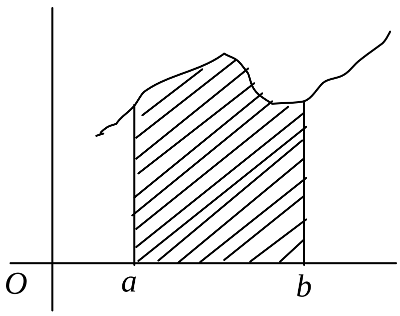
INTEGRAL DEFINIDA

Sea *f* una función continua y positiva en el intervalo $[a,b]$. La gráfica de la función *f*, y las rectas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$, determinan una región del plano que recibe el nombre de ***trapecio mixtilíneo***.



El problema que nos planteamos ahora es calcular el área de dicho trapecio mixtilíneo, área que dependerá de la función *f* y del intervalo $[a,b]$.

Una vez que sepamos calcular el área de este tipo de recintos podremos hallar la superficie de recintos más complicados, descomponiendo la región en trapecios mixtilíneos.

Veamos como desarrollamos el proceso:

PARTICIÓN DE UN INTERVALO.

Se llama **PARTICIÓN** de un intervalo $[a,b]$ a una sucesión *P* de puntos del intervalo $[a,b]$ de los cuales el primero coincide con *a* y el último coincide con *b*; es decir,

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\} \text{ tal que } a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

Se llama **DIÁMETRO** de una partición *P* a la mayor de las diferencias $x_i - x_{i-1}$ tal que $i = 1, 2, 3, \cdots, n$.

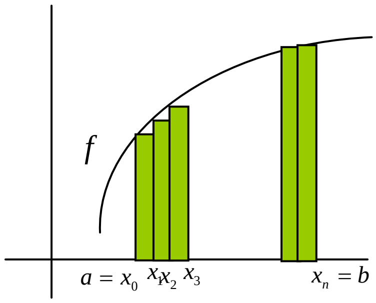
$$\delta(P) = \text{máx}\{x_i - x_{i-1} / i = 1,2,3,\cdots,n\}$$

Sean dos particiones *P* y *Q* del mismo intervalo cerrado $[a,b]$. Se dice que la partición *Q* es más fina que la partición *P*, si se verifica que todo punto de *P* pertenece a *Q*, es decir, Q tiene los mismos puntos que *P* y algunos más.

Esta relación así definida hace que el conjunto de particiones de un intervalo sea un conjunto ordenado.

SUMA INFERIOR Y SUMA SUPERIOR.

Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ que supondremos que se mantiene positiva en dicho intervalo. Por el teorema de Weierstrass, la función $f(x)$ alcanzará en dicho intervalo su valor máximo *M* y su valor mínimo *m*.



Dada una partición *P* del intervalo $[a,b]$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, es evidente que si *f* es continua en $[a,b]$, también lo será en cada uno de los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ tal que $i = 1, 2, 3, \cdots, n$.

Por tanto, f tendrá, en cada uno de estos intervalos, un máximo y un mínimo, que designaremos por:

m_i el mínimo de f en $[x_{i-1}, x_i]$

M_i el máximo de f en $[x_{i-1}, x_i]$

Se llama ***SUMA INFERIOR*** de f asociada a la partición P, y la representaremos por $\boldsymbol{s(f,P)}$, al número real dado por

$$\boldsymbol{s(f,P) = m_1 \cdot (x_1 - x_0) + m_2 \cdot (x_2 - x_1) + \cdots + m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) + \cdots + m_n \cdot (x_n - x_{n-1})}$$

o más abreviadamente: $\boldsymbol{s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1})}$

Geométricamente, esta suma inferior corresponde a la suma de las áreas de los rectángulos inferiores o inscritos a la gráfica de la función f. Es una aproximación por defecto del área del trapecio mixtilíneo limitado por la gráfica de la función f, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Se llama ***SUMA SUPERIOR*** de f asociada a la partición P, y la representaremos por $\boldsymbol{S(f,P)}$, al número real dado por

$$\boldsymbol{S(f,P) = M_1 \cdot (x_1 - x_0) + M_2 \cdot (x_2 - x_1) + \cdots + M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) + \cdots + M_n \cdot (x_n - x_{n-1})}$$

o más abreviadamente $\boldsymbol{S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1})}$

Geométricamente, esta suma superior corresponde a la suma de las áreas de los rectángulos superiores o circunscritos a la gráfica de la función f. Es una aproximación por exceso del área del trapecio mixtilíneo limitado por la gráfica de la función f, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Es evidente que si f es una función continua en $[a,b]$, para toda partición P del intervalo se verifica que:

$$\boldsymbol{s(f,P) \le S(f,P)} \text{ ya que } \boldsymbol{m_i \le M_i}.$$

PROPIEDADES DE LAS SUMAS INFERIORES Y SUPERIORES.

