4 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Página 102

PARA EMPEZAR, REFLEXIONA Y RESUELVE

Problema 1

Para calcular la altura de un árbol, podemos seguir el procedimiento que utilizó Tales de Mileto para hallar la altura de una pirámide de Egipto: comparar su sombra con la de una vara vertical cuya longitud es conocida.

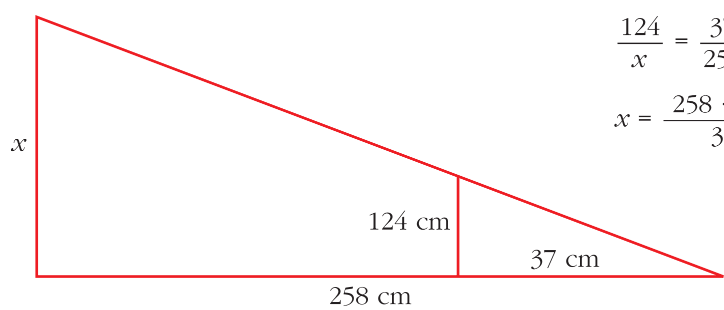
Hazlo tú siguiendo este método y sabiendo que:

— la vara mide 124 cm,

— la sombra de la vara mide 37 cm,

— la sombra del árbol mide 258 cm.

Para solucionar este problema habrás utilizado la semejanza de dos triángulos.



$$\frac{124}{x} = \frac{37}{258}$$

$$x = \frac{258 \cdot 124}{37} = 864{,}65 \text{ cm}$$

La altura del árbol es de 864,65 cm.

Problema 2

Bernardo conoce la distancia $\overline{AB}$ a la que está del árbol y los ángulos $\widehat{CBA}$ y $\widehat{BAC}$; y quiere calcular la distancia $\overline{BC}$ a la que está de Carmen.

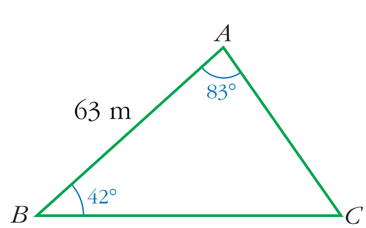
Datos: **$\overline{AB}$ = 63 m**

$\widehat{CBA}$ = 42º

$\widehat{BAC}$ = 83º

$\overline{BC}$ = 42 mm

Deshaciendo la escala: $\overline{BC}$ = 42 m



Página 103

Problema 3

Bernardo ve desde su casa el castillo y la abadía. Conoce las distancias a ambos lugares, pues ha hecho el camino a pie muchas veces; y quiere averiguar la distancia del castillo a la abadía. Para ello debe, previamente, medir el ángulo CBA.

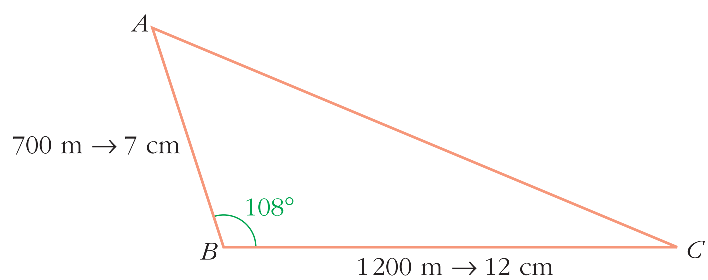
Datos: $\overline{BC}$ **= 1 200 m;** $\overline{BA}$ **= 700 m;** $\widehat{CBA}$ **= 108°.**

100 m $\rightarrow$ 1 cm

1 200 m $\rightarrow$ 12 cm

700 m $\rightarrow$ 7 cm

$\overline{CA}$ = 14,7 cm $\Rightarrow$ $\overline{CA}$ = 1 470 m

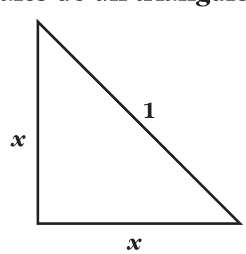


NOTA: El triángulo está construido al 50% de su tamaño.

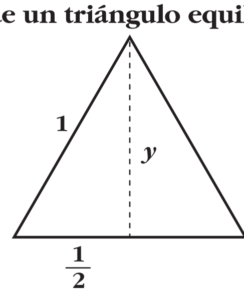
Problema 4

Calcula, aplicando el teorema de Pitágoras:

a) Los lados iguales de un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 1.



b) La altura de un triángulo equilátero de lado 1.



Haz todos los cálculos manteniendo los radicales. Debes llegar a las siguientes soluciones:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

a) $1^2 = x^2 + x^2$

$1 = 2x^2$

$x^2 = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $1^2 = y^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$y^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

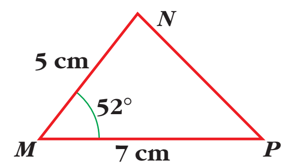
Página 104

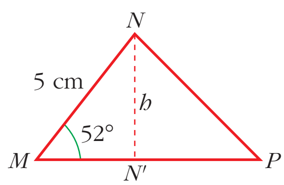
1. Considera este triángulo:

a) Calcula la proyección de *MN* sobre *MP*.

b) Halla la altura correspondiente a la base *MP*.

c) Calcula el área del triángulo.





a) $cos\ 52° = \frac{\overline{MN'}}{MN} = \frac{\overline{MN'}}{5} \Rightarrow \overline{MN'} = 5\ cos\ 52° = 3{,}08$ cm

b) $sen\ 52° = \frac{\text{h}}{5} \Rightarrow \text{h} = 5 \cdot sen\ 52° = 3{,}94$ cm

c) $A = \frac{b \cdot \text{h}}{2} = \frac{b \cdot \overline{MN} \cdot sen\ 52°}{2} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 \cdot sen\ 52° = 13{,}79\ \text{cm}^2$

Página 105

1. Halla *tg* 76° y *cos* 38° 15' 43".

tg 76° = 4,0107809

cos 38° 15' 43" = 0,7851878

2. Pasa a grados, minutos y segundos (° ' ") el ángulo 39,87132°.

39,87132° = 38° 52' 16,7"

3. Halla α y β sabiendo que *cos* α = 0,83 y *tg* β = 2,5.

cos α = 0,83 → α ≈ 33,901262° = 33° 54' 4,54"

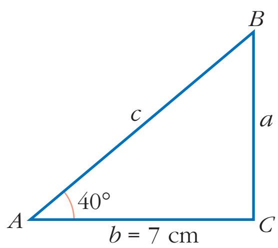
tg β = 2,5 → β ≈ 68,198591° = 68° 11' 54,9"

4. Sabiendo que *tg* β = 0,6924, halla *cos* β.

tg β = 0,6924 → β ≈ 34,698729° → *cos* β ≈ 0,8222

Página 106

1. Para determinar la altura de un poste nos hemos alejado 7 m de su base y hemos medido el ángulo que forma la visual al punto más alto con la horizontal, obteniendo un valor de 40º. ¿Cuánto mide el poste?



$$tg\ 40° = \frac{a}{7} \rightarrow a = 7\ tg\ 40° = 5{,}87 \text{ m}$$

Página 108

1. Razonando sobre el triángulo sombreado de arriba, y teniendo en cuenta que su hipotenusa es $\overline{OA} = 1$, justifica que los segmentos $\overline{OA'}$ y $\overline{A'A}$ corresponden, efectivamente, a las razones trigonométricas *cos* α, *sen* α.

$$cos\ \alpha = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA'}}{1} = \overline{OA'} \qquad sen\ \alpha = \frac{\overline{A'A}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'A}}{1} = \overline{A'A}$$

2. Aplicando el teorema de Pitágoras en el correspondiente triángulo rectángulo, justifica que:

$$(sen\ \beta)^2 + (cos\ \beta)^2 = 1$$

(Ten en cuenta que $(-x)^2 = x^2$).

$$(sen\ \beta)^2 + (cos\ \beta)^2 = (\overline{B'B})^2 + (\overline{OB'})^2 \overset{(*)}{=} (\overline{OB})^2 = 1^2 = 1$$

(*) Teorema de Pitágoras.

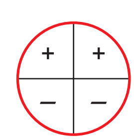
Si consideramos una circunferencia no goniométrica $(r \neq 1)$:

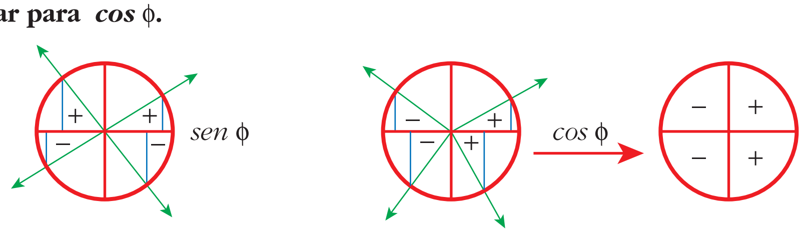
$$(sen\ \beta)^2 + (cos\ \beta)^2 = \left(\frac{\overline{B'B}}{\overline{OB}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\right)^2 = \frac{(\overline{B'B})^2 + (\overline{OB'})^2}{(\overline{OB})^2} \overset{(*)}{=} \frac{(\overline{OB})^2}{(\overline{OB})^2} = 1$$

3. Di el valor de *sen* α y *cos* α para ángulos de 0º, 90º, 180º, 270º y 360º.

$sen\ 0° = 0$	$sen\ 90° = 1$	$sen\ 180° = 0$	$sen\ 270° = -1$	$sen\ 360° = 0$
$cos\ 0° = 1$	$cos\ 90° = 0$	$cos\ 180° = -1$	$cos\ 270° = 0$	$cos\ 360° = 1$

4. En este círculo se da el signo de *sen* φ según el cuadrante en el que se halle situado el ángulo φ. Comprueba que es correcto y haz algo similar para *cos* φ.

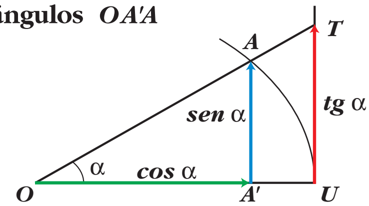




Página 109

5. Teniendo en cuenta la semejanza de los triángulos *OA'A* y *OUT*, y que $\overline{OU} = 1$, demuestra que:

$$\boldsymbol{tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}}$$



$$tg\ \alpha = \frac{\overline{TU}}{\overline{OU}} = \frac{\overline{A'A}}{\overline{OA'}} = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$$

6. Construye una circunferencia de 10 cm de radio sobre papel milimetrado. (Las hojas de este papel suelen tener 19 cm de ancho. Corta de arriba una tira de 1 cm y pégala en el lateral; así podrás dibujar la circunferencia completa).

Señala ángulos diversos: 27°, 71°, 113°, 162°, 180°, 211°, 270°, 280°, 341° con el transportador.

Lee sobre la cuadrícula el *seno* y el *coseno* de cada uno, cuidando de dar correctamente el signo.

$sen\ 27° = 0,45 = \left(\frac{4,5\ \text{cm}}{10\ \text{cm}}\right)$

$cos\ 27° = 0,89 = \left(\frac{8,9\ \text{cm}}{10\ \text{cm}}\right)$

$sen\ 71° = 0,95$

$cos\ 71° = 0,33$

$sen\ 113° = 0,92$

$cos\ 113° = -0,39$

$sen\ 162° = 0,31$

$cos\ 162° = -0,95$

$sen\ 180° = 0$

$cos\ 180° = -1$

$sen\ 211° = -0,52$

$cos\ 211° = -0,86$

$sen\ 270° = -1$

$cos\ 270° = 0$

$sen\ 280° = -0,98$

$cos\ 280° = 0,17$

$sen\ 341° = -0,33$

$cos\ 341° = 0,95$

Página 111

1. Calcula las razones trigonométricas de 55°, 125°, 145°, 215°, 235°, 305° y 325° a partir de las razones trigonométricas de 35°:

$$\boldsymbol{sen\ 35° = 0,57; \quad cos\ 35° = 0,82; \quad tg\ 35° = 0,70}$$

- $55° = 90° - 35° \Rightarrow 55°$ y $35°$ son complementarios

$$\left.\begin{array}{l} sen\ 55° = cos\ 35° = 0,82 \\ cos\ 55° = sen\ 55° = 0,57 \end{array}\right\} \ tg\ 55° = \frac{sen\ 55°}{cos\ 55°} = \frac{0,82}{0,57} = 1,43$$

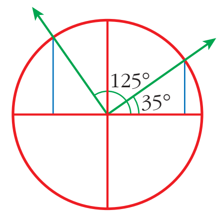
$$\left(\text{También}\quad tg\ 55° = \frac{1}{tg\ 35°} = \frac{1}{0,70} \approx 1,43\right)$$

- $125° = 90° + 35°$

  $sen\ 125° = cos\ 35° = 0{,}82$

  $cos\ 125° = -sen\ 35° = -0{,}57$

  $tg\ 125° = \dfrac{-1}{tg\ 35°} = \dfrac{-1}{0{,}70} = -1{,}43$

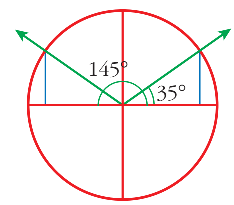


- $145° = 180° - 35° \Rightarrow$ 145° y 35° son suplementarios

  $sen\ 145° = sen\ 35° = 0{,}57$

  $cos\ 145° = -cos\ 35° = -0{,}82$

  $tg\ 145° = -tg\ 35° = -0{,}70$

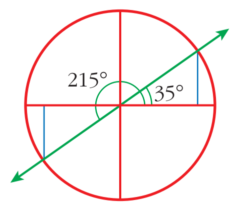


- $215° = 180° + 35°$

  $sen\ 215° = -sen\ 35° = -0{,}57$

  $cos\ 215° = -cos\ 35° = -0{,}82$

  $tg\ 215° = tg\ 35° = 0{,}70$

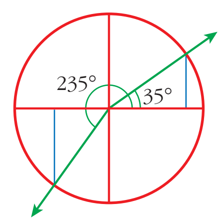


- $235° = 270° - 35°$

  $sen\ 235° = -cos\ 35° = -0{,}82$

  $cos\ 235° = -sen\ 35° = -0{,}57$

  $tg\ 235° = \dfrac{sen\ 235°}{cos\ 235°} = \dfrac{-cos\ 35°}{-sen\ 35°} = \dfrac{1}{tg\ 35°} = \dfrac{1}{0{,}70} = 1{,}43$

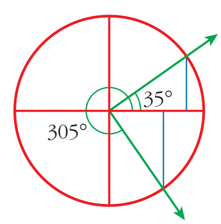


- $305° = 270° + 35°$

  $sen\ 305° = -cos\ 35° = -0{,}82$

  $cos\ 305° = sen\ 35° = 0{,}57$

  $tg\ 305° = \dfrac{sen\ 305°}{cos\ 305°} = \dfrac{-cos\ 35°}{sen\ 35°} = -\dfrac{1}{tg\ 35°} = -1{,}43$

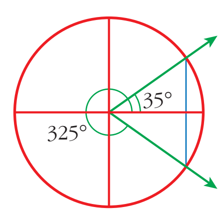


- $325° = 360° - 35°\ \ (= -35°)$

  $sen\ 325° = -sen\ 35° = -0{,}57$

  $cos\ 325° = cos\ 35° = 0{,}82$

  $tg\ 325° = \dfrac{sen\ 325°}{cos\ 325°} = \dfrac{-sen\ 35°}{cos\ 35°} = -tg\ 35° = -0{,}70$



2. Averigua las razones trigonométricas de 718º, 516º y 342º, utilizando la calculadora solo para hallar razones trigonométricas de ángulos comprendidos entre 0º y 90º.

