INTEGRACIÓN.

INTEGRALES INDEFINIDAS. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN.

PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN. INTEGRAL INDEFINIDA.

Sean f y F dos funciones reales definidas en un mismo dominio. Diremos que F es una función primitiva de f, o simplemente una primitiva de F, si F tiene por derivada f.

$$\boldsymbol{F \text{ es primitiva de } f \quad \Leftrightarrow \quad F'(x) = f(x)}$$

En notación diferencial:

$$\boldsymbol{F \text{ es primitiva de } f \quad \Leftrightarrow \quad d\,F(x) = f(x) \cdot dx}$$

EJEMPLOS:

- Si $\boldsymbol{f(x) = 2x,}$ entonces puede ser $\boldsymbol{F(x) = x^2}$
- Si $\boldsymbol{f(x) = \cos x,}$ entonces puede ser $\boldsymbol{F(x) = \operatorname{sen} x}$

La operación que permite obtener una primitiva F a partir de una función f recibe el nombre de **INTEGRACIÓN**. Si existe la función F se dice que la función f es integrable.

Una función puede tener varias primitivas, por ejemplo, la función $\boldsymbol{f(x) = 2x,}$ podría tener como primitivas las funciones $\boldsymbol{F_1(x) = x^2,\quad F_2(x) = x^2 + 2,\quad F_3(x) = x^2 - 7,\ \cdots}$
ya que

$$\boldsymbol{F_1'(x) = F_2'(x) = F_3'(x) = \cdots = f(x)}$$

Teniendo en cuenta esto, podríamos demostrar la siguiente

Proposición.

Sean f, F, G tres funciones definidas de D en R, tal que F y G son dos primitivas de f. Entonces, la función $F - G$ es otra función de D en R y además es constante.

De otro modo:

Dos primitivas de una misma función se diferencian a lo sumo en una constante.

En efecto, si F y G son primitivas de la misma función f, quiere decir que $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = f(x)$.

Restando, miembro a miembro, ambas igualdades, tendremos:

$$F'(x) - G'(x) = 0 \ \Rightarrow\ (F-G)'(x) = 0 \ \Rightarrow\ (F-G)(x) = cte. \ \Rightarrow\ F(x) - G(x) = cte. \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x) = G(x) + cte.$$

DEFINICIÓN.

Dada una función f, se llama integral indefinida de f al conjunto de sus infinitas primitivas $\{F + K\}$.

La integral indefinida se representa por $\int \boldsymbol{f(x).dx}$

El símbolo $\int$ se lee **«integral de...»** y $\boldsymbol{f(x).dx}$ se llama **integrando**. El número real $\boldsymbol{K}$ recibe el nombre de **«constante de integración».**

EJEMPLOS:

1. $\int \cos x.dx = \operatorname{sen} x + K$ ya que la derivada del seno es el coseno.

2. $\int 4x^3 dx = x^4 + K$

3. $\int 2x dx = x^2 + K$

La integral indefinida es una familia de funciones dependiente de un parámetro cuyas gráficas se obtienen por traslación de una primitiva.

Para la determinación de una primitiva es necesario conocer la constante de integración; para ello necesitamos alguna otra condición, como puede ser el valor que toma la función primitiva en un punto del dominio o un punto por el que pasa la gráfica de la función.

Ejemplo:

1. **Halla una primitiva de la función $\boldsymbol{f(x) = 2x}$, cuya gráfica pasa por el punto $\boldsymbol{P}$(1,3).**

   Las primitivas de f son de la forma $F(x) = x^2 + K$

   Puesto que la gráfica pasa por P(1,3), tendremos

   $$F(1) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 3 = 1 + K \quad \Leftrightarrow \quad K = 2$$

   Por tanto, la primitiva pedida será $F(x) = x^2 + 2$.

2. **Hallar la ecuación de la primitiva de la función $\boldsymbol{f(x) = e^x}$ que pasa por el punto $\boldsymbol{P}$(0,4).**

   Las primitivas de f son de la forma $F(x) = e^x + K$

   Puesto que la gráfica pasa por P(0,4), tendremos

   $$F(0) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 4 = e^0 + K \quad \Leftrightarrow \quad 4 = 1 + K \quad \Leftrightarrow \quad K = 3$$

   Por tanto, la primitiva buscada será $F(x) = e^x + 3$.

Siendo $F'(x) = f(x)$, para cualquier primitiva $F(x)$ de $f(x)$, se verificará que $dF(x) = F'(x).dx = f(x).dx.$ En consecuencia, la expresión $f(x).dx$ es la diferencial de cualquier primitiva de $f(x)$ y, por tanto, podemos escribir

$$\int dF(x) = F(x) + K \text{ en particular } \int dx = x + K$$

o también: $$d\int f(x).dx = d(F(x) + K) = f(x).dx$$

Estas expresiones nos establecen que las operaciones “diferenciar” e “integrar” son operaciones inversas o recíprocas.

PROPIEDADES LINEALES DE LA INTEGRACIÓN.

1. Integral de la suma o diferencia.

La integral de la suma (diferencia) de dos funciones es igual a la suma (diferencia) de la integrales de dichas funciones.

$$\int (f \pm g)(x).dx = \int f(x).dx \pm \int g(x).dx$$

Ejemplo:

$$\int (2x+\cos x).dx = \int 2x.dx + \int \cos x.dx = (x^2+k_1)+(\operatorname{sen} x + k_2) = x^2 + \operatorname{sen} x + (k_1+k_2) =$$
$$= x^2 + \operatorname{sen} x + K$$

2. Integral del producto de un número real por una función.

La integral del producto de un número real por una función es igual al número real por la integral de la función.

$$\int k.f(x).dx = k\int f(x).dx$$

Ejemplo:

$$\int 3.e^x dx = 3\int e^x dx = 3e^x + K$$

La utilización de estas dos propiedades constituye el método de descomposición: conviene descomponer lo más posible el integrando aplicando la propiedad distributiva, sustituyendo la expresión de la función por otra equivalente, sumando o restando una misma cantidad, multiplicando y dividiendo por un mismo número.

Ejemplos:

- $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+1}{x}\cdot dx = \int\left(\frac{2x^2}{x}+\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right)\cdot dx = \int (2x+1+\frac{1}{x}).dx = \int 2xdx + \int 1.dx + \int \frac{1}{x}\cdot dx =$

  $= x^2 + x + L|x| + K$
- $\int \operatorname{tg}^2 x.dx = \int (1+\operatorname{tg}^2 x - 1).dx = \int (1+\operatorname{tg}^2 x).dx - \int 1.dx = \operatorname{tg} x - x + K$

TIPOS FUNDAMENTALES DE INTEGRACIÓN.

La integración es el proceso recíproco de la derivación; por eso, la lectura de la tabla de derivadas de derecha a izquierda nos proporciona las primitivas de las funciones elementales tanto en la forma simple como en la forma compuesta.

Estas primitivas que se obtienen directamente de la tabla de derivadas se llaman inmediatas, y el conjunto de ellas, **integrales inmediatas**.

Todas las técnicas de integración consisten en transformar el integrando hasta obtener una función que reconozcamos como inmediata. Por ello, el conocimiento y memorización de los siguientes tipos es imprescindible para iniciarse en la integración.

