5 FUNCIONES Y FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

Página 126

PARA EMPEZAR, REFLEXIONA Y RESUELVE

1. Aunque el método para resolver las siguientes preguntas se sistematiza en la página siguiente, puedes resolverlas ahora:

a) ¿Cuántos radianes corresponden a los 360° de una circunferencia?

b) ¿Cuántos grados mide 1 radián?

c) ¿Cuántos grados mide un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ radianes?

d) ¿Cuántos radianes equivalen a 270º?

a) 2π

b) $\frac{360°}{2\pi} = 57°\ 17'\ 44{,}8''$

c) $\frac{360°}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 90°$

d) $\frac{270°}{360°} \cdot 2\pi = 3\ \frac{\pi}{2}$

Página 128

2. Pasa a radianes los siguientes ángulos:

a) 30° b) 72° c) 90° d) 127° e) 200° f) 300°

Expresa el resultado en función de π y luego en forma decimal. Por ejemplo:

$$\mathbf{30° = 30 \cdot \frac{\pi}{180}\ rad = \frac{\pi}{6}\ rad \approx 0{,}52\ rad}$$

a) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 30° = \frac{\pi}{6}$ rad $\approx 0{,}52$ rad

b) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 72° = \frac{2\pi}{5}$ rad $\approx 1{,}26$ rad

c) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 90° = \frac{\pi}{2}$ rad $\approx 1{,}57$ rad

d) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 127° \approx 2{,}22$ rad

e) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 200° = \frac{10\pi}{9}$ rad $\approx 3{,}49$ rad

f) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 300° = \frac{5\pi}{3}$ rad $\approx 5{,}24$ rad

3. **Pasa a grados los siguientes ángulos:**

a) 2 rad **b) 0,83 rad** **c) $\frac{\pi}{5}$ rad** **d) $\frac{5\pi}{6}$ rad** **e) 3,5 rad**

a) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 2 = 114°\ 35'\ 29{,}6''$

b) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 0{,}83 = 47°\ 33'\ 19{,}8''$

c) $\frac{360°}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{5} = 36°$

d) $\frac{360°}{2\pi} \cdot \frac{5\pi}{6} = 150°$

e) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 3{,}5 = 200°\ 32'\ 6{,}8''$

4. **Completa la siguiente tabla añadiendo las razones trigonométricas (*seno*, *coseno* y *tangente*) de cada uno de los ángulos. Te será útil para el próximo apartado:**

GRADOS	0	30		60	90		135	150		210	225		270			330	360
RADIANES			$\frac{\pi}{4}$			$\frac{2}{3}\pi$			π			$\frac{4}{3}\pi$		$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$		

La tabla completa está en el siguiente apartado (página siguiente) del libro de texto. Tan solo falta la última columna, que es igual que la primera.

Página 133

1. **Demuestra la fórmula II.2 a partir de la fórmula:**

$$\boldsymbol{cos\,(\alpha + \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta}$$

$$cos\,(\alpha - \beta) = cos\,(\alpha + (-\beta)) = cos\ \alpha\ cos\,(-\beta) - sen\ \alpha\ sen\,(-\beta) =$$

$$= cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\,(-sen\ \beta) =$$

$$= cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen\ \beta$$

2. **Demuestra la fórmula II.3 a partir de la fórmula:**

$$\boldsymbol{tg\,(\alpha - \beta) = \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta}}$$

$$tg\,(\alpha - \beta) = tg\,(\alpha + (-\beta)) = \frac{tg\ \alpha + tg\,(-\beta)}{1 - tg\ \alpha\ tg\,(-\beta)} \overset{(*)}{=} \frac{tg\ \alpha + (-tg\ \beta)}{1 - tg\ \alpha\,(-tg\ \beta)} =$$

$$= \frac{tg\ \alpha - tg\ \beta}{1 + tg\ \alpha\ tg\ \beta}$$

(*) Como $\left.\begin{array}{l} sen\,(-\alpha) = -sen\ \alpha \\ cos\,(-\alpha) = cos\ \alpha \end{array}\right\} \rightarrow tg\,(-\alpha) = -tg\ \alpha$

3. **Demuestra la fórmula II.3 a partir de las fórmulas:**

$\boldsymbol{sen\ (\alpha - \beta) = sen\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha -\ sen\ \beta}$

$\boldsymbol{cos\ (\alpha - \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha -\ sen\ \beta}$

$$tg\ (\alpha - \beta) = \frac{sen\ (\alpha - \beta)}{cos\ (\alpha - \beta)} = \frac{sen\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sen\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen\ \ \beta} \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{\dfrac{sen\ \alpha\ cos\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta} - \dfrac{cos\ \alpha\ sen\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta}}{\dfrac{cos\ \alpha\ cos\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta} + \dfrac{sen\ \alpha\ sen\ \beta}{cos\ \alpha\ cos\ \beta}} = \frac{tg\ \alpha - tg\ \beta}{1 + tg\ \alpha\ tg\ \beta}$$

(*) Dividimos numerador y denominador por $cos\ \alpha\ cos\ \beta$.

4. **Si $\boldsymbol{sen\ 12° = 0{,}2}$ y $\boldsymbol{sen\ 37° = 0{,}6}$, halla $\boldsymbol{cos\ 12°}$, $\boldsymbol{tg\ 12°}$, $\boldsymbol{cos\ 37°}$ y $\boldsymbol{tg\ 37°}$. Calcula, después, a partir de ellas, las razones trigonométricas de 49° y de 25°, utilizando las fórmulas (I) y (II).**

- $sen\ 12° = 0{,}2$

  $cos\ 12° = \sqrt{1 - sen^2\ 12°} = \sqrt{1 - 0{,}04} = 0{,}98$

  $tg\ 12° = \dfrac{0{,}2}{0{,}98} = 0{,}2$

- $sen\ 37° = 0{,}6$

  $cos\ 37° = \sqrt{1 - sen^2\ 37°} = \sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8$

  $tg\ 37° = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$

- $49° = 12° + 37°$, luego:

  $sen\ 49° = sen\ (12° + 37°) = sen\ 12°\ cos\ 37° + cos\ 12°\ sen\ 37° =$

  $= 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}98 \cdot 0{,}6 = 0{,}748$

  $cos\ 49° = cos\ (12° + 37°) = cos\ 12°\ cos\ 37° - sen\ 12°\ sen\ 37° =$

  $= 0{,}98 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}664$

  $$tg\ 49° = tg\ (12° + 37°) = \frac{tg\ 12° + tg\ 37°}{1 - tg\ 12°\ tg\ 37°} = \frac{0{,}2 + 0{,}75}{1 - 0{,}2 \cdot 0{,}75} = 1{,}12$$

  $\left(\text{Podría calcularse } tg\ 49° = \dfrac{sen\ 49°}{cos\ 49°}\right).$

- $25° = 37° - 12°$, luego:

  $sen\ 25° = sen\ (37° - 12°) = sen\ 37°\ cos\ 12° - cos\ 37°\ sen\ 12° =$

  $= 0{,}6 \cdot 0{,}98 - 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}428$

  $cos\ 25° = cos\ (37° - 12°) = cos\ 37°\ cos\ 12° + sen\ 37°\ sen\ 12° =$

  $= 0{,}8 \cdot 0{,}98 + 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}904$

  $$tg\ 25° = tg\ (37° - 12°) = \frac{tg\ 37° - tg\ 12°}{1 + tg\ 37°\ tg\ 12°} = \frac{0{,}75 - 0{,}2}{1 + 0{,}75 \cdot 0{,}2} = 0{,}478$$

5. Demuestra la siguiente igualdad:

$$\frac{\boldsymbol{cos\,(a+b) + cos\,(a-b)}}{\boldsymbol{sen\,(a+b) + sen\,(a-b)}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{tg\ a}}$$

$$\frac{cos\,(a+b) + cos\,(a-b)}{sen\,(a+b) + sen\,(a-b)} = \frac{cos\ a\ cos\ b - sen\ a\ sen\ b + cos\ a\ cos\ b + sen\ a\ sen\ b}{sen\ a\ cos\ b + cos\ a\ sen\ b + sen\ a\ cos\ b - cos\ a\ sen\ b} =$$

$$= \frac{2\ cos\ a\ cos\ b}{2\ sen\ a\ cos\ b} = \frac{cos\ a}{sen\ a} = \frac{1}{tg\ a}$$

6. Demuestra las tres fórmulas (III.1), (III.2) y (III.3) haciendo $\alpha = \beta$ en las fórmulas (I).

$sen\ 2\alpha = sen\ (\alpha + \alpha) = sen\ \alpha\ cos\ \alpha + cos\ \alpha\ sen\ \alpha = 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha$

$cos\ 2\alpha = cos\ (\alpha + \alpha) = cos\ \alpha\ cos\ \alpha - sen\ \alpha\ sen\ \alpha = cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha$

$$tg\ 2\alpha = tg\ (\alpha + \alpha) = \frac{tg\ \alpha + tg\ \alpha}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \alpha} = \frac{2\ tg\ \alpha}{1 - tg^2\ \alpha}$$

7. Halla las razones trigonométricas de 60° a partir de las de 30°.

$$sen\ 60° = sen\ (2 \cdot 30°) = 2\ sen\ 30°\ cos\ 30° = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\ 60° = cos\ (2 \cdot 30°) = cos^2\ 30° - sen^2\ 30° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$tg\ 60° = tg\ (2 \cdot 30°) = \frac{2\ tg\ 30°}{1 - tg^2\ 30°} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{1 - (\sqrt{3}/3)^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{1 - 3/9} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{2/3} = \sqrt{3}$$

8. Halla las razones trigonométricas de 90° a partir de las de 45°.

$$sen\ 90° = sen\ (2 \cdot 45°) = 2\ sen\ 45°\ cos\ 45° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$cos\ 90° = cos\ (2 \cdot 45°) = cos^2\ 45° - sen^2\ 45° = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

$$tg\ 90° = tg\ (2 \cdot 45°) = \frac{2\ tg\ 45°}{1 - tg^2\ 45°} = \frac{2 \cdot 1}{1 - 1} \ \to \text{ No existe.}$$

9. Demuestra que $\dfrac{\boldsymbol{2\ sen\ \alpha - sen\ 2\alpha}}{\boldsymbol{2\ sen\ \alpha + sen\ 2\alpha}} = \dfrac{\boldsymbol{1 - cos\ \alpha}}{\boldsymbol{1 + cos\ \alpha}}$.

$$\frac{2\ sen\ \alpha - sen\ 2\alpha}{2\ sen\ \alpha + sen\ 2\alpha} = \frac{2\ sen\ \alpha - 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha}{2\ sen\ \alpha + 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha} = \frac{2\ sen\ \alpha\ (1 - cos\ \alpha)}{2\ sen\ \alpha\ (1 + cos\ \alpha)} = \frac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}$$

Página 134

10. Siguiendo las indicaciones que se dan, demuestra detalladamente las fórmulas IV.1, IV.2 y IV.3.

- $cos\ \alpha = cos\left(2 \cdot \dfrac{\alpha}{2}\right) = cos^2\ \dfrac{\alpha}{2} - sen^2\ \dfrac{\alpha}{2}$

Como por la igualdad fundamental:

$$cos^2 \frac{\alpha}{2} + sen^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \quad \to \quad 1 = cos^2 \frac{\alpha}{2} + sen^2 \frac{\alpha}{2}$$

De aquí:

a) Sumando ambas igualdades:

$$1 + cos\ \alpha = 2\ cos^2 \frac{\alpha}{2} \quad \to \quad cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + cos\ \alpha}{2} \quad \to \quad cos \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\ \alpha}{2}}$$

b) Restando las igualdades (2ª – 1ª):

$$1 - cos\ \alpha = 2\ sen^2 \frac{\alpha}{2} \quad \to \quad sen^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - cos\ \alpha}{2} \quad \to \quad sen \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha}{2}}$$

• Por último:

$$tg \frac{\alpha}{2} = \frac{sen\ \alpha/2}{cos\ \alpha/2} = \frac{\pm\sqrt{\dfrac{1 - cos\ \alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\dfrac{1 + cos\ \alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}}$$

11. Sabiendo que *cos* 78° = 0,2, calcula *sen* 78° y *tg* 78°. Averigua las razones trigonométricas de 39° aplicando las fórmulas del ángulo mitad.

• $cos\ 78° = 0{,}2$

$$sen\ 78° = \sqrt{1 - cos^2\ 78°} = \sqrt{1 - 0{,}2^2} = 0{,}98$$

$$tg\ 78° = \frac{0{,}98}{0{,}2} = 4{,}9$$

• $sen\ 39° = sen \dfrac{78°}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - cos\ 78°}{2}} = \sqrt{\dfrac{1 - 0{,}2}{2}} = 0{,}63$

$$cos\ 39° = cos \frac{78°}{2} = \sqrt{\frac{1 + cos\ 78°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 0{,}2}{2}} = 0{,}77$$

$$tg\ 39° = tg \frac{78°}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ 78°}{1 + cos\ 78°}} = \sqrt{\frac{1 - 0{,}2}{1 + 0{,}2}} = 0{,}82$$

12. Halla las razones trigonométricas de 30° a partir de *cos* 60° = 0,5.

• $cos\ 60° = 0{,}5$

• $sen\ 30° = sen \dfrac{60°}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - 0{,}5}{2}} = 0{,}5$

$$cos\ 30° = cos \frac{60°}{2} = \sqrt{\frac{1 + 0{,}5}{2}} = 0{,}866$$

$$tg\ 30° = tg \frac{60°}{2} = \sqrt{\frac{1 - 0{,}5}{1 + 0{,}5}} = 0{,}577$$

13. Halla las razones trigonométricas de 45° a partir de *cos* 90° = 0.

- $\cos 90° = 0$
- $\operatorname{sen} 45° = \operatorname{sen} \dfrac{90°}{2} = \sqrt{\dfrac{1-0}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

  $\cos 45° = \cos \dfrac{90°}{2} = \sqrt{\dfrac{1+0}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

  $\operatorname{tg} 45° = \operatorname{tg} \dfrac{90°}{2} = \sqrt{\dfrac{1-0}{1+0}} = \sqrt{1} = 1$

14. Demuestra que $2\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \dfrac{\alpha}{2} + \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha$.

$$2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen} \alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1-\cos \alpha}{2} + \operatorname{sen} \alpha =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}(1-\cos \alpha) + \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \alpha \left(\frac{1-\cos \alpha}{\cos \alpha} + 1\right) =$$

$$= \operatorname{sen} \alpha \left(\frac{1-\cos \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha}\right) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \frac{1}{\cos \alpha} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