- $718° = 360° + 358° \Rightarrow$ Las razones trigonométricas de 718° serán las mismas que las de 358°. Calculemos estas:

  $$358° = 360° - 2°$$

$sen\ 718° = sen\ 358° = -sen\ 2° = -0{,}0349$

$cos\ 718° = cos\ 358° = cos\ 2° = 0{,}9994$

$tg\ 718° = tg\ 358° \overset{(*)}{=} -tg\ 2° = -0{,}03492$

$^{(*)}\ tg\ 358° = \dfrac{sen\ 358°}{cos\ 358°} = \dfrac{-sen\ 2°}{cos\ 2°} = -tg\ 2°$

- $516° = 360° + 156°$ (razonando como en el caso anterior):

$$156° = 180° - 24°$$

$sen\ 516° = sen\ 156° = sen\ 24° = 0{,}4067$

$cos\ 516° = cos\ 156° = -cos\ 24° = -0{,}9135$

$tg\ 516° = -tg\ 24° = -0{,}4452$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO:

$$516° = 360° + 156°$$

$156° = 90° + 66°$

$sen\ 516° = sen\ 156° = cos\ 66° = 0{,}4067$

$cos\ 516° = cos\ 156° = -sen\ 66° = -0{,}9135$

$tg\ 516° = tg\ 156° = \dfrac{-1}{tg\ 66°} = \dfrac{-1}{2{,}2460} = -0{,}4452$

- $342° = 360° - 18°$

$sen\ 342° = -sen\ 18° = -0{,}3090$

$cos\ 342° = cos\ 18° = 0{,}9511$

$tg\ 342° = -tg\ 18° = -0{,}3249$

3. Dibuja, sobre la circunferencia goniométrica, ángulos que cumplan las siguientes condiciones y estima, en cada caso, el valor de las restantes razones trigonométricas:

a) $sen\ \alpha = -\dfrac{1}{2},\ tg\ \alpha > 0$ **b)** $cos\ \alpha = \dfrac{3}{4},\ \alpha > 90°$

c) $tg\ \beta = -1,\ cos\ \beta < 0$ **d)** $tg\ \alpha = 2,\ cos\ \alpha < 0$

a) $\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha = -1/2 < 0 \\ tg\ \alpha > 0 \end{array}\right\} \rightarrow\ cos\ \alpha < 0\ \rightarrow\ \alpha \in 3^{er}$ cuadrante

$\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha = -1/2 \\ cos\ \alpha \approx -0{,}86 \end{array}\right\} tg\ \alpha \approx 0{,}58$

b) $\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha = 3/4 \\ \alpha > 90° \end{array}\right\} \rightarrow\ \alpha \in 4^{er}$ cuadrante

$\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha \approx -0{,}66 \\ cos\ \alpha = 3/4 \end{array}\right\} tg\ \alpha \approx -0{,}88$

c) $\left.\begin{array}{l} tg\ \beta = -1 < 0 \\ cos\ \beta < 0 \end{array}\right\} \rightarrow\ sen\ \beta > 0\ \rightarrow\ \beta \in 2^{\underline{o}}$ cuadrante

$\left.\begin{array}{l} sen\ \beta \approx 0{,}7 \\ cos\ \beta \approx -0{,}7 \end{array}\right\}\ tg\ \beta = -1$

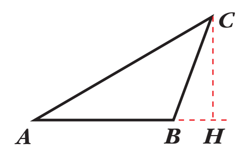
d) $\left.\begin{array}{l} tg\ \alpha = 2 > 0 \\ cos\ \alpha < 0 \end{array}\right\} \rightarrow\ sen\ \alpha < 0\ \rightarrow\ \alpha \in 3^{\underline{o}}$ cuadrante

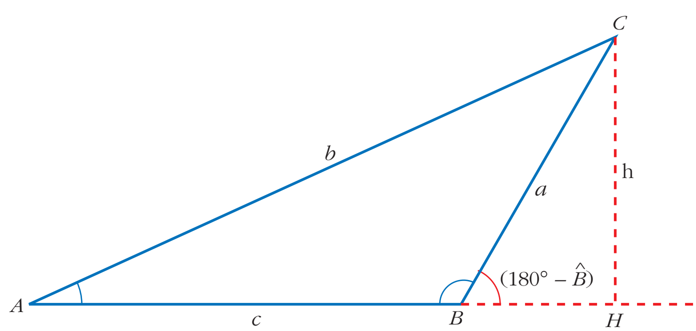
$\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha \approx -0{,}9 \\ cos\ \alpha \approx -0{,}45 \end{array}\right\}\ tg\ \alpha = 2$

Página 112

1. Repite la demostración anterior en el caso de que $\hat{B}$ sea obtuso. Ten en cuenta que:

***sen* (180º – $\hat{B}$) = *sen* $\hat{B}$**





$sen\ \hat{A} = \frac{h}{b}\ \rightarrow\ h = b\ sen\ \hat{A}$

$sen\ \hat{B} = sen\,(180 - \hat{B}) = \frac{h}{a}\ \rightarrow\ h = a\ sen\ \hat{B}$

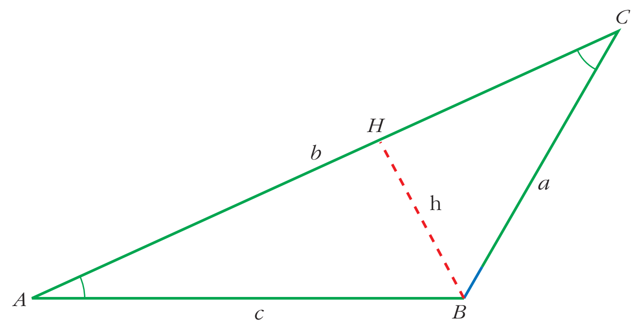
$b\ sen\ \hat{A} = a\ sen\ \hat{B}\ \rightarrow\ \frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}}$

2. Demuestra, detalladamente, basándote en la demostración anterior, la siguiente relación:

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}}.$$

Lo demostramos para $\hat{C}$ ángulo agudo. (Si fuese un ángulo obtuso razonaríamos como en el ejercicio anterior).

Trazamos la altura h desde el vértice *B*. Así, los triángulos obtenidos *AHB* y *CHB* son rectángulos.



Por tanto, tenemos: $sen\ \hat{A} = \dfrac{h}{c} \rightarrow h = c\ sen\ \hat{A}$

$sen\ \hat{C} = \dfrac{h}{a} \rightarrow h = a\ sen\ \hat{C}$

$c\ sen\ \hat{A} = a\ sen\ \hat{C}$

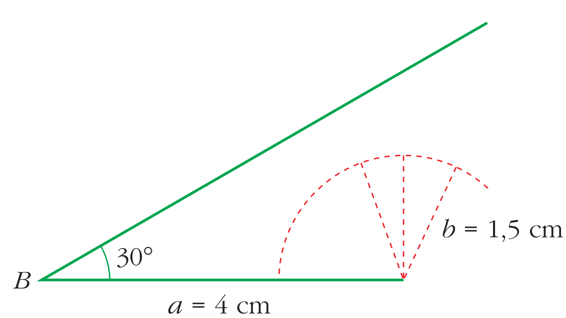
$\dfrac{a}{sen\ \hat{A}} = \dfrac{c}{sen\ \hat{C}}$

Página 113

3. Resuelve el mismo problema anterior (a = 4 cm, $\hat{B}$ = 30°) tomando para b los siguientes valores: b = 1,5 cm, b = 2 cm, b = 3 cm, b = 4 cm. Justifica gráficamente por qué se obtienen, según los casos, ninguna solución, una solución o dos soluciones.

- b = 1,5 cm

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} \rightarrow \frac{4}{sen\ \hat{A}} = \frac{1,5}{sen\ 30°} \rightarrow sen\ \hat{A} = \frac{4 \cdot 0,5}{1,5} = 1,\hat{3}$$

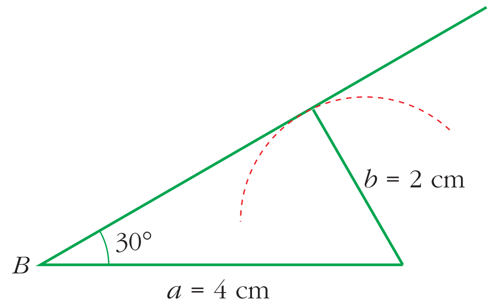


¡Imposible, pues $sen\ \hat{A} \in [-1, 1]$ siempre!

No tiene solución. Con esta medida, b = 1,5 cm, el lado b nunca podría tocar al lado c.

• $b = 2$ cm

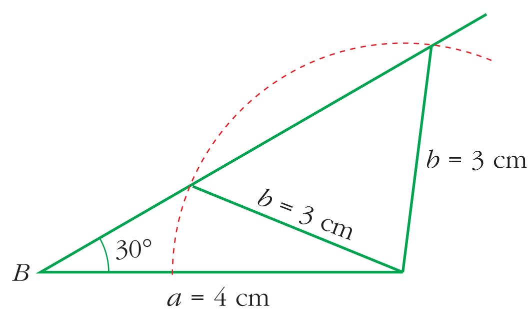
$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} \rightarrow \frac{4}{sen\ \hat{A}} = \frac{2}{sen\ 30°} \rightarrow sen\ \hat{A} = \frac{4 \cdot 0,5}{2} = 1 \rightarrow A = 90°$$



Se obtiene una única solución.

• $b = 3$ cm

$$\frac{4}{sen\ \hat{A}} = \frac{3}{sen\ 30°} \rightarrow sen\ \hat{A} = \frac{4 \cdot 0,5}{3} = 0,\widehat{6} \rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = 41°\ 48'\ 37,1'' \\ \hat{A}_2 = 138°\ 11'\ 22,9'' \end{cases}$$

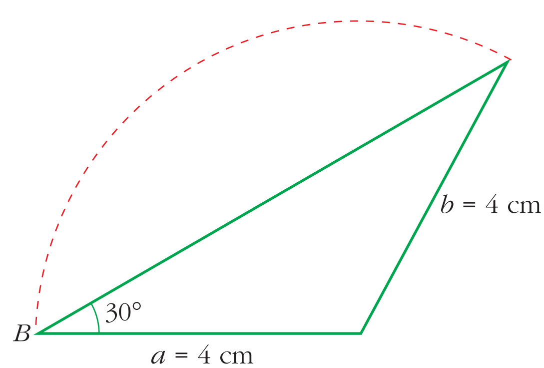


Las dos soluciones son válidas, pues en ningún caso ocurre que $\hat{A} + \hat{B} > 180°$.

• $b = 4$ cm

$$\frac{4}{sen\ \hat{A}} = \frac{4}{sen\ 30°} \rightarrow sen\ \hat{A} = \frac{4 \cdot 0,5}{4} = 0,5 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = 30° \rightarrow \text{Una solución válida} \\ \hat{A}_2 = 150° \end{cases}$$



La solución $\hat{A}_2 = 150°$ no es válida, pues, en tal caso, sería $\hat{A} + \hat{B} = 180°$. ¡Imposible!

Página 115

4. Resuelve los siguientes triángulos:

a) $\boldsymbol{a = 12}$ **cm;** $\boldsymbol{b = 16}$ **cm;** $\boldsymbol{c = 10}$ **cm**

b) $\boldsymbol{b = 22}$ **cm;** $\boldsymbol{a = 7}$ **cm;** $\boldsymbol{\hat{C} = 40°}$

c) $\boldsymbol{a = 8}$ **m;** $\boldsymbol{b = 6}$ **m;** $\boldsymbol{c = 5}$ **m**

d) $\boldsymbol{b = 4}$ **cm;** $\boldsymbol{c = 3}$ **cm;** $\boldsymbol{\hat{A} = 105°}$

e) $\boldsymbol{a = 4}$ **m;** $\boldsymbol{\hat{B} = 45°}$ **y** $\boldsymbol{\hat{C} = 60°}$

f) $\boldsymbol{b = 5}$ **m;** $\boldsymbol{\hat{A} = \hat{C} = 35}$

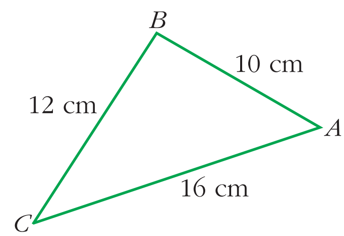
a) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

$12^2 = 16^2 + 10^2 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cos \hat{A}$

$144 = 256 + 100 - 320 \cos \hat{A}$

$$\cos \hat{A} = \frac{256 + 100 - 144}{320} = 0{,}6625$$

$A = 48°\ 30'\ 33''$



• $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$

$256 = 144 + 100 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cos \hat{B}$

$$\cos \hat{B} = \frac{144 + 100 - 256}{240} = -0{,}05$$

$B = 92°\ 51'\ 57{,}5''$

• $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \;\rightarrow\; \hat{C} = 180 - \hat{A} - \hat{B}$

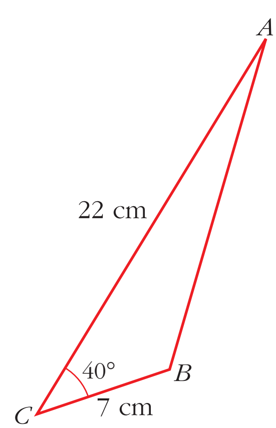
$\hat{C} = 38°\ 37'\ 29{,}5''$

b) • $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$

$c^2 = 7^2 + 22^2 - 2 \cdot 7 \cdot 22 \cos 40° =$

$= 49 + 484 - 235{,}94 = 297{,}06$

$c = 17{,}24$ cm



• $$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \;\rightarrow\; \frac{7}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{17{,}24}{\operatorname{sen} 40°}$$

$$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{7 \operatorname{sen} 40°}{17{,}24} = 0{,}26$$

$$A = \begin{cases} \hat{A}_1 = 15°\ 7'\ 44{,}3'' \\ \hat{A}_2 = 164°\ 52'\ 15{,}7'' \;\rightarrow\; \text{No válida} \end{cases}$$

(La solución A_2 no es válida, pues $\hat{A}_2 + \hat{C} > 180°$).