INTEGRALES DE FUNCIONES ELEMENTALES:

T I P O S	F O R M A S	
	S I M P L E S	COMPUESTAS
Potencial $\alpha \neq -1$	$\int x^{\alpha}.dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K$	$\int f^{\alpha}.f'.dx = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K$
Logarítmico	$\int \frac{1}{x} \cdot dx = L\vert x\vert + K$	$\int \frac{f'}{f} \cdot dx = L\vert f\vert + K$
Exponencial	$\int e^x dx = e^x + K$	$\int f'.e^f dx = e^f + K$
	$\int a^x dx = \frac{1}{La} \cdot a^x + K$	$\int f'.a^f dx = \frac{1}{La} \cdot a^f + K$
Seno	$\int \cos x.dx = \operatorname{sen} x + K$	$\int f'.\cos f.dx = \operatorname{sen} f + K$
Coseno	$\int \operatorname{sen} x.dx = -\cos x + K$	$\int f'.\operatorname{sen} f.dx = -\cos f + K$
Tangente	$\int \sec^2 x.dx = \operatorname{tg} x + K$	$\int f'\sec^2 f.dx = \operatorname{tg} f + K$
	$\int (1+\operatorname{tg}^2 x)dx = \operatorname{tg} x + K$	$\int (1+\operatorname{tg}^2 f) f' dx = \operatorname{tg} f + K$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = \operatorname{tg} x + K$	$\int \frac{f'}{\cos^2 f} \cdot dx = \operatorname{tg} f + K$
Cotangente	$\int \operatorname{cosec}^2 x.dx = -\operatorname{ctg} x + K$	$\int f'.\operatorname{cosec}^2 f.dx = -\operatorname{ctg} f + K$
	$\int (1+\operatorname{ctg}^2 x)dx = -\operatorname{ctg} x + K$	$\int (1+\operatorname{tg}^2 f) f' dx = \operatorname{tg} f + K$
	$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot dx = -\operatorname{ctg} x + K$	$\int \frac{f'}{\operatorname{sen}^2 f} \cdot dx = -\operatorname{ctg} f + K$
Arco seno (= –arco coseno)	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \operatorname{arcsen} x + K =$ $= -\arccos x + K$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} \cdot dx = \operatorname{arcsen} f + K =$ $= -\arccos f + K$
	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot dx = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + K$ $= -\arccos \frac{x}{a} + K$	$\int \frac{f'}{\sqrt{a^2-f^2}} \cdot dx = \operatorname{arcsen} \frac{f}{a} + K$ $= -\arccos \frac{f}{a} + K$
Arco tangente **= –Arco cotangente.**	$\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \operatorname{arctg} x + K$ $= -\operatorname{arcctg} x + K$	$\int \frac{f'}{1+f^2} \cdot dx = \operatorname{arctg} f + K$ $= -\operatorname{arcctg} f + K$
	$\int \frac{1}{a^2+x^2} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + K$ $= -\frac{1}{a} \cdot \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + K$	$\int \frac{f'}{a^2+f^2} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg} \frac{f}{a} + K$ $= -\frac{1}{a} \cdot \operatorname{arcctg} \frac{f}{a} + K$

EJEMPLOS:

Tipo potencial: forma simple

- $\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + K = \frac{x^6}{6} + K$
- $\int x^{\frac{2}{3}}.dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + K = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + K = \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} + K$
- $\int \sqrt{x^3}dx = \int x^{\frac{3}{2}}.dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + K = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + K = \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + K = \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + K$
- $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \cdot dx = \int \frac{1}{x^{1/4}} \cdot dx = \int x^{-\frac{1}{4}}.dx = \frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} + K = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + K = \frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3} + K = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + K$
- $\int \frac{x^2}{\sqrt{x}} \cdot dx = \int x^2.x^{-\frac{1}{2}}.dx = \int x^{\frac{3}{2}}.dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + K = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + K = \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + K = \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + K$
- Combinando la integral inmediata de tipo potencial con las propiedades lineales de la integral indefinida, podemos integrar funciones de tipo polinómico:

$$\int (2x^3 + 5x^2 - 7x + 3).dx = \int 2x^3.dx + \int 5x^2.dx - \int 7x.dx + \int 3.dx =$$

$$= 2\int x^3.dx + 5\int x^2.dx - 7\int x.dx + 3\int dx =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^{3+1}}{3+1} + 5 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} - 7 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} + 3x + K =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^4}{4} + 5 \cdot \frac{x^3}{3} - 7 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x + K = \frac{x^4}{2} + \frac{5x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 3x + K$$

Vemos que el proceso de integración lo hemos aplicado a las funciones potenciales dejando los coeficientes al margen del proceso. Sin embargo, no hace falta dar todos los pasos como en el ejemplo anterior, sino que se puede y se debe integrar directamente como en el siguiente ejemplo:

$$\int (2x^5 - \frac{2}{3}x^2 + 3x - 7).dx = 2\cdot\frac{x^6}{6} - \frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + 3\cdot\frac{x^2}{2} - 7x + K =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot x^6 - \frac{2}{9}\cdot x^3 + \frac{3}{2}\cdot x^2 - 7x + K$$

- $\int (x+\sqrt{x}).dx = \int (x + x^{\frac{1}{2}}).dx = \int x.dx + \int x^{\frac{1}{2}}.dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + K =$
$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + K = \frac{x^2}{2} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + K$$
- $\int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx = \int \left(x^2 + x^{-\frac{1}{3}} \right)^2 dx = \int (x^4 + 2x^{\frac{5}{3}} + x^{-\frac{2}{3}}).dx = \frac{x^5}{5} + 2\cdot\frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + K =$
$$= \frac{1}{5}\cdot x^5 + \frac{3}{4}\cdot x^{\frac{8}{3}} + 3.x^{\frac{1}{3}} + K = \frac{1}{5}\cdot x^5 + \frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{x^8} + 3.\sqrt[3]{x} + K =$$
$$= \frac{1}{5}\cdot x^5 + \frac{3}{4}\cdot x^2.\sqrt[3]{x^2} + 3.\sqrt[3]{x} + K$$
- $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2 \right)\cdot dx = \int (x^{-2} + 4x^{-\frac{3}{2}} + 2).dx = \frac{x^{-1}}{-1} + 4\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + 2x + K = -\frac{1}{x} - \frac{8}{\sqrt{x}} + 2x + K$

<u>Tipo potencial:</u> forma compuesta.

- $\int (x+2)^3.dx = \left\{ \int f^3.f' \right\} = \frac{(x+2)^4}{4} + K$
- $\int (2x+1).(x^2+x+1)^{30}.dx = \left\{ \int f'.f^{30} \right\} = \frac{(x^2+x+1)^{31}}{31} + K$
- $\int x.(x^2+1).dx = \int \frac{1}{2}\cdot 2x.(x^2+1).dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{2x}_{f'}.\underbrace{(x^2+1)}_{f}.dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)^2}{2} + K = \frac{(x^2+1)^2}{4} + K$
- $\int \operatorname{sen}^3 x.\cos x.dx = \left\{ \int f^3.f' \right\} = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + K$
- $\int \operatorname{tg}^2 x.\sec^2 x.dx = \left\{ \int f^2.f' \right\} = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + K$
- $\int (\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^5 x).dx = \int \underbrace{\operatorname{tg}^3 x}_{f^3}\cdot\underbrace{(1+\operatorname{tg}^2 x)}_{f'}.dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + K$
- $\int x^2.\sqrt{x^3-1}.dx = \int x^2.\underbrace{(x^3-1)}_{f}^{\frac{1}{2}}.dx = \int \frac{1}{3}\cdot\underbrace{3x^2}_{f'}.\underbrace{(x^3-1)}_{f}^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{3}\int \underbrace{3x^2}_{f'}.\underbrace{(x^3-1)}_{f}^{\frac{1}{2}}.dx =$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{(x^3-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+K=\frac{2}{9}\sqrt{(x^3-1)^3}+K=\frac{2}{9}\cdot(x^3-1)\sqrt{x^3-1}+K$$

Tipo logarítmico:

