PROYECTO SABER HACER

BIBLIOTECA DEL PROFESORADO

Matemáticas
aplicadas a las Ciencias Sociales II

SERIE **RESUELVE**

SOLUCIONARIO

El Solucionario de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II, del proyecto Saber Hacer, para 2.º curso de Bachillerato es una obra colectiva concebida, diseñada y creada en el Departamento de Ediciones Educativas de Santillana Educación, S. L., dirigido por **Teresa Grence Ruiz**.

En su elaboración ha participado el siguiente equipo:
Jone Berasaluce González
Mario Castillo López
Ismael Gómez García
Fernando Loysele Susmozas
Irene Paramio Lorente
Cintia Rúa Pérez
Lorena Saavedra López
Ana Mariña Vila Iglesias

EDICIÓN
José Antonio Almodóvar Herráiz
Silvia Marín García
Virgilio Nieto Barrera
Laura Sánchez Fernández

EDITOR EJECUTIVO
Carlos Pérez Saavedra

DIRECCIÓN DEL PROYECTO
Domingo Sánchez Figueroa

BACHILLERATO 2

SANTILLANA

Presentación

El nombre de la serie, **Saber Hacer**, responde al planteamiento de presentar un proyecto de Matemáticas centrado en la adquisición de los contenidos y procedimientos necesarios para que los alumnos puedan desenvolverse en la vida real. El saber matemático, dentro de esta etapa de la enseñanza, debe garantizar no solo la interpretación y la descripción de la realidad, sino también la actuación sobre ella.

En este sentido, y considerando las Matemáticas a estos niveles como una materia esencialmente procedimental, recogemos en este material la **resolución de todos los ejercicios y problemas** formulados en el libro del alumno.

Pretendemos que esta resolución no sea solo un instrumento sino que pueda entenderse como una propuesta didáctica para enfocar la adquisición de los distintos conceptos y procedimientos que se presentan en el libro del alumno.

Índice

Unidad 1: Matrices 5-42
Unidad 2: Determinantes 43-74
Unidad 3: Sistemas de ecuaciones 75-118
Unidad 4: Programación lineal 119-174
Unidad 5: Límites y continuidad 175-210
Unidad 6: Derivadas 211-240
Unidad 7: Aplicaciones de la derivada 241-290
Unidad 8: Representación de funciones 291-394
Unidad 9: Integrales 395-432
Unidad 10: Probabilidad 433-462
Unidad 11: Distribuciones binomial y normal 463-498
Unidad 12: Inferencia estadística. Estimación 499-525

Matrices

1

ACTIVIDADES

1. Página 10

La matriz consta de dos filas que corresponden a los alumnos y cuatro columnas con sus calificaciones. Así:

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 10 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

2. Página 10

La matriz solución es $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Página 10

La matriz solución es $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Página 11

Como las dos matrices tienen la misma dimensión, los elementos de cada una tienen que ser iguales, es decir:

$$\begin{cases} a - 1 = 3 \\ 2a - 1 = b - 1 \\ 2 = d - 1 \\ c - 2 = 2c \\ 3 - a = 1 \\ 6 = b - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ c = -2 \\ d = 3 \end{cases}$$

Así pues, las dos matrices son $A = B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

5. Página 11

La matriz solución es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Página 12

La matriz solución es $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ → Matriz triangular superior

7. **Página 12**

La respuesta es abierta con la condición de que los elementos de la diagonal principal sumen 7 y el resto de elementos sea 0. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

8. **Página 12**

La respuesta es abierta con la condición de que los elementos de la diagonal principal sean cero, y los demás no.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 11 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$

9. **Página 12**

La matriz solución es $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ Matriz triangular inferior.

10. **Página 13**

La matriz solución es $A^t = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

11. **Página 13**

Para la comprobación usaremos la notación $A = a_{ij}$. Así pues: $A^t = a_{ij}{}^t = a_{ji}{}^t = a_{ij} = A$

La igualdad $a_{ij}{}^t = a_{ji}{}^t$ se verifica por la propiedad conmutativa de la suma.