1. Si tenemos dos particiones P y Q del intervalo $[a,b]$, tales que $P \subset Q$, entonces se verifica que

$$\boldsymbol{s(f,P) \le s(f,Q)} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{S(f,P) \ge S(f,Q)}$$

2. Dadas dos particiones cualesquiera P y Q del intervalo $[a,b]$, se verifica que

$$\boldsymbol{s(f,P) \le S(f,Q)}$$

es decir, cualquier suma inferior está acotada por cualquier suma superior o, de otra forma, toda suma inferior es menor que cualquier suma superior.

DEFINICIÓN DE ÁREA DEL TRAPECIO MIXTILÍNEO.

Si $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n, \cdots$ es una sucesión de particiones del intervalo $[a,b]$ tales que $P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \cdots \subset P_n \subset \cdots$ se obtienen las sucesiones de sumas

$$s(f,P_1) \leq s(f,P_2) \leq s(f,P_3) \leq \cdots \leq s(f,P_n) \leq \cdots$$

$$S(f,P_1) \geq S(f,P_2) \geq S(f,P_3) \geq \cdots \geq S(f,P_n) \geq \cdots$$

siendo la primera creciente y acotada superiormente por cualquier suma superior, la segunda es decreciente y acotada inferiormente por cualquier suma inferior y tendiendo su diferencia a cero, es decir

$$S(f,P_n) - s(f,P_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

El límite común de estas sucesiones sería el área del trapecio mixtilíneo determinado por la gráfica de la función f y las rectas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$.

INTEGRAL DEFINIDA.

Este proceso que nos ha permitido obtener el área del trapecio mixtilíneo podemos generalizarlo para definir la integral definida en un intervalo $[a,b]$ donde la función puede tomar valores positivos o negativos.

Las sumas superiores e inferiores se definen de la misma forma, pero ahora no representan, en general, áreas ya que la función puede tomar valores negativos en ciertos subintervalos.

Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$, podríamos demostrar que si $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n, \cdots$ es una sucesión de particiones del intervalo $[a,b]$, tanto las sumas superiores como las sumas inferiores se aproximan al mismo valor, siempre que

a) $P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \cdots \subset P_n \subset \cdots$

b) El diámetro de la partición P_n tiende a 0 cuando $n \to \infty$

En este caso los límites de las sucesiones de sumas superiores y de sumas inferiores existen y son iguales:

$$\lim_{n \to \infty} s(f,P_n) = \lim_{n \to \infty} S(f,P_n)$$

Este límite común recibe el nombre de **INTEGRAL DEFINIDA** de la función f en $[a,b]$, y se representa por $\int_a^b f(x) \cdot dx$

Los números a y b se llaman ***límites inferior y superior de integración***. La función f recibe el nombre de integrando.

Una función, sea o no continua, en la que se verifica la relación

$$\lim_{n \to \infty} s(f,P_n) = \lim_{n \to \infty} S(f,P_n)$$

se dice que es integrable.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

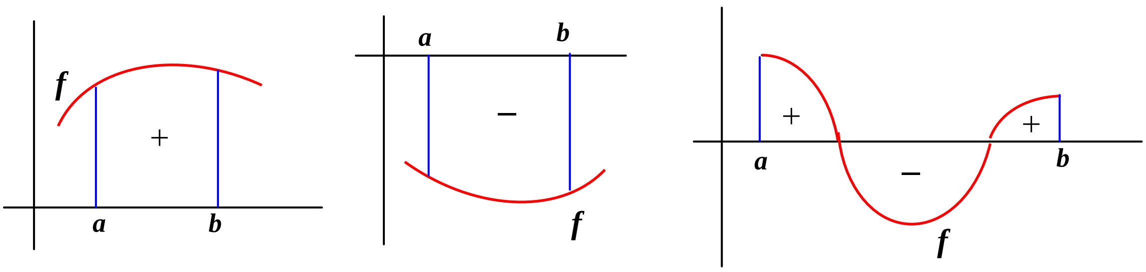
1. $\int_a^a \boldsymbol{f(x)\cdot dx = 0}$ cualquiera que sea la función *f*.