15. Demuestra que $\dfrac{2\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}{2\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \dfrac{\alpha}{2}$.

$$\frac{2\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}{2\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{2\operatorname{sen} \alpha - 2\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2\operatorname{sen} \alpha + 2\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} =$$

$$= \frac{2\operatorname{sen} \alpha (1-\cos \alpha)}{2\operatorname{sen} \alpha (1+\cos \alpha)} = \frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$$

Página 135

16. Para demostrar las fórmulas (V.3) y (V.4), da los siguientes pasos:

- **Expresa en función de** α **y** β**:**

  $\cos(\alpha+\beta) = \ldots \qquad \cos(\alpha-\beta) = \ldots$

- **Suma y resta como hemos hecho arriba y obtendrás dos expresiones.**
- **Sustituye en las expresiones anteriores:**

  $\alpha + \beta = A$

  $\alpha - \beta = B$

- $\cos(\alpha+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$

  $\cos(\alpha-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$

  Sumando → $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos \alpha \cos \beta \quad (1)$

  Restando → $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \quad (2)$

• Llamando $\left.\begin{array}{l}\alpha + \beta = A \\ \alpha - \beta = B\end{array}\right\} \to \alpha = \frac{A+B}{2},\ \ \beta = \frac{A-B}{2}$ (al resolver el sistema)

• Luego, sustituyendo en (1) y (2), se obtiene:

(1) $\to$ $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$

(2) $\to$ $\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$

17. Transforma en producto y calcula:

a) $\boldsymbol{\operatorname{sen} 75° - \operatorname{sen} 15°}$ **b)** $\boldsymbol{\cos 75° + \cos 15°}$ **c)** $\boldsymbol{\cos 75° - \cos 15°}$

a) $\operatorname{sen} 75° - \operatorname{sen} 15° = 2 \cos \frac{75° + 15°}{2} \operatorname{sen} \frac{75° - 15°}{2} =$

$= 2 \cos 45° \operatorname{sen} 30° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos 75° + \cos 15° = 2 \cos \frac{75° + 15°}{2} \cos \frac{75° - 15°}{2} =$

$= 2 \cos 45° \cos 30° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

c) $\cos 75° - \cos 15° = -2 \operatorname{sen} \frac{75° + 15°}{2} \operatorname{sen} \frac{75° - 15°}{2} =$

$= -2 \operatorname{sen} 45° \cos 30° = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$

18. Expresa en forma de producto el numerador y el denominador de esta fracción y simplifica el resultado:

$$\boldsymbol{\frac{\operatorname{sen} 4a + \operatorname{sen} 2a}{\cos 4a + \cos 2a}}$$

$$\frac{\operatorname{sen} 4a + \operatorname{sen} 2a}{\cos 4a + \cos 2a} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{4a + 2a}{2} \cos \frac{4a - 2a}{2}}{2 \cos \frac{4a + 2a}{2} \cos \frac{4a - 2a}{2}} = \frac{2 \operatorname{sen} 3a}{2 \cos 3a} = \operatorname{tg} 3a$$

Página 137

1. Resuelve estas ecuaciones:

a) $\boldsymbol{2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0}$ **b)** $\boldsymbol{2\operatorname{sen}^2 x - 1 = 0}$

c) $\boldsymbol{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0}$ **d)** $\boldsymbol{2\operatorname{sen}^2 x + 3\cos x = 3}$

a) $\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \left\langle \begin{array}{l} 1/2 \ \to\ x_1 = 60°,\ \ x_2 = 300° \\ -1 \ \to\ x_3 = 180° \end{array} \right.$

Las tres soluciones son válidas (se comprueba en la ecuación inicial).

b) $2\ sen^2\ x - 1 = 0 \ \rightarrow\ sen^2\ x = \dfrac{1}{2} \ \rightarrow\ sen\ x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- Si $sen\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \ \rightarrow\ x_1 = 45°,\ \ x_2 = 135°$
- Si $sen\ x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \ \rightarrow\ x_3 = -45° = 315°,\ \ x_4 = 225°$

Todas las soluciones son válidas.

c) $tg^2\ x - tg\ x = 0 \ \rightarrow\ tg\ x\ (tg\ x - 1) = 0 \ \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{array}{l} tg\ x = 0 \ \rightarrow\ x_1 = 0°,\ \ x_2 = 180° \\ tg\ x = 1 \ \rightarrow\ x_3 = 45°,\ \ x_4 = 225° \end{array}$$

Todas las soluciones son válidas.

d) $2\ sen^2\ x + 3\ cos\ x = 3 \ \xrightarrow{(*)} 2\ (1 - cos^2\ x) + 3\ cos\ x = 3$

(*) Como $sen^2\ x + cos^2\ x = 1 \ \rightarrow\ sen^2\ x = 1 - cos^2\ x$

$2 - 2\ cos^2\ x + 3\ cos\ x = 3 \ \rightarrow\ 2\ cos^2\ x - 3\ cos\ x + 1 = 0$

$$cos\ x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$$

Entonces:
- Si $cos\ x = 1 \ \rightarrow\ x_1 = 0°$
- Si $cos\ x = \dfrac{1}{2} \ \rightarrow\ x_2 = 60°,\ \ x_3 = -60° = 300°$

Las tres soluciones son válidas.

2. Resuelve:

a) $\boldsymbol{4 cos\ 2x + 3 cos\ x = 1}$ **b)** $\boldsymbol{tg\ 2x + 2 cos\ x = 0}$

c) $\boldsymbol{\sqrt{2}\ cos\ (x/2) - cos\ x = 1}$ **d)** $\boldsymbol{2 sen\ x\ cos^2\ x - 6 sen^3\ x = 0}$

a) $4\ cos\ 2x + 3\ cos\ x = 1 \ \rightarrow\ 4\ (cos^2\ x - sen^2\ x) + 3\ cos\ x = 1 \ \rightarrow$

$\rightarrow\ 4\ (cos^2\ x - (1 - cos^2\ x)) + 3\ cos\ x = 1 \ \rightarrow\ 4\ (2\ cos^2\ x - 1) + 3\ cos\ x = 1 \ \rightarrow$

$\rightarrow\ 8\ cos^2\ x - 4 + 3\ cos\ x = 1 \ \Rightarrow\ 8\ cos^2\ x + 3\ cos\ x - 5 = 0 \ \rightarrow$

$$\rightarrow\ cos\ x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+160}}{16} = \frac{-3 \pm 13}{16} = \begin{cases} 10/16 = 5/8 = 0{,}625 \\ -1 \end{cases}$$

- Si $cos\ x = 0{,}625 \ \rightarrow\ x_1 = 51°\ 19'\ 4{,}13'',\ \ x_2 = -51°\ 19'\ 4{,}13''$
- Si $cos\ x = -1 \ \rightarrow\ x_3 = 180°$

Al comprobar las soluciones, las tres son válidas.

b) $tg\ 2x + 2\ cos\ x = 0 \ \rightarrow\ \dfrac{2\ tg\ x}{1 - tg^2\ x} + 2\ cos\ x = 0 \ \rightarrow$

$$\rightarrow\ \frac{tg\ x}{1 - tg^2\ x} + cos\ x = 0 \ \rightarrow\ \frac{sen\ x/cos\ x}{1 - (sen^2\ x/cos^2\ x)} + cos\ x = 0 \ \rightarrow$$

$\rightarrow \dfrac{sen\, x\, cos\, x}{cos^2 x - sen^2 x} + cos\, x = 0 \rightarrow sen\, x\, cos\, x + cos\, x\, (cos^2 x - sen^2 x) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow cos\, x\, (sen\, x + cos^2 x - sen^2 x) = 0 \rightarrow cos\, x\, (sen\, x + 1 - sen^2 x - sen^2 x) \rightarrow$

$\rightarrow cos\, x\, (1 + sen\, x - 2\, sen^2 x) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} cos\, x = 0 \\ 1 + sen\, x - 2\, sen^2 x = 0 \rightarrow sen\, x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} = \begin{cases} -1/2 \\ 1 \end{cases} \end{cases}$$

- Si $cos\, x = 0 \rightarrow x_1 = 90°,\ x_2 = 270°$
- Si $sen\, x = -\dfrac{1}{2} \rightarrow x_3 = 210°,\ x_4 = 330° = -30°$
- Si $sen\, x = 1 \rightarrow x_5 = 90° = x_1$

Al comprobar las soluciones, vemos que todas ellas son válidas.

c) $\sqrt{2}\, cos\, \dfrac{x}{2} - cos\, x = 1 \rightarrow \sqrt{2} \sqrt{\dfrac{1 + cos\, x}{2}} - cos\, x = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{1 + cos\, x} - cos\, x = 1 \rightarrow \sqrt{1 - cos\, x} = 1 + cos\, x \rightarrow$

$\rightarrow 1 + cos\, x = 1 + cos^2 x + 2\, cos\, x \rightarrow cos^2 x + cos\, x = 0 \rightarrow cos\, x\, (cos\, x + 1) = 0$

- Si $cos\, x = 0 \rightarrow x_1 = 90°,\ x_2 = 270°$
- Si $cos\, x = -1 \rightarrow x_3 = 180°$

Al comprobar las soluciones, podemos ver que las únicas válidas son:

$$x_1 = 90° \text{ y } x_3 = 180°$$

d) $2\, sen\, x\, cos^2 x - 6\, sen^3 x = 0 \rightarrow 2\, sen\, x\, (cos^2 x - 3\, sen^2 x) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2\, sen\, x\, (cos^2 x + sen^2 x - 4\, sen^2 x) = 0 \rightarrow 2\, sen\, x\, (1 - 4\, sen^2 x) = 0$

- Si $sen\, x = 0 \rightarrow x_1 = 0°,\ x_2 = 180°$
- Si $sen^2 x = \dfrac{1}{4} \rightarrow sen\, x = \pm\dfrac{1}{2} \Rightarrow x_3 = 30°,\ x_4 = 150°,\ x_5 = 210°,\ x_6 = 330°$

Comprobamos las soluciones y observamos que son válidas todas ellas.

3. Transforma en producto *sen 3x – sen x* y resuelve después la ecuación *sen 3x – sen x* = 0.

$sen\, 3x - sen\, x = 0 \rightarrow 2\, cos\, \dfrac{3x + x}{2}\, sen\, \dfrac{3x - x}{2} = 0 \rightarrow 2\, cos\, 2x\, sen\, x = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} cos\, 2x = 0 \\ sen\, x = 0 \end{cases}$$

- Si $cos\, 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x = 90° & \rightarrow x_1 = 45° \\ 2x = 270° & \rightarrow x_2 = 135° \\ 2x = 90° + 360° & \rightarrow x_3 = 225° \\ 2x = 270° + 360° & \rightarrow x_4 = 315° \end{cases}$
- Si $sen\, x = 0 \Rightarrow x_5 = 0°,\ x_6 = 180°$

Comprobamos que las seis soluciones son válidas.

4. **Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:**

a) $\boldsymbol{sen\ (\pi - x) = cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + cos\ \pi}$

b) $\boldsymbol{sen\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sqrt{2}\ sen\ x = 0}$

a) $\left.\begin{array}{l} sen\ (\pi - x) = sen\ x \\ cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -sen\ x \\ cos\ \pi = -1 \end{array}\right\}$ Entonces, la ecuación queda:

$$sen\ x = -sen\ x - 1 \ \rightarrow\ 2\ sen\ x = -1 \ \rightarrow\ sen\ x = \frac{-1}{2}$$

Si $sen\ x = \frac{-1}{2} \ \rightarrow\ x_1 = \frac{7\pi}{6}$ rad, $x_2 = \frac{11\pi}{6}$ rad

Al comprobar vemos:

$$x_1 = \frac{7\pi}{6} \ \rightarrow\ sen\ (\pi - x) = sen\left(\pi - \frac{7\pi}{6}\right) = sen\ \frac{-\pi}{6} = \frac{-1}{2}$$

$$cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{7\pi}{6}\right) = cos\ \frac{2\pi}{6} = cos\ \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Luego la solución es válida, pues:

$$sen\ (\pi - x) = \frac{-1}{2} = cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + cos\ \pi = \frac{1}{2} + (-1)$$

$$x_2 = \frac{11\pi}{6} \ \rightarrow\ sen\ (\pi - x) = sen\left(\pi - \frac{11\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{-5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{11\pi}{6}\right) = cos\left(\frac{-2\pi}{6}\right) = cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Luego también es válida esta solución, pues:

$$sen\ (\pi - x) = \frac{-1}{2} = cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + cos\ \pi = \frac{1}{2} + (-1)$$

Por tanto, las dos soluciones son válidas: $x_1 = \frac{7\pi}{6}$ rad y $x_2 = \frac{11\pi}{6}$ rad

b) $sen\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = sen\ \frac{\pi}{4}\ cos\ x - cos\ \frac{\pi}{4}\ sen\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}\ cos\ x - \frac{\sqrt{2}}{2}\ sen\ x$

Luego la ecuación queda:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\ cos\ x - \frac{\sqrt{2}}{2}\ sen\ x + \sqrt{2}\ sen\ x = 0 \ \rightarrow\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ cos\ x + \frac{\sqrt{2}}{2}\ sen\ x = 0 \ \rightarrow$$

$$cos\ x + sen\ x = 0 \ \rightarrow\ cos\ x = -sen\ x \ \rightarrow\ x_1 = \frac{3\pi}{4}\ \text{rad},\ x_2 = \frac{7\pi}{4}\ \text{rad}$$

Comprobamos que ninguna solución vale. Luego la ecuación no tiene solución.