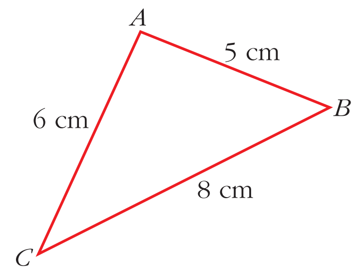
• $\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) = 124°\ 52'\ 15{,}7''$

c) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

$64 = 36 + 25 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cos \hat{A}$

$\cos \hat{A} = \dfrac{36 + 25 - 64}{60} = -0{,}05$

$\hat{A} = 92° \ 51' \ 57{,}5''$



• $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$

$36 = 64 + 25 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cos \hat{B}$

$\cos \hat{B} = \dfrac{64 + 25 - 36}{80} = 0{,}6625$

$\hat{B} = 48° \ 30' \ 33''$

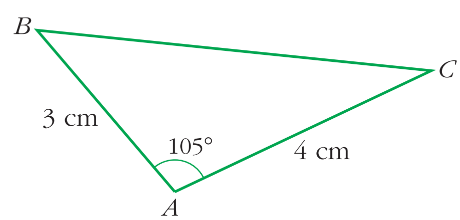
• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 38° \ 37' \ 29{,}5''$

(NOTA: Compárese con el apartado a). Son triángulos semejantes).

d) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} =$

$= 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos 105° = 31{,}21$

$a = 5{,}59$ m



• $\dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}}$

$\dfrac{5{,}59}{\text{sen } 105°} = \dfrac{4}{\text{sen } \hat{B}}$

$\text{sen } \hat{B} = \dfrac{4 \cdot \text{sen } 105°}{5{,}59} = 0{,}6912$

$\hat{B} = \begin{cases} \hat{B}_1 = 43° \ 43' \ 25{,}3'' \\ \hat{B}_2 = 136° \ 16' \ 34{,}7'' \quad \rightarrow \quad \text{No válida} \end{cases}$

(La solución $\hat{B}_2$ no es válida, pues $\hat{A}_2 + \hat{B}_2 > 180°$).

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 31° \ 16' \ 34{,}7''$

e) • $\hat{A} = 180 - (\hat{B} + \hat{C}) = 75°$

• $\dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}}$

$\dfrac{4}{\text{sen } 75°} = \dfrac{b}{\text{sen } 45°}$

$b = \dfrac{4 \cdot \text{sen } 45°}{\text{sen } 75°} = 2{,}93$ m

• $\dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \dfrac{c}{\text{sen } \hat{C}} \quad \rightarrow \quad \dfrac{4}{\text{sen } 75°} = \dfrac{c}{\text{sen } 60°}$

$c = \dfrac{4 \cdot \text{sen } 60°}{\text{sen } 75°} = 3{,}59$ m

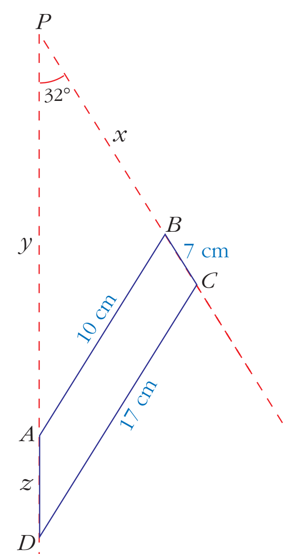
f) • $\hat{B} = 180 - (\hat{A} + \hat{C}) = 110°$

• $\dfrac{b}{sen\ \hat{B}} = \dfrac{a}{sen\ \hat{A}} \rightarrow \dfrac{5}{sen\ 110°} = \dfrac{a}{sen\ 35°}$

$a = \dfrac{5 \cdot sen\ 35°}{sen\ 110°} = 3{,}05$ m

• Como $\hat{A} = \hat{C} \rightarrow a = c \rightarrow c = 3{,}05$ m

5. Las bases de un trapecio miden 17 cm y 10 cm y uno de sus lados 7 cm. El ángulo que forman las rectas sobre las que se encuentran los lados no paralelos es de 32º. Calcula lo que mide el otro lado y el área del trapecio.



• Los triángulos APB y DPC son semejantes, luego:

$\dfrac{x}{10} = \dfrac{x+7}{17} \rightarrow 17x = 10(x+7) \rightarrow x = 10$

Aplicando el teorema del coseno en el triángulo APB tenemos:

$\overline{AB}^2 = x^2 + y^2 - 2xy\ cos\ 32°$

$10^2 = 10^2 + y^2 - 2 \cdot 10y \cdot cos\ 32°$

$0 = y^2 - 16{,}96y$

$\begin{cases} y = 0 \rightarrow \text{No válido} \\ y = 16{,}96 \text{ cm} \end{cases}$

De nuevo, por semejanza de triángulos, tenemos:

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{DP}} \rightarrow \dfrac{10}{16{,}96} = \dfrac{17}{z + 16{,}96} \rightarrow 10(z + 16{,}96) = 17 \cdot 16{,}96$

$10z = 118{,}72 \rightarrow z = 11{,}872$ cm mide el otro lado, $\overline{AD}$, del trapecio.

• Como PDC es un triángulo isósceles donde $\overline{DC} = \overline{CP} = 17$ cm, entonces:

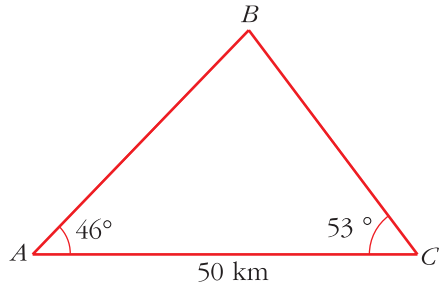
$\hat{D} = 32° \rightarrow sen\ 32° = \dfrac{h}{z} \Rightarrow h = z \cdot sen\ 32° = 11{,}872 \cdot sen\ 32° \approx 6{,}291$

Así:

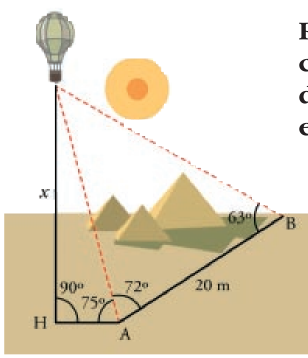
$$\text{Área}_{ABCD} = \frac{B + b}{2} \cdot h = \frac{17 + 10}{2} \cdot 6{,}291 = 84{,}93 \text{ cm}^2$$

6. Un barco B pide socorro y se reciben sus señales en dos estaciones de radio, A y C, que distan entre sí 50 km. Desde las estaciones se miden los siguientes ángulos: $BAC = 46°$ y $BCA = 53°$. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?

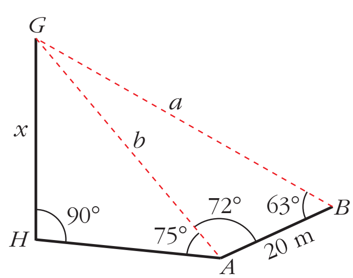
$\hat{B} = 180° - 46° - 53° = 81°$



- $\dfrac{a}{sen\ \hat{A}} = \dfrac{b}{sen\ \hat{B}} \rightarrow a = \dfrac{b\ sen\ \hat{A}}{sen\ \hat{B}} = \dfrac{50 \cdot sen\ 46°}{sen\ 81°} = 36{,}4$ km
- $\dfrac{c}{sen\ \hat{C}} = \dfrac{b}{sen\ \hat{B}} \rightarrow c = \dfrac{b\ sen\ \hat{C}}{sen\ \hat{B}} = \dfrac{50 \cdot sen\ 53°}{sen\ 81°} = 40{,}4$ km

7. 

Para hallar la altura de un globo, realizamos las mediciones indicadas en la figura. ¿Cuánto dista el globo del punto *A*? ¿Cuánto del punto *B*? ¿A qué altura está el globo?



$\widehat{AGB} = 180° - 72° - 63° = 45°$

- $\dfrac{b}{sen\ 63°} = \dfrac{20}{sen\ 45°} \rightarrow b = \dfrac{20 \cdot sen\ 63°}{sen\ 45°} = 25{,}2$ m
- $\dfrac{a}{sen\ 72°} = \dfrac{20}{sen\ 45°} \rightarrow a = \dfrac{20 \cdot sen\ 72°}{sen\ 45°} = 26{,}9$ m
- $sen\ 75° = \dfrac{x}{b} = \dfrac{x}{25{,}2} \rightarrow x = 25{,}2 \cdot sen\ 75° = 24{,}3$ m

Página 120

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 **Sabiendo que el ángulo α es obtuso, completa la siguiente tabla:**

sen α	**0,92**				**0,5**	
cos α			**–0,12**	**–0,8**		
tg α		**–0,75**				**–4**

sen α	0,92	0,6	0,99	0,6	0,5	0,96
cos α	–0,39	–0,8	–0,12	–0,8	–0,87	–0,24
tg α	–2,36	–0,75	–8,25	–0,75	–0,57	–4
	a)	b)	c)	d)	e)	f)

a) $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \;\rightarrow\; 0{,}92^2 + cos^2\,\alpha = 1 \;\rightarrow\; cos^2\,\alpha = 1 - 0{,}92^2$

$cos^2\,\alpha = 0{,}1536 \;\rightarrow\; cos\,\alpha = -0{,}39$

$\uparrow$

α obtuso $\rightarrow$ $cos\,\alpha < 0$

$tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = -2{,}36$

(Se podrían calcular directamente con la calculadora $\alpha = sen^{-1}\,0{,}92$, teniendo en cuenta que el ángulo está en el segundo cuadrante).

b) $\dfrac{1}{cos^2\,\alpha} = 1 + tg^2\,\alpha \;\rightarrow\; \dfrac{1}{cos^2\,\alpha} = 1 + 0{,}5625 \;\rightarrow\; cos^2\,\alpha = 0{,}64 \;\rightarrow\; cos\,\alpha = -0{,}8$

$tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} \;\rightarrow\; sen\,\alpha = tg\,\alpha \cdot cos\,\alpha = (-0{,}75) \cdot (-0{,}8) = 0{,}6$

c) $sen^2\,\alpha = 1 - cos^2\,\alpha = 1 - 0{,}0144 = 0{,}9856 \;\rightarrow\; sen\,\alpha = 0{,}99$

$tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \dfrac{0{,}99}{-0{,}12} = -8{,}25$

d) $sen^2\,\alpha = 1 - cos^2\,\alpha = 1 - 0{,}64 = 0{,}36 \;\rightarrow\; sen\,\alpha = 0{,}6$

$tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \dfrac{0{,}6}{-0{,}8} = 0{,}75$

(NOTA: es el mismo ángulo que el del apartado b)).

e) $cos^2\,\alpha = 1 - sen^2\,\alpha = 1 - 0{,}25 = 0{,}75 \;\rightarrow\; cos\,\alpha = -0{,}87$

$tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \dfrac{0{,}5}{-0{,}87} = -0{,}57$

f) $\dfrac{1}{cos^2\,\alpha} = 1 + tg^2\,\alpha = 1 + 16 \;\rightarrow\; cos^2\,\alpha = 0{,}059 \;\rightarrow\; cos\,\alpha = -0{,}24$

$sen\,\alpha = tg\,\alpha \cdot cos\,\alpha = (-4) \cdot (-0{,}24) = 0{,}96$

2 **Resuelve los siguientes triángulos rectángulos $(\hat{C} = 90°)$ hallando la medida de todos los elementos desconocidos:**

a) $\boldsymbol{a = 5}$ **cm,** $\boldsymbol{b = 12}$ **cm. Halla** $\boldsymbol{c, \hat{A}, \hat{B}}$**.**

b) $\boldsymbol{a = 43}$ **m,** $\boldsymbol{\hat{A} = 37°}$**. Halla** $\boldsymbol{b, c, \hat{B}}$**.**

c) $\boldsymbol{a = 7}$ **m,** $\boldsymbol{\hat{B} = 58°}$**. Halla** $\boldsymbol{b, c, \hat{A}}$**.**

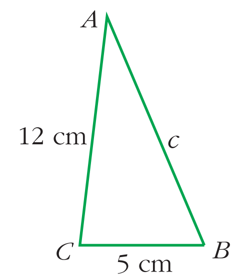
d) $\boldsymbol{c = 5{,}8}$ **km,** $\boldsymbol{\hat{A} = 71°}$**. Halla** $\boldsymbol{a, b, \hat{B}}$**.**

e) $\boldsymbol{c = 5}$ **cm,** $\boldsymbol{\hat{B} = 43°}$**. Halla** $\boldsymbol{a, b, \hat{A}}$**.**

a) $c^2 = a^2 + b^2 \;\rightarrow\; c^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \;\rightarrow\; c = 13$ cm

$$tg\ \hat{A} = \frac{5}{12} = 0{,}416 \;\rightarrow\; A = 22°\ 37'\ 11{,}5°$$

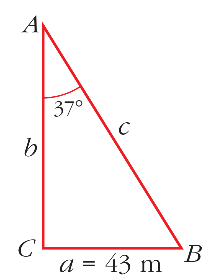
$$\hat{B} = 90° - \hat{A} = 67°\ 22'\ 48{,}5''$$



b) $\hat{B} = 90° - 37° = 53°$

$$sen\ \hat{A} = \frac{43}{c} \;\rightarrow\; c = \frac{43}{sen\ 37°} = 71{,}45 \text{ m}$$