Una matriz que cumpla estas condiciones puede ser, por ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

12. **Página 14**

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -8 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -10 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 7 & -16 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$$

13. **Página 14**

La matriz traspuesta de A es $A^t = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$. Así pues:

$$A - A^t - I = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 11 \\ 11 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 11 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$$

14. **Página 14**

En primer lugar, calculamos $B + C$. Es decir:

$$B - C = \begin{pmatrix} a-2 & 9 & c+9 & 4 \\ 2 & 0 & a-3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 & b \\ 1 & e & 7 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-3 & 9 & c-9 & b-4 \\ 3 & e & a-4 & d-6 \end{pmatrix}$$

Al tener las mismas dimensiones, hay que igualar los elementos de la matriz A con la matriz anterior. Es decir:

$$\begin{cases} a = 2a-3 \\ b = 9 \\ 7 = c-9 \\ 8-d = b-4 \\ a = 3 \\ 9 = e \\ c-9 = a-4 \\ e-2 = d+6 \end{cases} - \begin{cases} a = 3 \\ b = 9 \\ c = -2 \\ d = 5 \\ e = 9 \end{cases}$$

15. **Página 15**

a) $3A - B - 2C = 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$

b) $2C - B - 3A = 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

16. **Página 15**

a) $A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -1 + 4 + 9 = 12$

b) $B\cdot A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

c) $2A\cdot 3B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = -6 - 24 - 54 = 72$

d) $-2B\cdot A = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -4 & -8 & -12 \\ -6 & -12 & -18 \end{pmatrix}$

17. **Página 16**

a) $A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

b) $B\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 11 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

c) $A^t\cdot B$ no se puede realizar ya que el número de columnas de A^t no coincide con el número de filas de B.

18. **Página 16**

$$A\cdot B\ C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 11 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 & -55 & -13 \\ 13 & -20 & 13 \end{pmatrix}$$

19. **Página 17**

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 26 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 21 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ No son conmutables.

b) $A \cdot (B - C) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 26 \\ -7 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$$

20. **Página 17**

Deberá comprar al provedor que le salga más barato. Por ello, hay que calcular el coste total:

El coste comprando al proveedor *M* asciende a $\begin{matrix} 6{,}50 & 1{,}50 \end{matrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100\,000 \\ 550\,000 \\ 50\,000 \end{pmatrix} =$ 3 175 000 €.

El coste comprando al proveedor *N* asciende a $\begin{matrix} 6{,}70 & 1{,}10 \end{matrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100\,000 \\ 550\,000 \\ 50\,000 \end{pmatrix} =$ 3 150 000 €.

Por tanto, deberá comprar al proveedor *N*.

21. **Página 18**

El rango de la matriz A es 2 ya que no existen *a*, *b* y *c* tales que $F_2 = a \cdot F_1$, $F_3 = b \cdot F_1$ o $F_3 = c \cdot F_2$ y, sin embargo, $F_3 = F_1 + F_2$.

El rango de la matriz B es 2 ya que no existen *a*, *b* y *c* tales que $F_2 = a \cdot F_1$, $F_3 = b \cdot F_1$ o $F_3 = c \cdot F_2$ y, sin embargo, $F_3 = 2F_1 + F_2$.

22. **Página 18**

El rango de *A* es 2 ya que no existe *a* tal que $F_2 = a \cdot F_1$.

El rango de *B* es 1 ya que $F_3 = 3 \cdot F_1$ y $F_2 = 2 \cdot F_1$.

El rango de $A \cdot B^t$ es 1 ya que $A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ -7 & -14 & -21 \end{pmatrix}$

y, además, $F_2 = -F_1$.

23. **Página 19**

El rango de la matriz *A* es 2 ya que:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_1 + F_3]{F_2 = F_2 + 3F_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 7 & 7 \\ 0 & 5 & 7 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_2 - F_3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz *B* es 3 ya que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 - F_1]{F_2 = F_2 + 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = 7F_3 + 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -23 \end{pmatrix}$$

24. **Página 19**

$$A^t \cdot B - C^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -m-2 \end{pmatrix}$$

El rango está en función del parámetro *m*. Por el método de Gauss se tiene que $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -m-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -m+1 \end{pmatrix}$.

