Proyecto MaTEX

Razones Trigonométricas I

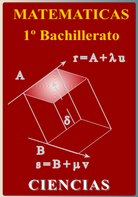
Fco Javier González Ortiz

Directorio

- Tabla de Contenido
- Inicio Artículo

D.L.:SA-1415-2004

ISBN: 84-688-8267-4



MaTEX

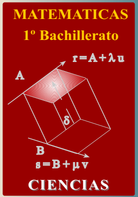
TRIGONOMETRÍA I

Tabla de Contenido

1. **Ángulos**
   1.1. **Ángulo sexagesimal**
   1.2. **Radianes**
2. **Razones trigonométricas**
   2.1. **Razones trigonométricas de $30°$,$45°$ y $60°$**
   • Razones de 45^o • Razones de 30^o y 60^o
   2.2. **Fórmula fundamental de trigonometría**
3. **Ampliación de las razones trigonométricas**
   3.1. **Razones de 0^o, 90^o, 180^o y 270^o**
   3.2. **Razones de ángulos complementarios**
   3.3. **Reducción de razones al 1º cuadrante**
   • Para ángulos suplementarios • Para ángulos que se diferencian en $180^0(\pi)$ • Para ángulos opuestos
   3.4. **Resumen**
4. **Identidades trigonométricas básicas**

Soluciones a los Ejercicios

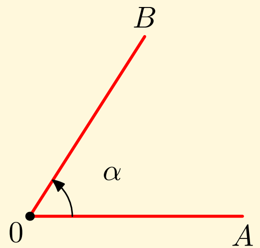
Soluciones a los Tests



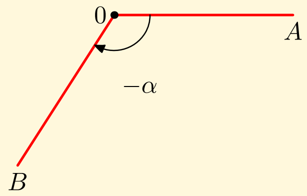
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

1. Ángulos

Los ángulos se forman siempre que dos segmentos se unen.
Los dos segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ de la figura, que se unen en el punto O, determinan el ángulo $\angle AOB$.
La flecha curva en esta figura sugiere que el ángulo se mide desde segmento $\overline{OA}$, el lado inicial del ángulo, al lado final $\overline{OB}$.

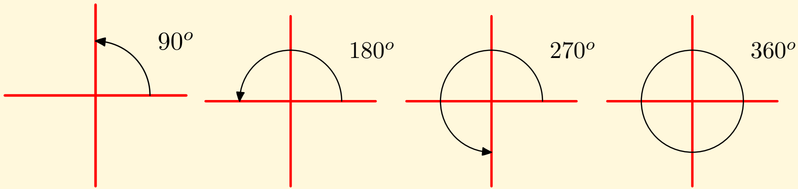


El punto O se llama el vértice de $\angle AOB$.
La orientación de la flecha curva se toma positiva cuando el giro es contrario a las agujas del reloj.
El giro en sentido del reloj se considera como ángulo negativo.



1.1. Ángulo sexagesimal

Se necesita dar una medida a los ángulos. Desde la época de los babilonios se toma una revolución completa como 360° grados sexagesimales.



Quedando dividida una revolución completa en cuatro cuadrantes de 90°. Cada **grado** es igual a 60′ minutos y cada **minuto** es igual a 60″ **segundos**.

$$\begin{array}{ccll} 1^\circ & = & 60' & \text{minutos} \\ 1' & = & 60'' & \text{segundos} \end{array}$$

Ejemplo 1.1. Expresar en grados minutos y segundos $34{,}2577^o$.

Solución: Tenemos 34°, con

$$0{,}2577^\circ \times 60 = 15{,}462'$$

y

$$0{,}463' \times 60 = 27{,}462''$$

luego $34{,}2577^\circ \simeq 34^\circ, 15' \, 27''$ □

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejemplo 1.2. Expresar en grados $80^\circ\, 12'\, 30''$.

Solución: Se convierten los minutos y los segundos a grados

$$80 + \frac{12}{60} + \frac{30}{3600} = 80,20833^\circ$$

□

Ejemplo 1.3. Expresar en grados $120'$ minutos.

Solución: Se convierten los minutos a grados

$$\frac{120'}{60} = 2^\circ$$

□

Ejemplo 1.4. Expresar en grados , minutos y segundos $60{,}5^\circ$.

Solución: Tenemos 60°, con

$$0{,}5^\circ \times 60 = 30'$$

luego $60{,}5^\circ = 60^\circ\, 30'\, 0''$ □

Ejemplo 1.5. Expresar en minutos $120''$ segundos.

Solución: Se convierten los segundos a minutos

$$\frac{120''}{60} = 2'$$

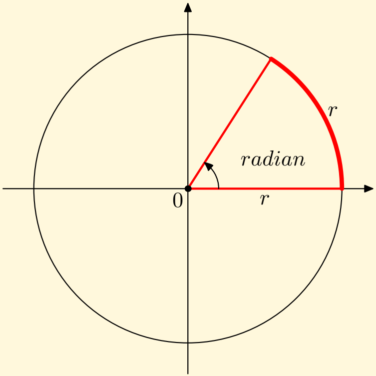
□

1.2. Radianes

Se define radián como el ángulo con centro en O que abarca un radio. Como un ángulo de $360°$ abarca un arco de circunferencia de $2\pi r$, la tabla muestra la equivalencia entre arcos, grados sexagesimales y radianes.

$$\text{Arco} = \text{ángulo} \times \text{radio}$$

arco	grados sex.	radianes
$2\pi r$	$360°$	2π
r	$\dfrac{180°}{\pi}$	1
$\dfrac{2\pi r}{360}$	$1°$	$\dfrac{\pi}{180}$



$$1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados}$$
$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ radianes}$$

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejemplo 1.6. Expresar en radianes los grados $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$.

Solución: Como $1^\circ \equiv \dfrac{\pi}{180}$,

$$90^\circ = 90^\circ \,\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{2} \qquad 180^\circ = 180^\circ \,\frac{\pi}{180} = \pi$$

$$270^\circ = 270^\circ \,\frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{2} \qquad 360^o = 360^\circ \,\frac{\pi}{180} = 2\pi$$

$\square$

Ejemplo 1.7. Expresar en grados los radianes $\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{6}$.