5. **Escribe, en radianes, la expresión general de todos los ángulos que verifican:**

a) $tg\ x = -\sqrt{3}$ **b)** $sen\ x = cos\ x$

c) $sen^2\ x = 1$ **d)** $sen\ x = tg\ x$

a) $x = 120° + k \cdot 360°$ o bien $x = 300° + k \cdot 360°$

Las dos soluciones quedan recogidas en:

$$x = 120° + k \cdot 180° = \frac{2\pi}{3} + k\,\pi \text{ rad} = x \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}$$

b) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\,\pi$ rad con $k \in \mathbb{Z}$

c) $$\left.\begin{array}{l} \text{Si } sen\ x = 1 \to x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \text{ rad} \\ \text{Si } sen\ x = -1 \to x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \text{ rad} \end{array}\right\} \to x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi \text{ rad} \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}$$

d) En ese caso debe ocurrir que:

$$\left.\begin{array}{l} \text{O bien } sen\ x = 0 \to x = k\,\pi \text{ rad} \\ \text{O bien } cos\ x = 1 \to x = 2k\,\pi \text{ rad} \end{array}\right\} \to x = k\,\pi \text{ rad} \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Página 142

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Grados y radianes

1 **Expresa en grados sexagesimales los siguientes ángulos dados en radianes:**

a) $\dfrac{2\pi}{3}$ **b)** $\dfrac{4\pi}{3}$ **c)** $\dfrac{5\pi}{4}$ **d)** $\dfrac{7\pi}{6}$ **e)** $\dfrac{9\pi}{2}$

☛ ***Hazlo mentalmente teniendo en cuenta que*** π ***radianes = 180°.***

a) 120° b) 240° c) 225° d) 210° e) 810°

2 **Expresa en grados sexagesimales los siguientes ángulos dados en radianes:**

a) 1,5 **b) 3,2**

c) 5 **d) 2,75**

a) $\dfrac{360°}{2\pi} \cdot 1{,}5 = 85°\ 56'\ 37''$ b) $\dfrac{360°}{2\pi} \cdot 3{,}2 = 183°\ 20'\ 47''$

c) $\dfrac{360°}{2\pi} \cdot 5 = 286°\ 28'\ 44''$ d) $\dfrac{360°}{2\pi} \cdot 2{,}75 = 157°\ 33'\ 48''$

3 **Pasa a radianes los siguientes ángulos dados en grados.**

Exprésalos en función de π:

a) 40° **b) 108°** **c) 135°**

d) 240° **e) 270°** **f) 126°**

Simplifica la expresión que obtengas sin multiplicar por 3,14…

a) $\dfrac{40\pi}{180} = \dfrac{2\pi}{9}$

a) $\dfrac{2\pi}{360°} \cdot 40° = \dfrac{2\pi}{9}$ b) $\dfrac{2\pi}{360°} \cdot 108° = \dfrac{3\pi}{5}$

c) $\dfrac{2\pi}{360°} \cdot 135° = \dfrac{3\pi}{4}$ d) $\dfrac{2\pi}{360°} \cdot 240° = \dfrac{4\pi}{3}$

e) $\dfrac{2\pi}{360°} \cdot 270° = \dfrac{3\pi}{2}$ f) $\dfrac{2\pi}{360°} \cdot 126° = \dfrac{7\pi}{10}$

4 **Halla, sin utilizar la calculadora:**

a) $5\cos\dfrac{\pi}{2} - \cos 0 + 2\cos\pi - \cos\dfrac{3\pi}{2} + \cos 2\pi$

b) $5\,tg\,\pi + 3\cos\dfrac{\pi}{2} - 2\,tg\,0 + sen\dfrac{3\pi}{2} - 2\,sen\,2\pi$

a) $5 \cdot 0 - 1 + 2 \cdot (-1) - 0 + 1 = -2$

b) $5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + (-1) - 2 \cdot 0 = -1$

5 **Prueba que:**

a) $4\,sen\dfrac{\pi}{6} + \sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4} + \cos\pi = 2$

b) $2\sqrt{3}\,sen\dfrac{2\pi}{3} + 4\,sen\dfrac{\pi}{6} - 2\,sen\dfrac{\pi}{2} = 3$

a) $4\,sen\dfrac{\pi}{6} + \sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4} + \cos\pi = 4 \cdot \dfrac{1}{2} + \sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + (-1) = 2 + 1 - 1 = 2$

b) $2\sqrt{3}\,sen\dfrac{2\pi}{3} + 4\,sen\dfrac{\pi}{6} - 2\,sen\dfrac{\pi}{2} = 2\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \dfrac{1}{2} - 2 \cdot 1 = 3 + 2 - 2 = 3$

6 **Halla el valor de *A* sin utilizar la calculadora:**

a) $A = sen\dfrac{\pi}{4} + sen\dfrac{\pi}{2} + sen\,\pi$

b) $A = sen\dfrac{2\pi}{3} + sen\dfrac{4\pi}{3} - sen\,2\pi$

c) $A = \cos\pi - \cos 0 + \cos\dfrac{\pi}{2} - \cos\dfrac{3\pi}{2}$

a) $A = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$

b) $A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 0 = 0$

c) $A = -1 - 1 + 0 - 0 = -2$

7 **Expresa con un ángulo del primer cuadrante:**

a) ***sen*** **1 215°** **b)** ***cos*** **(–100°)** **c)** ***tg*** **(–50°)**

d) ***cos*** **930°** **e)** ***tg*** **580°** **f)** ***sen*** **(–280°)**

a) $\left.\begin{array}{l} 1\,215° = 3 \cdot 360° + 135° \\ 135° = 180° - 45° \end{array}\right\} \to sen\ 1\,215° = sen\ 135° = sen\ 45°$

b) $100° = 180° - 80° \ \to\ cos\ (-100°) = cos\ 100° = -cos\ 80°$

c) $tg\ (-50°) = \frac{sen\ (-50°)}{cos\ (-50°)} = \frac{-sen\ 50°}{cos\ 50°} = -tg\ 50°$

d) $cos\ 930° \overset{(*)}{=} cos\ 210° = cos\ (180° + 30°) = -cos\ 30°$

(*) $930° = 2 \cdot 360° + 210°$

e) $tg\ 580° \overset{(**)}{=} tg\ 220° = tg\ (180° + 40°) = \frac{sen\ (180° + 40°)}{cos\ (180° + 40°)} = \frac{-sen\ 40°}{-cos\ 40°} = tg\ 40°$

(**) $580° = 360° + 220°$

f) $sen\ (-280°) = sen\ (-280° + 360°) = sen\ 80°$

8 **Busca, en cada caso, un ángulo comprendido entre 0º y 360°, cuyas razones trigonométricas coincidan con el ángulo dado:**

a) 3 720° **b) 1 935°** **c) 2 040°**

d) 3 150° **e) –200°** **f) –820°**

a) $3\,720° = 10 \cdot 360° + 120° \ \to\ 120°$

b) $1\,935° = 5 \cdot 360° + 135° \ \to\ 135°$

c) $2\,040° = 5 \cdot 360° + 240° \ \to\ 240°$

d) $3\,150° = 8 \cdot 360° + 270° \ \to\ 270°$

e) $-200° + 360° = 160° \ \to\ 160°$

f) $-820° + 3 \cdot 360° = 260° \ \to\ 260°$

9 **Halla, en radianes, el ángulo** α **tal que** ***sen*** α **= 0,72 y** ***cos*** α **< 0.**

$\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha = 0{,}72 > 0 \\ cos\ \alpha < 0 \end{array}\right\} \alpha \in 2^{\underline{o}}$ cuadrante $\to \alpha \approx 0{,}8$ rad

10 **Indica, sin pasar a grados, en qué cuadrante está cada uno de los siguientes ángulos:**

a) 2 rad **b) 3,5 rad** **c) 5 rad**

☛ ***Ten en cuenta que:***

$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57;$ $\pi \approx 3{,}14;$ $\frac{3\pi}{2} \approx 4{,}7;$ $2\pi \approx 6{,}28$

a) 2º cuadrante b) 3er cuadrante c) 4º cuadrante

Fórmulas trigonométricas

11 **Halla las razones trigonométricas del ángulo de 75° sabiendo que 75° = 30° + 45°.**

$$sen\ 75° = sen\ (30° + 45°) = sen\ 30°\ cos\ 45° + cos\ 30°\ sen\ 45° =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$cos\ 75° = cos\ (30° + 45°) = cos\ 30°\ cos\ 45° - sen\ 30°\ sen\ 45° =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$tg\ 75° = tg\ (30° + 45°) = \frac{tg\ 30° + tg\ 45°}{1 - tg\ 30°\ tg\ 45°} = \frac{\sqrt{3}/3 + 1}{1 - \sqrt{3}/3} = \frac{(\sqrt{3} + 3)/3}{(\sqrt{3} - 3)/3} =$$
$$= \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{(3 + \sqrt{3})^2}{9 - 3} = \frac{9 + 3 + 6\sqrt{3}}{6} =$$
$$= \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3}$$

NOTA: También podemos resolverlo como sigue:

$$tg\ 75° = \frac{sen\ 75°}{cos\ 75°} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2}{6 - 2} = \frac{2 + 6 + 2\sqrt{12}}{4} =$$
$$= \frac{8 + 4\sqrt{3}}{4} = 2 + \sqrt{3}$$

12 **Sabiendo que** $sen\ x = \frac{3}{5}$ **y que** $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, **calcula, sin hallar previamente el valor de** x**:**

a) $sen\ 2x$ **b)** $tg\ \frac{x}{2}$ **c)** $sen\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

d) $cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ **e)** $cos\ \frac{x}{2}$ **f)** $tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

☛ ***Tienes que calcular*** $cos\ x = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$ ***y*** $tg\ x = -\frac{3}{4}$, ***y aplicar las fórmulas.***

$cos\ x = -\sqrt{1 - sen^2\ x} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$ (Negativo, por ser del 2º cuadrante).

$tg\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x} = -\frac{3}{4}$

a) $sen\ 2x = 2\ sen\ x\ cos\ x = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$

b) $tg\ \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}} = \sqrt{\frac{1 - (-4/5)}{1 + (-4/5)}} = \sqrt{\frac{9/5}{1/5}} = 3$

Signo positivo, pues si $x \in 2º$ cuadrante, entonces $\frac{x}{2} \in 1^{er}$ cuadrante.

c) $sen\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = sen\ x\ cos\ \frac{\pi}{6} + cos\ x\ sen\ \frac{\pi}{6} =$

$= \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3} - 4}{10}$

d) $cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = cos\ x\ cos\ \frac{\pi}{3} + sen\ x\ sen\ \frac{\pi}{3} =$

$= \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3} - 4}{10}$

e) $cos\ \frac{x}{2} \overset{(*)}{=} \sqrt{\frac{1 + cos\ x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 4/5}{2}} = \sqrt{\frac{1/5}{2}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

(*) Signo positivo, porque $\frac{x}{2} \in 1^{er}$ cuadrante.

f) $tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{tg\ x + tg\ \pi/4}{1 - tg\ x\ tg\ \pi/4} = \frac{-3/4 + 1}{1 - (-3/4) \cdot 1} = \frac{1 - 3/4}{1 + 3/4} = \frac{1}{7}$

13 Halla las razones trigonométricas del ángulo de 15° de dos formas, considerando:

a) 15° = 45° – 30° **b) $15° = \frac{30°}{2}$**

a) $sen\ 15° = sen\ (45° - 30°) = sen\ 45°\ cos\ 30° - cos\ 45°\ sen\ 30° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 0{,}258819$

$cos\ 15° = cos\ (45° - 30°) = cos\ 45°\ cos\ 30° + sen\ 45°\ sen\ 30° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 0{,}965926$

$tg\ 15° = \frac{sen\ 15°}{cos\ 15°} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{6 + 2 - 2\sqrt{12}}{6 - 2} =$

$= \frac{8 - 4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3} = 0{,}267949$

b) $sen\ 15° = sen\ \frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} =$

$$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = 0{,}258819$$

$$cos\ 15° = cos\ \frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1 + cos\ 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = 0{,}9659258$$

$$tg\ 15° = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{0{,}258819}{0{,}9659258} = 0{,}2679491$$

14 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\boldsymbol{2\ cos^2\ x - sen^2\ x + 1 = 0}$

b) $\boldsymbol{sen^2\ x - sen\ x = 0}$

☛ ***Saca factor común e iguala a cero cada factor.***

c) $\boldsymbol{2\ cos^2\ x - \sqrt{3}\ cos\ x = 0}$

d) $\boldsymbol{sen^2\ x - cos^2\ x = 1}$

e) $\boldsymbol{cos^2\ x - sen^2\ x = 0}$

f) $\boldsymbol{2\ cos^2\ x + sen\ x = 1}$

g) $\boldsymbol{3\ tg^2\ x - \sqrt{3}\ tg\ x = 0}$

a) $\left.2\ cos^2\ x \underbrace{- sen^2\ x + 1}_{cos^2\ x} = 0\right\} \to 2\ cos^2\ x - cos^2\ x = 0$

$$cos^2\ x = 0 \to cos\ x = 0 \to \begin{cases} x_1 = 90° \\ x_2 = 270° \end{cases}$$

Al comprobarlas en la ecuación inicial, las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\ \pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\ \pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Lo que podemos expresar como:

$$x = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\ \pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

b) $sen\ x\ (sen\ x - 1) = 0 \to$

$$\to \begin{array}{l} sen\ x = 0 \to x_1 = 0°,\ x_2 = 180° \\ sen\ x = 1 \to x_3 = 90° \end{array}$$

Comprobando las posibles soluciones, vemos que las tres son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\,\pi \\ x_2 = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\,\pi \\ x_3 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

O, de otra forma:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k\,\pi = k \cdot 180° \\ x_3 = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi = 90° + k \cdot 360° \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

(x_1 así incluye las soluciones x_1 y x_2 anteriores)

c) $\cos x \left(2 \cos x - \sqrt{3}\right) = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 90°,\; x_2 = 270° \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \;\rightarrow\; x_3 = 30°,\; x_4 = 330° \end{array}\right.$$

Las cuatro soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_3 = 30° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_4 = 330° + k \cdot 360° = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

NOTA: Obsérvese que las dos primeras soluciones podrían escribirse como una sola de la siguiente forma:

$$x = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$$

d) $(1 - \cos^2 x) - \cos^2 x = 1 \;\rightarrow\; 1 - 2\cos^2 x = 1 \;\rightarrow\; \cos^2 x = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow \cos x = 0 \;\rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 90° \\ x_2 = 270° \end{array}\right.$$

Las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

O, lo que es lo mismo:

$$x = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\,\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

e) $(1 - sen^2\, x) - sen^2\, x = 0 \;\rightarrow\; 1 - 2\, sen^2\, x = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; sen^2\, x = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; sen\, x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Si $sen\, x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; x_1 = 45°,\;\; x_2 = 135°$
- Si $sen\, x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; x_3 = 225°,\;\; x_4 = 315°$

Comprobamos que todas las soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 45° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{4} + 2k\,\pi \\ x_2 &= 135° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{4} + 2k\,\pi \\ x_3 &= 225° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{4} + 2k\,\pi \\ x_4 &= 315° + k \cdot 360° = \frac{7\pi}{4} + 2k\,\pi \end{aligned}\right\}\ \text{con}\ \ k \in \mathbb{Z}$$