- $\int\frac{3}{x+2}\cdot dx=3\int\frac{1}{x+2}\cdot dx=3\cdot L|x+2|+K$
- $\int\frac{x}{x^2+1}\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{2x}{x^2+1}\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot L(x^2+1)+K$
- $\int \operatorname{tg} x\cdot dx=\int\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot dx=-\int\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot dx=-L|\cos x|+K$
- $\int \operatorname{ctg} x\cdot dx=\int\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\cdot dx=L|\operatorname{sen} x|+K$
- $\int\frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\cdot dx=\int\frac{2\operatorname{sen} x.\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\cdot dx=L(1+\operatorname{sen}^2 x)+K$
- $\int\frac{1}{(1+x^2).\operatorname{arctg} x}\cdot dx=\int\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\operatorname{arctg} x}\cdot dx=L|\operatorname{arctg} x|+K$
- $\int\frac{1}{\operatorname{arcsen} x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx=\int\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\operatorname{arcsen} x}\cdot dx=L|\operatorname{arcsen} x|+K$

Tipo exponencial:

- $\int 3^x.dx=\frac{1}{L3}\cdot\int 3^x\cdot L3\cdot dx=\frac{1}{L3}\cdot 3^x+K$
- $\int e^{x+1}\cdot dx=\int 1\cdot e^{x+1}\cdot dx=e^{x+1}+K$
- $\int e^{2x+1}\cdot dx=\frac{1}{2}\int 2\cdot e^{2x+1}\cdot dx=\frac{1}{2}e^{2x+1}+K$
- $\int 2^x\cdot 3^x.dx=\int(2\cdot 3)^x.dx=\frac{1}{L(2.3)}\cdot\int(2\cdot 3)^x\cdot L(2\cdot 3)\cdot dx=\frac{1}{L(2\cdot 3)}\cdot(2\cdot 3)^x+K$
- $\int x\cdot e^{x^2+1}\cdot dx=\frac{1}{2}\int 2x\cdot e^{x^2+1}\cdot dx=\frac{1}{2}e^{x^2+1}+K$
- $\int e^{\operatorname{sen} x}\cdot\cos x\cdot dx=e^{\operatorname{sen} x}+K$
- $\int e^{\operatorname{sen}^2 x}\cdot\operatorname{sen} 2x\cdot dx=\int e^{\operatorname{sen}^2 x}\cdot 2\operatorname{sen} x.\cos x\cdot dx=e^{\operatorname{sen}^2 x}+K$
- $\int\frac{e^{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot e^{\operatorname{arcsen} x}\cdot dx=e^{\operatorname{arcsen} x}+K$
- $\int\frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\cdot dx=\int\frac{1}{1+x^2}\cdot e^{\operatorname{arctg} x}dx=e^{\operatorname{arctg} x}+K$

Tipo trigonométrico (seno, coseno, tangente,....).

- $\int \cos(2x-1)\cdot dx = \frac{1}{2}\cdot\int 2\cdot\cos(2x-1)\cdot dx = \frac{1}{2}\cdot \text{sen}(2x-1)+K$
- $\int x\cdot\cos x^2\cdot dx = \frac{1}{2}\cdot\int 2\cdot\cos x^2\cdot dx = \frac{1}{2}\cdot\text{sen}\, x^2+K$
- $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot dx = 2\cdot\text{sen}\sqrt{x}+K$
- $\int \frac{\cos(Lx)}{x}\cdot dx = \int \frac{1}{x}\cdot\cos(Lx)\cdot dx = \text{sen}(Lx)+K$
- $\int \text{sen}\, 2x\cdot dx = \frac{1}{2}\cdot\int 2\cdot\text{sen}\, 2x\cdot dx = -\frac{1}{2}\cdot\cos 2x+K$
- $\int \text{sen}\, 2x\cdot dx = \int 2\cdot\text{sen}\, x\cdot\cos x\cdot dx = 2\cdot\int \underbrace{\text{sen}\, x}_{f}\cdot\underbrace{\cos x}_{f'}\cdot dx = 2\cdot\frac{\text{sen}^2 x}{2}+K = \text{sen}^2 x+K$
- $\int x\cdot\text{sen}(x^2+3)\cdot dx = \frac{1}{2}\cdot\int 2x\cdot\text{sen}(x^2+3)\cdot dx = -\frac{1}{2}\cdot\cos(x^2+3)+K$
- $\int \frac{\text{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\text{sen}\sqrt{x}\cdot dx = -2\cdot\cos\sqrt{x}+K$
- $\int e^x\cdot\text{sen}(e^x+3)\cdot dx = -\cos(e^x+3)+K$
- $\int \text{tg}^2 x.dx = \int (1+\text{tg}^2 x-1).dx = \int (1+\text{tg}^2 x).dx - \int 1.dx = \text{tg}\, x - x+K$
- $\int \text{tg}^3 x.dx = \int \text{tg}\, x\cdot\text{tg}^2 x.dx = \int \text{tg}\, x(\sec^2 x-1).dx = \int (\text{tg}\, x\cdot\sec^2 x-\text{tg}\, x).dx =$

$$= \int \text{tg}\, x\cdot\sec^2 x.dx - \int \text{tg}\, x.dx = \frac{\text{tg}^2 x}{2} - \int \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}\cdot dx =$$

$$= \frac{\text{tg}^2 x}{2} - (-L|\cos x|)+K = \frac{\text{tg}^2 x}{2}+L|\cos x|+K$$

- $\int \sec^2(3x-1)\cdot dx = \frac{1}{3}\cdot\int 3\sec^2(3x-1)\cdot dx = \frac{1}{3}\cdot\text{tg}(3x-1)+K$
- $\int \frac{1}{\text{sen}^2 7x}\cdot dx = \frac{1}{7}\cdot\int \frac{7}{\text{sen}^2 7x}\cdot dx = -\frac{1}{7}\cdot\text{ctg}\, 7x+K$
- $\int \frac{3x}{\cos^2 2x^2}\cdot dx = 3\cdot\frac{1}{4}\cdot\int \frac{4x}{\cos^2 2x^2}\cdot dx = \frac{3}{4}\cdot\text{tg}\, 2x^2+K$
- $\int \text{ctg}^2 x.dx = \int (1+\text{ctg}^2 x-1).dx = \int (1+\text{ctg}^2 x).dx - \int 1.dx = -\text{ctg}\, x - x+K$

Tipo arco seno, arco tangente,....

- $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arcsen} 2x + K$
- $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} \cdot dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arcsen} x^2 + K$
- $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot dx = \operatorname{arcsen} e^x + K$
- $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \cdot dx = \int \frac{1}{\sqrt{4(1-\frac{x^2}{4})}} \cdot dx = \int \frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \cdot dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \cdot dx = \operatorname{arcsen} \frac{x}{2} + K$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} \cdot dx = \int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \cdot dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \cdot dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot dx =$

$$= 2 \cdot \int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot dx = 2 \operatorname{arcsen} \sqrt{x} + K$$

- $\int \frac{1}{1+9x^2} \cdot dx = \int \frac{1}{1+(3x)^2} \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{3}{1+(3x)^2} \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{arctg} 3x + K$
- $\int \frac{x^2}{1+x^6} \cdot dx = \int \frac{x^2}{1+(x^3)^2} \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{3x^2}{1+(x^3)^2} \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{arctg} x^3 + K$
- $\int \frac{1}{9+x^2} \cdot dx = \int \frac{1}{9\left(1+\left(\frac{x}{3}\right)^2\right)} \cdot dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} \cdot dx = \frac{1}{9} \cdot 3\int \frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + K$
- $\int \frac{a^x}{1+a^{2x}} \cdot dx = \int \frac{a^x}{1+(a^x)^2} \cdot dx = \frac{1}{La} \cdot \int \frac{a^x La}{1+(a^x)^2} \cdot dx = \frac{1}{La} \cdot \operatorname{arctg} a^x + K$
- $\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x} \cdot dx = \int \frac{\cos x}{1+(\operatorname{sen} x)^2} \cdot dx = \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x) + K$
- $\int \frac{x^3}{5+x^8} \cdot dx = \int \frac{x^3}{5+(x^4)^2} \cdot dx = \int \frac{x^3}{5\left(1+\frac{(x^4)^2}{5}\right)} \cdot dx = \frac{1}{5}\int \frac{x^3}{1+\left(\frac{x^4}{\sqrt{5}}\right)^2} \cdot dx =$
- $= \frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{4} \int \frac{\frac{4}{\sqrt{5}} x^3}{1+\left(\frac{x^4}{\sqrt{5}}\right)^2} \cdot dx = \frac{\sqrt{5}}{20} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x^4}{\sqrt{5}} + K$

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN.