Solución: Como $\pi \equiv 180^\circ$,

$$\frac{\pi}{3} = \frac{180}{3} = 60^\circ \qquad \frac{2\pi}{3} = \frac{2\,180}{3} = 120^\circ$$

$$\frac{3\pi}{4} = \frac{3\,180}{4} = 135^\circ \qquad \frac{5\pi}{6} = \frac{5\,180}{3} = 150^\circ$$

$\square$

Ejercicio 1. Expresar en grados los siguientes radianes:

a) $\dfrac{\pi}{4}$ *b*) $\dfrac{2\pi}{3}$ *c*) $\dfrac{3\pi}{2}$ *d*) $\dfrac{3\pi}{4}$

Ejercicio 2. Expresar en radianes los siguientes ángulos en grados:

a) 30° *b*) 45° *c*) 120° *d*) 330°

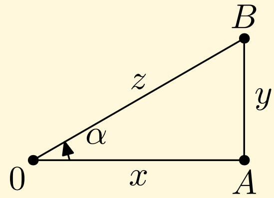
2. Razones trigonométricas

En un triángulo rectángulo de catetos x, y e hipotenusa z se definen las razones trigonométricas del ángulo α, seno, coseno y tangente como:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}} = \frac{AB}{OB} = \frac{y}{z}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\textit{hipotenusa}} = \frac{0A}{OB} = \frac{x}{z}$$

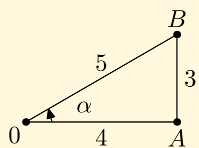
$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{AB}{OA} = \frac{y}{x}$$

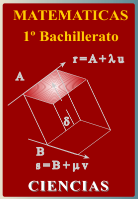


A partir de ellas se definen las inversas: cosecante, secante y cotangente:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{z}{y} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{z}{x} \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{x}{y}$$

Ejercicio 3. Hallar las razones del ángulo α en el triángulo





MaTEX

TRIGONO-METRÍA I

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

2.1. Razones trigonométricas de $30°$,$45°$ y $60°$

- **Razones de** 45^o

Para obtener las razones de $45°$ construimos un triángulo rectángulo ABC de catetos iguales

$$AB = AC = 1$$

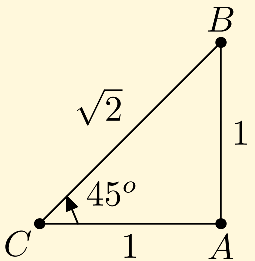
e hipotenusa

$$BC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Los ángulos son

$$\widehat{A} = 90^o \quad \widehat{B} = \widehat{C} = 45^o$$

Se tiene así, que



$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen} 45^o &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 45^o &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tan 45^o &= 1 \end{aligned}} \tag{1}$$

- **Razones de 30^o y 60^o**

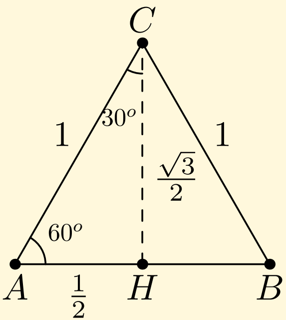
Para obtener las razones de 30^o y 60^o partimos de un triángulo equilátero ABC de lado

$$AB = AC = BC = 1$$

Al trazar la altura CH se obtiene el triángulo rectángulo AHC de lados

$$AH = \frac{1}{2} \quad AC = 1 \quad CH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

con los ángulos $\widehat{A} = 60^o$, $\widehat{C} = 30^o$. Se tiene así, que



$$\operatorname{sen} 30^o = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2} \quad \cos 30^o = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan 30^o = \frac{AH}{CH} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Análogamente

$$\operatorname{sen} 60^o = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 60^o = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2} \quad \tan 60^o = \frac{CH}{AH} = \sqrt{3}$$

Es conveniente aprenderse las razones trigonométricas de 30^o,45^o y 60^o. Por ello, las resumimos en la siguiente tabla para memorizarlas.

	30^o	45^o	60^o
sen	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$
tan	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Para las razones $\operatorname{cosec}\alpha$, $\sec\alpha$ y $\cot\alpha$, simplemente basta hacer los inversos.

A continuación se proponen dos test para comprobar si el alumno las ha memorizado.

Inicio del Test Indicar el valor de las razones siguientes:

1. El valor de $\operatorname{sen} 30^o$ es:

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$

2. El valor de $\cos 30^o$ es:

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$

3. El valor de $\tan 30^o$ es:

(a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$

4. El valor de $\operatorname{sen} 60^o$ es:

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$

5. El valor de $\cos 60^o$ es:

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$

6. El valor de $\tan 60^o$ es:

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$

Final del Test Puntos:

Inicio del Test Indicar el valor de las razones siguientes:

1. El valor de $\tan 60^o$ es:

(a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\dfrac{1}{2}$ (c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$

2. El valor de $\tan 45^o$ es:

(a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\dfrac{1}{2}$ (c) 1 (d) $\sqrt{3}$

3. El valor de $\operatorname{sen} 45^o$ es:

(a) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (b) $\dfrac{1}{2}$ (c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$

4. El valor de $\sec 60^o$ es:

(a) 2 (b) $\dfrac{1}{2}$ (c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$

5. El valor de $\operatorname{cosec} 30^o$ es:

(a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (b) 2 (c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$

6. El valor de $\sec 30^o$ es:

(a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (b) 2 (c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Final del Test Puntos:

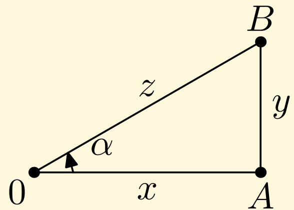
2.2. Fórmula fundamental de trigonometría

A partir de un triángulo rectángulo de catetos x, y e hipotenusa z, el teorema de Pitágoras y la definición dada de las razones trigonométricas del ángulo α, se obtiene la fórmula fundamental de la trigonometría

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Dividiendo por z^2 se tiene

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1$$



teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{y}{z}$ y que $\cos\alpha = \dfrac{x}{z}$, sustituyendo se obtiene

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (2)}$$

Dividiendo ambos miembros por $\cos^2\alpha$ se obtiene otra relación

$$\boxed{1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha \qquad (3)}$$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

3. Ampliación de las razones trigonométricas

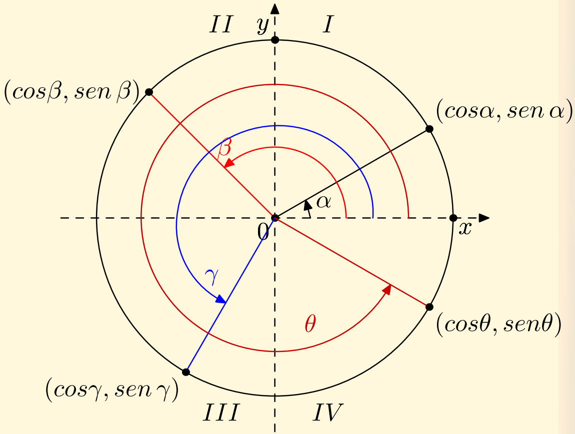
Si comparas la circunferencia de centro O y radio 1 de ecuación

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$$

se ve que todo punto $P(x, y)$ de la circunferencia se puede escribir como $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ para algún ángulo α.