2. Si $f(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\cdot dx > 0$.

   Si $f(x) < 0 \quad \forall x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\cdot dx < 0$.

   Por tanto, si *f* cambia de signo en $[a,b]$, la $\int_a^b f(x)\cdot dx$ nos da la suma algebraica de las áreas que están por encima y por debajo del eje *OX*, cada una con su signo.

   Gráficamente:



   Si quisiéramos calcular el área en términos absolutos, tendríamos que calcular la integral de cada recinto y, antes de sumar, cambiar de signo las negativas.

3. Si $a < c < b$ y *f* es continua en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\cdot dx = \int_a^c f(x)\cdot dx + \int_c^b f(x)\cdot dx$

4. Si permutamos los límites de integración, la integral cambia de signo:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = -\int_b^a f(x)\cdot dx$$

5. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\cdot dx = \int_a^b f(x)\cdot dx \pm \int_a^b g(x)\cdot dx$

6. $\int_a^b K\cdot f(x)\cdot dx = K\cdot \int_a^b f(x)\cdot dx$

   Estas dos últimas propiedades determinan la linealidad de la integral definida respecto de la suma y el producto por un número real.

7. Si f y g son dos funciones continuas en un intervalo $[a,b]$, tales que $f(x) \le g(x)$ para todo punto *x* de $[a,b]$, entonces: $\int_a^b \boldsymbol{f(x)\cdot dx} \le \int_a^b \boldsymbol{g(x)\cdot dx}$

8. $\int_a^b \boldsymbol{f(x)\cdot dx} \le \int_a^b \boldsymbol{|f(x)|\cdot dx}$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO INTEGRAL.

Si f es una función continua en $[a,b]$, entonces existe un número $c \in [a,b]$, tal que:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = f(c)\cdot(b-a)$$

Demostración.

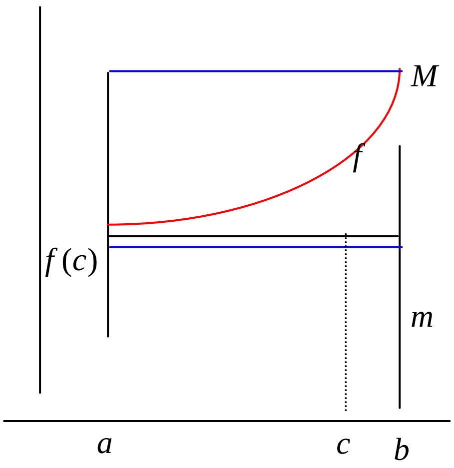
Por ser f continua en un cerrado $[a,b]$, se verificará en él el teorema de Weierstrass y la función alcanza dentro de dicho intervalo su máximo y su mínimo, es decir:

$$m \le f(x) \le M \qquad \forall x \in [a,b]$$

Aplicando las propiedades de la integral definida, tendremos:

$$\int_a^b m.dx \le \int_a^b f(x).dx \le \int_a^b M.dx$$

Si consideramos una partición del intervalo $[a,b]$ con sólo los puntos extremos nos quedará:



$$m\cdot(b-a) \le \int_a^b f(x).dx \le M\cdot(b-a)$$

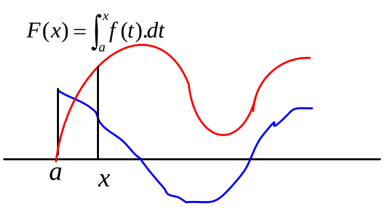
Dividiendo por $(b-a)$ obtenemos:

$$m \le \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x).dx \le M$$

Como la función f es continua en el intervalo $[a,b]$ tomará todos los valores comprendidos entre el valor mínimo y el máximo. Por tanto, existirá un punto $c \in [a,b]$ para el cual se verifique que $f(c) = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x).dx$ y, en consecuencia, $\int_a^b f(x).dx = f(c)\cdot(b-a)$.

LA INTEGRAL Y SU RELACIÓN CON LA DERIVADA.

Con la definición de la integral definida vista hasta este momento, tan sólo podemos calcular dicha integral para funciones sencillas. En el caso de otras funciones más complicadas deberemos buscar otros métodos para buscar dicha integral.