Dada una integral se debe reconocer primero si se adapta a uno de los tipos fundamentales o si se puede reducir a alguno de ellos haciendo transformaciones elementales; en caso contrario, habrá que aplicar otros procedimientos para su cálculo que reciben el nombre de ***MÉTODOS DE INTEGRACIÓN.***

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN.

Es una consecuencia directa de la derivación de funciones compuestas.

Como su nombre indica, se trata de sustituir la variable "*x*" por una función de otra variable "*t*", $x = g(t)$, de forma que el integrando se transforme en otro más sencillo.

Este proceso puede hacerse de dos formas:

- **FORMA DIRECTA**

Se hace $x = g(t)$, de donde $dx = g'(t)\cdot dt$. Sustituyendo en la integral, nos queda:

$$\int f(x).dx = \int f\left[g(t)\right]\cdot g'(t).dx$$

- **FORMA RECÍPROCA**

Se hace $t = u(x)$, de donde $dt = u'(x).dx$, y se despeja a continuación x y dx para sustituirlos en la integral.
Para terminar el proceso se calcula la integral en la nueva variable y después se deshace el cambio.
Es evidente que si la integral resultante del cambio es más complicada que la de partida, el cambio realizado no es el adecuado y debemos buscar otro.

NOTA: Siempre que se pueda debemos de evitar emplear este método y utilizar los tipos fundamentales.

EJEMPLOS.

- Calcula $I = \int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\cdot dx$

Hacemos la sustitución $x-1 = t^2 \quad \Rightarrow \quad x = t^2+1$
Calculamos la diferencial de *x*: $dx = 2t.dt$ y sustituimos en la integral que deseamos calcular. Tendremos:

$$I = \int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\cdot dx = \int \frac{1}{(t^2+1).\sqrt{t^2}}\cdot 2t.dt = \int \frac{1}{(t^2+1).t}\cdot 2t.dt = 2\int \frac{1}{(t^2+1)}\cdot dt = 2\,\text{arctg}\,t + K =$$

$$= \{\textit{deshaciendo el cambio de}\ \text{variable}\} = 2\,\text{arctg}\sqrt{x-1} + K$$

- Calcula $I=\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$

Hacemos el cambio $5x-2=t \Rightarrow x=\frac{1}{5}\cdot(t+2)$

Calculamos la diferencial de *x*: $dx=\frac{1}{5}\cdot dt$ y sustituimos

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}=\int \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{5}.dt=\frac{1}{5}\int t^{-\frac{1}{2}}.dt=\frac{1}{5}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+K=\frac{2}{5}\sqrt{t}+K=$$

$$=\{deshaciendo\ \ el\ \ cambio\}=\frac{2}{5}\sqrt{5x-2}+K$$

Se podría resolver la integral directamente, sin necesidad de utilizar el método de sustitución, empleando la fórmula de integración de funciones potenciales en su forma compuesta:

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}=\int \frac{1}{(5x-2)^{\frac{1}{2}}}\cdot dx=\int \underbrace{(5x-2)}_{f}{}^{-\frac{1}{2}}.dx=\int \frac{1}{5}\cdot 5\cdot(5x-2)^{-\frac{1}{2}}.dx=$$

$$=\frac{1}{5}\int \underbrace{5}_{f'}.\underbrace{(5x-2)}_{f}{}^{-\frac{1}{2}}.dx=\frac{1}{5}\cdot\frac{(5x-2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+K=\frac{2}{5}\sqrt{5x-2}+K$$

- $I=\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^3}{1+x^2}\cdot dx$

Hacemos el cambio $\operatorname{arctg} x=t$ y calculamos la diferencial de *x*. Tendremos:

$$\frac{1}{1+x^2}\cdot dx=dt \quad\Rightarrow\quad dx=(1+x^2).dt$$

Sustituyendo en la integral nos queda:

$$I=\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^3}{1+x^2}\cdot dx=\int \frac{t^3}{1+x^2}\cdot(1+x^2).dt=\int t^3.dt=\frac{t^4}{4}+K=\frac{(\operatorname{arctg} x)^4}{4}+K$$

Directamente:

$$I=\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^3}{1+x^2}\cdot dx=\int \underbrace{(\operatorname{arctg} x)}_{f}{}^3\cdot\frac{1}{\underbrace{1+x^2}_{f'}}\cdot dx=\frac{(\operatorname{arctg} x)^4}{4}+K$$

- $\int x.\sqrt{x-1}\cdot dx$

Hacemos la sustitución $x-1=t^2 \Rightarrow x=t^2+1$

Calculamos la diferencial de *x*: $dx=2t.dt$ y sustituimos en la integral que deseamos calcular. Tendremos:

$$\int x.\sqrt{x-1}\cdot dx=\int (t^2+1).\sqrt{t^2}\cdot 2tdt=2\int (t^2+1).t^2.dt=2\int (t^4+t^2).dt=2\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right)+K=$$

$$=\frac{2}{5}\cdot t^5+\frac{2}{3}\cdot t^3+K=\frac{2}{5}\cdot(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}\cdot(x-1)^{\frac{3}{2}}+K$$

MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES.

El método de integración por partes se basa en la derivada del producto de funciones. A partir de él trataremos de buscar una regla que nos permita calcular la integral de un producto de funciones.

Consideremos dos funciones $u = u(x)$ y $v = v(x)$ de variable x, ambas derivables. La diferencial del producto $u.v$ será:

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du \quad \Rightarrow \quad u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$$

Integrando ambos miembros, obtenemos:

$$\int u \cdot dv = \int d(u \cdot v) - \int v \cdot du \quad \Rightarrow \quad \int \boldsymbol{u \cdot dv} = \boldsymbol{u \cdot v} - \int \boldsymbol{v \cdot du}$$

que es la fórmula de integración por partes.

En el momento de aplicar esta fórmula de integración por partes deberemos de tener cuidado en el momento de elegir a qué llamamos "u" y a qué "dv". Si la integral que queda, después de aplicar dicha fórmula, es más complicada que la de partida, significa que habrá que cambiar nuestra elección.

En algunas ocasiones la integral que queda después de aplicar la fórmula de integración por partes, es del mismo tipo que la de partida y tendríamos que volver a aplicar el método.
En otras ocasiones, después de aplicar la integración por partes una o dos veces, puede ocurrir que obtengamos la misma integral de partida. En este caso, basta despejar la integral para obtener la primitiva.