Así pues, si $m = 1$, entonces el rango de $A^t \cdot B - C^t$ es 1, y si $m \neq 1$, entonces el rango es 2.

25. **Página 20**

a) Buscamos una matriz *B* tal que: $A \cdot B = I$ y $B \cdot A = I$. Si $B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ tenemos que:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a-b & 3c+d \\ 2a-b & 2c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \to \begin{cases} 3a-b=1 \\ 3c-d=0 \\ 2a-b=0 \\ 2c-d=1 \end{cases} \to \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-1 \\ d=3 \end{cases} \to B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Se puede comprobar que $B \cdot A = I \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\left(A^{-1}\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \to \left(A^t\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

26. **Página 20**

Para poder ver si una matriz es invertible, podemos calcular el rango de dicha matriz.

$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ → Como el rango es 2, entonces la matriz es invertible

27. **Página 20**

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & 2-2 \\ -6+6 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

28. **Página 21**

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para comprobar que hemos obtenido la inversa, basta con comprobar que $I = A \cdot A^{-1}$: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & -5 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right) \to B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Para comprobar que hemos obtenido la inversa, basta con comprobar que $I = B \cdot B^{-1}$: $B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

29. **Página 21**

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{array}\right) \to B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

30. **Página 22**

Despejando X en la ecuación tenemos que $X = A^{-1} \cdot B$. Mediante el procedimiento de Gauss-Jordan:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Así pues:

$$X = A^{-1} \cdot B \to X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

31. **Página 22**

Despejando X en la ecuación, tenemos que $X = B \cdot A^{-1}$. Mediante el procedimiento de Gauss-Jordan:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Así pues:

$$X = B \ A^{-1} \to X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

32. **Página 23**

En primer lugar, despejamos X, es decir, $A^t \cdot X - B = 0 \to A^t \cdot X = B \to X = {A^t}^{-1} \cdot B$.

En segundo lugar, calculamos ${A^t}^{-1}$:

$${A^t}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente multiplicamos y obtenemos que:

$$X = {A^t}^{-1} \cdot B \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

33. **Página 23**

Despejamos X, es decir, $X \cdot A - A = 2A^2 \rightarrow X\ A = 2A^2 - A \rightarrow X = \ 2A^2 - A \cdot A^{-1} \rightarrow X = 2A - I$.

Así pues:

$$X = 2A - I \rightarrow X = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

SABER HACER

34. **Página 24**

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad 2B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2B - I^{\,2} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 16 \\ 0 & -7 & -8 \\ -16 & 16 & -15 \end{pmatrix}$$

$$A^t\ 2B - I^{\,2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & -16 & 16 \\ 0 & -7 & -8 \\ -16 & 16 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 23 & -7 \\ 50 & -48 & 47 \\ 0 & -7 & -8 \end{pmatrix}$$

35. **Página 24**

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2k & 1 \end{pmatrix}$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3k & 1 \end{pmatrix}$$

De modo que tendremos que $A^{101} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -101k & 1 \end{pmatrix}$.

b) Si $k = 3$, entonces $A^{101} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -303 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Tendría que ser $k = 0$.

36. **Página 25**

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A - B - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Sumando las dos ecuaciones se obtiene:

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Despejando en la primera ecuación:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

37. **Página 25**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -34 & 70 \\ 0 & -21 & 43 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -34 & 70 \\ 0 & -21 & 43 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha = 7,\ \beta = -6$$

38. **Página 26**

La matriz resultado es de dimensión 1×3, donde cada elemento representa lo que cuestan en total todos los productos en cada fábrica.

$$\begin{pmatrix} 25 & 30 & 60 & 75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 34 & 40 & 46 \\ 11 & 8 & 12 \\ 23 & 27 & 32 \\ 25 & 21 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4435 & 4435 & 5680 \end{pmatrix}$$

La primera y la segunda fábrica ofrecen el mismo precio por este pedido.

