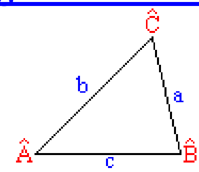
Triángulos oblicuángulos.



Suma de ángulos

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180º$$

Teorema del coseno

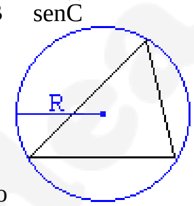
$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\widehat{A} \qquad \cos\widehat{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c}$$

$$b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\widehat{B} \qquad \cos\widehat{B}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c}$$

$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\widehat{C} \qquad \cos\widehat{C}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}$$

Teorema del seno

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}=2R$$



R≡radio de la circunferencia circunscrita al triángulo

Área de un triángulo

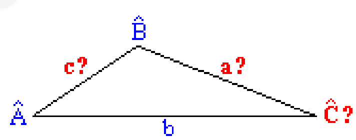
$$\text{Área}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\operatorname{sen}\widehat{C}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\operatorname{sen}\widehat{B}=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\operatorname{sen}\widehat{A}.$$

Tipos de problemas.

(a) Dados un lado y dos ángulos.

DATOS: $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y b

INCÓGNITAS: $\widehat{C}$, a y c



Solución:

Por la suma de ángulos se calcula el tercer ángulo, en este caso él $\widehat{C}$

$$\widehat{C}=180-\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)$$

Los lados se calculan mediante el teorema del seno

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}}\Rightarrow a=b\cdot\frac{\operatorname{sen}\widehat{A}}{\operatorname{sen}\widehat{B}}$$

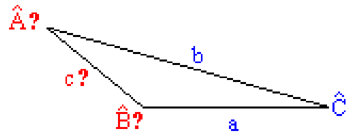
$$\frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}}\Rightarrow c=b\cdot\frac{\operatorname{sen}\widehat{C}}{\operatorname{sen}\widehat{B}}$$

exceptuando el caso de dos ángulos obtusos, el triángulo siempre tiene solución

(b) Dados dos lados y el ángulo que forman.

DATOS: a, b y $\hat{C}$

INCÓGNITAS: $\hat{A}$, $\hat{B}$ y c



El lado que se desconoce se calcula mediante el teorema del coseno

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}}$$

Para él calculo de uno de los ángulos desconocidos se emplea también el teorema del coseno

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \Rightarrow \hat{A} = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

El último ángulo se puede calcular por la suma de ángulos

$$\hat{B} = 180 - \left(\hat{A} + \hat{C}\right)$$

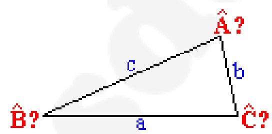
Para la resolución de los ángulos del triángulo se puede emplear el teorema del seno, aunque no es muy recomendable dado que los senos de ángulos suplementarios son iguales, y esto podría llevar a confusión.

Si aun así se desea resolver el problema por el teorema del seno, habrá que tomar la precaución de calcular en primer lugar el ángulo opuesto al lado menor.

(c) Dados los tres lados.

DATOS: a , b y c

INCÓGNITAS: $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$



El triángulo se resuelve por aplicación del teorema del coseno sobre dos de los ángulos, el tercero se obtiene como diferencia hasta 180º.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A} \qquad \cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \qquad \hat{A} = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

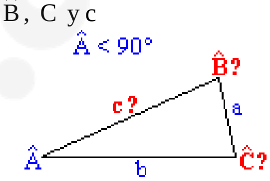
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B} \qquad \cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \qquad \hat{B} = \arccos \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}$$

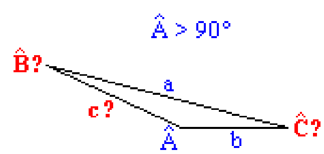
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \qquad \hat{C} = 180^\circ - \left(\hat{A} + \hat{B}\right)$$

(d) Dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

DATOS: $\hat{A}$, a y b

INCÓGNITAS: $\hat{B}$, $\hat{C}$ y c





Es el caso más complicado, en principio hay que distinguir entre dos casos diferentes según sea el ángulo conocido

i) Sí A > 90º

El triángulo solo presenta solución si a > b. En este caso se puede resolver por el teorema del seno.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} \qquad \operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a} \cdot \operatorname{sen} \hat{A} \qquad \hat{B} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{b}{a} \cdot \operatorname{sen} \hat{A}\right)$$

$$\hat{C} = 180 - (\hat{A} + \hat{B}) \qquad \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} \qquad c = a \cdot \frac{\text{sen } \hat{C}}{\text{sen } \hat{A}}$$