EJEMPLOS:

- $I = \int Lx.dx$

  Si hacemos $u = Lx$ y $dv = dx$ obtenemos: $du = \frac{1}{x} \cdot dx$ y $v = x$

  Aplicando la fórmula de integración por partes, resulta:

  $$I = \int Lx.dx = x.Lx - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = x.Lx - \int dx = x.Lx - x + K$$

- En ocasiones el método de integración por partes no es tan directo como podría parecer observando el ejemplo anterior, sino que llegamos al resultado final después de aplicar dos o más veces dicho método:

  I = $\int x^2.\text{sen}\, x.dx$

  Hacemos el cambio $\left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = \text{sen}\, x.dx \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = 2x.dx \\ v = -\cos x \end{array} \right.$

  Sustituyendo en la fórmula de integración por partes nos queda:

  $$\int x^2.\text{sen}\, x.dx = -x^2.\cos x - \int -\cos x \cdot (2x.dx) = -x^2.\cos x + 2\int x \cdot \cos x \cdot dx$$

  En la nueva integral que nos ha resultado, volvemos a aplicar el método de partes; hacemos:

$$\left.\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x.dx \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

y sustituimos

$$\int x^2.\operatorname{sen} x.dx = -x^2.\cos x + 2\int x \cdot \cos x \cdot dx = -x^2.\cos x + 2 \cdot \left[x.\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x.dx\right] =$$

$$= -x^2.\cos x + 2 \cdot [x.\operatorname{sen} x - (-\cos x)] + K = -x^2.\cos x + 2x.\operatorname{sen} x + 2\cos x + K$$

- $\int \operatorname{sen}(Lx) \cdot dx$

Hacemos $\left.\begin{cases} u = \operatorname{sen}(Lx) \\ dv = dx \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos(Lx) \cdot \dfrac{1}{x} \cdot dx \\ v = x \end{cases}$

y sustituimos en la fórmula de integración por partes:

$$\int \operatorname{sen}(Lx) \cdot dx = x.\operatorname{sen}(Lx) - \int x.\cos(Lx) \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = x.\operatorname{sen}(Lx) - \int \cos(Lx) \cdot dx$$

La integral que nos queda, después de aplicar partes, es del mismo tipo que la que queremos calcular. En consecuencia, volvemos a aplicar el mismo procedimiento.

En ella hacemos:

$$\left.\begin{cases} u = \cos(Lx) \\ dv = dx \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} du = -\operatorname{sen}(Lx) \cdot \dfrac{1}{x} \cdot dx \\ v = x \end{cases}$$

y sustituimos nuevamente:

$$\int \operatorname{sen}(Lx) \cdot dx = x.\operatorname{sen}(Lx) - \int \cos(Lx) \cdot dx = x.\operatorname{sen}(Lx) - \left[x.\cos(Lx) - \int -x.\operatorname{sen}(Lx) \cdot \frac{1}{x} \cdot dx\right] =$$

$$= x.\operatorname{sen}(Lx) - x.\cos(Lx) - \int \operatorname{sen}(Lx).dx$$

Nos ha vuelto ha quedar la misma integral del principio. Entonces, pasando al primer miembro nos queda:

$$2\int \operatorname{sen}(Lx) \cdot dx = x.\operatorname{sen}(Lx) - x.\cos(Lx) \Rightarrow \int \operatorname{sen}(Lx) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot [x.\operatorname{sen}(Lx) - x.\cos(Lx)] + K$$

- $\int \operatorname{arcsen} x.dx$

Hacemos el siguiente cambio: $\left.\begin{cases} u = \operatorname{arcsen} x \\ dv = dx \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx \\ v = x \end{cases}$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes obtenemos:

$$\int \operatorname{arcsen} x.dx = x.\operatorname{arcsen} x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = x.\operatorname{arcsen} x - \int x.(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.dx =$$

$$= x.\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}\int -2x.(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.dx = x.\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + K =$$

$$= x.\operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + K$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

- Calcula las integrales indefinidas de las siguientes funciones:

- $\int x.e^x.dx$
- $\int e^x.\cos x.dx$
- $\int x.\operatorname{arctg} x.dx$
- $\int x.\cos x.dx$
- $\int \operatorname{arctg} x.dx$
- $\int 3^x.\cos x.dx$
- $\int x^2.Lx.dx$
- $\int x^2.e^{-x}.dx$
- $\int x.\cos 3x.dx$
- $\int x^n.Lx.dx$
- $\int x^2.\operatorname{sen} x.dx$
- $\int x.e^{-x} \cdot dx$

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES.

Una función racional es un cociente de dos polinomios, es decir, es de la forma: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios en x.

Las funciones racionales están definidas en todo el conjunto de números reales salvo en los que se anula el denominador.

Ante la integral de una función racional, lo primero que debemos comprobar es que no se puedan aplicar los tipos fundamentales que contengan funciones de este tipo, a saber:

$$\int \frac{f'}{f^n} \cdot dx = \int f'.f^{-n}.dx = \frac{f^{-n+1}}{-n+1} + K = -\frac{1}{(n-1)f^{n-1}} + K$$

$$\int \frac{f'}{f} \cdot dx = L|f| + K$$

$$\int \frac{f'}{a^2+f^2} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg} \frac{f}{a} + K$$

Cuando no se puedan aplicar los tipos anteriores, las funciones racionales se integran por el método de transformación en fracciones simples que tendrán por denominador polinomios de primer o segundo grado irreducibles.

En todo el proceso de integración racional mediante fracciones simples supondremos que el grado del numerador es menor que el grado del denominador, pues en caso contrario podemos dividir y obtendríamos

$$P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

dividiendo entre $Q(x)$ nos queda:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

y la integración se reduce a integrar un polinomio $C(x)$ (que será inmediata) y a la función racional $\frac{R(x)}{Q(x)}$, con el grado del numerador menor que el del denominador.

Para integrar una función de este tipo utilizaremos el

MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES.

Este método consta de tres partes bien diferenciadas:

a) Cálculo de las raíces del denominador (descomposición en factores del denominador).
b) Descomposición de la función en suma de fracciones simples.
c) Integración de los sumandos.

Consideremos la función $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde el grado del numerador es menor que el grado del denominador y sigamos los pasos indicados anteriormente:

a) La descomposición en factores del denominador se efectuará por los métodos conocidos en cursos anteriores (Regla de Ruffini, si el polinomio es de grado mayor que dos).

Supongamos que el polinomio $Q(x)$ tiene las siguientes raíces (k raíces reales y $2s$ raíces complejas, que serán conjugadas dos a dos)

Raíces reales:

x_1 se presenta r_1 veces (grado de multiplicidad de la raíz)
x_2 se presenta r_2 veces
....
x_k se presenta r_k veces

Raíces complejas:

$z_1 = a_1 + b_1 \cdot i$ $\quad$ $z_2 = a_1 - b_1 \cdot i$
$z_3 = a_2 + b_2 \cdot i$ $\quad$ $z_4 = a_2 - b_2 \cdot i$
....
$z_{2s-1} = a_s + b_s \cdot i$ $\quad$ $z_{2s} = a_s - b_s \cdot i$

b) En este caso la función racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ se puede descomponer en fracciones simples de la siguiente forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\cdots+\frac{A_{r_1}}{(x-x_1)^{r_1}}+\frac{B_1}{x-x_2}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\cdots+\frac{B_{r_2}}{(x-x_2)^{r_2}}+\cdots+$$

$$+\frac{C_1}{x-x_k}+\frac{C_2}{(x-x_k)^2}+\cdots+\frac{C_{r_k}}{(x-x_k)^{r_k}}+\underbrace{\frac{D_1}{x-z_1}+\frac{D_2}{x-z_2}}+\cdots+\underbrace{\frac{D_{2s-1}}{x-z_{2s-1}}+\frac{D_{2s}}{x-z_{2s}}}$$

Sumando las fracciones en cuyos denominadores aparecen raíces complejas conjugadas, nos queda:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\cdots+\frac{A_{r_1}}{(x-x_1)^{r_1}}+\frac{B_1}{x-x_2}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\cdots+\frac{B_{r_2}}{(x-x_2)^{r_2}}+\cdots+$$

$$+\frac{C_1}{x-x_k}+\frac{C_2}{(x-x_k)^2}+\cdots+\frac{C_{r_k}}{(x-x_k)^{r_k}}+\frac{M_1x+N_1}{(x-a_1)^2+b_1^2}+\cdots+\frac{M_sx+N_s}{(x-a_s)^2+b_s^2}$$

Podemos observar que por cada raíz aparecen tantas fracciones como indica su grado de multiplicidad (número de veces que se presenta una raíz): los numeradores de dichas fracciones son coeficientes indeterminados y los denominares son de la forma $x-raíz$ elevando dicha diferencia desde uno hasta el grado de multiplicidad.