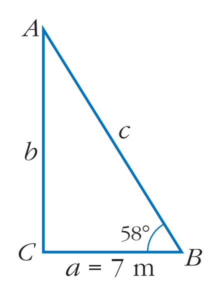
$$tg\ \hat{A} = \frac{43}{b} \;\rightarrow\; b = \frac{43}{tg\ 37°} = 57{,}06 \text{ m}$$



c) $\hat{A} = 90° - 58° = 32°$

$$cos\ \hat{B} = \frac{7}{c} \;\rightarrow\; c = \frac{7}{cos\ 58°} = 13{,}2 \text{ m}$$

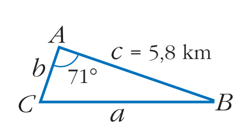
$$tg\ \hat{B} = \frac{b}{7} \;\rightarrow\; b = 7 \cdot tg\ 58° = 11{,}2 \text{ m}$$



d) $\hat{B} = 90° - 71° = 19°$

$$sen\ \hat{A} = \frac{a}{5{,}8} \;\rightarrow\; a = 5{,}8 \cdot sen\ 71° = 5{,}48 \text{ km}$$

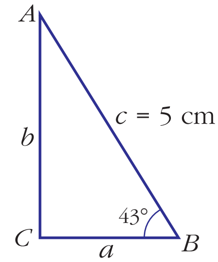
$$cos\ \hat{A} = \frac{b}{5{,}8} \;\rightarrow\; b = 5{,}8 \cdot cos\ 71° = 1{,}89 \text{ km}$$



e) $\widehat{A} = 90° - 43° = 47°$

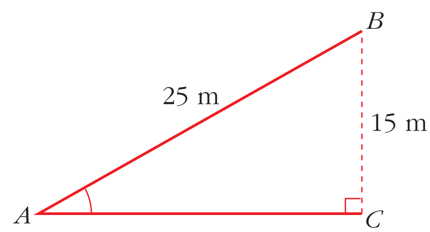
$cos\ \widehat{B} = \dfrac{a}{5} \quad \rightarrow \quad a = 5 \cdot cos\ 43° = 3,66$ cm

$sen\ \widehat{B} = \dfrac{b}{5} \quad \rightarrow \quad b = 5 \cdot sen\ 43° = 3,41$ cm



3 **Si queremos que una cinta transportadora de 25 metros eleve la carga hasta una altura de 15 metros, ¿qué ángulo se deberá inclinar la cinta?**

$sen\ \widehat{A} = \dfrac{15}{25} = 0,6 \quad \rightarrow \quad \widehat{A} = 36°\ 52'\ 11,6''$



4 **Una persona de 1,78 m de estatura proyecta una sombra de 66 cm, y en ese momento un árbol da una sombra de 2,3 m.**

a) ¿Qué ángulo forman los rayos del Sol con la horizontal?

b) ¿Cuál es la altura del árbol?

a) $tg\ \widehat{B} = \dfrac{178}{66} = 2,\overset{\frown}{69} \quad \rightarrow$

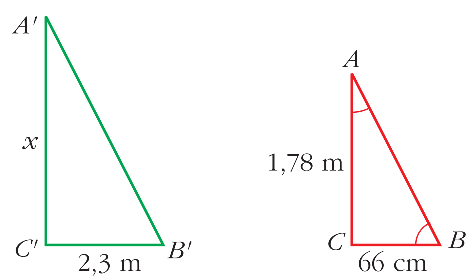
$\rightarrow \quad B = 69°\ 39'\ 21,2''$

b) $\widehat{B}' = \widehat{B}$, luego:

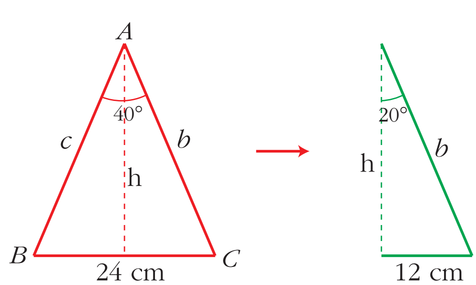
$tg\ \widehat{B}' = \dfrac{x}{2,3} \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad x = 2,3 \cdot tg\ \widehat{B}' = 6,2\overset{\frown}{03}$ m

(NOTA: Se podría resolver con el teorema de Tales).



5 **Calcula los lados iguales y el área de un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 24 cm y el ángulo opuesto a la base mide 40°.**

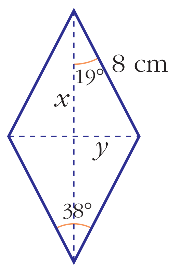


$$sen\ 20° = \frac{12}{b} \to b = \frac{12}{sen\ 20°} \approx 35{,}1 \text{ cm} = c$$

$$tg\ 20° = \frac{12}{h} \to h = \frac{12}{tg\ 20°} \approx 33 \text{ cm} \to A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{24 \cdot 33}{2} = 396 \text{ cm}$$

6 **El lado de un rombo mide 8 cm y el ángulo menor es de 38º.**

¿Cuánto miden las diagonales del rombo?

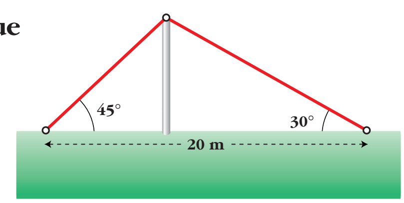


$$sen\ 19° = \frac{y}{8} \to y = 8 \cdot sen\ 19° = 2{,}6 \text{ cm} \to d = 5{,}2 \text{ cm}$$

$$cos\ 38° = \frac{x}{8} \to x = 8 \cdot cos\ 19° = 7{,}6 \text{ cm} \to D = 15{,}2 \text{ cm}$$

7 **Hemos colocado un cable sobre un mástil que lo sujeta como muestra la figura.**

¿Cuánto miden el mástil y el cable?



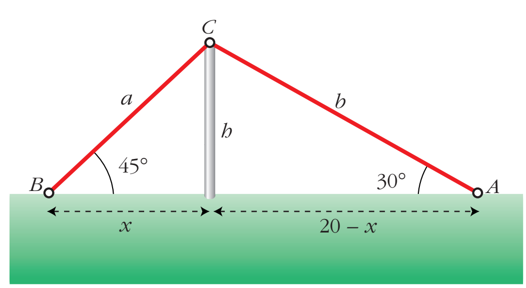
$$\left.\begin{array}{l} tg\ 45° = \dfrac{h}{x} \to x = \dfrac{h}{tg\ 45°} = \dfrac{h}{1} = h \\ tg\ 30° = \dfrac{h}{20 - x} \end{array}\right\} \to$$

$$\to tg\ 30° = \frac{h}{20 - h} \to (20 - h)\ tg\ 30° = h \to 20\ tg\ 30° - h\ tg\ 30° = h$$

$$\to 20\ tg\ 30° = h + h\ tg\ 30° \to h = \frac{20\ tg\ 30°}{1 + tg\ 30°} = 7{,}32 \text{ m (mástil)}$$

$$\left.\begin{array}{l} sen\ 45° = \dfrac{h}{a} \to a = \dfrac{h}{sen\ 45°} = \dfrac{7{,}32}{sen\ 45°} = 10{,}35 \text{ m} \\ sen\ 30° = \dfrac{h}{b} \to b = \dfrac{h}{sen\ 30°} = \dfrac{7{,}32}{sen\ 30°} = 14{,}64 \text{ m} \end{array}\right\} \to$$

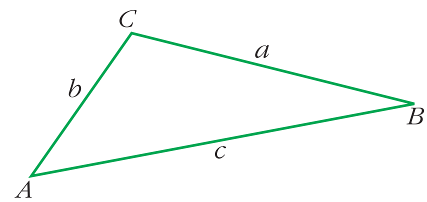
$$\to a + b = 24{,}99 \text{ m (cable)}$$



8 **Resuelve los siguientes triángulos:**

a) $\boldsymbol{a}$ **= 100 m**	$\hat{B}$ **= 47º**	$\hat{C}$ **= 63º**
b) $\boldsymbol{b}$ **= 17 m**	$\hat{A}$ **= 70º**	$\hat{C}$ **= 35º**
c) $\boldsymbol{a}$ **= 70 m**	$\boldsymbol{b}$ **= 55 m**	$\hat{C}$ **= 73º**
d) $\boldsymbol{a}$ **= 122 m**	$\boldsymbol{c}$ **= 200 m**	$\hat{B}$ **= 120º**
e) $\boldsymbol{a}$ **= 25 m**	$\boldsymbol{b}$ **= 30 m**	$\boldsymbol{c}$ **= 40 m**
f) $\boldsymbol{a}$ **= 100 m**	$\boldsymbol{b}$ **= 185 m**	$\boldsymbol{c}$ **= 150 m**
g) $\boldsymbol{a}$ **= 15 m**	$\boldsymbol{b}$ **= 9 m**	$\hat{A}$ **= 130º**
h) $\boldsymbol{b}$ **= 6 m**	$\boldsymbol{c}$ **= 8 m**	$\hat{C}$ **= 57º**

a) • $\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C}) = 70°$



• $\dfrac{a}{sen\ \hat{A}} = \dfrac{b}{sen\ \hat{B}} \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{100}{sen\ 70°} = \dfrac{b}{sen\ 47°} \rightarrow$

$\rightarrow b = \dfrac{100 \cdot sen\ 47°}{sen\ 70°} = 77{,}83$ m

• $\dfrac{100}{sen\ 70°} = \dfrac{c}{sen\ 63°} \rightarrow c = \dfrac{100 \cdot sen\ 63°}{sen\ 70°} = 94{,}82$ m

b) • $\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 75°$

• $\dfrac{17}{sen\ 75°} = \dfrac{a}{sen\ 70°} \rightarrow a = \dfrac{17 \cdot sen\ 70°}{sen\ 75°} = 16{,}54$ m

• $\dfrac{17}{sen\ 75°} = \dfrac{c}{sen\ 35°} \rightarrow c = \dfrac{17 \cdot sen\ 35°}{sen\ 75°} = 10{,}09$ m

c) • $c^2 = 70^2 + 55^2 - 2 \cdot 70 \cdot 55 \cdot cos\ 73° = 5\,673{,}74 \rightarrow c = 75{,}3$ m

• $70^2 = 55^2 + 75{,}3^2 - 2 \cdot 55 \cdot 75{,}3 \cdot cos\ \hat{A} \rightarrow$

$\rightarrow cos\ \hat{A} = \dfrac{55^2 + 75{,}3^2 - 70^2}{2 \cdot 55 \cdot 75{,}3} = 0{,}4582 \rightarrow A = 62°\ 43'\ 49{,}4''$

• $\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) = 44°\ 16'\ 10{,}6''$

d) • $b^2 = 122^2 + 200^2 - 2 \cdot 122 \cdot 200 \cdot cos\ 120° = 79\,284 \rightarrow b = 281{,}6$ m

• $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ \hat{A} \rightarrow cos\ \hat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \rightarrow$

$\rightarrow cos\ \hat{A} = \dfrac{281{,}6^2 + 200^2 - 122^2}{2 \cdot 281{,}6 \cdot 200} = 0{,}92698 \rightarrow A = 22°\ 1'\ 54{,}45''$

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 37°\ 58'\ 55{,}5''$

e) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \;\rightarrow$

$$\rightarrow \cos\hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{30^2 + 40^2 - 25^2}{2 \cdot 30 \cdot 40} = 0{,}7812 \;\rightarrow\; A = 38°\ 37'\ 29{,}4''$$

• $\cos\hat{B} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{25^2 + 40^2 - 30^2}{2 \cdot 25 \cdot 40} = 0{,}6625 \;\rightarrow\; B = 48°\ 30'\ 33''$

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 92°\ 51'\ 57{,}6''$

f) • $\cos\hat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{185^2 + 150^2 - 100^2}{2 \cdot 185 \cdot 150} = 0{,}84189 \;\rightarrow\; A = 32°\ 39'\ 34{,}4''$

• $\cos\hat{B} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{100^2 + 150^2 - 185^2}{2 \cdot 100 \cdot 150} = -0{,}0575 \;\rightarrow\; B = 93°\ 17'\ 46{,}7''$

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 54°\ 2'\ 38{,}9''$

g) • $\dfrac{15}{\text{sen } 130°} = \dfrac{9}{\text{sen }\hat{B}} \;\rightarrow\; \text{sen }\hat{B} = \dfrac{9 \cdot \text{sen } 130°}{15} = 0{,}4596 \;\rightarrow$ puede ser:

$$\rightarrow \begin{cases} \hat{B}_1 = 27°\ 21'\ 46{,}8'' \\ \hat{B}_2 = 152°\ 38'\ 13{,}2'' \end{cases}$$

La solución $\hat{B}_2$ no es válida, pues $\hat{A} + \hat{B}_2 > 180°$.

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 22°\ 38'\ 13{,}2''$

• $\dfrac{15}{\text{sen } 130°} = \dfrac{c}{\text{sen }\hat{C}} \;\rightarrow\; c = \dfrac{15 \cdot \text{sen }\hat{C}}{\text{sen } 130°} = 7{,}54$ m

h) • $\dfrac{8}{\text{sen } 57°} = \dfrac{6}{\text{sen }\hat{B}} \;\rightarrow\; \text{sen }\hat{B} = \dfrac{6 \cdot \text{sen } 57°}{8} = 0{,}6290 \;\rightarrow$

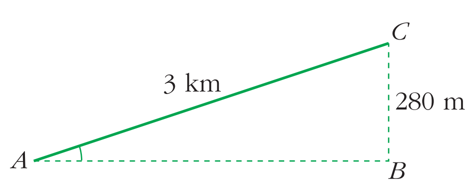
$$\rightarrow \begin{cases} \hat{B}_1 = 38°\ 58'\ 35{,}7'' \\ \hat{B}_2 = 141°\ 1'\ 24{,}3'' \end{cases}$$

La solución B_2 no es válida, pues $\hat{C} + \hat{B}_2 > 180°$.

