Ecuaciones trigonométricas resueltas

1.- Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\boldsymbol{sen2x = 0}$

$$sen2x = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x = 0 + 2k\pi \\ 2x = \pi + 2k\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 + k\pi \\ x_2 = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \quad con\ k \in Z$$

b) $\boldsymbol{\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1 \rightarrow \frac{\pi}{3} - x = 0 + 2k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad con\ k \in Z$$

c) $\boldsymbol{sen2x - senx = 0}$

$$sen2x - senx = 0 \rightarrow 2senx\cos x - senx = 0 \rightarrow senx(2\cos x - 1) = 0 \quad por\ tanto: \begin{cases} senx = 0 \\ 2\cos x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet\ Si\ sen\ x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 + 2k\pi \\ x_2 = \pi + 2k\pi \end{cases} \quad con\ k \in Z$$

$$\bullet\ Si\ \ 2\cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_3 = \pi/3 + 2k\pi \\ x_4 = 5\pi/3 + 2k\pi \end{cases} \quad con\ k \in Z$$

d) $\boldsymbol{\cos 2x - sen^2 x - 1 = 0}$

$$\cos 2x - sen^2 x - 1 = 0 \rightarrow \cos^2 x - sen^2 x - sen^2 x - 1 = 0 \rightarrow 1 - sen^2 x - sen^2 x - sen^2 x - 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -3sen^2 x = 0 \rightarrow sen^2 x = 0 \rightarrow senx = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 + 2k\pi \\ x_2 = \pi + 2k\pi \end{cases} \quad con\ k \in Z$$

e) $\boldsymbol{\cos 2x = -1/2}$

$$\cos 2x = -1/2 \rightarrow \begin{cases} 2x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x_2 = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad conk \in Z$$

f) $\boldsymbol{senx - \cos x = 0}$

$senx - \cos x = 0 \rightarrow senx = \cos x$; *es decir busco aquellos ángulos donde el seno y el coseno tienen el mismo valor. Esto sólo pasa en 45º y en 225º.*

Por tanto, pasando a radianes : $x_1 = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\ ;\ x_2 = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi \quad con\ k \in Z.$

g) $\boldsymbol{sen2x + \cos x = 0}$

$sen2x + \cos x = 0 \rightarrow 2senx\cos x + \cos x = 0 \rightarrow \cos x(2senx + 1) = 0$ por tanto $\begin{cases} \cos x = 0 \\ 2senx + 1 = 0 \end{cases}$

- $\cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in Z$
- $2senx + 1 = 0 \rightarrow senx = \dfrac{-1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_3 = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ x_4 = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in Z$

h) $\boldsymbol{tgx + 2senx = 0}$

$tgx + 2senx = 0 \rightarrow \dfrac{senx}{\cos x} + 2senx = 0 \rightarrow \dfrac{senx + 2senx\cos x}{\cos x} = 0 \rightarrow senx + 2senx\cos x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow senx(1 + 2\cos x) = 0$ por tanto $\begin{cases} senx = 0 \\ 1 + 2\cos x = 0 \end{cases}$

- $senx = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 + 2k\pi \\ x_2 = \pi + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in Z$
- $1 + 2\cos x = 0 \rightarrow \cos x = \dfrac{-1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_3 = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x_4 = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in Z$

i) $\boldsymbol{\cos^2 x = 3sen^2 x}$

$\cos^2 x = 3sen^2 x \rightarrow 1 - sen^2 x = 3sen^2 x \rightarrow 4sen^2 x = 1 \rightarrow sen^2 x = \dfrac{1}{4} \rightarrow sen\,x = \pm\dfrac{1}{2}$

Por tanto :

- $senx = \dfrac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in Z$
- $senx = -\dfrac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_3 = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ x_4 = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in Z$

j) $\boldsymbol{\cos 2x = 1 + 4senx}$

$\cos 2x = 1 + 4sen\,x = 0 \rightarrow \cos^2 x - sen^2 x = 1 + 4senx \rightarrow 1 - sen^2 x - sen^2 x = 1 + 4senx \rightarrow$

$\rightarrow 2\,sen^2 x + 4\,sen\,x = 0 \rightarrow sen^2 x + 2\,sen\,x = 0 \rightarrow sen\,x(sen\,x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} sen\,x = 0 \\ sen\,x + 2 = 0 \end{cases}$

- $senx = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 + 2k\pi \\ x_2 = \pi + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in Z$
- $senx + 2 = 0 \rightarrow senx = -2 \rightarrow$ *No tiene solución pues el seno solo puede tomar valores comprendidos entre -1 y 1.*

k) $\boldsymbol{\cos 5x - \cos x = 0}$

$$\cos 5x - \cos x = 0 \rightarrow -2sen\frac{5x+x}{2}\cdot sen\frac{5x-x}{2} = 0 \rightarrow -2sen3x\cdot sen2x = 0 \rightarrow \begin{cases} sen3x = 0 \\ sen2x = 0 \end{cases}$$