El procedimiento para calcular los coeficientes indeterminados lo veremos con algunos ejemplos.

La integración de nuestra función racional será la suma de las integrales de cada una de las fracciones simples:

c) La integración de las fracciones simples en que se ha descompuesto la función racional se hace mediante los tipos antes vistos:

- Las que tienen exponente unidad en el denominador son logaritmos neperianos

$$\int\frac{A}{x-x_i}\cdot dx=A\int\frac{1}{x-x_i}\cdot dx=A\cdot L(x-x_i)$$

- Otras son de tipo potencial:

$$\int\frac{B}{(x-x_i)^n}\cdot dx=B\cdot\int(x-x_i)^{-n}.dx=B\cdot\frac{(x-x_i)^{-n+1}}{-n+1}=-\frac{B}{(n-1)\cdot(x-x_i)^{n-1}}$$

- Y un tercer tipo correspondiente a las raíces complejas de la forma

$$\int\frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}\cdot dx$$

en cuya resolución aparecerán, en general, un logaritmo y un arco tangente. Veamos como podemos resolver esta integral:

$$\int\frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}\cdot dx=\int\frac{Mx-Ma+Ma+N}{(x-a)^2+b^2}\cdot dx=\int\left[\frac{M(x-a)}{(x-a)^2+b^2}+\frac{Ma+N}{(x-a)^2+b^2}\right]\cdot dx=$$

$$=\int\frac{M(x-a)}{(x-a)^2+b^2}\cdot dx+\int\frac{Ma+N}{(x-a)^2+b^2}\cdot dx=$$

$$= \frac{M}{2} \cdot \int \frac{2(x-a)}{(x-a)^2 + b^2} \cdot dx + (Ma+N) \cdot \int \frac{1}{(x-a)^2 + b^2} \cdot dx =$$

$$= \frac{M}{2} \cdot L\left[(x-a)^2 + b^2\right] + (Ma+N) \cdot \int \frac{1}{b^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right]} \cdot dx =$$

$$= \frac{M}{2} \cdot L\left[(x-a)^2 + b^2\right] + \frac{Ma+N}{b^2} \cdot \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x-a}{b}\right)^2} \cdot dx =$$

$$= \frac{M}{2} \cdot L\left[(x-a)^2 + b^2\right] + \frac{Ma+N}{b} \cdot \int \frac{1/b}{1 + \left(\frac{x-a}{b}\right)^2} \cdot dx =$$

$$= \frac{M}{2} \cdot L\left[(x-a)^2 + b^2\right] + \frac{Ma+N}{b} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x-a}{b}$$

EJEMPLOS:

- Calcular $\boldsymbol{I = \int \frac{1}{x^2 - 9} \cdot dx}$

  Resolución:

  a) Calculamos las raíces del denominador, resolviendo la ecuación:

  $$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x = +3 \\ x = -3 \end{cases}$$

  b) Descomponemos la función del integrando en fracciones simples, de la forma:

  $$\frac{1}{x^2 - 9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2 - 9} = \frac{A(x+3) + B(x-3)}{x^2 - 9}$$

  c) Puesto que los denominadores son iguales, para que las fracciones sean iguales tendrán que ser iguales los numeradores. Por tanto:

  $$A(x+3) + B(x-3) \equiv 1$$

  d) Para calcular los coeficientes A y B se podrán emplear distintos métodos:

  1. IDENTIFICACIÓN DE COEFICIENTES

  Para aplicar este método, ordenamos el polinomio que aparece con coeficientes indeterminados:

  $$(A+B)x + (3A - 3B) \equiv 1$$

  e identificamos los coeficientes de igual potencia de *x*, resolviendo el sistema que nos resulta:

  $$\left.\begin{array}{r} A + B = 0 \\ 3A - 3B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} B = -A \\ 3A - 3(-A) = 1 \Rightarrow 6A = 1 \Rightarrow \begin{cases} A = 1/6 \\ B = -1/6 \end{cases} \end{cases}$$

2. VALORES NUMÉRICOS

En la expresión $A(x+3)+B(x-3)\equiv 1$ anterior, se le asignan valores a la indeterminada *x*, tantos como coeficientes indeterminados tengamos, obteniéndose de esta manera un sistema de tantas ecuaciones como coeficientes tengamos que calcular. Resolviendo este sistema obtendríamos los coeficientes buscados.

El sistema que se obtiene por este procedimiento, se simplifica si los valores que damos a la indeterminada *x* son los mismos que los de las raíces del denominador. En el caso de que hubiese más coeficientes que raíces ya le asignamos los valores que queramos:

$A(x+3)+B(x-3)\equiv 1$

- $Si \quad x=3 \quad \Rightarrow \quad 6A=1 \quad \Rightarrow \quad A=\frac{1}{6}$
- $Si \quad x=-3 \quad \Rightarrow \quad -6B=1 \quad \Rightarrow \quad B=-\frac{1}{6}$

e) Obtenidos los coeficientes, podemos pasar a integrar la función dada:

$$I=\int \frac{1}{x^2-1}\cdot dx=\int\left(\frac{1/6}{x-3}+\frac{-1/6}{x+3}\right)\cdot dx=\frac{1}{6}\cdot\int\frac{1}{x-3}\cdot dx-\frac{1}{6}\cdot\int\frac{1}{x+3}\cdot dx=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot L(x-3)-\frac{1}{6}\cdot L(x+3)+K=\frac{1}{6}\cdot\left[L(x-3)-L(x+3)\right]+K=\frac{1}{6}\cdot L\left(\frac{x-3}{x+3}\right)+K$$

- Calcular: $\boldsymbol{I=\int\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\cdot dx}$

Puesto que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, debemos dividir numerador entre denominador obteniendo la siguiente descomposición:

$$\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}=x-\frac{x+1}{x^2(x-1)}$$

aplicando el método de integración racional a la fracción resultante:

a) Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1} \quad\Rightarrow\quad \frac{x+1}{x^2(x-1)}=\frac{Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2}{x^2(x-1)}$$

de donde: $Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2=x+1$

b) Dando valores a la indeterminada:

- $Para \quad x=0 \quad\Rightarrow\quad -B=1 \quad\Rightarrow\quad B=-1$
- $Para \quad x=1 \quad\Rightarrow\quad C=2 \quad\Rightarrow\quad C=\ 2$
- $Para \quad x=2 \quad\Rightarrow\quad 2A+B+4C=3 \quad\Rightarrow$
  $\Rightarrow\quad 2A-1+8=3 \quad\Rightarrow\quad A=-2$

c) Entonces, calculamos la integral:

$$I=\int\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\cdot dx=\int\left(x-\frac{x+1}{x^2(x-1)}\right)\cdot dx=\int\left(x-\left(\frac{-2}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{2}{x-1}\right)\right)\cdot dx=$$

$$= \int \left(x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x-1} \right) \cdot dx = \int x.dx + 2\int \frac{1}{x} \cdot dx + \int \frac{1}{x^2} \cdot dx - 2\int \frac{1}{x-1} \cdot dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} + 2L|x| - \frac{1}{x} - 2L|x-1| + K = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + 2L\left|\frac{x}{x-1}\right| + K$$