O, lo que es lo mismo:

$$x = 45° + k \cdot 90° = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{con}\ \ k \in \mathbb{Z}$$

f) $2\,(1 - sen^2\, x) + sen\, x = 1 \;\rightarrow\; 2 - 2\, sen^2\, x + sen\, x = 1 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; 2\, sen^2\, x - sen\, x - 1 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; sen\, x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \;\rightarrow\; x_1 = 90° \\ -1/2 \;\rightarrow\; x_2 = 210°,\;\; x_3 = 330° \end{cases}$$

Las tres soluciones son válidas, es decir:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 &= 210° + k \cdot 360° = \frac{7\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_3 &= 330° + k \cdot 360° = \frac{11\pi}{6} + 2k\,\pi \end{aligned}\right\}\ \text{con}\ \ k \in \mathbb{Z}$$

g) $tg\, x\left(3\; tg\, x - \sqrt{3}\right) = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} tg\, x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0°,\;\; x_2 = 180° \\ tgx\, x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \;\rightarrow\; x_3 = 30°,\;\; x_4 = 210° \end{cases}$$

Comprobamos las posibles soluciones en la ecuación inicial y vemos que las cuatro son válidas.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\,\pi \\ x_2 = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\,\pi \\ x_3 = 30° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_4 = 210° + k \cdot 360° = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Lo que podría expresarse con solo dos soluciones que englobaran las cuatro anteriores:

$$x_1 = k \cdot 180° = k\,\pi$$

$$x_2 = 30° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{6} + k\,\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Página 143

15 Halla el valor exacto de estas expresiones:

a) $\boldsymbol{sen\ \frac{5\pi}{4} + cos\ \frac{3\pi}{4} - sen\ \frac{7\pi}{4}}$

b) $\boldsymbol{cos\ \frac{5\pi}{3} + tg\ \frac{4\pi}{3} - tg\ \frac{7\pi}{6}}$

c) $\boldsymbol{\sqrt{3}\ cos\ \frac{\pi}{6} + sen\ \frac{\pi}{6} - \sqrt{2}\ cos\ \frac{\pi}{4} - 2\sqrt{3}\ sen\ \frac{\pi}{3}}$

a) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{1}{2} + \sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{3 + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{6} = \dfrac{3 + 4\sqrt{3}}{6}$

c) $\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} - \sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} - 1 - 3 = -2$

16 Sabiendo que $\boldsymbol{sen\ x = \frac{2}{3}}$ **y que** $\boldsymbol{x}$ **es un ángulo del primer cuadrante, calcula:**

a) $\boldsymbol{sen\ 2x}$ **b)** $\boldsymbol{tg\ \frac{x}{2}}$ **c)** $\boldsymbol{cos\ (30° - x)}$

$$\left.\begin{array}{l} sen\ x = \dfrac{2}{3} \\ x \in 1^{er} \text{ cuadrante} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} cos\ x,\ tg\ x > 0 \\ \dfrac{x}{2} \in 1^{er} \text{ cuadrante} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} sen\ x/2 > 0 \\ cos\ x/2 > 0 \\ tg\ x/2 > 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

- $cos\ x = \sqrt{1 - sen^2\ x} \ = \ \ 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

- $tg\ x = \dfrac{2/3}{\sqrt{5}/3} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

a) $sen\ 2x = 2\ sen\ x\ cos\ x = 2 \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{3} = \dfrac{4\sqrt{5}}{9}$

b) $tg\ \dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}} = \sqrt{\dfrac{1 - 2\sqrt{5}/5}{1 + 2\sqrt{5}/5}} = \sqrt{\dfrac{5 - 2\sqrt{5}}{5 + 2\sqrt{5}}} =$

$= \sqrt{\dfrac{25 + 4 \cdot 5 - 20\sqrt{5}}{25 - 4 \cdot 5}} = \sqrt{\dfrac{45 - 20\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$

c) $cos\ (30° - x) = cos\ 30°\ cos\ x + sen\ 30°\ sen\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{2\sqrt{5}}{5} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} =$

$= \dfrac{\sqrt{15}}{5} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{3\sqrt{15} + 5}{15}$

17 **Si $tg\ \alpha = -4/3$ y $90° < \alpha < 180°$, calcula:**

a) $sen\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$ **b)** $cos\left(180° - \dfrac{\alpha}{2}\right)$ **c)** $tg\ (900° + \alpha)$

$90° < \alpha < 180° \ \rightarrow \ \begin{cases} sen\ \alpha > 0 \\ cos\ \alpha < 0 \end{cases}$

Además, $\dfrac{\alpha}{2} \in 1^{er}$ cuadrante

- $tg\ \alpha = -\dfrac{4}{3}$

- $\dfrac{1}{cos^2\ \alpha} = tg^2\ \alpha + 1 = \dfrac{16}{9} + 1 = \dfrac{25}{9} \ \rightarrow \ cos^2\ \alpha = \dfrac{9}{25} \ \rightarrow \ cos\ \alpha = -\dfrac{3}{5}$

- $sen\ \alpha = \sqrt{1 - cos^2\ \alpha} = \sqrt{1 - \dfrac{9}{25}} = \sqrt{\dfrac{16}{25}} = \dfrac{4}{5}$

a) $sen\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = sen\ \dfrac{\pi}{2}\ cos\ \alpha - cos\ \dfrac{\pi}{2}\ sen\ \alpha = 1 \cdot \left(-\dfrac{3}{5}\right) - 0 \cdot \dfrac{4}{5} = -\dfrac{3}{5}$

b) $cos\left(180° - \dfrac{\alpha}{2}\right) = cos\ 180°\ cos\ \dfrac{\alpha}{2} + sen\ 180°\ sen\ \dfrac{\alpha}{2} = -cos\ \dfrac{\alpha}{2} =$

$= -\sqrt{\dfrac{1 + cos\ \alpha}{2}} = -\sqrt{\dfrac{1 + (-3/5)}{2}} = -\sqrt{\dfrac{5 - 3}{10}} =$

$= -\sqrt{\dfrac{2}{10}} = -\sqrt{\dfrac{1}{5}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

c) $tg\ (900° + \alpha) = tg\ (2 \cdot 360° + 180° + \alpha) = tg\ (180° + \alpha) =$

$= \dfrac{tg\ 180° + tg\ \alpha}{1 - tg\ 180°\ tg\ \alpha} = \dfrac{0 + (-4/3)}{1 - 0 \cdot (-4/3)} = -\dfrac{4}{3}$

18 **Sabemos que $\cos x = -\frac{3}{4}$ y $\operatorname{sen} x < 0$. Sin hallar el valor de x, calcula:**

a) $\operatorname{sen} x$ **b)** $\cos(\pi + x)$ **c)** $\cos 2x$

d) $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ **e)** $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ **f)** $\cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\cos x = -3/4 \\ \operatorname{sen} x < 0\end{array}\right\} \rightarrow x \in 3^{\underline{er}} \text{ cuadrante} \Rightarrow \frac{x}{2} \in 2^{\underline{o}} \text{ cuadrante}$$

a) $\operatorname{sen} x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{9}{16}} = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$

b) $\cos(\pi + x) = \cos \pi \cos x - \operatorname{sen} \pi \operatorname{sen} x = -\cos x = \frac{3}{4}$

c) $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \frac{9}{16} - \frac{7}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

d) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = -\sqrt{\frac{1 + 3/4}{1 - 3/4}} = \sqrt{\frac{7}{1}} = \sqrt{7}$

e) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cos x - \cos \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} x = \cos x = -\frac{3}{4}$

f) $\cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right) = \cos \pi \cos \frac{x}{2} + \operatorname{sen} \pi \operatorname{sen} \frac{x}{2} = -\cos \frac{x}{2} =$

$$= -\left(-\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}\right) = \sqrt{\frac{1 - 3/4}{2}} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{8}}{8}$$

19 **Si $\cos 78° = 0{,}2$ y $\operatorname{sen} 37° = 0{,}6$, calcula $\operatorname{sen} 41°$, $\cos 41°$ y $\operatorname{tg} 41°$.**

$41° = 78° - 37°$

- $\operatorname{sen} 78° = \sqrt{1 - \cos^2 78°} = \sqrt{1 - 0{,}2^2} = 0{,}98$
- $\cos 37° = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 37°} = \sqrt{1 - 0{,}6^2} = 0{,}8$

Ahora ya podemos calcular:

- $\operatorname{sen} 41° = \operatorname{sen}(78° - 37°) = \operatorname{sen} 78° \cos 37° - \cos 78° \operatorname{sen} 37° =$
  $= 0{,}98 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}664$
- $\cos 41° = \cos(78° - 37°) = \cos 78° \cos 37° + \operatorname{sen} 78° \operatorname{sen} 37° =$
  $= 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}98 \cdot 0{,}6 = 0{,}748$
- $\operatorname{tg} 41° = \frac{\operatorname{sen} 41°}{\cos 41°} = \frac{0{,}664}{0{,}748} = 0{,}8877$

20 **Si** $tg\,(\alpha+\beta) = 4$ **y** $tg\,\alpha = -2$**, halla** $tg\,2\beta$.

$$tg\,(\alpha+\beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\,tg\,\beta} \to 4 = \frac{-2 + tg\,\beta}{1 + 2\,tg\,\beta} \to$$

$$\to 4 + 8\,tg\,\beta = -2 + tg\,\beta \to 7\,tg\,\beta = -6 \to tg\,\beta = -\frac{6}{7}$$

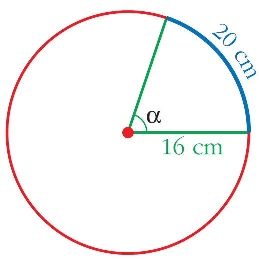
Luego:

$$tg\,2\beta = \frac{2\,tg\,\beta}{1 - tg^2\,\beta} = \frac{2 \cdot (-6/7)}{1 - 36/49} = \frac{-12/7}{13/49} = \frac{-12 \cdot 49}{7 \cdot 13} = -\frac{84}{13}$$

PARA RESOLVER

21 **En una circunferencia de 16 cm de radio, un arco mide 20 cm. Halla el ángulo central en grados y en radianes.**

☛ ***Halla la longitud de la circunferencia y escribe la proporción entre las longitudes de los arcos y la medida de los ángulos.***



Como la circunferencia completa $(\alpha = 100{,}53\text{ cm})$ son 2π rad, entonces:

$$\frac{100{,}53}{20} = \frac{2\pi}{\alpha} \to \alpha = \frac{20 \cdot 2\pi}{100{,}53} = 1{,}25 \text{ rad}$$

$$\alpha = \frac{360°}{2\pi} \cdot 1{,}25 = 71°\ 37'\ 11''$$

22 **Halla, en radianes, el ángulo comprendido entre 0 y** 2π **tal que sus razones trigonométricas coincidan con las de** $\frac{11\pi}{4}$**.**

$0 < \alpha < 2\pi$

$$\frac{11\pi}{4} = \frac{8\pi + 3\pi}{4} \to \frac{11\pi}{4} = 2\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

23 **Demuestra que** $\dfrac{sen\,(\alpha+\beta)}{sen\,(\alpha-\beta)} = \dfrac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{tg\,\alpha - tg\,\beta}$**.**

☛ ***Aplica las fórmulas de*** $sen\,(\alpha+\beta)$ ***y*** $sen\,(\alpha-\beta)$***. Divide tanto el numerador como el denominador entre*** $cos\,\alpha\,cos\,\beta$ ***y simplifica.***

$$\frac{sen\,(\alpha+\beta)}{sen\,(\alpha-\beta)} = \frac{sen\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sen\,\beta}{sen\,\alpha\,cos\,\beta - cos\,\alpha\,sen\,\beta} \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{\dfrac{sen\,\alpha\,cos\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta} + \dfrac{cos\,\alpha\,sen\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta}}{\dfrac{sen\,\alpha\,cos\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta} - \dfrac{cos\,\alpha\,sen\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta}} = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{tg\,\alpha - tg\,\beta}$$

(*) Dividimos numerador y denominador entre $cos\,\alpha\,cos\,\beta$.

24 **Prueba que** $\boldsymbol{2\,tg\,x\,cos^2 \frac{x}{2} - sen\,x = tg\,x}$**.**

☛ ***Sustituye*** $\boldsymbol{cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + cos\,x}{2}}$**.**

Como $cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + cos\,x}{2}} \rightarrow cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + cos\,x}{2}$

Y sustituyendo en la expresión:

$$2\,tg\,x\,cos^2 \frac{x}{2} - sen\,x = 2\,\frac{sen\,x}{cos\,x} \cdot \frac{1 + cos\,x}{2} - sen\,x =$$

$$= \frac{sen\,x\,(1 + cos\,x) - sen\,x\,cos\,x}{cos\,x} \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{sen\,x\,[1 + cos\,x - cos\,x]}{cos\,x} = \frac{sen\,x}{cos\,x} = tg\,x$$

(*) Sacando factor común.

25 **Demuestra que** $\boldsymbol{cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = cos\,x}$**.**

☛ ***Desarrolla y sustituye las razones de*** $\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$ **y** $\boldsymbol{\frac{2\pi}{3}}$**.**

$$cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= \left[cos\,x\,cos\,\frac{\pi}{3} - sen\,x\,sen\,\frac{\pi}{3}\right] - \left[cos\,x\,cos\,\frac{2\pi}{3} - sen\,x\,sen\,\frac{2\pi}{3}\right] =$$

$$= \left[(cos\,x)\,\frac{1}{2} - (sen\,x)\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right] - \left[(cos\,x)\left(-\frac{1}{2}\right) - (sen\,x)\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,cos\,x - \frac{\sqrt{3}}{2}\,sen\,x + \frac{1}{2}\,cos\,x + \frac{\sqrt{3}}{2}\,sen\,x = cos\,x$$

26 **Demuestra que** $\boldsymbol{cos\,\alpha\,cos\,(\alpha - \beta) + sen\,\alpha\,sen\,(\alpha - \beta) = cos\,\beta}$**.**

☛ ***Aplica las fórmulas de la diferencia de ángulos, simplifica y extrae factor común.***

$cos\,\alpha\,cos\,(\alpha - \beta) + sen\,\alpha\,sen\,(\alpha - \beta) =$

$= cos\,\alpha\,(cos\,\alpha\,cos\,\beta + sen\,\alpha\,sen\,\beta) + sen\,\alpha\,(sen\,\alpha\,cos\,\beta - cos\,\alpha\,sen\,\beta) =$

$= cos^2\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sen\,\alpha\,sen\,\beta + sen^2\,\alpha\,cos\,\beta - sen\,\alpha\,cos\,\alpha\,sen\,\beta =$

$= cos^2\,\alpha\,cos\,\beta + sen^2\,\alpha\,cos\,\beta \overset{(*)}{=} cos\,\beta\,(cos^2\,\alpha + sen^2\,\alpha) = cos\,\beta \cdot 1 = cos\,\beta$

(*) Extraemos factor común.