39. **Página 26**

Claveles = (12 4 8) Rosas = (10 15 5) Tulipanes = (3 6 12)

Centros de cada tipo $= \begin{pmatrix} 87 \\ 27 \\ 53 \end{pmatrix}$

Calculamos cuántos se necesitan de cada:

Claveles $= \begin{pmatrix} 12 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 87 \\ 27 \\ 53 \end{pmatrix} = 1576$ Rosas $= \begin{pmatrix} 10 & 15 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 87 \\ 27 \\ 53 \end{pmatrix} = 1540$ Tulipanes $= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 87 \\ 27 \\ 53 \end{pmatrix} = 1059$

40. **Página 27**

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & -8 & -7 \\ 3 & 2-a & 3 & 3-a \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = 4F_3 - 3F_1]{F_2 = 2F_2 + F_1} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & -18 & -13 \\ 0 & 11-4a & 18 & 9-4a \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_2 + F_3} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & -18 & -13 \\ 0 & 4-4a & 0 & -4+4a \end{pmatrix}$$

• Si $a = 1$, entonces Rango $(A) = 2$.

• Si $a \neq 1$, entonces Rango $(A) = 3$.

41. **Página 27**

Para que la matriz sea invertible, es necesario que su rango sea máximo (en este caso tres).

$$\begin{pmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & k-2 & -k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & 0 & -k-1 \end{pmatrix}$$

Entonces, para los valores que anulan la diagonal principal (–1 y 2) la matriz *M* no tiene rango 3. Por tanto, estos son los valores para los que *M* no tiene inversa.

42. **Página 27**

$$2X - Y = A^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 12 & 31 \end{pmatrix}$$

$$X - Y = A^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Sumando las dos ecuaciones obtenemos:

$$3X = \begin{pmatrix} 2 & 21 \\ 14 & 30 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2/3 & 7 \\ 14/3 & 10 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$Y = \begin{pmatrix} 2/3 & 7 \\ 14/3 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/3 & 4 \\ 8/3 & 11 \end{pmatrix}$$

ACTIVIDADES FINALES

43. **Página 28**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $1 \quad 3 \qquad 4 \quad 15 \quad 14$

b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

44. **Página 28**

La matriz solución es $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

45. **Página 28**

Al tener las mismas dimensiones, hay que igualar los elementos de la matriz A con la matriz B:

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 2 = 2 \\ x - 3 = y \\ 3 = 3 \\ x = 2y - 5 \\ -4 = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

46. **Página 28**

a) $A-B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 4 & 2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2 & 3\\ 6 & 3 & -2\end{pmatrix}$

b) $A-B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 4 & 2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 3\\ -2 & -1 & 4\end{pmatrix}$

c) $A-2B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & -2 & 0\\ 8 & 4 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 1 & 3\\ -6 & -3 & 7\end{pmatrix}$

d) $2A-3B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 6\\ 4 & 2 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-9 & 3 & 0\\ -12 & -6 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & 1 & 6\\ -16 & -8 & 7\end{pmatrix}$

47. **Página 28**

a) $n\times m \cdot m\times p \rightarrow n\times p$

b) $m \quad n \cdot n \quad p \rightarrow m\times p$

c) $m \quad p \cdot p\times n \rightarrow m\times n$

d) $p \quad n \cdot n \quad m \rightarrow p\times m$

e) $m \quad p \cdot p\times n \rightarrow m\times n$

f) $p\times m \cdot m\times n \rightarrow p\times n$

48. **Página 28**

a) 2×4 b) 3×6 c) 3×3 d) 6×3 e) 4×6 f) 4×2

49. **Página 28**

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ b) $B^t\cdot A=\begin{pmatrix}7 & -2\\ 4 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ c) $A^2=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

50. **Página 28**

Para la comprobación usaremos la notación $A=a_{ij}$. Así pues: $A^t{}^t=a_{ij}{}^{t\,t}=a_{ji}{}^t=a_{ij}=A$.

51. **Página 28**

Para la comprobación usaremos la notación $A=a_{ij}$. Así pues: $A^t=a_{ij}{}^t=-a_{ji}{}^t=-a_{ji}{}^t=-a_{ij}=-A$.

La igualdad $a_{ij}{}^t=-a_{ji}{}^t$ se verifica porque $i-j=-(j-i)$.