- Calcula: $\boldsymbol{I = \int \frac{5x^2 - 2x + 25}{x^3 - 6x^2 + 25} \cdot dx}$
- Al ser el grado del denominador mayor que el del numerador, aplicamos directamente el método de descomposición en fracciones simples.
  a) Calculamos las raíces del denominador:
  $$x^3 - 6x^2 + 25x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 6x + 25) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 + 4i \\ x = 3 - 4i \end{cases}$$
  b) Hemos obtenido una raíz real y dos raíces complejas conjugadas. Por tanto, la descomposición en fracciones simples nos queda de la forma:
  $$\frac{5x^2 - 2x + 25}{x^3 - 6x^2 + 25x} = \frac{A}{x} + \frac{Mx + N}{(x-3)^2 + 4^2} = \frac{A(x^2 - 6x + 25) + x(Mx + N)}{x(x^2 - 6x + 25)}$$
  Al ser los denominadores iguales, tendrán que serlo también los numeradores:
  $$A(x^2 - 6x + 25) + x(Mx + N) = 5x^2 - 2x + 25$$
  Dando valores a la indeterminada, obtenemos:
  $$\begin{array}{llll} Para\ \ x = 0 & \Rightarrow\ 25A = 25 & \Rightarrow\ A = 1 & \\ Para\ \ x = 1 & \Rightarrow\ 20A + M + N = 28 & \Rightarrow M + N = 8 & \multirow{2}{*}{$\left.\right\} \Rightarrow M = N = 4$} \\ Para\ \ x = -1 & \Rightarrow\ 32A - (-M + N) = 32 & \Rightarrow M - N = 0 & \end{array}$$
  c) Obtenido el valor de los parámetros, pasamos a calcular la integral:

$$I = \int \frac{5x^2 - 2x + 25}{x^3 - 6x^2 + 25} \cdot dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{4x + 4}{(x-3)^2 + 4^2} \right) \cdot dx = \int \frac{1}{x} \cdot dx + \int \frac{4x + 4}{(x-3)^2 + 4^2} \cdot dx =$$
$$= L|x| + \int \frac{4x - 12 + 12 + 4}{(x-3)^2 + 4^2} \cdot dx = L|x| + \int \frac{4x - 12 + 16}{(x-3)^2 + 4^2} \cdot dx = L|x| + \int \frac{4x - 12}{(x-3)^2 + 4^2} \cdot dx +$$
$$+ \int \frac{16}{(x-3)^2 + 4^2} \cdot dx = L|x| + 2\int \frac{2x - 6}{(x-3)^2 + 4^2} \cdot dx + 16\int \frac{1}{(x-3)^2 + 4^2} \cdot dx =$$
$$= L|x| + 2L|x^2 - 6x + 25| + 16\int \frac{1}{4^2\left[1 + \frac{(x-3)^2}{4^2}\right]} \cdot dx =$$
$$= L|x| + 2L|x^2 - 6x + 25| + \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x-3}{4}\right)^2} \cdot dx = L|x| + 2L|x^2 - 6x + 25| + 4\int \frac{\frac{1}{4}}{1 + \left(\frac{x-3}{4}\right)^2} \cdot dx =$$
$$= L|x| + 2L|x^2 - 6x + 25| + 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-3}{4} + K$$

EJERCICIOS.

- $\int \frac{1}{x^2 - 5x} \cdot dx$
- $\int \frac{2x+1}{x^2 - 5x + 6} \cdot dx$
- $\int \frac{2x^2 - 8x - 1}{2x^2 - 7x + 3} \cdot dx$
- $\int \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} \cdot dx$
- $\int \frac{x^2 - 6x + 7}{(x+1)(x-2)(x-3)} \cdot dx$
- $\int \frac{x^2+1}{x-1} \cdot dx$
- $\int \frac{2x-4}{(x-1)^2(x+3)} \cdot dx$
- $\int \frac{1}{(x-1)(x+3)^2} \cdot dx$
- $\int \frac{1}{x^3 - 1} \cdot dx$
- $\int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2+1)} \cdot dx$

INTEGRACIÓN POR REDUCCIÓN DEL INTEGRANDO.

La integración indefinida de algunas funciones puede resultar más fácil y cómoda si mediante un adecuado cambio de variable podemos reducirlas a funciones cuya integración ya conocemos. Veamos algunos casos interesantes:

- **Integración de funciones de a^x.**
  Para integrar este tipo de funciones se hace el cambio de variable $\boldsymbol{a^x = t}$, que transforma el integrando en una función de la variable ***t***.

  Ejemplos:

  - $\int \frac{e^x - 3e^{2x}}{1+e^x} \cdot dx$

    Hacemos el cambio $e^x = t$, con lo que $e^x.dx = dt \Rightarrow t.dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$

    Sustituyendo en la integral, nos queda de la forma:

$$\int \frac{e^x - 3e^{2x}}{1+e^x} \cdot dx = \int \frac{t - 3t^2}{1+t} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{1-3t}{1+t} \cdot dt = \int \left(-3 + \frac{4}{1+t} \right) \cdot dt = -3\int dt + 4\int \frac{1}{1+t} dt =$$
$$= -3t + 4L|1+t| + K = -3e^x + 4L(1+e^x) + K$$

  - $\int \sqrt{e^{3x} - e^{2x}} \cdot dx$

    Hacemos el cambio $e^x = t$, con lo que $e^x.dx = dt \Rightarrow t.dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$

    Sustituyendo en la integral, nos queda de la forma:

$$\int \sqrt{e^{3x} - e^{2x}} \cdot dx = \int \sqrt{t^3 - t^2} \cdot \frac{dt}{t} = \int t \cdot \sqrt{t-1} \cdot \frac{dt}{t} = \int \sqrt{t-1} \cdot dt = \int (t-1)^{1/2} \cdot dt =$$
$$= \frac{(t-1)^{3/2}}{3/2} + K = \frac{2(e^x - 1)^{3/2}}{3} + K = \frac{2\sqrt{(e^x-1)^3}}{3} + K = \frac{2(e^x-1)\sqrt{e^x - 1}}{3} + K$$

- **Integración de funciones con potencias de exponente fraccionario.**

- Para calcular integrales del tipo $\int R(x^{a/b}, x^{c/d}, \cdots, x^{p/q}).dx$ se efectúa el cambio de variable $x = t^m$ donde $m = m.c.m.(a, d, \ldots, q)$

Ejemplo:

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

Calculamos el mínimo común múltiplo de los índices de los radicales: $m = m.c.m.(2,3) = 6$ y hacemos el cambio $x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5.dt$ Sustituyendo en nuestra integral, nos queda:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5 dt}{\sqrt{t^6}+\sqrt[3]{t^6}} = 6\int \frac{t^5}{t^3+t^2}\cdot dt = 6\int \frac{t^5}{t^2(t+1)}\cdot dt = 6\int \frac{t^3}{t+1}\cdot dt =$$

$$= 6\int\left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)\cdot dt = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - L|t+1|\right) + K$$

Teniendo en cuenta que $x = t^6 \Rightarrow t = \sqrt[6]{x}$ con lo cual:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = 6\left(\frac{\sqrt[6]{x^3}}{3} - \frac{\sqrt[6]{x^2}}{2} + \sqrt[6]{x} - L\left|\sqrt[6]{x}+1\right|\right) + K = 2\sqrt{x} - 3\cdot\sqrt[3]{x} + 6\cdot\sqrt[6]{x} - 6L\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + K$$

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

La mayor parte de las integrales de funciones trigonométricas pueden resolverse haciendo transformaciones en el integrando teniendo en cuenta las identidades vistas en el curso anterior, algunas de las cuales recordamos a continuación:

- $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
- $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$
- $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$
- $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}\cdot(1 - \cos 2x)$
- $\cos^2 x = \frac{1}{2}\cdot(1 + \cos 2x)$
- $1 - \cos x = 2\cdot\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$
- $1 + \cos x = 2\cdot\cos^2\frac{x}{2}$
- $\operatorname{sen} x\cdot\cos x = \frac{1}{2}\cdot\operatorname{sen} 2x$
- $\operatorname{sen} x\cdot\cos y = \frac{1}{2}\cdot[\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)]$
- $\cos x\cdot\cos y = \frac{1}{2}\cdot[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$
- $\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen} y = -\frac{1}{2}\cdot[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$

EJEMPLOS.