27 **Prueba que** $\boldsymbol{\frac{2\,sen\,\alpha - sen\,2\alpha}{2\,sen\,\alpha + sen\,2\alpha} = tg^2\,\frac{\alpha}{2}}$**.**

$$\frac{2\,sen\,\alpha - sen\,2\alpha}{2\,sen\,\alpha + sen\,2\alpha} = \frac{2\,sen\,\alpha - 2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha}{2\,sen\,\alpha + 2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha} = \frac{2\,sen\,\alpha\,(1 - cos\,\alpha)}{2\,sen\,\alpha\,(1 + cos\,\alpha)} =$$

$$= \frac{1 - cos\,\alpha}{1 + cos\,\alpha} = tg^2\,\frac{\alpha}{2}$$

28 **Simplifica:** $\dfrac{2\,cos\,(45° + \alpha)\,cos\,(45° - \alpha)}{cos\,2\alpha}$

☛ ***Al desarrollar el numerador obtendrás una diferencia de cuadrados.***

$$\frac{2\,cos\,(45° + \alpha)\,cos\,(45° - \alpha)}{cos\,2\alpha} =$$

$$= \frac{2\,(cos\,45°\,cos\,\alpha - sen\,45°\,sen\,\alpha)\,(cos\,45°\,cos\,\alpha + sen\,45°\,sen\,\alpha)}{cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha} =$$

$$= \frac{2\,(cos^2\,45°\,cos^2\,\alpha - sen^2\,45°\,sen^2\,\alpha)}{cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha} =$$

$$= \frac{2\cdot\left[\left(\sqrt{2}/2\right)^2 cos^2\,\alpha - \left(\sqrt{2}/2\right)^2 sen^2\,\alpha\right]}{cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha} = \frac{2\cdot 1/2\,cos^2\,\alpha - 2\cdot 1/2\,sen^2\,\alpha}{cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha} =$$

$$= \frac{cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha}{cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha} = 1$$

29 **Demuestra:** $\dfrac{cos\,(\alpha - \beta)}{cos\,(\alpha + \beta)} = \dfrac{1 + tg\,\alpha\;tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\;tg\,\beta}$

$$\frac{cos\,(\alpha - \beta)}{cos\,(\alpha + \beta)} = \frac{cos\,\alpha\,cos\,\beta + sen\,\alpha\,sen\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta - sen\,\alpha\,sen\,\beta} \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{\dfrac{cos\,\alpha\,cos\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta} + \dfrac{sen\,\alpha\,sen\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta}}{\dfrac{cos\,\alpha\,cos\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta} - \dfrac{sen\,\alpha\,sen\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta}} = \frac{1 + tg\,\alpha\,tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\,tg\,\beta}$$

(*) Dividimos numerador y denominador entre: $cos\,\alpha\,cos\,\beta$

30 **Simplifica la expresión** $\dfrac{sen\,2\alpha}{1 - cos^2\,\alpha}$ **y calcula su valor para** $\alpha = 90°$**.**

$$\frac{sen\,2\alpha}{1 - cos^2\,\alpha} = \frac{2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha}{sen^2\,\alpha} = \frac{2\,cos\,\alpha}{sen\,\alpha}$$

Por tanto, si $\alpha = 90° \Rightarrow \dfrac{sen\,2\alpha}{1 - cos^2\,\alpha} = \dfrac{2\,cos\,\alpha}{sen\,\alpha} = \dfrac{2\cdot 0}{1} = 0$

31 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $sen\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{2}\;sen\,x = 0$

b) $sen\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) + cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = \dfrac{1}{2}$

c) $sen\,2x - 2\,cos^2\,x = 0$

☛ ***Desarrolla** $sen\,2x$ **y saca factor común.***

d) $cos\,2x - 3\,sen\,x + 1 = 0$

☛ ***Desarrolla** $cos\,2x$ **y sustituye** $cos^2\,x = 1 - sen^2\,x$*

a) $sen\ \frac{\pi}{4}\ cos\ x + cos\ \frac{\pi}{4}\ sen\ x - \sqrt{2}\ sen\ x = 0$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\ cos\ x + \frac{\sqrt{2}}{2}\ sen\ x - \sqrt{2}\ sen\ x = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\ cos\ x - \frac{\sqrt{2}}{2}\ sen\ x = 0 \ \rightarrow\ cos\ x - sen\ x = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ cos\ x = sen\ x \ \rightarrow\ x_1 = \frac{\pi}{4},\ \ x_2 = \frac{5\pi}{4}$$

Al comprobar, podemos ver que ambas soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\,\pi = 45° + k \cdot 360° \\[2ex] x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2k\,\pi = 225° + k \cdot 360° \end{array}\right\}\ \text{con}\ \ k \in \mathbb{Z}$$

Podemos agrupar las dos soluciones en:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\,\pi = 45° + k \cdot 180° \quad \text{con}\ \ k \in \mathbb{Z}$$

b) $sen\ \frac{\pi}{6}\ cos\ x - cos\ \frac{\pi}{6}\ sen\ x + cos\ \frac{\pi}{3}\ cox\ x + sen\ \frac{\pi}{3}\ sen\ x = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}\ cos\ x - \frac{\sqrt{3}}{2}\ sen\ x + \frac{1}{2}\ cos\ x + \frac{\sqrt{3}}{2}\ sen\ x = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\ cos\ x + \frac{1}{2}\ cos\ x = \frac{1}{2} \ \rightarrow\ cos\ x = \frac{1}{2} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \pi/3 \\ x_2 = 5\pi/3 \end{array}\right.$$

Comprobamos y vemos que:

$$x_1 \ \rightarrow\ sen\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = sen\left(-\frac{\pi}{6}\right) + cos\ 0 = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 \ \rightarrow\ sen\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}\right) = sen\left(-\frac{3\pi}{3}\right) + cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Son válidas las dos soluciones. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\,\pi = 60° + k \cdot 360° \\[2ex] x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\,\pi = 300° + k \cdot 360° \end{array}\right\}\ \text{con}\ \ k \in \mathbb{Z}$$

c) $2\ sen\ x\ cos\ x - 2\ cos^2\ x = 0 \ \rightarrow\ 2\ cos\ x\ (sen\ x - cos\ x) = 0 \ \rightarrow$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} cos\ x = 0 \ \rightarrow\ x_1 = 90°,\ \ x_2 = 270° \\ sen\ x = cos\ x \ \rightarrow\ x_3 = 45°,\ \ x_4 = 225° \end{array}\right.$$

Comprobamos las soluciones. Todas son válidas:

$$x_1 = 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + 2k\,\pi$$

$$x_2 = 270° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{2} + 2k\,\pi$$

$x_3 = 45° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{4} + 2k\,\pi$

$x_4 = 225° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\,\pi$

También podríamos expresar como:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 180° = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi \\[2ex] x_2 = 45° + k \cdot 180° = \dfrac{\pi}{4} + k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } \ k \in \mathbb{Z}$$

d) $cos^2\, x - sen^2\, x - 3\, sen\, x + 1 = 0 \ \rightarrow \ 1 - sen^2\, x - sen^2\, x - 3\, sen\, x + 1 = 0 \ \rightarrow$

$\rightarrow \ 1 - 2\, sen^2\, x - 3\, sen\, x + 1 = 0 \ \rightarrow \ 2\, sen^2\, x + 3\, sen\, x - 2 = 0 \ \rightarrow$

$$\rightarrow \ sen\, x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1/2 \ \rightarrow \ x_1 = 30°, \ \ x_2 = 150° \\ -2 \ \rightarrow \ \text{¡Imposible¡, pues } |sen\, x| \le 1 \end{cases}$$

Comprobamos que las dos soluciones son válidas.

Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 30° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\,\pi \\[2ex] x_2 = 150° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } \ k \in \mathbb{Z}$$

Página 144

32 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $\boldsymbol{4\, sen^2\, x\, cos^2\, x + 2\, cos^2\, x - 2 = 0}$

☛ ***Al hacer*** $\boldsymbol{sen^2\, x = 1 - cos^2\, x}$, ***resulta una ecuación bicuadrada. Haz*** $\boldsymbol{cos^2\, x = z}$ ***y comprueba si son válidas las soluciones que obtienes.***

b) $\boldsymbol{4\, sen^2\, x + sen\, x\, cos\, x - 3\, cos^2\, x = 0}$

☛ ***Divide por*** $\boldsymbol{cos^2\, x}$ ***y obtendrás una ecuación con*** $\boldsymbol{tg\, x}$.

c) $\boldsymbol{cos^2\, \dfrac{x}{2} + cos\, x - \dfrac{1}{2} = 0}$

d) $\boldsymbol{tg^2\, \dfrac{x}{2} + 1 = cos\, x}$

e) $\boldsymbol{2\, sen^2\, \dfrac{x}{2} + cos\, 2x = 0}$

a) $4(1 - cos^2\, x)\, cos^2\, x + 2\, cos^2\, x - 2 = 0$

$4\, cos^2\, x - 4\, cos^4\, x + 2\, cos^2\, x - 2 = 0$

$4\, cos^4\, x - 6\, cos^2\, x + 2 = 0 \ \rightarrow \ 2\, cos^4\, x - 3\, cos^2\, x + 1 = 0$

Sea $cos^2 x = z \rightarrow cos^4 x = z^2$

Así:

$$2z^2 - 3z + 1 = 0 \rightarrow z = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

$$z_1 = 1 \rightarrow cos\,x = \pm 1 \begin{cases} x_1 = 0° \\ x_2 = 180° \end{cases}$$

$$z_2 = \frac{1}{2} \rightarrow cos\,x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{cases} x_3 = 45°, \ x_4 = 315° \\ x_5 = 135°, \ x_6 = 225° \end{cases}$$

Comprobando las posibles soluciones, vemos que todas son válidas. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\,\pi \\ x_2 = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\,\pi \\ x_3 = 45° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{4} + 2k\,\pi \\ x_4 = 315° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\,\pi \\ x_5 = 135° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\,\pi \\ x_6 = 225° + k \cdot 360° = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}$$

O, agrupando las soluciones:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 180° = k\,\pi \\ x_2 = 45° + k \cdot 90° = \dfrac{\pi}{4} + k\,\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}$$

b) Dividiendo por $cos^2 x$:

$$\frac{4\,sen^2 x}{cos^2 x} + \frac{sen\,x\,cos\,x}{cos^2 x} - \frac{3\,cos^2 x}{cos^2 x} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4\,tg^2 x + tg\,x - 3 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow tg\,x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{8} = \frac{-1 \pm 7}{8} = \begin{cases} \dfrac{3}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 36°\ 52'\ 11{,}6'' \\ x_2 = 216°\ 52'\ 11{,}6'' \end{cases} \\ -1 \rightarrow \begin{cases} x_3 = 135° \\ x_4 = 315° \end{cases} \end{cases}$$

Las cuatro soluciones son válidas:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 36° \ 52' \ 11{,}6'' + k \cdot 360° \approx \dfrac{\pi}{5} + 2k\,\pi \\[2ex] x_2 = 216° \ 52' \ 11{,}6'' + k \cdot 360° \approx \dfrac{6\pi}{5} + 2k\,\pi \\[2ex] x_3 = 135° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{5} + 2k\,\pi \\[2ex] x_4 = 315° + k \cdot 360° = \dfrac{7\pi}{5} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } \ k \in \mathbb{Z}$$

O, lo que es lo mismo:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 36° \ 52' \ 11{,}6'' + k \cdot 180° \approx \dfrac{\pi}{5} + k\,\pi \\[2ex] x_2 = 135° + k \cdot 180° = \dfrac{3\pi}{4} + k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } \ k \in \mathbb{Z}$$

c) $\dfrac{1 + \cos x}{2} + \cos x - \dfrac{1}{2} = 0 \ \rightarrow \ 1 + \cos x + 2 \cos x - 1 = 0 \ \rightarrow$

$\rightarrow \ 3 \cos x = 0 \ \rightarrow \ \cos x = 0 \ \rightarrow \ x_1 = 90°, \ \ x_2 = 270°$

Las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\[2ex] x_2 = 270° + k \cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } \ k \in \mathbb{Z}$$

Agrupando las soluciones:

$$x = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\,\pi \quad \text{con} \ \ k \in \mathbb{Z}$$

d) $\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x} + 1 = \cos x \ \rightarrow \ 1 - \cos x + 1 + \cos x = \cos x + \cos^2 x \ \rightarrow$

$\rightarrow \ 2 = \cos x + \cos^2 x \ \rightarrow \ \cos^2 x + \cos x - 2 = 0 \ \rightarrow$

$\rightarrow \ \cos x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \begin{array}{l} 1 \ \rightarrow \ x = 0° \\ -2 \ \rightarrow \ \text{¡Imposible!, pues } \ |\cos x| \le 1 \end{array}$

Luego:

$$x = k \cdot 360° = 2k\,\pi \quad \text{con} \ \ k \in \mathbb{Z}$$

e) $2 \cdot \dfrac{1 - \cos x}{2} + \cos^2 x - \mathrm{sen}^2\, x = 0 \ \rightarrow$

$\rightarrow \ 1 - \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 0 \ \rightarrow \ 1 - \cos x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 0 \ \rightarrow$

$\rightarrow \ 2 \cos^2 x - \cos x = 0 \ \rightarrow \ \cos x \, (2 \cos x - 1) = 0 \ \rightarrow$

$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos x = 0 \ \rightarrow \ x_1 = 90°, \ \ x_2 = 270° \\ \cos x = 1/2 \ \rightarrow \ x_3 = 60°, \ \ x_4 = 300° \end{array}\right.$

Se comprueba que son válidas todas. Por tanto:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 &= 270° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_3 &= 60° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{3} + 2k\,\pi \\ x_4 &= 300° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{3} + 2k\,\pi \end{aligned}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupando las soluciones quedaría:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\,\pi \\ x_2 &= 60° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{3} + 2k\,\pi \\ x_3 &= 300° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{3} + 2k\,\pi \end{aligned}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