52. **Página 28**

a) $AB=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1 & 5\\ 3 & 1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & -2 & 26\\ -3 & 4 & 11\end{pmatrix}$

b) No es posible.

c) $BC=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 5\\ 3 & 1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 5\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -16 & -19\\ -5 & 16 & 24\end{pmatrix}$

d) $CB^t=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 5\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -3 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 1\\ 5 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28 & -22\\ 2 & 3\\ -15 & 8\end{pmatrix}$

53. **Página 28**

a) $A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -4 \\ 7 & -9 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60 & 14 \\ 76 & -34 \end{pmatrix}$

b) $A \cdot C^t - B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -9 & -5 \\ 23 & 3 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -12 & -4 \\ 24 & 3 & 16 \end{pmatrix}$

c) $B^t \cdot A - C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 9 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 3 & 6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

d) $B \cdot C \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -11 \\ 13 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -54 & -74 \\ -16 & -40 \end{pmatrix}$

e) $A^t \cdot C^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 9 & -5 \\ -25 & 3 & -15 \end{pmatrix}$

f) $B^t \cdot C^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 3 & 10 \\ -24 & 0 & -15 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

54. **Página 28**

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

55. **Página 28**

Se quieren encontrar las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $A \cdot X = X \cdot A$.

$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ c & d \end{pmatrix}$

$X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a-b \\ c & c-d \end{pmatrix}$

Igualando cada término, obtenemos que: $\begin{cases} a-c=a \\ b-d=a-b \\ c=c \\ c+d=d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=a \\ b=b \\ c=0 \\ d=d \end{cases} \rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$

56. **Página 28**

Para que la matriz B conmute con la matriz A es necesario que dicha matriz sea cuadrada de dimensión 2.

Como la matriz B tiene que ser triangular superior entonces $c = 0$. Así pues, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b - 3d \\ -a & -b - 2d \end{pmatrix} \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b & 3a - 2b \\ -d & 2d \end{pmatrix}$$

Igualando cada término se tiene que: $\begin{cases} a = a - b \\ -a = -d \\ b - 3d = 3a - 2b \\ -b - 2d = 2d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \lambda \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = \lambda \end{cases}$ Como $a - d = 2 \rightarrow \lambda - \lambda = 2 \rightarrow \lambda = 1$.

Por tanto, la matriz buscada es $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

57. **Página 28**

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ $\qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

b) Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. La matriz X tiene que verificar $A \cdot X = X \ A$. Entonces:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ -a - 2c & -b + 2d \end{pmatrix} \qquad X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - b & 2b \\ 3c - d & 2d \end{pmatrix}$$

Por tanto, igualando cada término se tiene que:

$$\begin{cases} 3a = 3a - b \\ 3b = 2b \\ -a - 2c = 3c - d \\ -b - 2d = 2d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \lambda \\ b = 0 \\ c = \mu - \lambda \\ d = \mu \end{cases} \rightarrow X = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \mu - \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

58. **Página 28**

Sea $P = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$:

$$P \cdot C = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa - yb & xb - ay \\ -ya - xb & -yb - xa \end{pmatrix} \qquad C \cdot P = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by & ay - bx \\ -bx - ay & -by - ax \end{pmatrix}$$

Así pues, las matrices C y P son siempre conmutables.

59. **Página 28**

$$B - C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B + C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 12 & -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}$$

Efectivamente el resultado de ambas operaciones es el mismo.

60. **Página 28**

$$\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}^2 - t\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4 & -4\\ 8 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & -7\\ 14 & 14\end{pmatrix} - t\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4 & -4\\ 8 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t & -t\\ 2t & 3t\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3 & 3\\ -6 & -9\end{pmatrix}$$

Igualando los términos se obtiene que $t = -3$.