• $\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C}) = 84°\ 1'\ 24{,}3''$

• $\dfrac{8}{\text{sen } 57°} = \dfrac{a}{\text{sen }\hat{A}} \;\rightarrow\; a = \dfrac{8 \cdot \text{sen }\hat{A}}{\text{sen } 57°} = 9{,}5$ m

9 **Al recorrer 3 km por una carretera, hemos ascendido 280 m. ¿Qué ángulo forma la carretera con la horizontal?**



$$\text{sen }\hat{A} = \frac{280}{3\,000} = 0{,}09\hat{3} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; A = 5°\ 21'\ 19{,}44''$$

10 **Halla con la calculadora el ángulo α:**

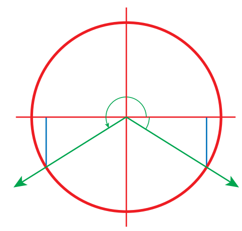
a) $\boldsymbol{sen\ \alpha = -0,75,} \qquad \boldsymbol{\alpha < 270°}$

b) $\boldsymbol{cos\ \alpha = -0,37,} \qquad \boldsymbol{\alpha > 180°}$

c) $\boldsymbol{tg\ \alpha = 1,38,} \qquad \boldsymbol{sen\ \alpha < 0}$

d) $\boldsymbol{cos\ \alpha = 0,23,} \qquad \boldsymbol{sen\ \alpha < 0}$

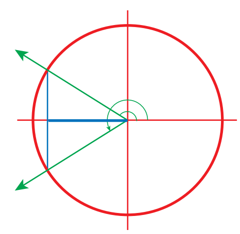
a) Con la calculadora $\rightarrow$ $\alpha = -48°\ 35'\ 25'' \in$ 4º cuadrante



Como debe ser $\left\{ \begin{array}{l} sen\ \alpha < 0 \\ \alpha < 270° \end{array} \right\}$ $\rightarrow$ $\alpha \in$ 3$^{\underline{er}}$ cuadrante

Luego $\alpha = 180° + 48°\ 35'\ 25'' = 228°\ 35'\ 25''$

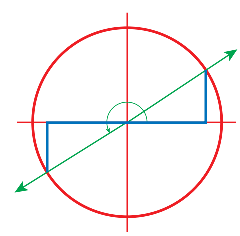
b) Con la calculadora: $111°\ 42'\ 56,3''$



$\left. \begin{array}{l} cos\ \alpha < 0 \\ \alpha > 180° \end{array} \right\} \rightarrow$ $\left. \begin{array}{l} \alpha \in 3^{\underline{er}} \text{ cuadrante} \\ \alpha = 360° - 111°\ 42'\ 56,3'' \end{array} \right\} \rightarrow$

$\rightarrow \alpha = 248°\ 17'\ 3,7''$

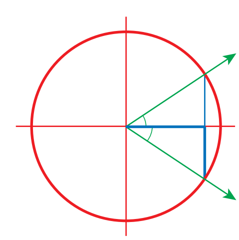
c) $\left. \begin{array}{l} tg\ \alpha = 1,38 > 0 \\ sen\ \alpha < 0 \end{array} \right\}$ $cos < 0$ $\rightarrow$ $\alpha \in$ 3$^{\underline{er}}$ cuadrante



Con la calculadora: $tg^{-1}\ 1,38 = 54°\ 4'\ 17,39''$

$\alpha = 180° + 54°\ 4'\ 17,39'' = 234°\ 4'\ 17,4''$

d) $\left. \begin{array}{l} cos\ \alpha = 0,23 > 0 \\ sen\ \alpha < 0 \end{array} \right\}$ $\rightarrow$ $\alpha \in$ 4º cuadrante



Con la calculadora: $cos^{-1}\ 0,23 = 76°\ 42'\ 10,5''$

$\alpha = -76°\ 42'\ 10,5'' = 283°\ 17'\ 49,6''$

11 **Halla las restantes razones trigonométricas de α:**

a) $\boldsymbol{sen\ \alpha = -4/5} \qquad \boldsymbol{\alpha < 270°}$

b) $\boldsymbol{cos\ \alpha = 2/3} \qquad \boldsymbol{tg\ \alpha < 0}$

c) $\boldsymbol{tg\ \alpha = -3} \qquad \boldsymbol{\alpha < 180°}$

a) $\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha < 0 \\ \alpha < 270° \end{array}\right\} \rightarrow \alpha \in 3^{er}$ cuadrante $\rightarrow \left\{\begin{array}{l} sen\ \alpha < 0 \\ cos\ \alpha < 0 \\ tg\ \alpha > 0 \end{array}\right.$

- $cos^2\ \alpha = 1 - sen^2\ \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \rightarrow cos\ \alpha = -\frac{3}{5}$
- $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{-4/5}{-3/5} = \frac{4}{3}$

b) $\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha > 0 \\ tg\ \alpha < 0 \end{array}\right\} \rightarrow sen\ \alpha < 0 \rightarrow \alpha \in 4^{o}$ cuadrante

- $sen^2\ \alpha = 1 - cos^2\ \alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \rightarrow sen\ \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$
- $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

c) $\left.\begin{array}{l} tg\ \alpha < 0 \\ \alpha < 180° \end{array}\right\} \rightarrow \alpha \in 2^{o}$ cuadrante $\rightarrow \left\{\begin{array}{l} sen\ \alpha > 0 \\ cos\ \alpha < 0 \end{array}\right.$

- $\frac{1}{cos^2\ \alpha} = tg^2\ \alpha + 1 = 9 + 1 = 10 \rightarrow cos^2\ \alpha = \frac{1}{10} \rightarrow cos\ \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$
- $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \rightarrow sen\ \alpha = tg\ \alpha \cdot cos\ \alpha = (-3)\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

12 **Expresa con un ángulo del primer cuadrante:**

a) *sen* 150º **b) *cos* 135º** **c) *tg* 210º**

d) *cos* 225º **e) *sen* 315º** **f) *tg* 120º**

g) *tg* 340º **h) *cos* 200º** **i) *sen* 290º**

a) $150° = 180° - 30° \rightarrow sen\ 150° = sen\ 30°$

b) $135° = 180 - 45° \rightarrow cos\ 135° = -cos\ 45°$

c) $210° = 180° + 30° \rightarrow tg\ 210° = \frac{sen\ 210°}{cos\ 210°} = \frac{-sen\ 30°}{-cos\ 30°} = tg\ 30°$

d) $255° = 270° - 15° \rightarrow cos\ 255° = -sen\ 15°$

e) $315° = 360° - 45° \rightarrow sen\ 315° = -sen\ 45°$

f) $120° = 180° - 60° \rightarrow tg\ 120° = \frac{sen\ 120°}{cos\ 120°} = \frac{sen\ 60°}{-cos\ 60°} = -tg\ 60°$

$\left(\text{También } 120° = 90° + 30° \rightarrow tg\ 120° = \frac{sen\ 120°}{cos\ 120°} = \frac{-cos\ 30°}{sen\ 30°} = -\frac{1}{tg\ 30}\right)$

g) $340° = 360° - 20° \rightarrow tg\ 340° = \frac{sen\ 340°}{cos\ 340°} = \frac{-sen\ 20°}{cos\ 20°} = -tg\ 20°$

h) $200° = 180° + 20° \rightarrow \cos 200° = -\cos 20°$

i) $290° = 270° + 20° \rightarrow \text{sen } 290° = -\cos 20°$

(También $290° = 360° - 70° \rightarrow \text{sen } 290° = -\text{sen } 70°$)

13 **Si *sen* α = 0,35 y α < 90º, halla:**

a) *sen* (180º – α) **b) *sen* (α + 90º)**

c) *sen* (180º + α) **d) *sen* (360º – α)**

e) *sen* (90º – α) **f) *sen* (360º + α)**

a) $\text{sen } (180° - \alpha) = \text{sen } \alpha = 0{,}35$

b) $\left.\begin{array}{l} \text{sen } (\alpha + 90°) = \cos \alpha \\ \text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - 0{,}35^2 = 0{,}8775 \Rightarrow \cos \alpha \approx 0{,}94 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \text{sen } (\alpha + 90°) = \cos \alpha = 0{,}94$

c) $\text{sen } (180° + \alpha) = -\text{sen } \alpha = -0{,}35$

d) $\text{sen } (360° - \alpha) = -\text{sen } \alpha = -0{,}35$

e) $\text{sen } (90° - \alpha) = \cos \alpha = 0{,}94$ (calculado en el apartado b))

f) $\text{sen } (360° + \alpha) = \text{sen } \alpha = 0{,}35$

14 **Busca un ángulo del primer cuadrante cuyas razones trigonométricas coincidan, en valor absoluto, con el ángulo dado:**

a) 124º **b) 214º** **c) 318º** **d) 100º**

e) 190º 50' **f) 295º** **g) 140º** **h) 258º**

a) $124° = 180° - 56° \rightarrow 56°$

b) $214° = 180° + 34° \rightarrow 34°$

c) $318° = 360° - 42° \rightarrow 42°$

d) $100° = 180° - 80° \rightarrow 80°$

e) $190°\ 50' - 180° = 10°\ 50'$

f) $360° - 295 = 65°$

g) $180° - 140° = 40°$

h) $258° - 180° = 78°$

15 **Si *tg* α = 2/3 y 0 < α < 90º, halla:**

a) *sen* α **b) *cos* α**

c) *tg* (90º – α) **d) *sen* (180º – α)**

e) *cos* (180º + α) **f) *tg* (360º – α)**

a) $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow \text{sen } \alpha = \text{tg } \alpha \cdot \cos \alpha$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \text{tg}^2 \alpha + 1 \rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{4}{9} + 1 = \frac{13}{9} \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\text{sen } \alpha = \text{tg } \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{13} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

b) Calculado en el apartado anterior: $cos\ \alpha = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

c) $tg\ (90° - \alpha) = \dfrac{sen\ (90° - \alpha)}{cos\ (90° - \alpha)} = \dfrac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha} = \dfrac{3}{2}$

d) $sen\ (180° - \alpha) = sen\ \alpha = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

e) $cos\ (180° + \alpha) = -cos\ \alpha = \dfrac{-3\sqrt{13}}{13}$

f) $tg\ (360° - \alpha) = \dfrac{sen\ (360° - \alpha)}{cos\ (360° - \alpha)} = \dfrac{-sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = -tg\ \alpha = -\dfrac{2}{3}$

Página 121

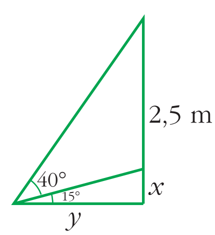
PARA RESOLVER

16 **Una estatua de 2,5 m está colocada sobre un pedestal. Desde un punto del suelo se ve el pedestal bajo un ángulo de 15° y la estatua bajo un ángulo de 40°. Calcula la altura del pedestal.**

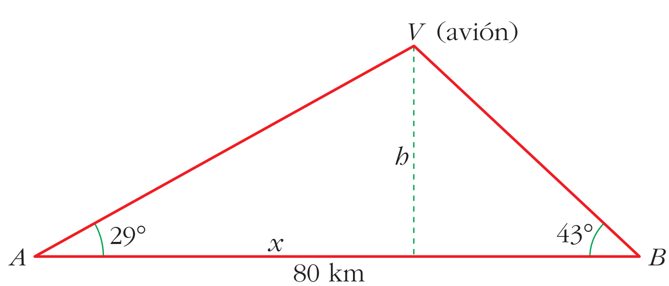
$$\left.\begin{array}{l} tg\ 15° = \dfrac{x}{y} \ \rightarrow \ y = \dfrac{x}{tg\ 15°} \\[2ex] tg\ 55° = \dfrac{2,5 + x}{y} \ \rightarrow \ y = \dfrac{2,5 + x}{tg\ 55°} \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x}{tg\ 15°} = \dfrac{2,5 + x}{tg\ 55°} \rightarrow$$

$$\rightarrow \ x\ tg\ 55° = 2,5\ tg\ 15° + x\ tg\ 15° \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ x = \dfrac{2,5 \cdot tg\ 15°}{tg\ 55° - tg\ 15°} = 0,58 \text{ m} \ \ \text{(el pedestal)}$$



17 **Un avión vuela entre dos ciudades, *A* y *B*, que distan 80 km. Las visuales desde el avión a *A* y a *B* forman ángulos de 29° y 43° con la horizontal, respectivamente. ¿A qué altura está el avión?**



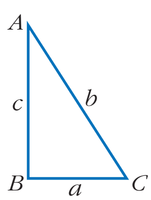
$$tg\ 29° = \frac{h}{x} \ \rightarrow\ x = \frac{h}{tg\ 29°}$$

$$tg\ 43° = \frac{h}{80 - x} \ \rightarrow\ x = \frac{80\ tg\ 43° - h}{tg\ 43°}$$

$$\rightarrow\ \frac{h}{tg\ 29°} = \frac{80\ tg\ 43° - h}{tg\ 43°} \ \rightarrow\ h\ tg\ 43° = 80\ tg\ 43°\ tg\ 29° - h\ tg\ 29° \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ h = \frac{80\ tg\ 43°\ tg\ 29°}{tg\ 43° + tg\ 29°} = 27{,}8 \text{ km}$$

18 **De un triángulo rectángulo se sabe que su área vale 864 cm² y un cateto mide 48 cm. Calcula las razones trigonométricas de sus ángulos.**



$$\left.\begin{array}{l}\text{Área} = 864 \text{ cm}^2\\ a = 48 \text{ cm}\end{array}\right\} \rightarrow A = \frac{a \cdot c}{2} \ \Rightarrow\ 864 = \frac{48 \cdot c}{2} \ \rightarrow\ c = 36 \text{ cm}$$

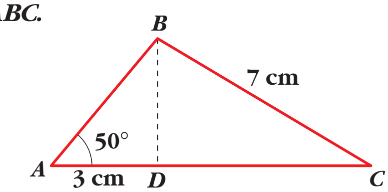
$$b^2 = a^2 + c^2 = 48^2 + 36^2 = 3\,600 \ \rightarrow\ b = 60 \text{ cm}$$

$sen\ \hat{A} = \frac{a}{b} = \frac{48}{60} = \frac{4}{5}$ $\quad$ $sen\ \hat{B} = sen\ 90° = 1$ $\quad$ $sen\ \hat{C} = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$

$cos\ \hat{A} = \frac{c}{b} = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$ $\quad$ $cos\ \hat{B} = cos\ 90° = 0$ $\quad$ $cos\ \hat{C} = \frac{48}{60} = \frac{4}{5}$

$tg\ \hat{A} = \frac{4}{3}$ $\quad$ $tg\ \hat{C} = \frac{3}{4}$

19 **Calcula los lados y los ángulos del triángulo *ABC*.**



En el triángulo rectángulo ABD, halla $\overline{AB}$ y $\overline{BD}$. En BDC, halla $\hat{C}$ y $\overline{DC}$. Para hallar $\hat{B}$, sabes que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$.