33 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\boldsymbol{\cos 2x + 3 \operatorname{sen} x = 2}$

b) $\boldsymbol{\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x = 1}$

c) $\boldsymbol{\cos x \cos 2x + 2 \cos^2 x = 0}$

d) $\boldsymbol{2 \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} 2x}$

e) $\boldsymbol{\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{x}{2} + \cos x - 1 = 0}$

f) $\boldsymbol{\operatorname{sen} 2x \cos x = 6 \operatorname{sen}^3 x}$

g) $\boldsymbol{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \operatorname{tg} x = 1}$

a) $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x = 2 \;\rightarrow\; 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x = 2 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \begin{cases} 1 \;\rightarrow\; x_1 = 90° \\ 1/2 \;\rightarrow\; x_1 = 30°,\;\; x_2 = 150° \end{cases}$$

Las tres soluciones son válidas:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 &= 30° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_3 &= 150° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{6} + 2k\,\pi \end{aligned}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

b) $\dfrac{2\,tg\,x}{1-tg^2\,x}\cdot tg\,x = 1 \;\rightarrow\; 2\,tg^2\,x = 1 - tg^2\,x \;\rightarrow\; tg^2\,x = \dfrac{1}{3} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; tg\,x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \;\rightarrow\; \begin{cases} x_1 = 30°, & x_2 = 210° \\ x_3 = 150°, & x_4 = 330° \end{cases}$

Las cuatro soluciones son válidas:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 30° + k\cdot 360° = \frac{\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_2 &= 210° + k\cdot 360° = \frac{7\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_3 &= 150° + k\cdot 360° = \frac{5\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_4 &= 330° + k\cdot 360° = \frac{11\pi}{6} + 2k\,\pi \end{aligned}\right\}\text{ con } k\in\mathbb{Z}$$

Agrupando:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 30° + k\cdot 180° = \frac{\pi}{6} + k\,\pi \\ x_2 &= 150° + k\cdot 180° = \frac{5\pi}{6} + k\,\pi \end{aligned}\right\}\text{ con } k\in\mathbb{Z}$$

c) $cos\,x\,(cos^2\,x - sen^2\,x) + 2\,cos^2\,x = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; cos\,x\,(cos^2\,x - 1 + cos^2\,x) + 2\,cos^2\,x = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 2\,cos^3\,x - cos\,x + 2\,cos^2\,x = 0 \;\rightarrow\; cos\,x\,(2\,cos^2\,x + 2\,cos\,x - 1) = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; cos\,x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 90°,\; x_2 = 270°$

$$cos\,x = \frac{-2\pm\sqrt{4+8}}{4} = \frac{-2\pm 2\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \approx \begin{cases} -1{,}366 \;\rightarrow\; \text{¡Imposible!, pues } |cos\,x| \le -1 \\ 0{,}366 \;\rightarrow\; x_3 = 68°\,31'\,51{,}1'',\;\; x_4 = 291°\,28'\,8{,}9'' \end{cases}$$

Las soluciones son todas válidas:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 90° + k\cdot 360° = \frac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 &= 270° + k\cdot 360° = \frac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_3 &= 68°\,31'\,51{,}1'' + k\cdot 360° \approx 0{,}38\pi + 2k\,\pi \\ x_4 &= 291°\,28'\,8{,}9'' + k\cdot 360° \approx 1{,}62\pi + 2k\,\pi \end{aligned}\right\}\text{ con } k\in\mathbb{Z}$$

Agrupadas, serían:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 180° = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi \\ x_2 = 68°\ 31'\ 51{,}1'' + k \cdot 360° \approx 0{,}38\pi + 2k\,\pi \\ x_3 = 291°\ 28'\ 8{,}9'' + k \cdot 360° \approx 1{,}62\pi + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

d) $2\, sen\, x = \dfrac{2\, tg\, x}{1 - tg^2 x} \rightarrow 2\, sen\, x - 2\, sen\, x\, tg^2 x = 2\, tg\, x \rightarrow$

$$\rightarrow sen\, x - sen\, x \frac{sen^2 x}{cos^2 x} = \frac{sen\, x}{cos\, x} \rightarrow$$

$$\rightarrow sen\, x\, cos^2 x - sen\, x\, sen^2 x = sen\, x\, cos\, x \rightarrow$$

$$\rightarrow sen\, x\, (cos^2 x - sen^2 x - cos\, x) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow sen\, x\, (cos^2 x - 1 + cos^2 x - cos\, x) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} sen\, x = 0 \rightarrow x_1 = 0°,\ x_2 = 180° \\ 2\, cos^2 x - cos\, x - 1 = 0° \rightarrow cos\, x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \end{array}\right.$$

$$= \begin{cases} 1 \rightarrow x_3 = 0° = x_1 \\ -1/2 \rightarrow x_4 = 240°,\ x_5 = 120° \end{cases}$$

Las cuatro soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\,\pi \\ x_2 = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\,\pi \\ x_4 = 240° + k \cdot 360° = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\,\pi \\ x_5 = 120° + k \cdot 360° = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Que, agrupando soluciones, quedaría:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 180° = k\,\pi \\ x_2 = 120° + k \cdot 360° = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\,\pi \\ x_3 = 240° + k \cdot 360° = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

e) $\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{1 - cos\, x}{2}} + cos\, x - 1 = 0 \rightarrow \dfrac{3 - 3\, cos\, x}{2} = (1 - cos\, x)^2 \rightarrow$

$$\rightarrow 3 - 3\, cos\, x = 2\, (1 + cos^2 x - 2\, cos\, x) \rightarrow 2\, cos^2 x - cos\, x - 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow cos\, x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \rightarrow x_1 = 0° \\ -1/2 \rightarrow x_2 = 120°,\ x_3 = 240° \end{cases}$$

Al comprobar vemos que las tres soluciones son válidas:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\,\pi \\[2ex] x_2 = 120° + k \cdot 360° = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\,\pi \\[2ex] x_3 = 240° + k \cdot 360° = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } \ k \in \mathbb{Z}$$

f) $2\, sen\, x \cos x \cos x = 6\, sen^3\, x \ \rightarrow \ 2\, sen \cos^2 x = 6\, sen^3\, x \ \rightarrow$

$\rightarrow \ 2\, sen\, x\, (1 - sen^2\, x) = 6\, sen^3\, x \ \rightarrow \ 2\, sen\, x - 2\, sen^3\, x = 6\, sen^3\, x \ \rightarrow$

$\rightarrow \ sen\, x = 0 \ \rightarrow \ x_1 = 0°, \ \ x_2 = 180°$

$$sen^2\, x = \frac{1}{4} \ \rightarrow \ sen\, x = \pm\frac{1}{2} \ \rightarrow \begin{cases} x_3 = 30°, \ \ x_4 = 150° \\ x_5 = 210°, \ \ x_6 = 330° \end{cases}$$

Comprobamos que todas las soluciones son válidas.

Damos las soluciones agrupando las dos primeras por un lado y el resto por otro:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 180° = k\,\pi \\[2ex] x_2 = 30° + k \cdot 90° = \dfrac{\pi}{6} + k \cdot \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \text{ con } \ k \in \mathbb{Z}$$

g) $\dfrac{tg\,(\pi/4) + tg\, x}{1 - tg\,(\pi/4)\, tg\, x} + tg\, x = 1 \ \rightarrow \ \dfrac{1 + tg\, x}{1 - tg\, x} + tg\, x = 1 \ \rightarrow$

$\rightarrow \ 1 + tg\, x + tg\, x - tg^2\, x = 1 - tg\, x \ \rightarrow \ tg^2\, x - 3\, tg\, x = 0 \ \rightarrow$

$\rightarrow \ tg\, x\, (tg\, x - 3) = 0 \ \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} tg\, x = 0 \ \rightarrow \ x_1 = 0°, \ \ x_2 = 180° \\ tg\, x = 3 \ \rightarrow \ x_3 = 71°\ 33'\ 54{,}2'', \ \ x_4 = 251°\ 33'\ 54{,}2'' \end{cases}$$

Las cuatro soluciones son válidas:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\,\pi \\[2ex] x_2 = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\,\pi \\[2ex] x_3 = 71°\ 33'\ 54{,}2'' + k \cdot 360° \approx \dfrac{2\pi}{5} + 2k\,\pi \\[2ex] x_4 = 251°\ 33'\ 54{,}2'' + k \cdot 360° \approx \dfrac{7\pi}{5} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } \ k \in \mathbb{Z}$$

O, lo que es lo mismo:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 180° = k\,\pi \\[2ex] x_2 = 71°\ 33'\ 54{,}2'' + k \cdot 180° \approx \dfrac{2\pi}{5} + k\,\pi \end{array}\right\} \text{ con } \ k \in \mathbb{Z}$$

34 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $sen\ 3x - sen\ x = cos\ 2x$

b) $\dfrac{sen\ 5x + sen\ 3x}{cos\ x + cos\ 3x} = 1$

c) $\dfrac{sen\ 3x + sen\ x}{cos\ 3x - cos\ x} = \sqrt{3}$

d) $sen\ 3x - cos\ 3x = sen\ x - cos\ x$

☛ ***Transforma las sumas o diferencias de senos y cosenos, en productos.***

a) $2\ cos\ \dfrac{3x + x}{2}\ sen\ \dfrac{3x - x}{2} = cos\ 2x$

$2\ cos\ 2x\ sen\ x = cos\ 2x \;\rightarrow\; 2\ sen\ x = 1 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; sen\ x = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; x_1 = 30°,\;\; x_2 = 150°$

Comprobando, vemos que las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 30° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\,\pi \\[2ex] x_2 = 150° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{con } \; k \in \mathbb{Z}$$

b) $\dfrac{2\ sen\ 4x\ cos\ x}{2\ cos\ 2x\ cos\ x} = 1 \;\rightarrow\; \dfrac{sen\ 4x}{cos\ 2x} = 1 \;\rightarrow\; \dfrac{sen\ (2 \cdot 2x)}{cos\ 2x} = 1 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; \dfrac{2\ sen\ 2x\ cos\ 2x}{cos\ 2x} = 1 \;\rightarrow\; 2\ sen\ 2x = 1 \;\rightarrow\; sen\ 2x = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x = 30° \;\rightarrow\; x_1 = 15° + k \cdot 360° = \dfrac{\pi}{12} + 2k\,\pi \\[2ex] 2x = 150° \;\rightarrow\; x_2 = 75° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{12} + 2k\,\pi \\[2ex] 2x = 390° \;\rightarrow\; x_3 = 195° + k \cdot 360° = \dfrac{13\pi}{12} + 2k\,\pi \\[2ex] 2x = 510° \;\rightarrow\; x_4 = 255° + k \cdot 360° = \dfrac{17\pi}{12} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{con } \; k \in \mathbb{Z}$$

Al comprobar, vemos que todas las soluciones son válidas.

c) $\dfrac{2\ sen\ 2x\ cos\ x}{-2\ sen\ 2x\ sen\ x} = \dfrac{cos\ x}{-sen\ x} = -\dfrac{1}{tg\ x} = \sqrt{3} \;\rightarrow\; tg\ x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \;\rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x_1 = 150° \\ x_2 = 330° \end{array}\right.$

Ambas soluciones son válidas. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 150° + k \cdot 360° = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\,\pi \\[2ex] x_2 = 330° + k \cdot 360° = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{con } \; k \in \mathbb{Z}$$

d) $sen\ 3x - sen\ x = cos\ 3x - cos\ x \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 2\ cos\ 2x\ sen\ x = -2\ sen\ 2x\ sen\ x \;\rightarrow\;$ (dividimos entre $2\ sen\ x$)

$\rightarrow\; cos\ 2x = -sen\ 2x \;\rightarrow\; \dfrac{sen\ 2x}{cos\ 2x} = -1 \;\rightarrow\; tg\ 2x = -1 \;\rightarrow$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = 315° \rightarrow x_1 = 157{,}5° + k \cdot 360° \\ 2x = 135° \rightarrow x_2 = 67{,}5° + k \cdot 360° \\ 2x = 675° \rightarrow x_3 = 337{,}5° + k \cdot 360° \\ 2x = 495° \rightarrow x_4 = 247{,}5° + k \cdot 360° \end{array} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Podemos comprobar que las cuatro soluciones son válidas. Agrupándolas:

$$x = 67{,}5° + k \cdot 90° \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}$$

35 **a) Demuestra que** $\boldsymbol{sen\ 3x = 3\ sen\ x\ cos^2 x - sen^3 x}$**.**

b) Resuelve la ecuación $\boldsymbol{sen\ 3x - 2\ sen\ x = 0}$**.**

☛ ***a) Haz*** $\boldsymbol{sen\ 3x = sen\ (2x + x)}$ ***y desarrolla. b) Sustituye*** $\boldsymbol{sen\ 3x}$ ***por el resultado anterior.***

a) $sen\ 3x = sen\ (2x + x) = sen\ 2x\ cos\ x + cos\ 2x\ sen\ x =$

$= 2\ sen\ x\ cos\ x\ cos\ x + (cos^2 x - sen^2 x)\ sen\ x =$

$= 2\ sen\ x\ cos^2 x + sen\ x\ cos^2 x - sen^3 x = 3\ sen\ x\ cos^2 x - sen^3 x$

b) $sen\ 3x - 2\ sen\ x = 0 \rightarrow$ por el resultado del apartado anterior:

$3\ sen\ x\ cos^2 x - sen^3 x - 2\ sen\ x = 0 \rightarrow 3\ sen\ x\ (1 - sen^2 x) - sen^3 x - 2\ sen\ x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 3\ sen\ x - 3\ sen^3 x - sen^3 x - 2\ sen\ x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 4\ sen^3 x - sen\ x = 0 \rightarrow sen\ x\ (4\ sen^2 x - 1) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} sen\ x = 0 \rightarrow x_1 = 0°,\ x_2 = 150° \\ sen\ x = \pm 1/2 \rightarrow x_3 = 30°,\ x_4 = 150°,\ x_5 = 210°,\ x_6 = 330° \end{array} \right.$$

Todas las soluciones son válidas y se pueden expresar como:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = k \cdot 180° = k\,\pi \\ x_2 = 30° + k \cdot 180° = (\pi/6) + k\,\pi \\ x_3 = 150° + k \cdot 180° = (5\pi/6) + k\,\pi \end{array} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

36 **Resuelve:**

a) $\boldsymbol{sen\ 3x - sen\ x\ cos\ 2x = 0}$

b) $\boldsymbol{cos\ 3x - 2\ cos\ (\pi - x) = 0}$

c) $\boldsymbol{cos\ 3x + sen\ 2x - cos\ x = 0}$

☛ ***b) Expresa*** $\boldsymbol{cos\ 3x}$ ***en función de sen x y cos x haciendo*** $\boldsymbol{cos\ 3x = cos\ (2x + x)}$***.***

a) Por el ejercicio 35, a): $sen\ 3x = 3\ sen\ x\ cos^2 x - sen^3 x$.