Dada la función f, continua en $[a,b]$, a partir de ella podríamos considerar la función $F(x) = \int_a^x f(t)\cdot dt$ que nos da el área contenida bajo la función f entre "a", un punto variable x y el eje OX.

Cuanto mayor sea la ordenada de f más rápidamente crecerá el área bajo ella, es decir, F, y su derivada será positiva. Cuando f es negativa, lo es el área: F decrece y su derivada F' es negativa.

Veamos que la derivada de esta función F coincide con la función *f*.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL.

Si *f* es una función continua en $[a,b]$, la función $F(x)=\int_a^x f(t)\cdot dt$ definida para cada $x\in[a,b]$, es derivable y se verifica que $F'(x)=f(x)$. **(*F* es una primitiva de *f*).**

Demostración:

Para estudiar si *F* es derivable tratemos de calcular su derivada:

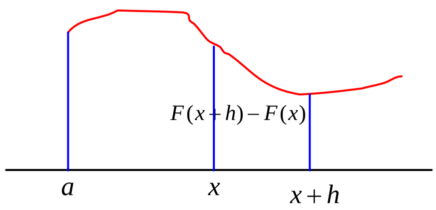
$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

El numerador

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=$$

$$=\int_a^{x+h} f(t)dt+\int_x^a f(t)dt=$$

$$=\int_x^a f(t)dt+\int_a^{x+h} f(t)dt=\int_x^{x+h} f(t)dt$$



Por el teorema del valor medio del cálculo integral, al ser *f* continua en $[x,x+h]$, existirá un $c\in[x,x+h]$ tal que

$$\int_x^{x+h} f(t).dt=f(c)\cdot(x+h-x)=f(c)\cdot h$$

Por tanto:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)\cdot dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\cdot f(c)}{h}=\lim_{h\to 0} f(c)$$

Como $c\in[x,x+h]$ y la función *f* es continua, entonces: $\lim_{h\to 0} f(c)=f(x)$

En consecuencia, la función *F*(*x*) es derivable y su derivada es *f*(*x*). Esto nos quiere decir que la función *F*(*x*) es una primitiva de la función *f*(*x*).

La consecuencia práctica más importante del teorema fundamental del cálculo integral es la siguiente regla:

REGLA DE BARROW.

Si *f*(*x*) es continua en $[a,b]$ y *G*(*x*) es una primitiva de *f*(*x*), entonces

$$\int_a^b f(t)\cdot dt=G(b)-G(a)$$

En efecto, por el teorema fundamental del cálculo integral sabemos que $F(x)=\int_a^x f(t)\cdot dt$ es una primitiva de $f(x)$.

Si $G(x)$ es otra primitiva de $f(x)$, $F(x)$ y $G(x)$ se diferenciarán en una constante, es decir, que $F(x) = G(x) + K$.

Por tanto, $F(x)=\int_a^x f(t)\cdot dt = G(x)+K$

Si le damos a x el valor a, tendremos:

$$F(a)=\int_a^a f(t)\cdot dt = G(a)+K=0 \quad \Rightarrow \quad K=-G(a)$$

y nos queda que

$$\int_a^x f(t)\cdot dt = G(x)-G(a)$$

Si ahora sustituimos x por b, obtenemos: $\int_a^b f(t)\cdot dt = G(b)-G(a)=\left[G(t)\right]_a^b$ como queríamos demostrar.

EJEMPLOS:

- $\int_1^3 (2x-3)\cdot dx = \left[x^2-3x\right]_1^3 = (3^2-3\cdot 3)-(1^2-3\cdot 1)=(9-9)-(1-3)=0-(-2)=2$
- $\int_1^e \frac{1}{x}\cdot dx = \left[Lx\right]_1^e = Le-L1=1-0=1$
- $\int_2^3 \frac{1}{x.(Lx)^4}\cdot dx$

  Calculamos primeramente una primitiva:

  $$\int \frac{1}{x.(Lx)^4}\cdot dx = \int \frac{1}{x}\cdot (Lx)^{-4}\cdot dx = \frac{(Lx)^{-3}}{-3}=-\frac{1}{3(Lx)^3}$$