- En $\overset{\frown}{ABD}$:

$$cos\ 50° = \frac{3}{\overline{AB}} \ \rightarrow\ \overline{AB} = \frac{3}{cos\ 50°} = 4{,}7 \text{ cm}$$

$$tg\ 50° = \frac{\overline{BD}}{3} \ \rightarrow\ BD = 3\ tg\ 50° = 3{,}6 \text{ cm}$$

- En $\overset{\frown}{BDC}$:

$$sen\ \hat{C} = \frac{\overline{BD}}{7} = \frac{3{,}6}{7} \approx 0{,}5143 \ \rightarrow\ C = 30°\ 56'\ 59''$$

$$cos\ \hat{C} = \frac{\overline{DC}}{7} \ \rightarrow\ \overline{DC} = 7 \cdot cos\ \hat{C} \approx 6 \text{ cm}$$

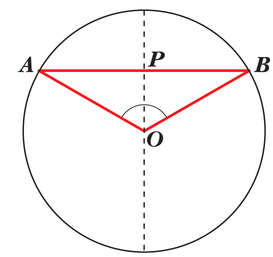
- Así, ya tenemos:

$\hat{A} = 50°$ $\quad$ $a = 7$ cm

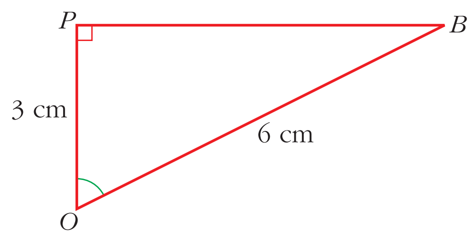
$\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) = 99°\ 3'\ 1''$ $\quad$ $b = \overline{AD} + \overline{DC} = 9$ cm

$\hat{C} = 30°\ 56'\ 59''$ $\quad$ $c = 4{,}7$ cm

20 **En una circunferencia de radio 6 trazamos una cuerda AB a 3 cm del centro. Halla el ángulo AOB.**



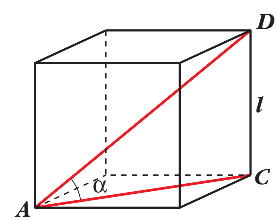
☛ ***Los triángulos AOP y BOP son iguales. En ambos conoces un cateto y la hipotenusa. Halla el ángulo AOP, que es la mitad de $\widehat{AOB}$.***



$$\left.\begin{array}{l}\overline{OP} = 3 \text{ cm}\\ \overline{OB} = 6 \text{ cm}\\ OPB = 90°\end{array}\right\} \rightarrow \cos \widehat{POB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \rightarrow \widehat{POB} = 60° \rightarrow$$

$$\rightarrow \widehat{AOB} = 2 \cdot \widehat{POB} = 2 \cdot 60° = 120°$$

21 **Halla el ángulo que forma la diagonal de la cara de un cubo y la diagonal del cubo.**



☛ ***Llama l a la arista del cubo y expresa, en función de l la diagonal AD. Calcula sen α en el triángulo ADC.***

- La diagonal $\overline{AC}$ divide la base en dos triángulos rectángulos isósceles iguales, donde $\overline{AC}$ es la hipotenusa. Así:

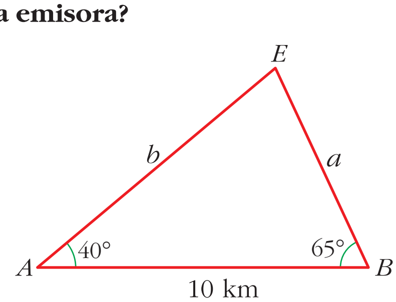
$$\overline{AC}^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 \text{ (por el teorema de Pitágoras)}$$

- ACD es un triángulo rectángulo, donde $\overline{AD}$ es la hipotenusa. Así:

$$\overline{AD}^2 = l^2 + \overline{AC}^2 = l^2 + 2l^2 = 3l^2 \rightarrow \overline{AD} = \sqrt{3}\, l$$

- En $\widehat{ACD}$, $sen\ \alpha = \dfrac{l}{\overline{AD}} = \dfrac{l}{\sqrt{3}\, l} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \alpha = 35°\ 15'\ 51{,}8''$

22 **Para localizar una emisora clandestina, dos receptores, A y B, que distan entre sí 10 km, orientan sus antenas hacia el punto donde está la emisora. Estas direcciones forman con AB ángulos de 40° y 65°. ¿A qué distancia de A y B se encuentra la emisora?**



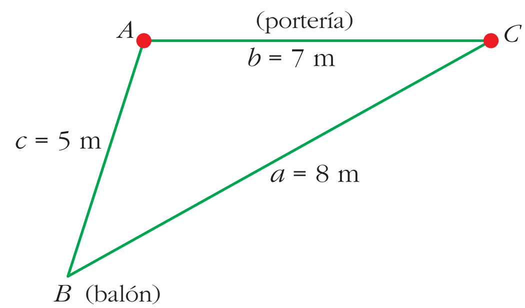
$\hat{E} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 75°$

Aplicando el teorema de los senos:

$$\frac{a}{sen\ 40°} = \frac{10}{sen\ 75°} \ \rightarrow \ a = \frac{10 \cdot sen\ 40°}{sen\ 75°} = 6{,}65 \text{ km} \ \text{ dista de } B$$

$$\frac{b}{sen\ 65°} = \frac{10}{sen\ 75°} \ \rightarrow \ b = \frac{10 \cdot sen\ 65°}{sen\ 75°} = 9{,}38 \text{ km} \ \text{ dista de } A$$

23 **En un entrenamiento de fútbol se coloca el balón en un punto situado a 5 m y 8 m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 7 m. ¿Bajo qué ángulo se ve la portería desde ese punto?**

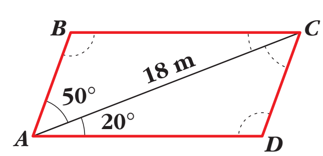


Aplicando el teorema del coseno:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\ \hat{B} \ \rightarrow$

$$\rightarrow \ cos\ \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} = 0{,}5 \ \rightarrow \ B = 60$$

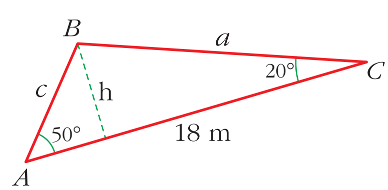
24 **Calcula el área y las longitudes de los lados y de la otra diagonal:**



☛ ***$\widehat{BAC} = \widehat{ACD} = 50°$. Calcula los lados del triángulo ACD y su área. Para hallar la otra diagonal, considera el triángulo ABD.***

- Los dos triángulos en que la diagonal divide al paralelogramo son iguales.

  Luego bastará resolver uno de ellos para calcular los lados:



$\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) = 110°$

$$\frac{a}{sen\ 50°} = \frac{18}{sen\ 110°} \ \rightarrow \ a = \frac{18 \cdot sen\ 50°}{sen\ 110°} = 14{,}7 \text{ m}$$

$$\frac{c}{sen\ 20°} = \frac{18}{sen\ 110°} \ \rightarrow \ c = \frac{18 \cdot sen\ 20°}{sen\ 110°} = 6{,}6 \text{ m}$$

Así: $\overline{AB} = \overline{CD} = c = 6{,}6$ m

$\overline{BC} = \overline{AD} = a = 14{,}7$ m

Para calcular el área del triángulo ABC:

$$sen\ 50° = \frac{h}{c} \rightarrow h = c \cdot sen\ 50° \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{Área}_{ABC} = \frac{18 \cdot h}{2} = \frac{18 \cdot c \cdot sen\ 50°}{2} = \frac{18 \cdot 6,6 \cdot sen\ 50°}{2} = 45,5\ \text{m}^2$$

El área del paralelogramo será:

$$\text{Área}_{ABCD} = 2 \cdot \text{Área}_{ABC} = 2 \cdot 45,5 = 91\ \text{m}^2$$

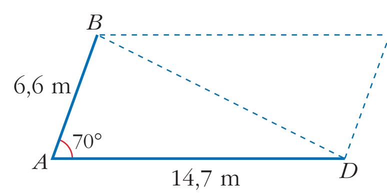
- Para calcular la otra diagonal consideremos el triángulo ABD:

$$\hat{A} = 50° + 20° = 70°$$

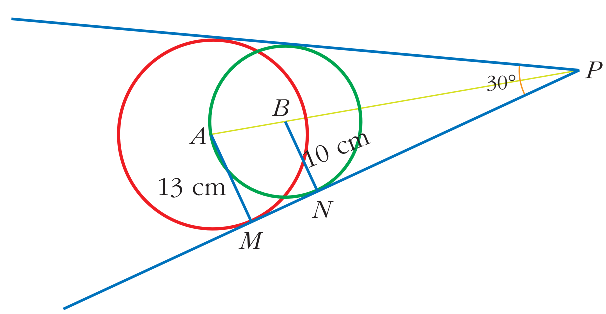
Aplicando el teorema del coseno:

$$\overline{BD}^2 = 6,6^2 + 14,7^2 - 2 \cdot 6,6 \cdot 14,7 \cdot cos\ 70° \approx$$

$$\approx 193,28 \rightarrow BD = 13,9\ \text{m}$$



25 **Dos circunferencias secantes tienen radios de 10 cm y 13 cm. Sus tangentes comunes forman un ángulo de 30º. Calcula la distancia entre los centros.**



Los triángulos AMP y BNP son rectángulos.

La recta que une los centros (A y B) es la bisectriz del ángulo 30°:

$$\widehat{BPN} = \widehat{APM} = 15°$$

Así:

$$sen\ 15° = \frac{10}{\overline{BP}} \rightarrow \overline{BP} = \frac{10}{sen\ 15°} = 38,6\ \text{cm}$$

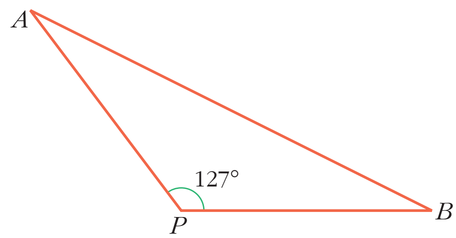
$$sen\ 15° = \frac{13}{\overline{AP}} \rightarrow \overline{AP} = \frac{13}{sen\ 15°} = 50,2\ \text{cm}$$

Y, por tanto:

$$\overline{AB} = \overline{AP} - \overline{BP} = 50,2 - 38,6 = 11,6\ \text{cm}$$

26 **Dos barcos parten de un puerto con rumbos distintos que forman un ángulo de $127°$. El primero sale a las 10 h de la mañana con una velocidad de 17 nudos, y el segundo sale a las 11 h 30 min, con una velocidad de 26 nudos. Si el alcance de sus equipos de radio es de 150 km, ¿podrán ponerse en contacto a las 3 de la tarde?**

(Nudo = milla / hora; milla = 1 850 m)



La distancia que recorre cada uno en ese tiempo es:

Barco A $\to$ $\overline{PA} = 17 \cdot 1\,850$ m/h $\cdot$ 5 h $= 157\,250$ m

Barco B $\to$ $\overline{PB} = 26 \cdot 1\,850$ m/h $\cdot$ 3,5 h $= 168\,350$ m

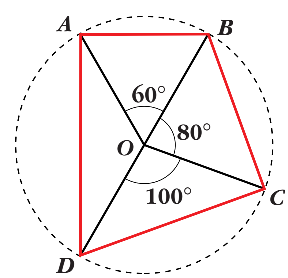
Necesariamente, $\overline{AB} > \overline{PA}$ y $\overline{AB} > \overline{PB}$, luego:

$$\overline{AB} > 168\,350 \text{ m}$$

Como el alcance de sus equipos de radio es 150 000 m, no podrán ponerse en contacto.

(NOTA: Puede calcularse $\overline{AB}$ con el teorema del coseno $\to$ $\overline{AB} = 291\,432{,}7$ m).

27 **Halla el perímetro del cuadrilátero *ABCD* inscrito en una circunferencia de 6 cm de radio.**



☛ ***Ten en cuenta que los triángulos AOB, BOC, COD y DOA son isósceles.***

Como el radio es 6 cm, los lados iguales a cada uno de esos triángulos isósceles miden 6 cm.

Así, para cada triángulo, conocidos dos lados y el ángulo comprendido, podemos hallar el tercer lado con el teorema del coseno.

- En $\widehat{AOB}$: $\overline{AB}^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos 60° = 36$ $\to$ $\overline{AB} = 6$ cm

  (Como era de esperar por ser un triángulo equilátero).

- En $\widehat{BOC}$: $\overline{BC}^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos 80° = 59{,}5$ $\to$ $\overline{BC} = 7{,}7$ cm

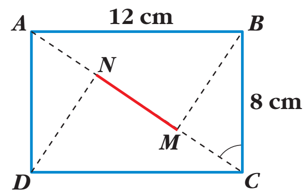
- En $\widehat{COD}$: $\overline{CD}^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos 100° = 84{,}5$ $\to$ $\overline{CD} = 9{,}2$ cm

- En $\widehat{DOA}$: $\overline{DA}^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos 120° = 108$ $\to$ $\overline{DA} = 10{,}4$ cm

- Por tanto, *Perímetro* $= 6 + 7{,}7 + 6{,}6 + 6{,}9 = 33{,}3$ cm

Página 122

28 **En un rectángulo *ABCD* de lados 8 y 12 cm, se traza desde *B* una perpendicular a la diagonal *AC*, y desde *D*, otra perpendicular a la misma diagonal. Sean *M* y *N* los puntos donde esas perpendiculares cortan a la diagonal. Halla la longitud del segmento $\overline{MN}$.**



☛ ***En el triángulo ABC, halla $\hat{C}$. En el triángulo BMC, halla $\overline{MC}$. Ten en cuenta que:***

$$\overline{MN} = \overline{AC} - 2\,\overline{MC}$$

Los triángulos *AND* y *BMC* son iguales, luego $\overline{AN} = \overline{MC}$

Como $\overline{MN} = \overline{AC} - \overline{AN} - \overline{MC}$, entonces:

$$\overline{MN} = \overline{AC} - 2\overline{MC}$$

Por tanto, basta con calcular $\overline{AC}$ en el triángulo *ABC* y $\overline{MC}$ en el triángulo *BMC*.