Los ángulos se miden desde el eje Ox en sentido contrario a las agujas del reloj.

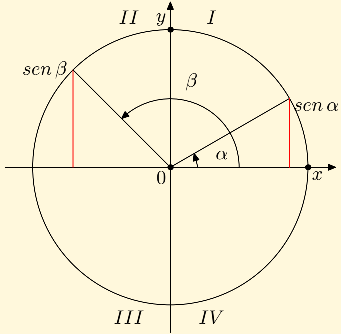
Al dar una revolución completa se recorren todos los puntos de la circunferencia unidad.

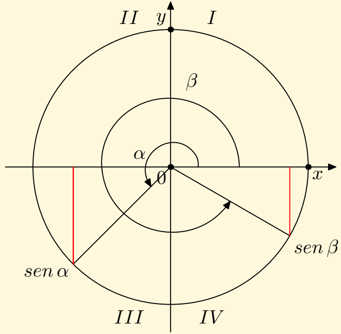


De esta forma definimos las razones para los ángulos que no son agudos.

El seno de los ángulos que están en los cuadrantes I y II, al estar en la parte positiva del eje Oy es positivo. Es decir si

$$0 < \alpha < \pi \Longrightarrow \operatorname{sen} \alpha > 0$$



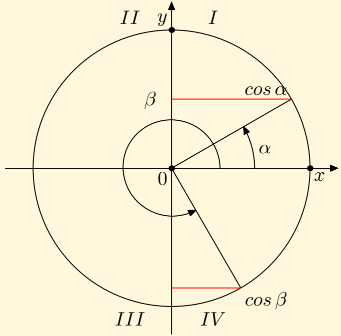


El seno del ángulo que está en los cuadrantes III y IV, al estar en la parte negativa del eje Oy es negativo. Es decir si

$$\pi < \alpha < 2\pi \Longrightarrow \operatorname{sen} \alpha < 0$$

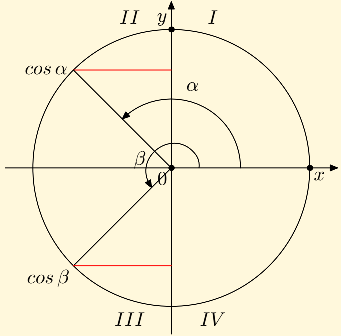
El coseno del ángulo que está en los cuadrantes I y IV, al estar en la parte positiva del eje Ox es positivo. Es decir si

$$\alpha \in I, IV \Longrightarrow \cos\alpha > 0$$



El coseno del ángulo que está en los cuadrantes II y III, al estar en la parte negativa del eje Ox es negativo. Es decir si

$$\alpha \in II, III \Longrightarrow \cos\alpha < 0$$



Inicio del Test Indicar el signo de las razones en los cuadrantes:

1. El signo del seno en el II cuadrante es:

(a) positivo (b) negativo

2. El signo del seno en el III cuadrante es:

(a) positivo (b) negativo

3. El signo del coseno en el II cuadrante es:

(a) positivo (b) negativo

4. El signo del coseno en el IV cuadrante es:

(a) positivo (b) negativo

5. El signo de la tangente en el II cuadrante es:

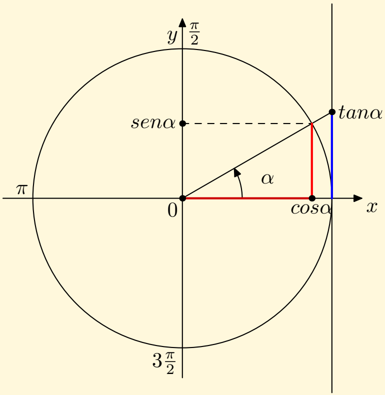
(a) positivo (b) negativo

Final del Test Puntos:

3.1. Razones de 0º, 90º, 180º y 270º

A medida que nos desplazamos por el circulo unidad, se obtienen las razones:

	0°	90°	180°	270°
sen	0	1	0	-1
cos	1	0	-1	0
tan	0	$\nexists$	0	$\nexists$



El símbolo $\nexists$ significa que no está definida o no existe. Para las razones $\operatorname{cosec}\alpha$, $\sec\alpha$ y $\cot\alpha$, simplemente basta hacer los inversos.

A continuación se proponen dos test para comprobar si el alumno las ha memorizado.

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Inicio del Test Indicar el valor de las razones siguientes:

1. El valor de $\operatorname{sen} 180^o$ es:

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) $\nexists$

2. El valor de $\cos 180^o$ es:

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) $\nexists$

3. El valor de $\tan 180^o$ es:

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) $\nexists$

4. El valor de $\cos 270^o$ es:

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) $\nexists$

5. El valor de $\tan 270^o$ es:

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) $\nexists$

6. El valor de $\cos 90^o$ es:

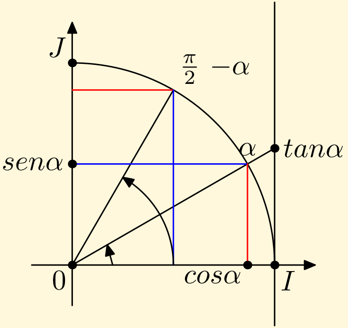
(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) $\nexists$

Final del Test Puntos:

3.2. Razones de ángulos complementarios

En el círculo unidad, de la figura se representa un ángulo α así como su complementario $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$.