  Entonces:

  $$\int_2^3 \frac{1}{x.(Lx)^4}\cdot dx = \left[-\frac{1}{3(Lx)^3}\right]_2^3 = -\frac{1}{3(L3)^3}-\left(-\frac{1}{3(L2)^3}\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{(L3)^3}+\frac{1}{(L2)^3}\right)$$

- Calcula la integral definida $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 x\cdot \cos^4 x\cdot dx$

  Hallaremos primero una primitiva del integrando:

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x dx = \int \operatorname{sen} x(1-\cos^2 x)\cos^4 x dx = \int \operatorname{sen} x \cos^4 x dx - \int \operatorname{sen} x \cos^6 x dx =$$

$$= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7}$$

Por tanto, la integral definida será:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x dx = \left(-\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\frac{\cos^5 \frac{\pi}{2}}{5} + \frac{\cos^7 \frac{\pi}{2}}{7}\right) - \left(-\frac{\cos^5 0}{5} + \frac{\cos^7 0}{7}\right) =$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35}$$

- Calcular $G'(x)$ sabiendo que la función G es: $G(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2+1} \cdot dt$

Por el teorema fundamental del cálculo integral, tenemos:

$$G(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2+1} \cdot dt = \int_1^x f(t).dt \quad \Rightarrow \quad G'(x) = f(x)$$

Por tanto, $G'(x) = f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

- Calcular la derivada de la función $F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} \cdot dt$

Consideremos que $G(x) = \int f(x).dx$, es decir, G es una primitiva de f y, por tanto,

$$G'(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad G'(x) = e^{-x^2}$$

Aplicando la regla de Barrow, tendremos:

$$F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} \cdot dt = G(2x) - G(x)$$

Calculamos la derivada de $F(x)$:

$$F'(x) = G'(2x) \cdot 2 - G'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$$

- Determina los máximos y mínimos relativos de la función f definida por
$f(x) = \int_0^x (t^3 - 4t).dt$

Teniendo en cuenta el teorema fundamental del Cálculo Integral, la derivada de la función f nos viene dada por la función $f'(x) = x^3 - 4x$ ya que la función que aparece en el integrando de f es continua. Para calcular los máximos y mínimos relativos de la función f anulamos esta derivada: $f'(x) = x^3 - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x^2-4) = 0 \quad \Rightarrow \; x = 0, \;\; x = 2, \;\; x = -2$
Para estudiar si corresponden a máximos o a mínimos estudiamos el signo de la derivada segunda: $f''(x) = 3x^2 - 4$ en cada uno de estos puntos:

$f''(-2) = 8 > 0 \Rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en $x = -2$.

$f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow f$ tiene un máximo relativo en $x = 0$.

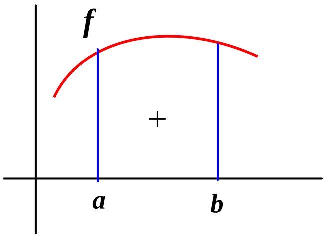
$f''(2) = 8 > 0 \Rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en $x = 2$.

APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA AL CÁLCULO DE ÁREAS.

El problema que se nos plantea en este momento es calcular el área del recinto limitado por la gráfica de una función y determinadas rectas. Antes de aplicar la integral definida conviene, siempre que sea posible, representar el recinto correspondiente y después, por sumas o restas de integrales, hallaremos el área pedida.

Podemos considerar las siguientes situaciones:

1. La función es positiva en el intervalo $[a,b]$.



Sea f una función continua en $[a,b]$ tal que $f(x)\geq 0$ en todo punto del intervalo. Las rectas $x=a,\ x=b$ e $y=0$ con la gráfica de la función determinan un recinto cuya área queremos calcular. Este recinto es un trapecio mixtilíneo cuya área nos viene dada por:

$$A(R)=\int_a^b f(x).dx$$

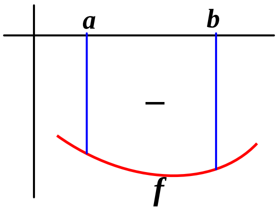
EJEMPLO.

- Halla el área del recinto limitado por la parábola $y=x^2$, el eje OX, la recta $x=1$ y la recta $x=3$.