- En $\widehat{ABC}$:

  $\overline{AC}^2 = 8^2 + 12^2 = 208$ (por el teorema de Pitágoras) $\rightarrow \overline{AC} = 14{,}4$ cm

  Calculamos *C* (en $\widehat{ABC}$):

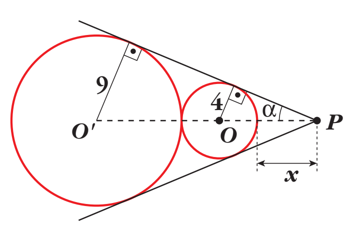
$$tg\ \hat{C} = \frac{12}{8} = 1{,}5 \quad \rightarrow \quad C = 56°\ 18'\ 35{,}8''$$

- En $\widehat{BMC}$:

$$cos\ \hat{C} = \frac{\overline{MC}}{8} \quad \rightarrow \quad \overline{MC} = 8 \cdot cos\ (56°\ 18'\ 35{,}8'') = 4{,}4 \text{ cm}$$

  Por último: $\overline{MN} = \overline{AC} - 2\overline{MC} = 14{,}4 - 2 \cdot 4{,}4 = 5{,}6$ cm

29 **Dos circunferencias son tangentes exteriormente y sus radios miden 9 m y 4 m, respectivamente. Halla el ángulo 2α que forman sus tangentes comunes.**



☛ ***Los radios forman con las tangentes dos triángulos rectángulos. Como $\overline{OP} = 4 + x$, se tiene:***

$$sen\ \alpha = \frac{4}{4 + x} \quad y \quad sen\ \alpha = \frac{9}{17 + x}$$

Calcula x y después α.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{OP} = 4 + x \quad \rightarrow \quad sen\ \alpha = \dfrac{4}{4 + x} \\[2ex] \overline{OP'} = 9 + 4 + 4 + x = 17 + x \quad \rightarrow \quad sen\ \alpha = \dfrac{9}{17 + x} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{4}{4 + x} = \frac{9}{17 + x} \quad \rightarrow \quad 4(17 + x) = 9(4 + x) \quad \rightarrow$$

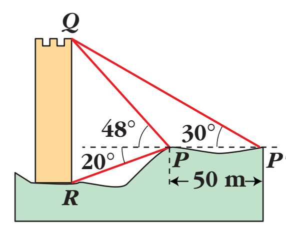
$$\rightarrow \quad 68 - 36 = 9x - 4x \quad \rightarrow \quad 32 = 5x \quad \rightarrow \quad x = 6{,}4 \text{ m}$$

Sustituyendo x por su valor:

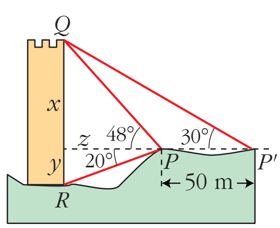
$$sen\ \alpha = \frac{4}{4 + x} = \frac{4}{4 + 6{,}4} = \frac{4}{10{,}4} = 0{,}3846 \quad \rightarrow \quad \alpha = 22° \ 37' \ 11{,}5''$$

Así: $2\alpha = 45° \ 14' \ 23''$

30 **Halla la altura de la torre QR de pie inaccesible y más bajo que el punto de observación, con los datos de la figura.**



Llamemos x e y a las medidas de la altura de las dos partes en que queda dividida la torre según la figura dada; y llamemos z a la distancia de P a la torre.



$$\left.\begin{array}{l} tg\ 48° = \dfrac{x}{z} \quad \rightarrow \quad x = z \cdot tg\ 48° \\[2ex] tg\ 30° = \dfrac{x}{z + 50} \quad \rightarrow \quad x = (z + 50)\ tg\ 30° \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad z \cdot tg\ 48° = (z + 50)\ tg\ 30° \quad \rightarrow$$

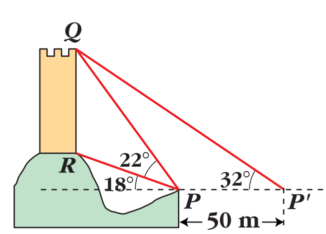
$$\rightarrow \quad z \cdot tg\ 48° = z \cdot tg\ 30° + 50 \cdot tg\ 30° \quad \rightarrow \quad z = \frac{50\ tg\ 30°}{tg\ 48° - tg\ 30°} = 54{,}13 \text{ m}$$

Sustituyendo en $x = z \cdot tg\ 48° = 54{,}13 \cdot tg\ 48° = 60{,}12 \text{ m} = x$

Para calcular y: $tg\ 20° = \dfrac{y}{z} \quad \rightarrow \quad y = z \cdot tg\ 20° = 54{,}13 \cdot tg\ 20° = 19{,}7 \text{ m}$

Luego: $\overline{QR} = x + y = 79{,}82$ m mide la altura de la torre.

31 **Calcula la altura de QR, cuyo pie es inaccesible y más alto que el punto donde se encuentra el observador, con los datos de la figura.**



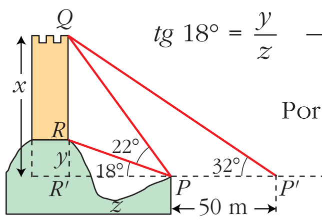
Llamemos x a la distancia del punto más alto a la línea horizontal del observador; y a la distancia de la base de la torre a la misma línea; y z a la distancia $\overline{R'P}$, como se indica en la figura.

$$\left.\begin{array}{l} tg\ (18° + 22°) = tg\ 40° = \dfrac{x}{z} \quad \rightarrow \quad x = z \cdot tg\ 40° \\ tg\ 32° = \dfrac{x}{z + 50} \quad \rightarrow \quad x = (z + 50)\ tg\ 32° \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad z \cdot tg\ 40° = (z + 50)\ tg\ 32° \quad \rightarrow \quad z = \frac{50\ tg\ 32°}{tg\ 40° - tg\ 32°} = 145{,}84$$

Sustituyendo en $x = z \cdot tg\ 40° = 145{,}84 \cdot tg\ 40° = 122{,}37$ m

Para calcular y:

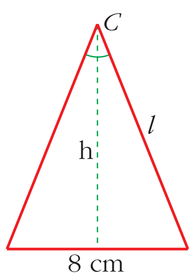


$$tg\ 18° = \frac{y}{z} \quad \rightarrow \quad y = z \cdot tg\ 18° = 145{,}84 \cdot tg\ 18° = 47{,}4 \text{ m}$$

Por tanto:

$\overline{QR} = x - y = 74{,}97$ m mide la altura de la torre

32 **La longitud del lado de un octógono regular es 8 cm. Halla los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita al octógono.**



Consideremos el triángulo isósceles formado por el centro del polígono y uno de sus lados:

$$\hat{C} = \frac{360°}{8} = 45°$$

- El radio de la circunferencia inscrita será la altura h de ese triángulo:

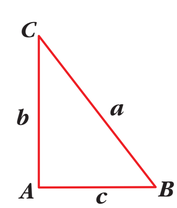
$$tg\ \frac{45°}{2} = tg\ 22{,}5° = \frac{4}{\text{h}} \quad \rightarrow \quad \text{h} = \frac{4}{tg\ 22{,}5°} = 9{,}66 \text{ cm}$$

- El de la circunferencia circunscrita será el lado l del triángulo:

$$sen\ \frac{45°}{2} = sen\ 22{,}5° = \frac{4}{l} \quad \rightarrow \quad l = \frac{4}{sen\ 22{,}5°} = 10{,}45 \text{ cm}$$

CUESTIONES TEÓRICAS

33 **Explica si las siguientes igualdades referidas al triángulo *ABC* son verdaderas o falsas:**



1) $a = \dfrac{b}{sen\ \hat{B}}$ 2) $c = a \cos \hat{B}$

3) $c = \dfrac{b}{tg\ \hat{C}}$ 4) $b = a\ sen\ \hat{C}$

5) $tg\ \hat{B} \cdot tg\ \hat{C} = 1$ 6) $c\ tg\ \hat{B} = b$

7) $sen\ \hat{B} - \cos \hat{C} = 0$ 8) $a = \dfrac{b}{\cos \hat{C}}$

9) $b = \dfrac{c}{tg\ \hat{B}}$ **10)** $\sqrt{1 - sen^2\ \hat{B}} = \dfrac{c}{a}$

11) $sen\ \hat{B} \cdot cos\ \hat{C} = 1$ **12)** $\dfrac{sen\ \hat{B}}{cos\ \hat{C}} = 1$

1) Verdadera, pues $sen\ \hat{B} = \dfrac{b}{a} \rightarrow a = \dfrac{b}{sen\ \hat{B}}$

2) Verdadera, pues $cos\ \hat{B} = \dfrac{c}{a} \rightarrow a \cdot cos\ \hat{B} = c$

3) Falsa, pues $tg\ \hat{C} = \dfrac{c}{b} \rightarrow c = b \cdot tg\ \hat{C}$

4) Falsa, pues $sen\ \hat{C} = \dfrac{c}{a} \rightarrow a \cdot sen\ \hat{C} = c \neq b$

5) Verdadera, pues $tg\ \hat{B} \cdot tg\ \hat{C} = \dfrac{b}{c} \cdot \dfrac{c}{b} = 1$

6) Verdadera, pues $tg\ \hat{B} = \dfrac{b}{c} \rightarrow b = c \cdot tg\ \hat{B}$

7) Verdadera, pues $sen\ \hat{B} - cos\ \hat{C} = \dfrac{b}{a} - \dfrac{b}{a} = 0$

8) Verdadera, pues $cos\ \hat{C} = \dfrac{b}{a} \rightarrow a = \dfrac{b}{sen\ \hat{C}}$

9) Falsa, pues $tg\ \hat{B} = \dfrac{b}{c} \rightarrow b = c \cdot tg\ \hat{B}$

10) Verdadera, pues $sen^2\ \hat{B} + cos^2\ \hat{B} = 1 \rightarrow cos\ \hat{B} = \sqrt{1 - sen^2\ \hat{B}}$

Como $cos\ \hat{B} = \dfrac{c}{a} \rightarrow \sqrt{1 - sen^2\ \hat{B}} = \dfrac{c}{a}$

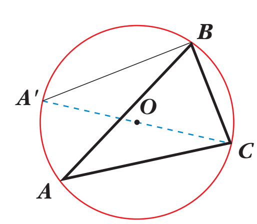
11) Falsa, pues $sen\ \hat{B} \cdot cos\ \hat{C} = \dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{b}{a} = \dfrac{b^2}{a^2} \neq 1$ (porque $b \neq a$)

12) Verdadera, pues $\dfrac{sen\ \hat{B}}{cos\ \hat{C}} = \dfrac{b/a}{b/a} = 1$

34 **Prueba que en un triángulo cualquiera se verifica:**

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}} = 2R$$

R **es el radio de la circunferencia circunscrita.**



☛ ***Traza el diámetro desde uno de los vértices del triángulo ABC. Aplica el teorema de los senos en los triángulos ABC y A'BC.***

Aplicamos el teorema de los senos en los triángulos ABC y $A'BC$:

- En $\widehat{ABC}$ $\rightarrow$ $\dfrac{a}{sen\ \hat{A}} = \dfrac{b}{sen\ \hat{B}} = \dfrac{c}{sen\ \hat{C}}$
- En $\widehat{A'BC}$ $\rightarrow$ $\dfrac{\overline{BC}}{sen\ \hat{A}'} = \dfrac{\overline{A'C}}{sen\ \widehat{A'BC}}$

  Sucede que:

  $\overline{BC} = a$

  $\hat{A}' = \hat{A}$ (ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco)

  $\overline{A'C} = 2R$

  $\widehat{A'BC} = 90°$ (medida de ángulos inscritos en una circunferencia)

  La igualdad queda: $\dfrac{a}{sen\ \hat{A}} = \dfrac{2R}{sen\ 90°} \rightarrow \dfrac{a}{sen\ \hat{A}} = \dfrac{2R}{1} = 2R$
- Por último, sustituyendo en la primera expresión, se obtiene el resultado:

$$2R = \frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}}$$

35 Prueba que solo existe un triángulo con estos datos: $b = \sqrt{3}$ m, $a = 1,5$ m, $\hat{A} = 60°$

¿Existe algún triángulo con estos datos?

$$\hat{C} = 135°,\ b = 3\sqrt{2}\ \text{cm},\ c = 3\ \text{cm}$$

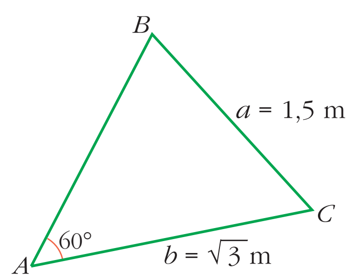
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ \hat{A}$

  $1,5^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + c^2 - 2\sqrt{3}\ c\ cos\ 60°$

  $2,25 = 3 + c^2 - 2\sqrt{3}\ c \cdot \dfrac{1}{2}$

  $c^2 - \sqrt{3}\,c + 0,75 = 0$

  $c = \dfrac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3-3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ m



  La ecuación de segundo grado solo tiene una raíz. Solo hay una solución.

  (NOTA: También se pueden estudiar las dos soluciones que salen para B con el teorema del seno y ver que una de ellas no es válida, pues quedaría $\hat{A} + \hat{B} > 180°$).

- Podemos resolverlo con el teorema del coseno, como antes, o con el teorema del seno. Resolvemos este apartado con el segundo método mencionado:

$$\frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}} \rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{sen\ \hat{B}} = \frac{3}{sen\ 135°} \rightarrow$$

$$\rightarrow sen\ \hat{B} = \frac{3\sqrt{2}\ sen\ 135°}{3} = \sqrt{2}\ sen\ 135° = 1 \rightarrow \hat{B} = 90°$$

  Pero: $\hat{C} + \hat{B} = 135° + 90° > 180°$ ¡Imposible!

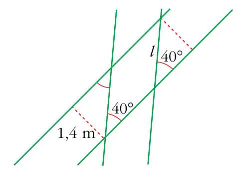
  Luego la solución no es válida y, por tanto, concluimos que no hay ningún triángulo con esos datos.

