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar la cuestión:

10. Para calcular $\int f(x)\cos^2 x\,dx$ y $\int f(x)\,\text{sen}^2 x\,dx$ siendo f una función continua y $\int f(x)\cos^2 x\,dx$ no elemental, se sabe que:

a) $\int f(x)\,dx = g(x) + C$; **b)** $\int f(x)\cos 2x\,dx = h(x) + C$.

A) Cada información es suficiente por sí sola. D) Son necesarias las dos juntas.
B) a es suficiente por sí sola, pero b, no. E) Hacen falta más datos.
C) b es suficiente por sí sola, pero a, no.

La respuesta correcta es la D. Se llama $I = \int f(x)\cos^2 x\,dx$, $J = \int f(x)\,\text{sen}^2 x\,dx$.

$\int f(x)\cos^2 x\,dx + \int f(x)\,\text{sen}^2 x\,dx = \int f(x)\,dx = g(x)$ y $\int f(x)\cos^2 x\,dx - \int f(x)\,\text{sen}^2 x\,dx = \int f(x)\cos 2x\,dx = h(x)$.

Así pues, con los dos datos juntos a y b, podemos calcular I y J pues: $\begin{cases} I + J = g(x) \\ I - J = h(x) \end{cases}$