  Puesto que la función es positiva en todo su dominio, el área del recinto nos vendrá dada por:

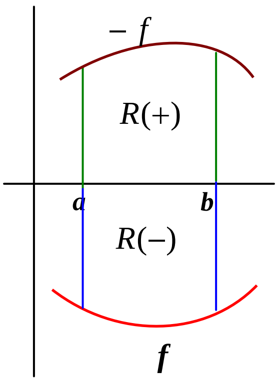
$$A(R)=\int_1^3 x^2.dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3=\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{27}{3}-\frac{1}{3}=\frac{26}{6}\text{ u.s.}$$

2. La función es negativa en el intervalo $[a,b]$.



Consideremos una función f continua en $[a,b]$ tal que $f(x)\leq 0$ para todo valor x del intervalo. El recinto delimitado por la gráfica de la función y las rectas $x=a,\ x=b$ e $y=0$ queda situado por debajo del eje de abscisas.

El área del recinto es la del trapecio mixtilíneo, pero ya no nos viene dada por la integral



definida $\int_a^b f(x).dx$ puesto que al ser f negativa, la integral definida es negativa.

Si consideramos la función opuesta $(-f)$, el nuevo recinto limitado por esta función y las rectas dadas, es igual al anterior, por ser simétricos respecto del eje de abscisas.

En consecuencia, sus áreas serán iguales y tendremos:

$$A(R(-)) = A(R(+)) = \int_a^b (-f)(x).dx = -\int_a^b f(x).dx$$

que es el valor absoluto de la integral definida.

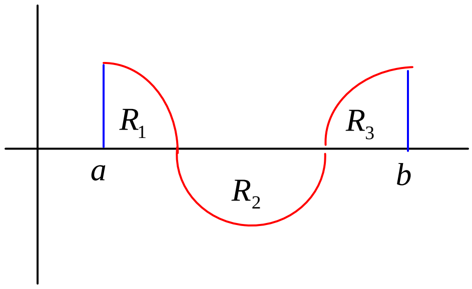
EJEMPLO.

- Halla el área del recinto limitado por la curva $y = -x^2$, el eje OX, y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

$$A(R) = -\int_{-2}^{2} (-x^2).dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \text{ u.s.}$$

3. La función toma valores positivos y negativos en el intervalo $[a,b]$.

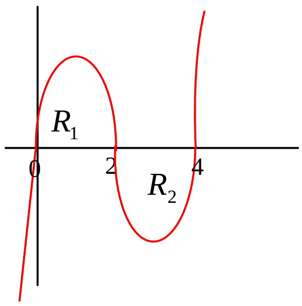
Cuando una función continua *f*(*x*) no tiene signo constante en el intervalo $[a,b]$, su gráfica determina con el eje OX varias regiones $R_1, R_2, R_3, \ldots$



En este caso el área del recinto pedido será la suma de las áreas de cada uno de los recintos. No podemos calcular la integral definida entre a y b, sino que será necesario calcular las áreas de cada uno de los recintos $R_1, R_2, R_3, \ldots$ y sumarlas después.

EJEMPLO:

- Calcula el área limitada por la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje OX.



Los puntos de corte de nuestra función con el eje OX son: $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$

El recinto cuya área queremos calcular se descompone en dos recintos: uno situado por encima del eje y el otro por debajo.

Por tanto:

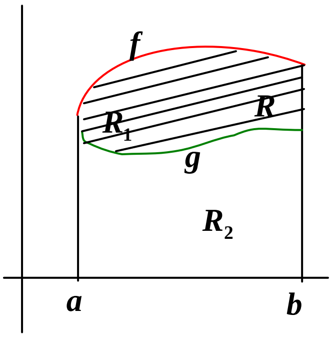
$$A(R) = A(R_1) + A(R_2) = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x).dx - \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x).dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x\right]_0^2 - \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x\right]_2^4 = 4 - (-4) = 8 \text{ u.s.}$$

4. Área del recinto donde intervienen dos funciones.

El problema que se nos plantea ahora es el de calcular el área del recinto limitado por las gráficas de dos funciones continuas y las rectas $x = a$ y $x = b$. Si las gráficas se cortan en dos o más puntos pueden determinar un recinto cuya área es posible calcular. En este caso, hay que hallar los puntos de corte de las dos curvas.

- **Las dos funciones son positivas en $[a,b]$ y no se cortan.**



En este caso, el área del recinto limitado por las dos funciones es igual a la diferencia de las áreas de los trapecios mixtilíneos determinados por las funciones.