Luego:

$3\ sen\ x\ cos^2 x - sen^3 x - sen\ x\ (cos^2 x - sen^2 x) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 3\ sen\ x\ cos^2 x - sen^3 x - sen\ x\ cos^2 x - sen^3 x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2\ sen^3 x - 2\ sen\ x\ cos^2 x = 0 \rightarrow sen\ x\ (sen^2 x - cos^2 x) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} sen\, x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0°,\; x_2 = 180° \\ sen^2\, x - cos^2\, x = -cos\, 2x = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} 2x = 90° \;\rightarrow\; x_3 = 45° \\ 2x = 270° \;\rightarrow\; x_4 = 135° \\ 2x = 450° \;\rightarrow\; x_5 = 225° \\ 2x = 630° \;\rightarrow\; x_6 = 315° \end{cases} \end{cases}$$

Las soluciones (todas válidas) se pueden expresar como:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 180° = k\pi \\ x_2 = 45° + k \cdot 90° = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

donde x_1 engloba las dos primeras soluciones obtenidas y x_2 las cuatro restantes.

b) $cos\, (\pi - x) = -cos\, x$

$$cos\, 3x = cos\, (2x + x) = cos\, 2x\, cos\, x - sen\, 2x\, sen\, x =$$

$$= (cos^2\, x - sen^2\, x)\, cos\, x - 2\, sen\, x\, cos\, x\, sen\, x =$$

$$= cos\, x\, (cos^2\, x - sen^2\, x - 2\, sen^2\, x) =$$

$$= cos\, x\, (cos^2\, x - 3\, sen^2\, x) = cos\, x\, (1 - 4\, sen^2\, x)$$

Así, sustituyendo en la ecuación:

$$cos\, x\, (1 - 4\, sen^2\, x) - 2\, (-cos\, x) = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; cos\, x\, (1 - 4\, sen^2\, x) + 2\, cos\, x = 0 \;\rightarrow\; cos\, x\, (1 - 4\, sen^2\, x + 2) = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; cos\, x\, (3 - 4\, cos\, x) = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} cos\, x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 90°,\; x_2 = 270° \\ sen^2\, x = \dfrac{3}{4} \;\rightarrow\; sen\, x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \;\rightarrow\; x_3 = 60°,\; x_4 = 120°,\; x_5 = 240°,\; x_6 = 300° \end{cases}$$

Todas las soluciones son válidas y las podemos agrupar, expresándolas como:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 180° = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x_2 = 60° + k \cdot 180° = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x_3 = 120° + k \cdot 180° = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

c) Utilizando los resultados obtenidos en el ejercicio 36 b), para $cos\, 3x$ y sustituyendo en la ecuación, se obtiene:

$$cos\, x\, (1 - 4\, sen^2\, x) + 2\, sen\, x\, cos\, x - cos\, x = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; cos\, x\, (1 - 4\, sen^2\, x + 2\, sen\, x - 1) = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; cos\, x\, (-4\, sen^2\, x + 2\, sen\, x) = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \ \rightarrow \ x_1 = 90°, \ \ x_2 = 270° \\ \\ 2\ sen^2\, x - sen\, x = sen\, x\,(2\ sen\, x - 1) = 0 \ \rightarrow \begin{cases} sen\, x = 0 \ \rightarrow \ \begin{cases} x_3 = 0° \\ x_4 = 180° \end{cases} \\ \\ sen\, x = \dfrac{1}{2} \ \rightarrow \ \begin{cases} x_5 = 30° \\ x_6 = 150° \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Las soluciones quedan, pues, como:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = k \cdot \dfrac{\pi}{2} = k \cdot 90° \\ \\ x_2 = \dfrac{\pi}{6} + 2k \cdot \pi = 30° + k \cdot 360° \\ \\ x_3 = \dfrac{5\pi}{6} + 2k \cdot \pi = 150° + k \cdot 360° \end{array} \right\} \text{ con } \ k \in \mathbb{Z}$$

donde x_1 engloba las cuatro primeras soluciones.

37 Demuestra las siguientes igualdades:

a) $\boldsymbol{\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - sen^2\, \beta}$

b) $\boldsymbol{sen^2\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right) - sen^2\left(\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right) = sen\, \alpha \cdot sen\, \beta}$

c) $\boldsymbol{\cos^2\left(\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right) - \cos^2\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right) = sen\, \alpha \cdot sen\, \beta}$

a) $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = (\cos \alpha \cos \beta - sen\, \alpha\, sen\, \beta)(\cos \alpha \cos \beta + sen\, \alpha\, sen\, \beta) =$

$$= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - sen^2\, \alpha\, sen^2\, \beta =$$

$$= \cos^2 \alpha\,(1 - sen^2\, \beta) - (1 - \cos^2 \alpha) \cdot sen^2\, \beta =$$

$$= \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha\, sen^2\, \beta - sen^2\, \beta + \cos^2 \alpha\, sen^2\, \beta =$$

$$= \cos^2 \alpha - sen^2\, \beta$$

b) El primer miembro de la igualdad es una diferencia de cuadrados, luego podemos factorizarlo como una suma por una diferencia:

$$\left[sen\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + sen\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\right] \cdot \left[sen\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - sen\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\right] \overset{(*)}{=}$$

$$= \left[2\ sen\, \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}\right] \cdot \left[2 \cos \frac{\alpha}{2}\, sen\, \frac{\beta}{2}\right] =$$

$$= 4 \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}} =$$

$$= \sqrt{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \beta)(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \beta)} =$$

$$= \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \beta)} = \sqrt{sen^2\, \alpha \cdot sen^2\, \beta} = sen\, \alpha\, sen\, \beta$$

(*) Transformamos la suma y la diferencia en productos, teniendo en cuenta que:

$$\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}=\alpha \quad \text{y} \quad \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}=\beta$$

c) Procedemos de manera análoga al apartado anterior, pero ahora:

$$\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}=\alpha \quad \text{y} \quad \frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}=-\beta$$

$$cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$

$$=\left[cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]\cdot\left[cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]=$$

$$=\left[2\,cos\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{-\beta}{2}\right]\cdot\left[-2\,sen\,\frac{\alpha}{2}\,sen\,\frac{-\beta}{2}\right]=\left[2\,cos\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{\beta}{2}\right]\cdot\left[2\,sen\,\frac{\alpha}{2}\,sen\,\frac{\beta}{2}\right]=$$

$$=4\sqrt{\frac{1+cos\,\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1+cos\,\beta}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1-cos\,\beta}{2}}=$$

$$=\sqrt{(1-cos^2\alpha)\,(1-cos^2\beta)}=\sqrt{sen^2\alpha\cdot sen^2\beta}=sen\,\alpha\,sen\,\beta$$

NOTA: También podríamos haberlo resuelto aplicando el apartado anterior como sigue:

$$cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=1-sen^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-1+sen^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$

$$=sen^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-sen^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\overset{(*)}{=}sen\,\alpha\,sen\,\beta$$

(*) Por el apartado b).

38 **Expresa *sen* 4α y *cos* 4α en función de *sen* α y *cos* α.**

- $sen\,4\alpha=sen\,(2\cdot 2\alpha)=2\,sen\,\alpha\,cos\,2\alpha=$

$$=2\cdot 2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha\cdot(cos^2\alpha-sen^2\alpha)=$$

$$=4\,(sen\,\alpha\,cos^3\alpha-sen^3\alpha\,cos\,\alpha)$$

- $cos\,4\alpha=cos\,(2\cdot 2\alpha)=cos^2 2\alpha-sen^2 2\alpha=$

$$=(cos^2\alpha-sen^2\alpha)^2-(2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha)^2=$$

$$=cos^4\alpha+sen^4\alpha-2\,cos^2\alpha\,sen^2\alpha-4\,sen^2\alpha\,cos^2\alpha=$$

$$=cos^4\alpha+sen^4\alpha-6\,sen^2\alpha\,cos^2\alpha$$

39 **Resuelve los sistemas siguientes dando las soluciones correspondientes al primer cuadrante:**

a) $\begin{cases} x+y=120° \\ sen\,x-sen\,y=1/2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} sen^2 x+cos^2 y=1 \\ cos^2 x-sen^2 y=1 \end{cases}$

☛ ***Haz*** $cos^2 y=1-sen^2 y$ ***y*** $cos^2 x=1-sen^2 x$.

c) $\begin{cases} sen\,x+cos\,y=1 \\ x+y=90° \end{cases}$

a) De la segunda ecuación:

$$2 \cos \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}$$

Como:

$x + y = 120° \;\rightarrow\; 2 \cos 60° \operatorname{sen} \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 2 \cdot \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; \operatorname{sen} \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; \dfrac{x-y}{2} = 30° \;\rightarrow\; x - y = 60°$

Así:

$$\begin{array}{l} x + y = 120° \\ \underline{x - y = 60°} \\ 2x \quad = 180° \end{array} \;\rightarrow\; x = 90° \;\rightarrow\; y = 30°$$

Luego la solución es: $(90°, 30°)$

b) Como $\left.\begin{array}{l} \cos^2 y = 1 - \operatorname{sen}^2 y \\ \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x \end{array}\right\}$

El sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}^2 x + 1 - \operatorname{sen}^2 y = 1 \\ 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = 1 \end{array}\right\} \;\rightarrow\; \left.\begin{array}{r} \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = 0 \\ -\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = 0 \end{array}\right\}$$

(Sumando ambas igualdades) $\rightarrow\; -2 \operatorname{sen}^2 y = 0 \;\rightarrow\; \operatorname{sen} y = 0 \;\rightarrow\; y = 0°$

Sustituyendo en la segunda ecuación (por ejemplo) del sistema inicial, se obtiene:

$$\cos^2 x - 0 = 1 \;\rightarrow\; \cos^2 x = 1 \;=\; \begin{cases} \cos x = 1 \;\rightarrow\; x = 0° \\ \cos x = -1 \;\rightarrow\; x = 180° \in 2^{\text{o}} \text{ cuadrante} \end{cases}$$

Luego la solución es: $(0°, 0°)$

c) $x + y = 90° \;\rightarrow$ complementarios $\rightarrow\; \operatorname{sen} x = \cos y$

Sustituyendo en la primera ecuación del sistema:

$\cos y + \cos y = 1 \;\rightarrow\; 2 \cos y = 1 \;\rightarrow\; \cos y = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; y = 60° \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x = 90° - y = 90° - 60° = 30°$

Luego la solución es: $(30°, 60°)$

40 **Demuestra que para cualquier ángulo α se verifica:**

$$\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$

Desarrollamos la segunda parte de la igualdad:

$$\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\alpha\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\alpha\right) =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) = \frac{2}{2}(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) =$$

$$= \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha$$

41 **Demuestra que** $\dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x} - \dfrac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x} = 2\, tg\, 2x$**.**

$$\frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x} - \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x} = \frac{(\cos x + \operatorname{sen} x)^2 - (\cos x - \operatorname{sen} x)^2}{(\cos x - \operatorname{sen} x)^2 - (\cos x + \operatorname{sen} x)^2} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x\cos x - \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x\cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{4\operatorname{sen} x\cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} \overset{(*)}{=} \frac{4 \cdot (\operatorname{sen} x\cos x/\cos^2 x)}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x/\cos^2 x} = \frac{4 \cdot (\operatorname{sen} x/\cos x)}{1 - (\operatorname{sen}^2 x/\cos^2 x)} =$$

$$= \frac{4 \cdot tg\, x}{1 - tg^2 x} = 2 \cdot \frac{2\, tg\, x}{1 - tg^2 x} = 2 \cdot tg\, 2x$$

(*) Dividimos numerador y denominador entre $\cos^2 x$.

42 **Simplifica la expresión** $2\, tg\, x \cos^2 \dfrac{x}{2} - \operatorname{sen} x$**.**

$$2\, tg\, x\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen} x = 2 \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\left(\frac{1 + \cos x}{2}\right) - \operatorname{sen} x =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x(1 + \cos x)}{\cos x} - \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x\left(\frac{1 + \cos x}{\cos x} - 1\right) =$$

$$= \operatorname{sen} x\left(\frac{1 + \cos x - \cos x}{\cos x}\right) = \operatorname{sen} x \cdot \left(\frac{1}{\cos x}\right) = tg\, x$$

Página 145

CUESTIONES TEÓRICAS

43 **¿Qué relación existe entre las razones trigonométricas de los ángulos que miden** $\dfrac{\pi}{5}$ **y** $\dfrac{4\pi}{5}$ **radianes?**

$\dfrac{\pi}{5} + \dfrac{4\pi}{5} = \dfrac{5\pi}{5} = \pi \to$ son suplementarios, luego:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{5} = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = \operatorname{sen}\frac{4\pi}{5}$$

$cos\ \frac{\pi}{5} = -cos\ \frac{4\pi}{5}$; $tg\ \frac{\pi}{5} = -tg\ \frac{4\pi}{5}$

44 **Relaciona estas expresiones con las razones trigonométricas del ángulo α:**

a) $\boldsymbol{sen\ (\pi - \alpha);\ \ cos\ (\pi - \alpha);\ \ tg\ (\pi - \alpha)}$

b) $\boldsymbol{sen\ (\pi + \alpha);\ \ cos\ (\pi + \alpha);\ \ tg\ (\pi + \alpha)}$

c) $\boldsymbol{sen\ (2\pi - \alpha);\ \ cos\ (2\pi - \alpha);\ \ tg\ (2\pi - \alpha)}$

a) $\left\{\begin{array}{l} sen\ (\pi - \alpha) = sen\ \alpha \\ cos\ (\pi - \alpha) = -cos\ \alpha \end{array}\right. \to tg\ (\pi - \alpha) = -tg\ \alpha$

b) $\left\{\begin{array}{l} sen\ (\pi + \alpha) = -sen\ \alpha \\ cos\ (\pi + \alpha) = -cos\ \alpha \end{array}\right. \to tg\ (\pi + \alpha) = tg\ \alpha$

c) $\left\{\begin{array}{l} sen\ (2\pi - \alpha) = -sen\ \alpha \\ cos\ (2\pi - \alpha) = cos\ \alpha \end{array}\right. \to tg\ (2\pi - \alpha) = -tg\ \alpha$