- $sen3x = 0 \rightarrow \begin{cases} 3x_1 = 0 + 2k\pi \\ 3x_2 = \pi + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in Z \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 + \dfrac{2k\pi}{3} \\ x_2 = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases}$ con $k \in Z$
- $sen2x = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x_3 = 0 + 2k\pi \\ 2x_4 = \pi + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in Z \rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 + k\pi \\ x_2 = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$ con $k \in Z$

l) $\boldsymbol{2tg^2 x - 3tg\,x + 1 = 0}$

$2tg^2 x - 3tg\,x + 1 = 0 \rightarrow$ *Podemos resolver la ecuación de segundo grado* $\rightarrow$

$$tg\,x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \rightarrow tg\,x = \frac{3\pm 1}{4} \rightarrow \begin{cases} tg\,x = 1 \\ tg\,x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- $tg\,x = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x_2 = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in Z$
- $tg\,x = \dfrac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_3 = 26.565^o + 360k^o \\ x_4 = 180^o + 26.565^o + 360k^o \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_3 = 26.565^o + 360k^o \\ x_4 = 206.565^o + 360k^o \end{cases}$ con $k \in Z$

(Ayudándonos de la calculadora)

2.- Hallar las soluciones de las siguientes ecuaciones en el intervalo $[0,2\pi)$.

a) $\boldsymbol{\cos 2x = 1 + 4senx}$

$$\cos 2x = 1 + 4senx \rightarrow \cos^2 x - sen^2 x = 1 + 4senx \rightarrow 1 - sen^2 x - sen^2 x = 1 + 4senx \rightarrow$$

$$\rightarrow 2sen^2 x + 4senx = 0 \rightarrow 2senx(senx+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2senx = 0 \\ senx + 2 = 0 \end{cases}$$

- $2senx = 0 \rightarrow senx = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \pi \end{cases}$
- $senx + 2 = 0 \rightarrow senx = -2 \rightarrow$ *No tiene solución pues el valor del seno está comprendido entre -1 y 1.*

b) $\boldsymbol{4sen^2 x = 3}$

$$4sen^2 x = 3 \rightarrow sen^2 x = \frac{3}{4} \rightarrow senx = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- $senx = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{3} \\ x_2 = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$
- $senx = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_3 = \dfrac{4\pi}{3} \\ x_4 = \dfrac{5\pi}{3} \end{cases}$

c) $\boldsymbol{sen^2 x + \cos x - 1 = 0}$

$sen^2 x + \cos x - 1 = 0 \rightarrow 1 - \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x(\cos x - 1) = 0$

- $senx = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{2} \\ x_2 = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$
- $\cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = 1 \rightarrow x_3 = 0$

d) $\boldsymbol{sen^2 x + senx - 6 = 0}$

$sen^2 x + senx - 6 = 0 \rightarrow$ *La resuelvo como una ecuación de segundo grado donde* $senx = z$

Por tanto $z^2 + z - 6 = 0 \rightarrow z = \frac{-1 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 2 \\ z_2 = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} senx = 2 \\ senx = -3 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow$ *ambas ecuaciones no tienen solución.*

e) $\boldsymbol{2\left(\cos^2 x - sen^2 x\right) = 1}$

$2\left(\cos^2 x - sen^2 x\right) = 1 \rightarrow 2\left(1 - sen^2 x - sen^2 x\right) = 1 \rightarrow 2\left(1 - 2sen^2 x\right) = 1 \rightarrow 2 - 4sen^2 x = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 4sen^2 x = 1 \rightarrow sen^2 x = \frac{1}{4} \rightarrow senx = \pm\frac{1}{2}$

- $senx = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} \\ x_2 = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$
- $senx = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7\pi}{6} \\ x_2 = \frac{11\pi}{6} \end{cases}$

f) $\boldsymbol{\cos x + \cos 3x = 0}$

$\cos x + \cos 3x = 0$; *aplico que* $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ *y obtenemos :*

$2\cos 2x \cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 2x = 0 \end{cases}$

- $\cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{2} \\ x_2 = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$
- $\cos 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases}$

con lo que restringiéndonos a ángulos del intervalo $[0, 2\pi)$ *obtenemos las soluciones :*

$x_3 = \frac{\pi}{4}; x_4 = \frac{5\pi}{4}; x_5 = \frac{3\pi}{4}; x_6 = \frac{7\pi}{4}$