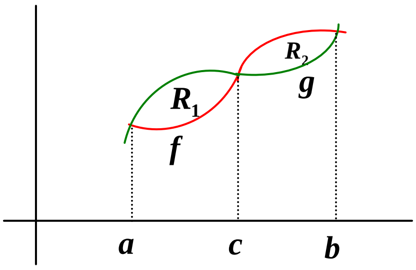
$$\acute{A}rea(R) = \acute{A}rea(R_1) - \acute{A}rea(R_2) =$$

$$= \int_a^b f(x).dx - \int_a^b g(x).dx = \int_a^b [f(x) - g(x)].dx$$

- **Las funciones son positivas o negativas en $[a,b]$ y no se cortan.**

En este caso es válida la expresión anterior ya que a partir de las funciones f y g podemos obtener las funciones $f + k$ y $g + k$, siendo $k > 0$ y suficientemente grande, que serían positivas; el recinto delimitado por las nuevas funciones tiene igual área que el recinto primitivo.

- **Las dos funciones se cortan.**



En este caso se consideran los subintervalos donde las funciones cumplen las condiciones de casos anteriores.

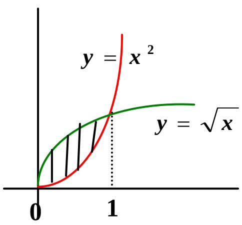
En este caso tendríamos:

$$\acute{A}rea(R) = \acute{A}rea(R_1) + \acute{A}rea(R_2) = \int_a^c [g(x) - f(x)].dx + \int_c^b [f(x) - g(x)].dx$$

Ejemplos.

- Halla el área del recinto limitado por las parábolas $y = x^2$ e $y^2 = x$.

Dibujamos el recinto limitado por las curvas y calculamos los puntos de corte de ellas:



$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y^2 = x \end{array}\right\} \Rightarrow (x^2)^2 = x \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

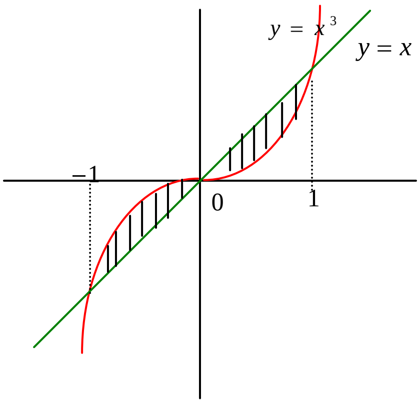
El área del recinto nos vendrá dada por:

$$A(R)=\int_0^1 \sqrt{x}\cdot dx-\int_0^1 x^2\cdot dx=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\cdot dx=\int_0^1(x^{\frac{1}{2}}-x^2)\cdot dx=$$

$$=\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)-0=\frac{1}{3}\text{ u.s.}$$

- El área de la región comprendida entre las gráficas de $y=x^3$ e $y=x$ (mira el dibujo) no se puede calcular mediante la integral $\int_{-1}^{1}(x^3-x).dx$

  Explica por qué sucede eso y calcula dicha área.



La $\int_a^b f(x)\cdot dx$ nos da la suma algebraica de las áreas que están por encima y por debajo del eje *OX*, cada una con su signo. Si tenemos en cuenta que el recinto entre –1 y 0, está situado por debajo del eje, la integral definida en ese intervalo será negativa. En el intervalo comprendido entre 0 y 1, el recinto se encuentra por encima del eje OX y la integral definida entre 0 y 1 será positiva.

Al calcular la integral definida entre –1 y 1, se sumarían la positiva y la negativa y, en consecuencia, no nos daría el área de la región comprendida entre las dos funciones.

Si tenemos en cuenta que las dos funciones dadas son simétricas respecto del origen, el área que se encuentra por encima del eje OX es igual que el que se encuentra por debajo. Luego, la integral definida entre –1 y 1 daría cero y el área del recinto nos vendrá dada por:

$$A(R)=2\int_0^1(x-x^3).dx=2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\text{ u.s.}$$

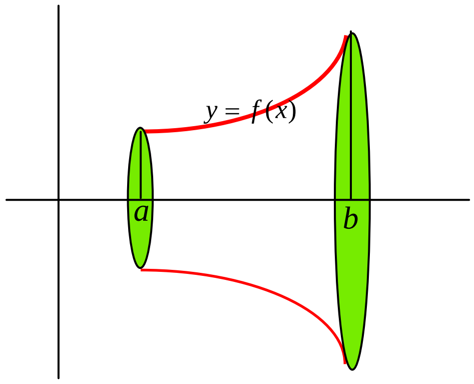
O también:

$$A(R)=\int_{-1}^{0}(x^3-x).dx+\int_0^1(x-x^3).dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=$$

$$=\left(0-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\text{ u.s.}$$

VOLUMEN DE UN CUERPO DE REVOLUCIÓN.