Al ser los ángulos complementarios se observa que el seno de uno de ellos es el coseno del otro y recíprocamente, por ello:



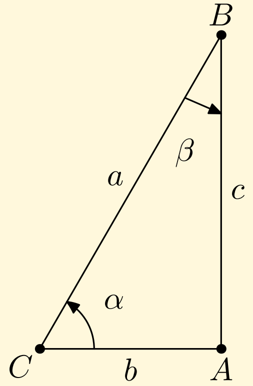
$$
\begin{array}{ll}
\operatorname{sen}(\dfrac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha & \operatorname{cosec}(\dfrac{\pi}{2} - \alpha) = \sec\alpha \\
\cos(\dfrac{\pi}{2} - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha & \sec(\dfrac{\pi}{2} - \alpha) = \operatorname{cosec}\alpha \\
\tan(\dfrac{\pi}{2} - \alpha) = \cot\alpha & \cot(\dfrac{\pi}{2} - \alpha) = \tan\alpha
\end{array}
\qquad (4)
$$

Las razones de ángulos complementarios, se ven fácilmente en un triángulo rectángulo $\triangle CAB$, ya que para los ángulos agudos se tiene

$$\alpha + \beta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

De la definición de las razones se comprueban las relaciones anteriores con

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$



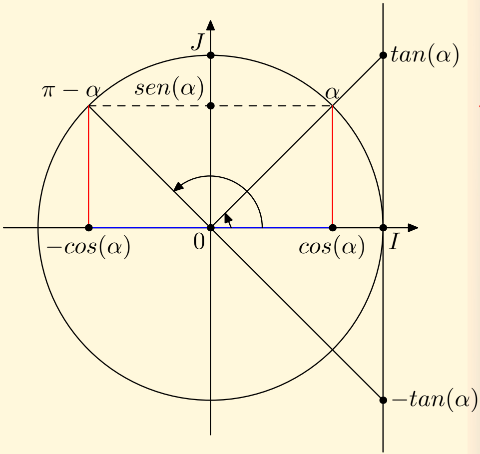
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{c}{a} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{a} \qquad \tan\alpha = \frac{c}{b}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{a} \qquad \cos\beta = \frac{c}{a} \qquad \tan\beta = \frac{b}{c}$$

3.3. Reducción de razones al 1º cuadrante

- **Para ángulos suplementarios**

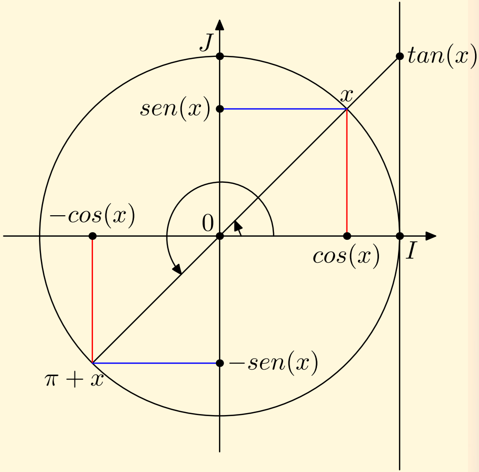
Sobre el círculo unidad, en la figura se representa el ángulo α así como su suplementario $\pi - \alpha$.
Se observa que el seno de ambos coincide en valor y signo, y el coseno y la tangente son de signo contrario



$$
\begin{array}{ll}
\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{cosec}(\pi - \alpha) = \operatorname{cosec}\alpha \\
\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha & \sec(\pi - \alpha) = -\sec\alpha \\
\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha & \cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha
\end{array}
\qquad (5)
$$

- **Para ángulos que se diferencian en** $180^0 (\pi)$

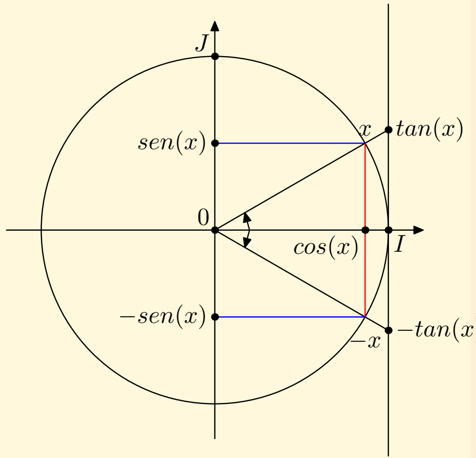
Sobre el círculo unidad, en la figura se representa el ángulo α así como el ángulo $\pi + \alpha$.
Se observa que el seno y el coseno cambian de signo y la tangente lo mantiene.



$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\pi+\alpha) &= -\operatorname{sen}\alpha & \qquad \operatorname{cosec}(\pi-\alpha) &= -\operatorname{cosec}\alpha \\
\cos(\pi+\alpha) &= -\cos\alpha & \qquad \sec(\pi-\alpha) &= -\sec\alpha \\
\tan(\pi+\alpha) &= \tan\alpha & \qquad \cot(\pi-\alpha) &= \cot\alpha
\end{aligned}
\tag{6}
$$

- **Para ángulos opuestos**

Sobre el círculo unidad, en la figura se representa el ángulo α así como su ángulo opuesto $2\,\pi - \alpha = -\alpha$. Se observa que el coseno de ambos coincide en valor y signo, y el seno y la tangente son de signo contrario.

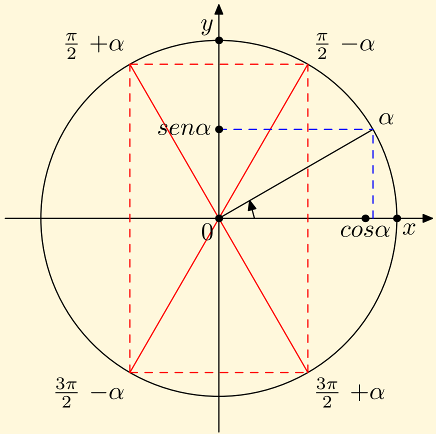


$$
\begin{array}{ll}
\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha & \operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha \\
\cos(-\alpha) = \cos\alpha & \sec(-\alpha) = \sec\alpha \\
\tan(-\alpha) = -\tan\alpha & \cot(-\alpha) = -\cot\alpha
\end{array}
\tag{7}
$$

3.4. Resumen

Las razones de los ángulos en rojo en función de $\dfrac{\pi}{2}$ o $\dfrac{3\pi}{2}$, se relacionan con las razones de α de la siguiente forma

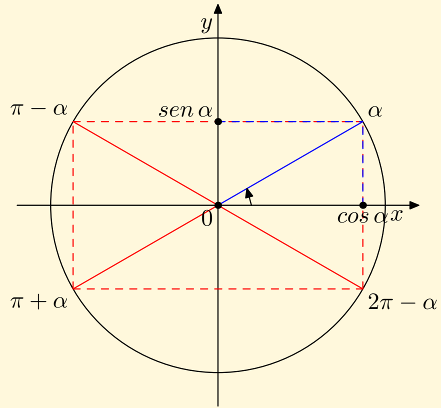
$$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$$
$$\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$$



cambian el seno por el coseno y recíprocamente. El signo es el del cuadrante.