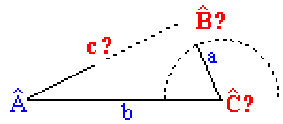
ii) **Si A < 90º**

Según los valores que tomen los datos, se pueden presentar tres casos diferentes. Aplicando el teorema del seno a los datos que se dan y despejando el valor no conocido (en este caso sé plica a los datos a y b y se despeja el sen $\hat{B}$)

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{b}{a} \cdot \text{sen } \hat{A}$$

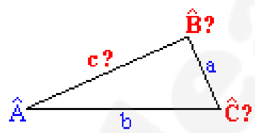
El segundo miembro de la expresión puede tomar tres valores diferentes:

a) $\frac{b}{a} \cdot \text{sen } \hat{A} > 1$ El triángulo no tiene solución.



El lado a, no tiene la suficiente longitud como para cerrar el triángulo.

b) $\frac{b}{a} \cdot \text{sen } \hat{A} = 1$ El triángulo tiene solución, y $\hat{B} = 90º$. Triángulo rectángulo en B



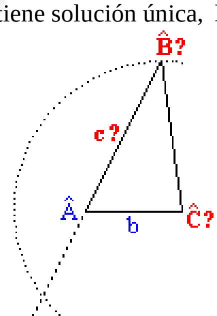
$$\hat{C} = 90º - \hat{A}$$

El lado c se puede calcular de cualquier forma, por ejemplo Pitágoras, por ser rectángulo.

$$c = \sqrt{b^2 - a^2}$$

c) $\frac{b}{a} \cdot \text{sen } \hat{A} < 1$ En este caso se presentan a su vez dos apartados diferentes.

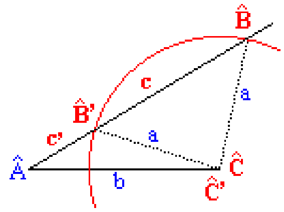
- b < a. El triángulo tiene solución única, $\hat{B} < 90º$



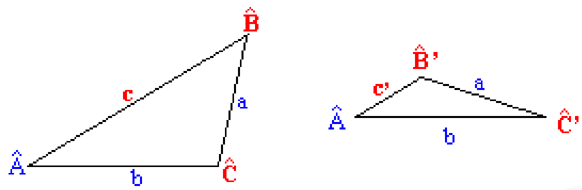
El triángulo se resuelve por el teorema del seno

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{b}{a} \cdot \text{sen } \hat{A} \qquad \hat{B} = \text{arcsen}\left(\frac{b}{a} \cdot \text{sen } \hat{A}\right) \qquad \hat{C} = 180º - (\hat{A} + \hat{B}) \qquad c = a \cdot \frac{\text{sen } \hat{C}}{\text{sen } \hat{A}}$$

- b > a. El triángulo tiene doble solución, $\widehat{B} < 90^\circ$ y $\widehat{B}' > 90^\circ$



que se puede desdoblar en



Se resuelve por el teorema de seno, en el de la derecha, el ángulo B es agudo y por tanto

$$\operatorname{sen}\widehat{B} = \frac{b}{a}\cdot\operatorname{sen}\widehat{A} \qquad \widehat{B} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{b}{a}\cdot\operatorname{sen}\widehat{A}\right) \qquad \widehat{C} = 180^\circ - \left(\widehat{A}+\widehat{B}\right) \qquad c = a\cdot\frac{\operatorname{sen}\widehat{C}}{\operatorname{sen}\widehat{A}}$$

La solución se completa resolviendo también el triángulo de la izquierda, teniendo en cuenta que B y B' son suplementarios.

$$\widehat{B}' = 180 - \widehat{B} \qquad \widehat{C}' = 180^\circ - \left(\widehat{A}+\widehat{B}'\right) \qquad c' = a\cdot\frac{\operatorname{sen}\widehat{C}'}{\operatorname{sen}\widehat{A}}$$