Consideremos una función f continua definida en un intervalo $[a,b]$. La gráfica de esta función con las rectas $x = a,\ \ x = b$ e $y = 0$ determina un recinto R que al girar alrededor del eje OX engendra un cuerpo de revolución.



Vamos a tratar de calcular el volumen de este cuerpo de revolución: consideremos una partición del intervalo $[a,b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

Esta partición divide el cuerpo en n cilindros: la suma de los volúmenes de estos cilindros será una aproximación al volumen del cuerpo de revolución que nos ocupa.
Si tenemos en cuenta el volumen del cilindro

la suma de los volúmenes de los cilindros asociados a nuestra partición será:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi.[f(c_i)]^2.(x_i - x_{i-1})$$

donde: $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ (punto intermedio del intervalo)

$x_i - x_{i-1} \equiv$ altura de los cilindros

$f(c_i) \equiv$ radio de la base de los cilindros

Si el número de puntos de la partición aumenta, aumentarán también los cilindros y la suma de sus volúmenes se aproximará cada vez más al volumen del cuerpo de revolución. Por tanto:

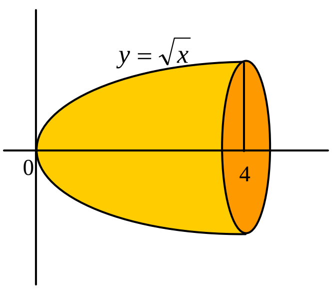
$$V(f,a,b) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi.[f(c_i)]^2.(x_i - x_{i-1})$$

Si tenemos en cuenta la definición de integral definida, nos queda que:

$$V(f,a,b) = \int_a^b \pi \cdot f^2(x).dx = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) \cdot dx$$

EJEMPLO.

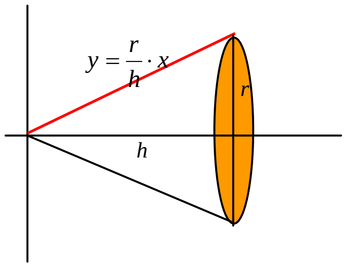
- **Calcular el volumen engendrado al girar la parábola $y = \sqrt{x}$ alrededor del OX entre 0 y 4.**



$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 \cdot dx = \pi \int_0^4 x \cdot dx = \pi \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{4^2}{2} - 0\right) = 8\pi \ \text{u.v.}$$

- **Utilizando el cálculo integral, determina el volumen de un cono circular recto de radio *r* y altura *h*.**

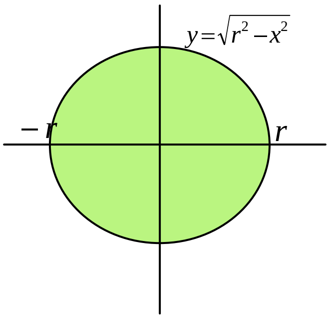


La ecuación de la recta que gira alrededor del eje OX para generar en el intervalo $[0,h]$ un cono de radio r y altura h es $y=\frac{r}{h}\cdot x$ Por tanto, el volumen del cono nos vendrá dado por

$$V=\pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}\cdot x\right)^2\cdot dx=\pi\cdot\frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2\cdot dx=\pi\cdot\frac{r^2}{h^2}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\pi\cdot\frac{r^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

que es la fórmula del volumen del cono.

- **Utilizando el cálculo integral, determina el volumen de una esfera de radio *r*.**



La esfera se engendra al girar una circunferencia de ecuación $x^2+y^2=r^2$ alrededor del eje OX.

En consecuencia, el volumen de la esfera nos vendrá dado por

$$V=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\cdot dx=\pi\cdot\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}=\pi\cdot\left[\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)-\left(r^2(-r)-\frac{(-r)^3}{3}\right)\right]=$$

$$=\pi\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot r^3-\left(-r^3-\frac{-r^3}{3}\right)\right]=\pi\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot r^3+\frac{2}{3}\cdot r^3\right]=\frac{4}{3}\pi r^3$$