Las razones de los ángulos en rojo en función de π o 2π, se relacionan con las razones de α de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\pi-\alpha) &= \operatorname{sen}\alpha \\
\operatorname{sen}(\pi+\alpha) &= -\operatorname{sen}\alpha \\
\operatorname{sen}(2\pi-\alpha) &= -\operatorname{sen}\alpha \\
\cos(\pi-\alpha) &= -\cos\alpha \\
\cos(\pi+\alpha) &= -\cos\alpha \\
\cos(2\pi-\alpha) &= \cos\alpha
\end{aligned}
$$



Ahora, las razones se conservan. El signo es el del cuadrante.

EJERCICIO 4. Calcular las siguientes razones trigonométricas:

(a) $\operatorname{sen} 120^\circ$ (b) $\cos 135^\circ$ (c) $\tan 210^\circ$

Ejemplo 3.1. Aplicamos la regla anterior para reducir las siguientes razones trigonométricas en función de $\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \pi$ o 2π.

Solución:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-\alpha) &= \cos\alpha &\lhd&\quad \text{cambia y sen I cuadrante} > 0\\
\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+\alpha) &= \cos\alpha &\lhd&\quad \text{cambia y sen II cuadrante} > 0\\
\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha) &= -\operatorname{sen}\alpha &\lhd&\quad \text{cambia y cos III cuadrante} < 0\\
\cos(\pi+\alpha) &= -\cos\alpha &\lhd&\quad \text{se conserva y cos III cuadrante} < 0\\
\operatorname{sen}(\pi+\alpha) &= -\operatorname{sen}\alpha &\lhd&\quad \text{se conserva y sen III cuadrante} < 0\\
\tan(\pi+\alpha) &= \tan\alpha &\lhd&\quad \text{se conserva y tan III cuadrante} > 0\\
\tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha) &= \cot\alpha &\lhd&\quad \text{cambia y tan III cuadrante} > 0\\
\cos(2\pi-\alpha) &= \cos\alpha &\lhd&\quad \text{se conserva y cos IV cuadrante} > 0
\end{aligned}$$

□

Inicio del Test Indicar el valor de las razones siguientes:

1. El valor de $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ es:

(a) $\operatorname{sen}\alpha$ (b) $-\operatorname{sen}\alpha$ (c) $\cos\alpha$ (d) $-\cos\alpha$

2. El valor de $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)$ es:

(a) $\operatorname{sen}\alpha$ (b) $-\operatorname{sen}\alpha$ (c) $\cos\alpha$ (d) $-\cos\alpha$

3. El valor de $\operatorname{sen}(\pi - \alpha)$ es:

(a) $\operatorname{sen}\alpha$ (b) $-\operatorname{sen}\alpha$ (c) $\cos\alpha$ (d) $-\cos\alpha$

4. El valor de $\cos(\pi - \alpha)$ es:

(a) $\operatorname{sen}\alpha$ (b) $-\operatorname{sen}\alpha$ (c) $\cos\alpha$ (d) $-\cos\alpha$

5. El valor de $\cos(\pi + \alpha)$ es:

(a) $\operatorname{sen}\alpha$ (b) $-\operatorname{sen}\alpha$ (c) $\cos\alpha$ (d) $-\cos\alpha$

Final del Test Puntos:

Inicio del Test Indicar el valor de las razones siguientes:

1. El valor de $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ es:

(a) $\operatorname{sen}\alpha$ (b) $-\operatorname{sen}\alpha$ (c) $\cos\alpha$ (d) $-\cos\alpha$

2. El valor de $\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$ es:

(a) $\operatorname{sen}\alpha$ (b) $-\operatorname{sen}\alpha$ (c) $\cos\alpha$ (d) $-\cos\alpha$

3. El valor de $\tan(\pi - \alpha)$ es:

(a) $\tan\alpha$ (b) $-\tan\alpha$ (c) $\cot\alpha$ (d) $-\cot\alpha$

4. El valor de $\tan(\pi + \alpha)$ es:

(a) $\tan\alpha$ (b) $-\tan\alpha$ (c) $\cot\alpha$ (d) $-\cot\alpha$

5. El valor de $\tan(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ es:

(a) $\tan\alpha$ (b) $-\tan\alpha$ (c) $\cot\alpha$ (d) $-\cot\alpha$

Final del Test Puntos:

Ejemplo 3.2. Reducir al primer cuadrante las razones

$$\operatorname{sen} 150^\circ \quad \cos 240^\circ \quad \cos 100^\circ \quad \tan 300^\circ \quad \tan 120^\circ$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 150^\circ &= \operatorname{sen}(180^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\cos 240^\circ &= \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2} \\
\cos 100^\circ &= \cos(90^\circ + 10^\circ) = -\operatorname{sen} 10^\circ \\
\tan 300^\circ &= \tan(360^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3} \\
\tan 120^\circ &= \tan(90^\circ + 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 5. Reducir al primer cuadrante las razones:

a) $\sec 225^\circ$ *b*) $\cos 300^\circ$ *c*) $\operatorname{sen} 240^\circ$

Ejercicio 6. Reducir al primer cuadrante las razones:

a) $\operatorname{sen} 1500^\circ$ *b*) $\cos 2745^\circ$ *c*) $\tan 2010^\circ$

Ejercicio 7. Reducir al primer cuadrante las razones:

a) $\tan \frac{61\,\pi}{3}$ *b*) $\cos \frac{37\,\pi}{6}$ *c*) $\tan(-\frac{7\,\pi}{3})$

4. Identidades trigonométricas básicas

A partir de la identidad fundamental

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

se observa que conocido el seno o el coseno de un ángulo podemos hallar las demás razones trigonométricas.

Ejemplo 4.1. Si $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{7}$ y α está en el segundo cuadrante, calcula las demás razones trigonométricas de α

Solución: Como

$$\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - (\frac{3}{7})^2 = \frac{40}{49} \qquad \cos\alpha = \pm\frac{2\sqrt{10}}{7}$$

Al estar α en el segundo cuadrante

$$\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{10}}{7} \qquad \tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{3\sqrt{10}}{20}$$

□

Ejemplo 4.2. Calcula las razones trigonométricas de un ángulo del cuarto cuadrante si $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$

Solución: Como

$$\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - (\frac{3}{5})^2 = \frac{16}{25} \quad \operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{4}{5}$$

Al estar α en el cuarto cuadrante

$$\operatorname{sen} \alpha = -\frac{4}{5} \qquad \tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{4}{3}$$

$\square$

Ahora intenta demostrar con el siguiente ejercicio otra identidad importante

Ejercicio 8. A partir de la fórmula fundamental, demuestra la siguiente identidad

$$\boxed{\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha}$$

(Divide por $\cos^2 \alpha$)