- $\int \mathbf{sen}^2\, \boldsymbol{x}\cdot \boldsymbol{dx}$

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cdot dx = \int \frac{1}{2} \cdot (1-\cos 2x).dx = \frac{1}{2} \cdot \int (1-\cos 2x).dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\int dx - \int \cos 2x.dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} 2x \right) + K$$

- $\int \mathbf{cos}^2\, \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{dx}$

$$\int \cos^2 x \cdot dx = \int \frac{1}{2} \cdot (1+\cos 2x).dx = \frac{1}{2} \cdot \int (1+\cos 2x).dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\int dx + \int \cos 2x.dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} 2x \right) + K$$

- $\int \mathbf{cos}^3\, \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{dx}$

$$\int \cos^3 x \cdot dx = \int \cos x \cdot \cos^2 x \cdot dx = \int \cos x \cdot (1-\operatorname{sen}^2 x) \cdot dx = \int \cos x \cdot dx - \int \cos x \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot dx =$$

$$= \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + K$$

- $\int \mathbf{sen}^4\, \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{dx}$

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cdot dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cdot dx = \int \left(\frac{1}{2} \cdot (1-\cos 2x) \right)^2 \cdot dx = \frac{1}{4} \int (1-\cos 2x)^2 \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) \cdot dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2} \cdot (1+\cos 4x)) \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int (\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2} \cdot \cos 4x) \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{3}{2} \int dx - \int 2\cos 2x \cdot dx + \frac{1}{2} \int \cos 4x \cdot dx \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{3}{2} x - \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8} \cdot \operatorname{sen} 4x \right] + K$$

- $\int \sqrt{\mathbf{1} - \mathbf{cos}\, \boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{dx}$

$$\int \sqrt{1-\cos x} \cdot dx = \int \sqrt{2 \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}} \cdot dx = \sqrt{2} \cdot \int \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cdot dx = 2.\sqrt{2} \cdot \int \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cdot dx =$$

$$= -2\sqrt{2} \cdot \cos \frac{x}{2} + K$$

-

$$\int \cos 4x.\cos 2x.dx = \int \frac{1}{2} \cdot \left[\cos(4x+2x) + \cos(4x-2x)\right] \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int \left[\cos 6x + \cos 2x\right] \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos 6x dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \int 6\cos 6x dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int 2\cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \operatorname{sen} 6x + \frac{1}{4} \cdot \operatorname{sen} 2x + K$$

-

$$\int \operatorname{sen} 4x.\cos 3x.dx = \int \frac{1}{2}\cdot\left[\operatorname{sen}(4x+3x)+\operatorname{sen}(4x-3x)\right]\cdot dx = \frac{1}{2}\cdot\int\left[\operatorname{sen} 7x+\operatorname{sen} x\right]\cdot dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 7xdx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} xdx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\int 7\operatorname{sen} 7xdx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} xdx =$$
$$= -\frac{1}{14}\cdot\cos 7x - \frac{1}{2}\cdot\cos x + K$$

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRASCENDENTES: $\int \boldsymbol{R(\operatorname{sen} x,\cos x).dx}$

R designa una función racional en $\mathbf{sen}\,\boldsymbol{x}$ y $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}$. Este tipo de integrales puede reducirse a racionales mediante un simple cambio de variable.

Las sustituciones más frecuentes son:

- Si ***R*** es una función impar de $\boldsymbol{\cos x}$, es decir: $\boldsymbol{R(-\cos x) = -R(\cos x)}$ realizaremos la sustitución $\boldsymbol{\operatorname{sen} x = t \Rightarrow \cos x.dx = dt}$
- Si ***R*** es una función impar en $\boldsymbol{\operatorname{sen} x}$, es decir: $\boldsymbol{R(-\operatorname{sen} x) = -R(\operatorname{sen} x)}$ haremos la sustitución $\boldsymbol{\cos x = t \Rightarrow -\operatorname{sen} x.dx = dt}$
- Si $\boldsymbol{R(\operatorname{sen} x,\cos x)}$ no cambia cuando se cambia a la vez $\boldsymbol{\operatorname{sen} x}$ por $\boldsymbol{-\operatorname{sen} x}$ y $\boldsymbol{\cos x}$ por $\boldsymbol{-\cos x}$, se racionaliza mediante la sustitución $\boldsymbol{\operatorname{tg} x = t \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x}\cdot dx = dt}$
- En todos los casos la función $\boldsymbol{R(\operatorname{sen} x,\cos x)}$ se puede racionalizar mediante la sustitución $\boldsymbol{\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t}$, de donde $\boldsymbol{\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}}$ $\boldsymbol{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$ $\boldsymbol{dx = \frac{2}{1+t^2}\cdot dt}$

Ejemplos.

- $\int \operatorname{sen}^3 x.dx$

Haciendo el cambio $\boldsymbol{\cos x = t \Rightarrow -\operatorname{sen} x.dx = dt}$ tendremos:

$$\int \operatorname{sen}^3 x.dx = \int \operatorname{sen}^2 x.\operatorname{sen} x.dx = \int (1-\cos^2 x)\cdot(-dt) = \int (1-t^2).(-dt) = \int (t^2-1).dt =$$
$$= \frac{t^3}{3} - t + K = \frac{1}{3}\cdot\cos^3 x - \cos x + K$$

- $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}.dx$

Hacemos el cambio $\boldsymbol{\operatorname{sen} x = t \Rightarrow \cos x.dx = dt}$ con lo que la integral nos queda:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}.dx = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x \cdot dx}{t^4} = \int \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)\cdot dt}{t^4} = \int \frac{1-t^2}{t^4}\cdot dt = \int\left(\frac{1}{t^4}-\frac{t^2}{t^4}\right)\cdot dt =$$

$$= \int (t^{-4}-t^{-2})\cdot dt = \frac{t^{-3}}{-3}-\frac{t^{-1}}{-1}+K = \frac{1}{t}-\frac{1}{3t^3}+K = \frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{3\operatorname{sen}^3 x}+K$$

- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^4 x}\cdot dx$

Hacemos el cambio $\mathbf{tg}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{t} \Rightarrow \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos^2}\, \boldsymbol{x}}\cdot \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{dt}$ y la integral nos queda:

$$\int \frac{1}{\cos^4 x}\cdot dx = \int \frac{1}{\cos^4 x}\cdot \cos^2 x \cdot dt = \int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot dt = \int (1+\operatorname{tg}^2 x)\cdot dt =$$

$$= \int (1+t^2).dt = t+\frac{t^3}{3}+K = \operatorname{tg} x+\frac{1}{3}\cdot \operatorname{tg}^3 x + K$$

- $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\cdot dx$

Realizamos la sustitución general $\mathbf{tg}\dfrac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}} = \boldsymbol{t},$ de donde $\mathbf{sen}\, \boldsymbol{x} = \dfrac{\mathbf{2}\boldsymbol{t}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}}$, $\mathbf{cos}\, \boldsymbol{x} = \dfrac{\mathbf{1}-\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}}$ y $\boldsymbol{dx} = \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}}\cdot \boldsymbol{dt}$ con lo que nos queda:

$$\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\cdot dx = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\cdot dt = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{(1+t^2)+(1-t^2)}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\cdot dt = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\cdot dt =$$

$$= \int \frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot dt = \int \frac{1+1-(1+t^2)}{1+t^2}\cdot dt = \int\left(\frac{2}{1+t^2}-1\right)\cdot dt = 2\operatorname{arctg} t - t + K =$$

$$= 2\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{x}{2}) - \operatorname{tg}\frac{x}{2}+K = 2\cdot\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+K = x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+K$$

Calcula:

-