45 **Expresa $\boldsymbol{A(x)}$ en función de $\boldsymbol{sen\ x}$ y $\boldsymbol{cos\ x}$:**

a) $\boldsymbol{A(x) = sen\ (-x) - sen\ (\pi - x)}$

b) $\boldsymbol{A(x) = cos\ (-x) + cos\ (\pi + x)}$

c) $\boldsymbol{A(x) = sen\ (\pi + x) + cos\ (2\pi - x)}$

a) $A(x) = sen\ (-x) - sen\ (\pi - x) = -sen\ x - sen\ x = -2\ sen\ x$

b) $A(x) = cos\ (-x) + cos\ (\pi + x) = cos\ x + (-cos\ x) = 0$

c) $A(x) = sen\ (\pi + x) + cos\ (2\pi - x) = -sen\ x + cos\ x$

46 **Demuestra que si α, β y γ son los tres ángulos de un triángulo, se verifica:**

a) $\boldsymbol{sen\ (\alpha + \beta) - sen\ \gamma = 0}$

b) $\boldsymbol{cos\ (\alpha + \beta) + cos\ \gamma = 0}$

c) $\boldsymbol{tg\ (\alpha + \beta) + tg\ \gamma = 0}$

☛ ***Ten en cuenta que $\alpha + \beta = 180° - \gamma$ y las relaciones que existen entre las razones trigonométricas de los ángulos suplementarios.***

Como en un triángulo $\alpha + \beta + \gamma = 180° \to \alpha + \beta = 180° - \gamma$, entonces:

a) $sen\ (\alpha + \beta) = sen\ (180° - \gamma) = sen\ \gamma \to sen\ (\alpha + \beta) - sen\ \gamma = 0$

b) $cos\ (\alpha + \beta) = cos\ (180° - \gamma) = -cos\ \gamma \to cos\ (\alpha + \beta) + cos\ \gamma = 0$

c) $tg\ (\alpha + \beta) = tg\ (180° - \gamma) = -tg\ \gamma \to tg\ (\alpha + \beta) + tg\ \gamma = 0$

47 **Demuestra que si $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, se verifica:**

$$\boldsymbol{tg\ \alpha + tg\ \beta + tg\ \gamma = tg\ \alpha \cdot tg\ \beta \cdot tg\ \gamma}$$

☛ ***Haz $\alpha + \beta = 180° - \gamma$ y desarrolla $tg\ (\alpha + \beta) = tg\ (180° - \gamma)$.***

Si $\alpha + \beta + \gamma = 180° \ \rightarrow \ \alpha + \beta = 180° - \gamma \ \rightarrow$

$\rightarrow \ tg\ (\alpha + \beta) = tg\ (180° - \gamma) = -tg\ \gamma \ \Rightarrow \ tg\ \gamma = -tg\ (\alpha + \beta)$

Así, sustituyendo:

$$tg\ \alpha + tg\ \beta + tg\ \gamma \overset{(*)}{=} tg\ \alpha + tg\ \beta - tg\ (\alpha + \beta) =$$

$$= tg\ \alpha + tg\ \beta - \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta} =$$

$$= \frac{(tg\ \alpha - tg^2\ \alpha\ tg\ \beta) + (tg\ \beta - tg\ \alpha\ tg^2\ \beta) - (tg\ \alpha + tg\ \beta)}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta} =$$

$$= \frac{-tg^2\ \alpha\ tg\ \beta - tg\ \alpha\ tg^2\ \beta}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta} = \text{(sacando factor común)}$$

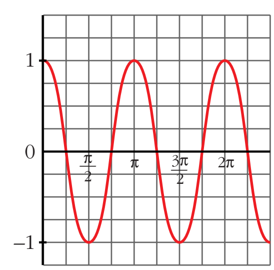
$$= \frac{-tg\ \alpha\ tg\ \beta\ (tg\ \alpha + tg\ \beta)}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta} = -tg\ \alpha \cdot tg\ \beta \cdot tg\ (\alpha + \beta) =$$

$$= tg\ \alpha \cdot tg\ \beta\ [-tg\ (\alpha + \beta)] \overset{(*)}{=} tg\ \alpha \cdot tg\ \beta \cdot tg\ \gamma$$

(*) $tg\ \gamma = -tg\ (\alpha + \beta)$

48 **Haz, con la calculadora, una tabla de valores de la función $y = cos\ 2x$, dando a x valores comprendidos entre 0 y 2π radianes y represéntala gráficamente.**

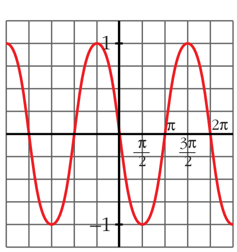
x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{11\pi}{12}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	2π
$y = cos\ 2x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	–1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	–1	0	0



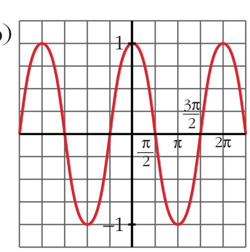
49 **Representa las funciones:**

a) $y = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **b)** $y = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **c)** $y = cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

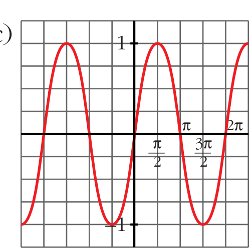
a)



b)



c)



PARA PROFUNDIZAR

50 **Resuelve los sistemas siguientes dando las soluciones correspondientes al primer cuadrante:**

a) $\begin{cases} \boldsymbol{sen\ x + sen\ y = \sqrt{3}} \\ \boldsymbol{cos\ x + cos\ y = 1} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \boldsymbol{sen^2\ x + cos^2\ y = 3/4} \\ \boldsymbol{cos^2\ x - sen^2\ y = 1/4} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \boldsymbol{cos\ (x + y) = 1/2} \\ \boldsymbol{sen\ (x - y) = 1/2} \end{cases}$

a) Despejando en la segunda ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} cos\ x = 1 - cos\ y^{\ (*)} \\ \text{Como}\ \ sen\ x = \sqrt{1 - cos^2\ x} \end{array}\right\}\ \text{entonces:}$$

$$sen\ x = \sqrt{1 - (1 - cos\ y)^2} = \sqrt{1 - 1 - cos^2\ y + 2\ cos\ y} = \sqrt{2\ cos\ y - cos^2\ y}$$

Y, sustituyendo en la primera ecuación, se tiene:

$$sen\ x + sen\ y = \sqrt{3} \ \rightarrow\ \sqrt{2\ cos\ y - cos^2\ y} + sen\ y = \sqrt{3} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ sen\ y = \sqrt{3} - \sqrt{2\ cos\ y - cos^2\ y}$$

Elevamos al cuadrado:

$$sen^2\ y = 3 + (2\ cos\ y - cos^2\ y) - 2\sqrt{3\ (2\ cos\ y - cos^2\ y)}$$

$$sen^2\ y + cos^2\ y - 2\ cos\ y - 3 = -2\sqrt{3\ (2\ cos\ y - cos^2\ y)}$$

$$1 - 2\ cos\ y - 3 = -2\sqrt{3\ (2\ cos\ y - cos^2\ y)}$$

$$-2\ (1 + cos\ y) = -2\sqrt{3\ (2\ cos\ y - cos^2\ y)}$$

Simplificamos y volvemos a elevar al cuadrado:

$$(1 + cos\ y)^2 = 3\ (2\ cos\ y - cos^2\ y)\ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 1 + cos^2\ y + 2\ cos\ y = 6\ cos\ y - 3\ cos^2\ y\ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 4\ cos^2\ y - 4\ cos\ y + 1 = 0\ \rightarrow\ cos\ y = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{1}{2}\ \rightarrow\ y = 60°$$

Sustituyendo en $^{(*)}$, se tiene:

$$cos\ x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ \rightarrow\ x = 60°$$

b) $\left.\begin{array}{l} sen^2\,x + cos^2\,y = \dfrac{3}{4} \\ cos^2\,x - sen^2\,y = \dfrac{1}{4} \end{array}\right\}$ Sumando:

$sen^2\,x + cos^2\,x + cos^2\,y - sen^2\,y = 1 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 1 + cos^2\,y - sen^2\,y = 1 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 2\,cos^2\,y = 1 \;\rightarrow\; cos^2\,y = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; cos\,y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; y = 45°$

(Solo consideramos las soluciones del primer cuadrante).

Sustituyendo en la primera ecuación:

$sen^2\,x + cos^2\,y = \dfrac{3}{4} \;\rightarrow\; sen^2\,x + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; sen^2\,x = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; sen^2\,x = \dfrac{1}{4} \;\rightarrow\; sen\,x = \pm\dfrac{1}{2}$

Nos quedamos con la solución positiva, por tratarse del primer cuadrante. Así:

$$sen\,x = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; x = 30°$$

Luego la solución es: (30°, 45°)

c) $\left.\begin{array}{l} \text{Como } \; x, y \in 1^{\underline{er}} \text{ cuadrante} \\ \text{y además } \; cos\,(x+y) > 0 \\ \qquad\qquad\;\; sen\,(x-y) > 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y \in 1^{\underline{er}} \text{ cuadrante} \\ x - y \in 1^{\underline{er}} \text{ cuadrante} \end{array}\right.$

Teniendo esto en cuenta:

$cos\,(x+y) = \dfrac{1}{2} \quad\rightarrow\quad x + y = 60°$

$sen\,(x-y) = \dfrac{1}{2} \quad\rightarrow\quad x - y = 30°$ (Sumamos ambas ecuaciones)

$$2x = 90° \;\rightarrow\; x = 45°$$

Sustituyendo en la primera ecuación y despejando:

$$y = 60° - x = 60° - 45° = 15°$$

La solución es, por tanto: (45°, 15°)

51 **Demuestra que:**

a) $\boldsymbol{sen\;x = \dfrac{2\,tg\;x/2}{1 + tg^2\;x/2}}$

b) $\boldsymbol{cos\;x = \dfrac{1 - tg^2\;x/2}{1 + tg^2\;x/2}}$

c) $\boldsymbol{tg\;x = \dfrac{2\,tg\;x/2}{1 - tg^2\;x/2}}$

a) Desarrollamos y operamos en el segundo miembro de la igualdad:

$$\frac{2\ tg\ (x/2)}{1 + tg^2\ (x/2)} = \frac{2\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{1 + \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{2\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{\dfrac{1 + \cos x + 1 - \cos x}{1 + \cos x}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{\dfrac{2}{1 + \cos x}} = (1 + \cos x)\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} =$$

$$= \sqrt{(1 + \cos x)^2\ \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \sqrt{(1 + \cos x)\ (1 - \cos x)} =$$

$$= \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{sen^2\ x} = sen\ x$$

b) $$\frac{1 - tg^2\ (x/2)}{1 + tg^2\ (x/2)} = \frac{1 - \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}{1 + \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\dfrac{1 + \cos x - 1 + \cos x}{1 + \cos x}}{\dfrac{1 + \cos x + 1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{2 \cos x}{2} = \cos x$$

c) $$\frac{2\ tg\ (x/2)}{1 - tg^2\ (x/2)} = \frac{2\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{1 - \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{2\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{\dfrac{1 + \cos x - 1 + \cos x}{1 + \cos x}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{\dfrac{2 \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{1 + \cos x}{\cos x}\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} =$$

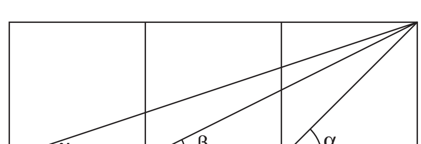
$$= \frac{1}{\cos x} \cdot \quad (1 + \cos x)^2 \cdot \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} =$$

$$= \frac{1}{\cos x}\ \sqrt{(1 + \cos x)\ (1 - \cos x)} = \frac{1}{\cos x}\ \sqrt{(1 - \cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos x} \cdot \sqrt{sen^2\ x} = \frac{1}{\cos x} \cdot sen\ x = tg\ x$$

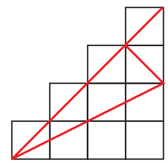
PARA PENSAR UN POCO MÁS

52 **Demuestra que, en la siguiente figura,** $\alpha = \beta + \gamma$**.**



a) Puedes realizar la demostración recurriendo a la fórmula de la tangente de una suma.

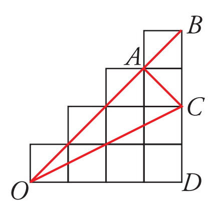
b) Hay una posible demostración, más sencilla y elegante que la anterior, reconociendo los ángulos α, β y γ en la siguiente figura:



a) $\left.\begin{array}{l} tg\,(\beta + \gamma) = \dfrac{tg\,\beta + tg\,\gamma}{1 - tg\,\beta\; tg\,\gamma} = \dfrac{1/2 + 1/3}{1 - 1/2 \cdot 1/3} = \dfrac{5/6}{1 - 1/6} = \dfrac{5/6}{5/6} = 1 \\ tg\,\alpha = 1 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} \text{Así, vemos que } tg\,(\beta + \gamma) = tg\,\alpha \\ \text{Como } \alpha, \beta, \gamma \in 1^{\underline{er}} \text{ cuadrante} \end{array}\right\} \beta + \gamma = \alpha$

b) $\alpha = \widehat{BOD}$. Basta observar que se trata de uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo que se forma con la diagonal de un cuadrado.



$\beta = \widehat{COD}$, por ser el ángulo agudo menor de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden cuatro y dos unidades; igual (por semejanza) al formado por catetos de dos y una unidad.

$\gamma = \widehat{AOC}$, pues, tomando las diagonales de los cuadrados pequeños por unidades, se trata del ángulo menor del triángulo rectángulo de catetos 3 y 1 unidades (OA y AC, respectivamente).

Así, podemos observar fácilmente en el dibujo que $\alpha = \beta + \gamma$, pues:

$$\widehat{BOD} = \widehat{AOD} = \widehat{AOC} + \widehat{COD}$$

53 Obtén la fórmula siguiente:

$$\boldsymbol{sen\,\alpha + cos\,\alpha = \sqrt{2}\;cos\,(\alpha - 45°)}$$

☛ ***Expresa el primer miembro como suma de senos y aplica la fórmula correspondiente.***

$$cos\,\alpha = sen\,(90° - \alpha)$$

Sustituyendo en el primer miembro de la igualdad y desarrollando (transformaremos en producto):

$$\begin{aligned}
sen\ \alpha + cos\ \alpha = sen\ \alpha + sen\ (90° - \alpha) = \\
&= 2\ sen\ \frac{\alpha + (90° - \alpha)}{2}\ cos\ \frac{\alpha - (90° - \alpha)}{2} = \\
&= 2\ sen\ \frac{90°}{2}\ cos\ \frac{2\alpha - 90°}{2} = \\
&= 2\ sen\ 45°\ cos\ (\alpha - 45°) = \\
&= 2\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ (cos\ \alpha - 45°) = \sqrt{2}\ cos\ (\alpha - 45°)
\end{aligned}$$