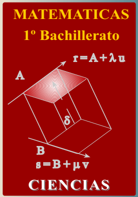
Ejemplo 4.3. Calcula las razones trigonométricas de un ángulo del tercer cuadrante si $\tan \alpha = \dfrac{4}{3}$

Solución: $\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + (\frac{4}{3})^2 = \dfrac{25}{9} \quad \sec \alpha = \pm \dfrac{5}{3}$
Al estar α en el tercer cuadrante

$$\sec \alpha = -\frac{5}{3} \qquad \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$\square$



Ejercicio 9. Calcula las razones trigonométricas de un ángulo del segundo cuadrante si $\cot\alpha = -\dfrac{3}{4}$

Ejercicio 10. Calcula las razones trigonométricas de un ángulo del cuarto cuadrante si $\tan\alpha = -\sqrt{2}$

Ejercicio 11. Simplifica las expresiones:

a) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha}$

b) $\dfrac{\cos(\pi+\alpha) - \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2}+\alpha) + \cos(\pi-\alpha)}$

Ejercicio 12. Simplifica las expresiones:

a) $\operatorname{sen}^4\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha\,\cos^2\alpha$

b) $\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\cos\alpha}$

Ejercicio 13. Simplifica las expresiones:

a) $\dfrac{\operatorname{sen}(\pi+\alpha)\,\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\cot(\pi+\alpha)}$

b) $\dfrac{\operatorname{sen}(\pi+\alpha)\,\cos(\pi-\alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)\,\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$

Doc Doc
Volver Cerrar

Ejercicio 14. Demostrar las siguientes identidades:

(a) $\dfrac{\sec^2\alpha}{\cot\alpha}(1-\operatorname{sen}^2\alpha)\ \operatorname{cosec}^2\alpha = \dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha}$

(b) $\dfrac{\cos^4\alpha-\operatorname{sen}^4\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha} = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{\tan\alpha}$

(c) $\cot^4\alpha\ \cos^2\alpha - \cot^2\alpha = -\cos^2\alpha$

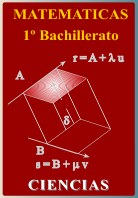
(d) $(1-\operatorname{sen}^2\alpha)\dfrac{1}{\cos\alpha}\,\dfrac{1+\cos^2\alpha}{2-\operatorname{sen}^2\alpha}\tan\alpha = \operatorname{sen}\alpha$

(e) $(1+\tan\alpha)\ (1+\cot\alpha) = \dfrac{(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2}{\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha}$

Test. La fórmula fundamental $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$ se puede simplificar y obtenemos

$$\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha = 1$$

(a) Verdadero (b) Falso



MaTEX

Trigono-
metría I

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 15. Demostrar las siguientes identidades:

(a) $\tan\alpha + \cot\alpha = \dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha}$

(b) $\dfrac{\sec\alpha}{\cot\alpha + \tan\alpha} = \operatorname{sen}\alpha$

(c) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

(d) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{1-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

(e) $\cos^4\alpha - \operatorname{sen}^4\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$

(f) $\dfrac{1-2\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha$

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1. Como $\pi \equiv 180°$,

- $$\frac{\pi}{4} = \frac{180^{\,o}}{4} = 45°$$
- $$\frac{2\pi}{3} = \frac{2 \times 180^{\,o}}{3} = 120°$$
- $$\frac{3\pi}{2} = \frac{3 \times 180^{\,o}}{2} = 270°$$
- $$\frac{3\pi}{4} = \frac{3 \times 180^{\,o}}{4} = 135°$$

Ejercicio 1

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

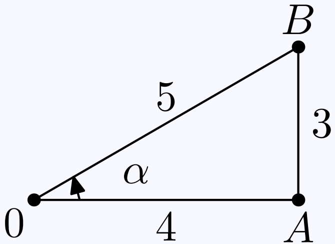
Ejercicio 2. Como $1^\circ \equiv \dfrac{\pi}{180}$,

- $$30^\circ \, \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6} \text{ radianes}$$
- $$45^\circ \, \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{4} \text{ radianes}$$
- $$120^\circ \, \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2\,\pi}{3} \text{ radianes}$$
- $$330^\circ \, \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{11\,\pi}{6} \text{ radianes}$$

Ejercicio 2

Ejercicio 3.

$$\operatorname{sen}\alpha = = \frac{AB}{OB} = \frac{3}{5}$$
$$\cos\alpha = = \frac{0A}{OB} = \frac{4}{5}$$
$$\tan\alpha = = \frac{AB}{OA} = \frac{3}{4}$$

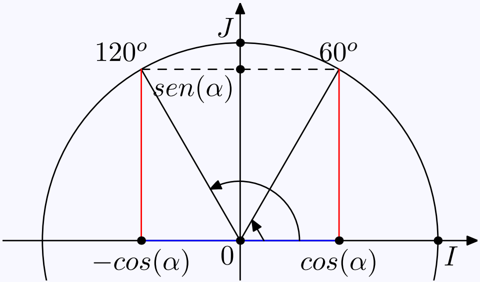


Ejercicio 3

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 4(a)

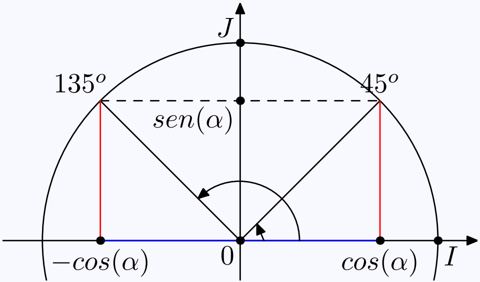
$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 120^\circ &= \operatorname{sen}(180^\circ - 60) \qquad (120^\circ \in 2^\circ cuadrante) \\ &= \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



□

Ejercicio 4(b)

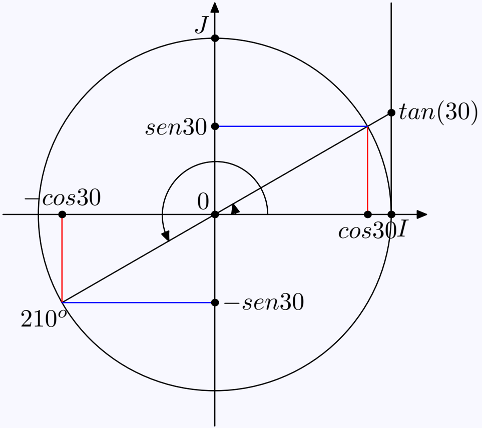
$$\begin{aligned} \cos 135^\circ &= \cos(180^\circ - 45) \qquad\qquad (135^\circ \in 2^{\text{o}} cuadrante) \\ &= -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$