Página 123

PARA PROFUNDIZAR

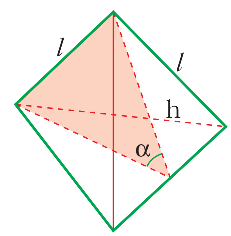
36 **Dos vías de tren de 1,4 m de ancho se cruzan formando un rombo. Si un ángulo de corte es de 40°, ¿cuánto valdrá el lado del rombo?**

$$sen\ 40° = \frac{1,4}{l} \rightarrow l = \frac{1,4}{sen\ 40°} = 2,18 \text{ m}$$



37 **En un tetraedro regular, halla el ángulo que forman dos caras contiguas. (Observa que es el ángulo que forman las alturas concurrentes de esas dos caras).**

En un tetraedro regular, cada cara es un triángulo equilátero de altura h, donde:



$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3}{4}l^2 \rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

El triángulo formado por las alturas concurrentes de dos caras y una arista es isósceles.

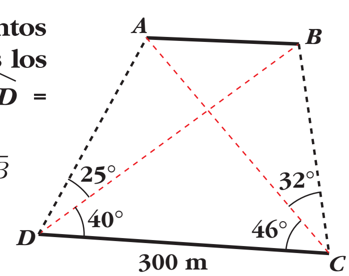
Aplicamos el teorema del coseno:

$$l^2 = h^2 + h^2 - 2h\ h\ cos\ \alpha \rightarrow cos\ \alpha = \frac{h^2 + h^2 - l^2}{2h\ h} = \frac{2h^2 - l^2}{2h^2} =$$

$$= 1 - \frac{l^2}{2h^2} = 1 - \frac{l^2}{2 \cdot (3/4)l^2} = 1 - \frac{1}{3/2} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\alpha = 70°\ 31'\ 43{,}6''$$

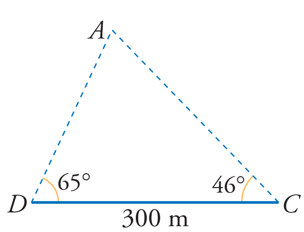
38 **Queremos calcular la distancia entre dos puntos inaccesibles, *A* y *B*. Desde *C* y *D* tomamos los datos: $\overline{CD}$ = 300 m, $\widehat{ADB}$ = 25º, $\widehat{ACB}$ = 32º, $\widehat{ACD}$ = 46º, $\widehat{BDC}$ = 40º. Calcula $\overline{AB}$.**



Si conociésemos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, podríamos hallar $\overline{AB}$ con el teorema del coseno en *ABC*.

Calculemos, pues, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$:

- En el triángulo *ADC*:



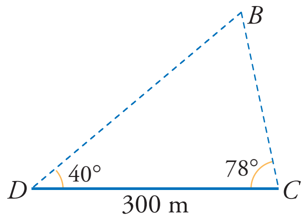
$$\hat{A} = 180° - 65° - 46° = 69°$$

Por el teorema del seno:

$$\frac{300}{sen\ 69°} = \frac{\overline{AC}}{sen\ 65°} \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{AC} = \frac{300 \cdot sen\ 65°}{sen\ 69°} = 291,24 \text{ m}$$

- En el triángulo BCD:



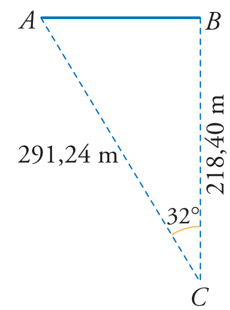
$$\hat{B} = 180° - 40° - 78° = 62°$$

Por el teorema del seno:

$$\frac{300}{sen\ 62°} = \frac{\overline{BC}}{sen\ 40°} \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{BC} = \frac{300 \cdot sen\ 40°}{sen\ 62°} = 218{,}40 \text{ m}$$

- Podemos centrarnos ya en el triángulo ABC, y aplicar el teorema del coseno:

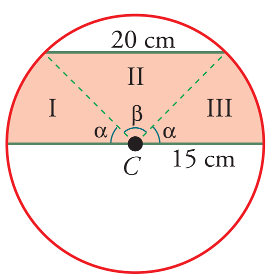


$$\overline{AB}^2 = 291{,}24^2 + 218{,}40^2 - 2 \cdot 291{,}24 \cdot 218{,}40 \cdot cos\ 32° =$$

$$= 24\,636{,}019$$

$$\overline{AB} = 156{,}96 \text{ m}$$

39 En un círculo de 15 cm de radio, halla el área comprendida entre una cuerda de 20 cm de longitud y el diámetro paralelo a ella.



Podemos dividir la zona sombreada en tres, de forma que:

I = III $\rightarrow$ sectores circulares de ángulo α desconocido.

II $\rightarrow$ triángulo isósceles de lados iguales 15 cm y de lado desigual 20 cm.

- En II:

Calculemos la altura h desde C:

$$15^2 = h^2 + 10^2 \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{15^2 - 10^2} = 11{,}18 \text{ cm}$$

Así: $\text{Área}_{II} = \dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \dfrac{20 \cdot 11{,}18}{2} = 111{,}8 \text{ cm}^2$

Calculemos el ángulo β (el ángulo desigual) aplicando el teorema del coseno:

$$20^2 = 15^2 + 15^2 - 2 \cdot 15 \cdot 15 \cdot cos\ \beta$$

$$cos\ \beta = \frac{15^2 + 15^2 - 20^2}{2 \cdot 15 \cdot 15} = 0{,}\widehat{1} \quad \rightarrow \quad \beta = 83°\ 37'\ 14{,}3''$$

- En I:

Conocido β podemos calcular α fácilmente:

$$\alpha = \frac{180° - \beta}{2} = 48°\ 11'\ 22{,}9''$$

Y, con esto, el área:

$$\text{Área}_{\text{I}} = \frac{\pi\, r^2}{360°} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot 15^2}{360°} \cdot \alpha = 94{,}62 \text{ cm}^2$$

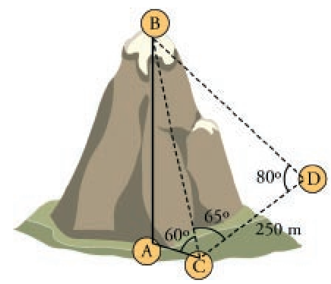
- Por último, el área pedida será:

$$A_T = \text{Área}_{\text{II}} + 2 \cdot \text{Área}_{\text{I}} = 111{,}8 + 2 \cdot 94{,}62 \;\;\to\;\; A_T = 301{,}04 \text{ cm}^2$$

40 **Para medir la altura de una montaña $\overline{AB}$ nos hemos situado en los puntos C y D distantes entre sí 250 m, y hemos tomado las siguientes medidas:**

$$\widehat{ACB} = 60° \qquad \widehat{BCD} = 65° \qquad \widehat{BDC} = 80°$$

Calcula la altura de la montaña.



Para poder calcular la altura $\overline{AB}$ en el triángulo BAC necesitamos $\overline{BC}$, que lo podemos obtener aplicando el teorema del seno en el triángulo BCD:

$$\widehat{CBD} = 180° - 80° - 65° = 35°$$

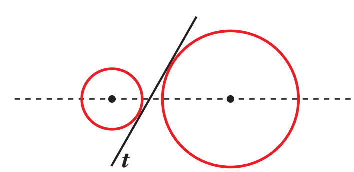
$$\frac{250}{sen\ 35°} = \frac{\overline{BC}}{sen\ 80°} \;\;\to\;\; \overline{BC} = \frac{250 \cdot sen\ 80°}{sen\ 35°} = 429{,}24$$

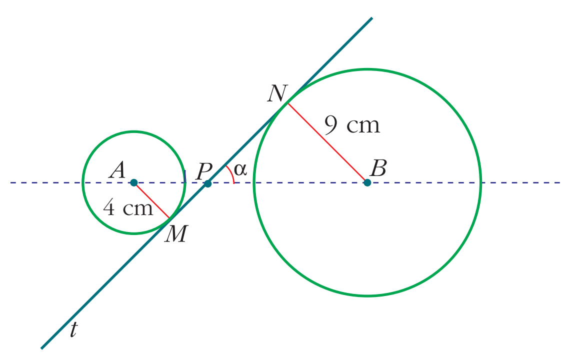
En BAC:

$$sen\ 60° = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \;\;\to\;\; \overline{AB} = \overline{BC}\ sen\ 60° = 429{,}24 \cdot sen\ 60°$$

$$\overline{AB} = 371{,}73 \text{ m}$$

41 **Calcula el ángulo que forma la tangente a las circunferencias de la figura con la línea que une sus centros. Los radios miden 4 y 9 cm, y la distancia entre sus centros es de 16 cm.**





En $AMP \;\to\; sen\ \alpha = \dfrac{4}{\overline{AP}}$

En $BNP \rightarrow sen\ \alpha = \dfrac{9}{16 - \overline{AP}}$

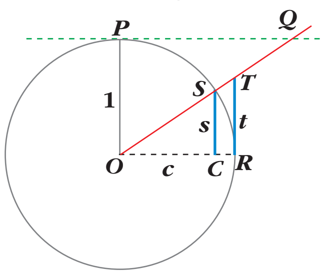
$4(16 - \overline{AP}) = 9\overline{AP} \rightarrow 64 - 4\overline{AP} = 9\overline{AP} \rightarrow 64 = 13\overline{AP} \rightarrow \overline{AP} = \dfrac{64}{13}$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$sen\ \alpha = \frac{4}{64/13} = \frac{52}{64} = 0{,}8125 \rightarrow \alpha = 54°\ 20'\ 27{,}3''$$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

42 **Las razones trigonométricas *sen*, *cos* y *tg* se amplían con estas otras:**



secante: $\boldsymbol{sec\ \alpha = \dfrac{1}{cos\ \alpha}}$

cosecante: $\boldsymbol{cosec\ \alpha = \dfrac{1}{sen\ \alpha}}$

cotangente: $\boldsymbol{cotg\ \alpha = \dfrac{1}{tg\ \alpha}}$

Demuestra mediante semejanza de triángulos que estas razones trigonométricas se representan sobre la circunferencia goniométrica del siguiente modo:

$$\boldsymbol{sec\ \alpha = \overline{OT}, \quad cosec\ \alpha = \overline{OQ}, \quad cotg\ \alpha = \overline{PQ}}$$

- Como $\widehat{OCS} \sim \widehat{ORT} \rightarrow \dfrac{\overline{OS}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{OT}}{\overline{OR}}$; además, $\overline{OR} = 1$ (radio)

  Así: $sec\ \alpha = \dfrac{1}{cos\ \alpha} = \dfrac{1}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{OS}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{OT}}{\overline{OR}} = \dfrac{\overline{OT}}{1} = \overline{OT}$

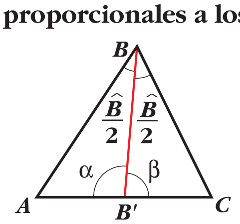
- Como $\widehat{OCS} \sim \widehat{QPO} \rightarrow \dfrac{\overline{OS}}{\overline{SC}} = \dfrac{\overline{QO}}{\overline{OP}}$; además, $\overline{OP} = 1$

  Así: $cosec\ \alpha = \dfrac{1}{sen\ \alpha} = \dfrac{1}{\overline{SC}} = \dfrac{\overline{OS}}{\overline{SC}} = \dfrac{\overline{QO}}{\overline{OP}} = \dfrac{\overline{QO}}{1} = \overline{QO}$

- Como $\widehat{ORT} \sim \widehat{QPO} \rightarrow \dfrac{\overline{OR}}{\overline{TR}} = \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}$; además, $\overline{OP} = 1$

  Así: $cotg\ \alpha = \dfrac{1}{tg\ \alpha} = \dfrac{1}{\overline{TR}} = \dfrac{\overline{OR}}{\overline{TR}} = \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \dfrac{\overline{PQ}}{1} = \overline{PQ}$

43 **En un triángulo cualquiera cada bisectriz interior divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los otros dos lados. Es decir:**



$$\boldsymbol{\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}}$$

Demuestra esta igualdad y expresa las igualdades correspondientes a las otras dos bisectrices, *AA'* y *CC'*.

- En ABB' $\rightarrow$ $\dfrac{\overline{B'A}}{sen\ \hat{B}/2} = \dfrac{\overline{BA}}{sen\ \alpha}$ $\rightarrow$ $sen\ \dfrac{\hat{B}}{2} = \dfrac{\overline{B'A}\ sen\ \alpha}{\overline{BA}}$

- En CBB' $\rightarrow$ $\dfrac{\overline{B'C}}{sen\ \hat{B}/2} = \dfrac{\overline{BC}}{sen\ \beta}$ $\rightarrow$ $sen\ \dfrac{\hat{B}}{2} = \dfrac{\overline{B'C}\ sen\ \beta}{\overline{BC}}$

$$\frac{\overline{B'A}\ sen\ \alpha}{\overline{BA}} = \frac{\overline{B'C}\ sen\ \beta}{\overline{BC}}$$

Como $\alpha + \beta = 180°$ $\rightarrow$ $sen\ \alpha = sen\ \beta$

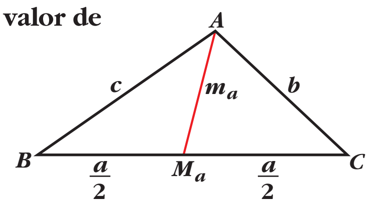
$$\frac{\overline{B'A}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{B'C}}{\overline{BC}}$$

Las igualdades correspondientes a las otras dos bisectrices son:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C}}{\overline{AC}} \quad \text{y} \quad \frac{\overline{C'A}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{C'B}}{\overline{CB}}$$

44 **Demuestra que en un triángulo de lados *a*, *b*, *c* el valor de la mediana, m_a, sobre el lado *a* es:**

$$\boldsymbol{m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}$$



(Aplica el teorema del coseno en los triángulos ABM_a y ABC utilizando, en ambos casos, la expresión en la que figura $cos\ \hat{B}$).

En ABC $\rightarrow$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cos\ \hat{B}$

En ABM_a $\rightarrow$ $m_a{}^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + c^2 - 2\ \dfrac{a}{2}\ c\ cos\ \hat{B}$

Despejamos $cos\ \hat{B}$ en la primera ecuación y después sustituimos en la segunda:

$$cos\ \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$m_a{}^2 = \frac{a^2}{4} + c^2 - ac\ cos\ \hat{B}$$

$$m_a{}^2 = \frac{a^2}{4} + c^2 - ac \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2}{4} + c^2 - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} =$$

$$= \frac{a^2 + 4c^2 - (2a^2 + 2c^2 - 2b^2)}{4} =$$

$$= \frac{-a^2 + 2c^2 + 2b^2}{4} = \frac{1}{4}\ (2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

Luego:

$$m_a = \sqrt{\frac{1}{4}\ (2b^2 + 2c^2 - a^2)} \ \rightarrow \ m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$