□

Ejercicio 4(c)

$$\begin{aligned}\tan 210^\circ &= \tan(180^\circ + 30) \qquad (210^\circ \in 3^o cuadrante)\\ &= \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$



□

Ejercicio 5. Como $\pi \equiv 180^\circ$,

a)

$$\begin{aligned} \sec 225^\circ &= \sec(180^\circ + 45) \qquad (225^\circ \in 3^o cuadrante) \\ &= -\sec 45^\circ = -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \cos 330^\circ &= \cos(360^\circ - 30) \qquad (330^\circ \in 4^o cuadrante) \\ &= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 240^\circ &= \operatorname{sen}(180^\circ + 60) \qquad (240^\circ \in 3^o cuadrante) \\ &= -\operatorname{sen} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Ejercicio 5

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 6.

a) Como 1500° es mayor que 360° vemos cuantas vuelta completas abarca. Como $1500 : 360 \simeq 4{,}166$ supera las 4 vueltas y se tiene que

$$1500 - 4 \times 360 = 1500 - 1440 = 60^\circ$$

$$\operatorname{sen} 1500^\circ = \operatorname{sen}(4 \times 360 + 60) = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) Como 2745° mayor que 360° vemos cuantas vuelta completas abarca. Como $2745 : 360 = 7{,}625$ supera las 7 vueltas y se tiene que

$$2745 - 7 \times 360 = 2745 - 2520 = 225^\circ$$

$$\begin{aligned} \cos 2745^\circ &= \cos 225^\circ = \cos(180 + 45) \qquad (225^\circ \in 3^o cuadrante) \\ &= -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

c) Como 2010° mayor que 360° reducimos al primer giro. Como $2010 : 360 \simeq 5{,}58$, se tiene que

$$2010 - 5 \times 360 = 2010 - 1800 = 210^\circ$$

$$\begin{aligned} \tan 2010^\circ &= \tan 210^\circ = \tan(180 + 30) \qquad (210^\circ \in 3^o cuadrante) \\ &= \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Ejercicio 6

Ejercicio 7. Como $\pi \equiv 180^\circ$,

a) Como $\dfrac{61\,\pi}{3} = 3660^\circ$ mayor que 360° reducimos al primer giro. Como $3660 : 360 \simeq 10{,}16$, se tiene que

$$3660 - 10 \times 360 = 3660 - 3600 = 60^\circ$$

$$\tan 3660^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

b) Como $\dfrac{37\,\pi}{6} = 1110^\circ$ mayor que 360° reducimos al primer giro. Como $1110 : 360 \simeq 3{,}08$, se tiene que

$$1110 - 3 \times 360 = 1110 - 1080 = 30^\circ$$

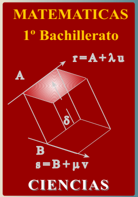
$$\cos 1110^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c) Como $\dfrac{7\,\pi}{3} = 420^\circ$ mayor que 360° reducimos al primer giro. Como

$$420 - 1 \times 360 = 60^\circ$$

$$\begin{aligned} \cos(-420^\circ) &= \cos(360 + 60) \qquad (-420^\circ \in 4^o cuadrante) \\ &= \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ejercicio 7



MaTEX

TRIGONO-
METRÍA I

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 8. Como

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Dividiendo por $\cos^2\alpha$

$$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

y simplificando se obtiene

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

Ejercicio 8

Ejercicio 9. Como $\cot\alpha = -\dfrac{3}{4} \Longrightarrow \tan\alpha = -\dfrac{4}{3}$ Como

$$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha = 1 + (\frac{4}{3})^2 = \frac{25}{9} \qquad \sec\alpha = \pm\frac{5}{3}$$

Al estar α en el segundo cuadrante

$$\sec\alpha = -\frac{5}{3} \qquad \cos\alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

Ejercicio 9

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 10. Como

$$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha = 1 + (\sqrt{2})^2 = 3 \qquad \sec\alpha = \pm\sqrt{3}$$

Al estar α en el cuarto cuadrante

$$\sec\alpha = \sqrt{3} \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Ejercicio 10

Ejercicio 11.

a)

$$\begin{aligned}
\frac{\cos^2\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1-\operatorname{sen}^2\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha} & & \text{for. fundamental}\\
=\frac{(1+\operatorname{sen}\alpha)(1-\operatorname{sen}\alpha)}{1+\operatorname{sen}\alpha} & & \text{dif. de cuadrados}\\
=1-\operatorname{sen}\alpha & & \text{simplif.}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(\pi+\alpha)-\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2}+\alpha)+\cos(\pi-\alpha)} &= \frac{-\cos\alpha-\cos\alpha}{-\cos\alpha-\cos\alpha}\\
&=1
\end{aligned}$$

Ejercicio 11

Ejercicio 12.

a)

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^4\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha\,\cos^2\alpha &= \operatorname{sen}^2\alpha(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) && \text{factor común}\\ &= \operatorname{sen}^2\alpha && \text{for. fundamental}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\cos\alpha} &= \frac{1-\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha} && \text{for fundamental}\\ &= \frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{1-\cos\alpha} && \text{dif. cuadrados}\\ &= 1+\cos\alpha && \text{simplificar}\end{aligned}$$

Ejercicio 12

Ejercicio 13.

a)

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi+\alpha)\ \tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\cot(\pi+\alpha)} = \frac{(-\operatorname{sen}\alpha)\ (-\cot\alpha)}{\cot\alpha}$$
$$= \operatorname{sen}\alpha$$

b)

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi+\alpha)\ \cos(\pi-\alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)\ \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+\alpha)} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha\ (-\cos\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha}$$
$$=1$$

Ejercicio 13

Ejercicio 14(a)

$$
\begin{aligned}
\frac{\sec^2\alpha}{\cot\alpha}(1-\operatorname{sen}^2\alpha)\ \operatorname{cosec}^2\alpha &= \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha} && \text{for. fundamental}\\
\frac{\sec^2\alpha}{\cot\alpha}(\cos^2\alpha)\ \operatorname{cosec}^2\alpha &= \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha} && \text{simplif.}\\
\frac{1}{\cot\alpha}\ \operatorname{cosec}^2\alpha &= \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha} && \cot\alpha = \frac{\cos}{\operatorname{sen}}\\
\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\ \operatorname{cosec}^2\alpha &= \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha}\\
\frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha} &= \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha}
\end{aligned}
$$

$\square$

Ejercicio 14(b)

$$\frac{\cos^4\alpha - \operatorname{sen}^4\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha} = \frac{1-\tan^2\alpha}{\tan\alpha}$$

$$\frac{(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha} = \frac{1-\tan^2\alpha}{\tan\alpha}$$

$$\frac{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha} = \frac{1-\tan^2\alpha}{\tan\alpha}$$

$$\frac{1-\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha\ \frac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{1-\tan^2\alpha}{\tan\alpha}$$

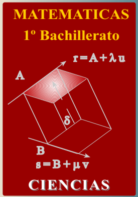
$$\frac{1-\tan^2\alpha}{\tan\alpha} = \frac{1-\tan^2\alpha}{\tan\alpha}$$

$\square$

Ejercicio 14(c)

$$\begin{aligned}
\cot^4\alpha\ \cos^2\alpha - \cot^2\alpha &= -\cos^2\alpha \\
\cot^2\alpha\,(\cos^2\alpha - 1) &= -\cos^2\alpha \\
-\cot^2\alpha\ \operatorname{sen}^2\alpha &= -\cos^2\alpha \\
-\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}\ \operatorname{sen}^2\alpha &= -\cos^2\alpha \\
-\cos^2\alpha &= -\cos^2\alpha
\end{aligned}$$

$\square$



Ejercicio 14(d)

$$
\begin{aligned}
(1-\operatorname{sen}^2\alpha)\frac{1}{\cos\alpha}\,\frac{1+\cos^2\alpha}{2-\operatorname{sen}^2\alpha}\tan\alpha &= \operatorname{sen}\alpha\\
\cos^2\alpha\frac{1}{\cos\alpha}\,\frac{1+\cos^2\alpha}{2-\operatorname{sen}^2\alpha}\tan\alpha &= \operatorname{sen}\alpha\\
\cos\alpha\frac{1+\cos^2\alpha}{2-\operatorname{sen}^2\alpha}\tan\alpha &= \operatorname{sen}\alpha\\
\frac{1+\cos^2\alpha}{2-\operatorname{sen}^2\alpha}\operatorname{sen}\alpha &= \operatorname{sen}\alpha\\
\frac{1+(1-\operatorname{sen}^2\alpha)}{2-\operatorname{sen}^2\alpha}\operatorname{sen}\alpha &= \operatorname{sen}\alpha\\
\operatorname{sen}\alpha &= \operatorname{sen}\alpha
\end{aligned}
$$

□

Ejercicio 14(e)

$$
\begin{aligned}
(1+\tan\alpha)\,(1+\cot\alpha) &= \frac{(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2}{\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha}\\
(1+\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha})\,(1+\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}) &= \frac{(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2}{\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha}\\
(\frac{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha})\,(\frac{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}) &= \frac{(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2}{\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha}\\
\frac{(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2}{\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha} &= \frac{(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2}{\operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha}
\end{aligned}
$$

$\square$

Ejercicio 15(a)

$$
\begin{aligned}
\tan\alpha + \cot\alpha &= \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha} && \text{definición}\\
\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} &= \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha} && \text{operamos}\\
\frac{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha} &= \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha} && \text{for. fundamental}\\
\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha} &= \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha} && \text{definición}\\
\frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha} &= \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha}
\end{aligned}
$$

$\square$

Ejercicio 15(b)

$$\frac{\sec\alpha}{\cot\alpha+\tan\alpha} = \operatorname{sen}\alpha \qquad \text{operando}$$

$$\sec\alpha = \operatorname{sen}\alpha(\cot\alpha+\tan\alpha) \qquad \text{definición}$$

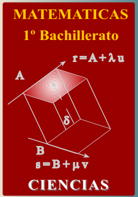
$$\sec\alpha = \operatorname{sen}\alpha\left(\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}+\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right) \qquad \text{operando}$$

$$\sec\alpha = \operatorname{sen}\alpha\left(\frac{\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}\right) \qquad \text{for fundamental}$$

$$\sec\alpha = \operatorname{sen}\alpha\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}\right) \qquad \text{simplicando}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \text{definición}$$

$\square$



Ejercicio 15(c)

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} &= \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} && \text{operando} \\ \operatorname{sen}^2\alpha &= 1-\cos^2\alpha && \text{for. fundamental} \\ \operatorname{sen}^2\alpha &= \operatorname{sen}^2\alpha \end{aligned}$$

$\square$

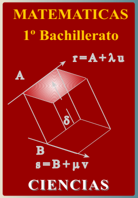
Ejercicio 15(d)

$$\begin{aligned} \frac{\cos\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha} &= \frac{1-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} && \text{operando} \\ \cos^2\alpha &= 1-\operatorname{sen}^2\alpha && \text{for. fundamental} \\ \cos^2\alpha &= \cos^2\alpha \end{aligned}$$

Ejercicio 15(e)

$$
\begin{aligned}
\cos^4\alpha - \operatorname{sen}^4\alpha =& 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha && \text{dif. cuadrados}\\
(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) =& 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha && \text{for. fundamental}\\
\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha =& 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha && \text{definición}\\
1 - \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha =& 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha && \text{definición}
\end{aligned}
$$

$\square$



Ejercicio 15(f)

$$\frac{1-2\,\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha \qquad \text{operando}$$

$$1-2\,\operatorname{sen}^2\alpha = (\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha)(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha) \qquad \text{operando}$$

$$1-2\,\operatorname{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha \qquad \text{for. fundamental}$$

$$1-2\,\operatorname{sen}^2\alpha = 1-\ \operatorname{sen}^2-\operatorname{sen}^2\alpha$$

□

Soluciones a los Tests

Solución al Test: Es falso pues

$$\sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \neq \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha$$

basta ver que

$$\sqrt{4^2 + 9^2} = \sqrt{25} = 5 \neq \sqrt{4^2} + \sqrt{9^2} = 4 + 9 = 13$$

Final del Test

Índice alfabético

Ángulo, 3
- radián, 6
- sexagesimal, 4

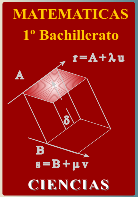
Demostrar identidades, 35, 36

Fórmula fundamental, 14

Identidades trigonométricas, 32

Razones trigonométricas, 8
- ángulos opuestos, 25
- ángulos suplementarios, 23
- ampliación, 15
- de 30^o y 60^o, 10
- de 45^o, 9
- de ángulos complementarios, 21
- reducción de cuadrante, 23

Simplificar expresiones, 34



MaTEX

TRIGONOMETRÍA I