61. **Página 28**

$$\begin{pmatrix}1 & y\\ x & z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & x\\ y & z\end{pmatrix} = 5\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1-y^2 & x+yz\\ x-yz & x^2-z^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

Igualando cada término tenemos que:

$$\begin{cases}1-y^2=5\\ x-yz=0\\ x^2-z^2=5\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x_1, y_1, z_1 = 2, 2, -1\\ x_2, y_2, z_2 = -2, 2, 1\\ x_3, y_3, z_3 = 2, -2, 1\\ x_4, y_4, z_4 = -2, -2, -1\end{cases}$$

62. **Página 28**

Realizando las operaciones e igualando cada término, tenemos que:

$x^2 - 3 - 2 - 2x \rightarrow x^2 - 2x - 1 - 0 \rightarrow x - -1$

Como observación, el resto de ecuaciones no aporta información sobre la variable x.

Por consiguiente, si $x = -1$, se cumple la igualdad pedida.

63. **Página 28**

$$\begin{pmatrix}x & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & 2 & -1\\ 1 & 0 & x-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8 & 2x & -5\\ x & 2 & -1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x^2-1 & 2x & 1-2x\\ x & 2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8 & 2x & -5\\ x & 2 & -1\end{pmatrix} \rightarrow x = 3\ .$$

Como observación, la solución $x = -3$ no es válida ya que no se verificaría para el tercer elemento de la primera fila.

64. **Página 28**

$$B\cdot\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix} - B\cdot\begin{pmatrix}3 & 0\\ 9 & 3\end{pmatrix} \rightarrow B\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix} - B\cdot\begin{pmatrix}3 & 0\\ 9 & 3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \rightarrow B\cdot\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3 & 0\\ 9 & 3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Si $B = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda-3 & 0\\ -6 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}\lambda-3\ a-6b=0\\ -2b=0\\ \lambda-3\ c-6d=0\\ -2d=0\end{cases} - \begin{cases}\lambda-3\ a=0\\ b=0\\ \lambda-3\ c=0\\ d=0\end{cases} - \lambda = 3$$

Así pues, $B = \begin{pmatrix}a & 0\\ c & 0\end{pmatrix}$.

65. **Página 29**

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$AA^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 4 + \alpha^2 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 5$

66. **Página 29**

No se puede asegurar. Por ejemplo, si tomamos las siguientes matrices, su producto no es conmutativo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que conmute el producto es necesario y suficiente que la matriz *A* tenga su diagonal formada por el mismo número ya que:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a \cdot I$$

Así, el producto de esta matriz *A* con otra *B* será conmutativo.

67. **Página 29**

Sea $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - c & b - d \\ 2a - c & 2b - d \end{pmatrix} \qquad B \cdot A^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b & 2a + b \\ c - d & 2c + d \end{pmatrix}$$

Igualando cada término se tiene que:

$$\begin{cases} a - c = a - b \\ b - d = 2a - b \\ 2a - c = c - d \\ 2b - d = 2c + d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \alpha \\ b = \lambda \\ c = \lambda \\ d = 2\alpha \end{cases} \rightarrow B = \begin{pmatrix} \alpha & \lambda \\ \lambda & 2\alpha \end{pmatrix}$$

68. **Página 29**

$$M^2 - 2M = 3I \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Así, igualando los términos correspondientes, se tiene que:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 - 2a = 3 \\ 2ab - 2b = 0 \rightarrow 2b\ a - 1 = 0 \end{cases}$$

- Si $b = 0 \rightarrow a^2 - b^2 - 2a - 3 \rightarrow a^2 - 2a - 3 - 0 \rightarrow a_1 - 3, a_2 - -1$
- Si $a = 1 \rightarrow a^2 - b^2 - 2a = 3 - 1 - b^2 - 2 = 3 - b_1 = 2, b_2 = -2$

$$M - \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

69. **Página 29**

$$\begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m^2 - 4m + 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow m^2 - 4m - 1 = 1 - \begin{cases} m = 0 \\ m = 4 \end{cases}$$

70. **Página 29**

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 - 2x & 2x \\ 4 & 2x - 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 2 & 2x - 2 \\ 6 & 2x - 6 \end{pmatrix} \rightarrow x = 3.$$

71. **Página 29**

$$A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 6 & 8 & -8 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 8 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$$

$$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 8 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$$

72. **Página 29**

$$I - A^3 = mI - nA \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}^3 = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - n \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 32 & 58 \\ -20 & -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17n - m & 29n \\ -10n & -17n + m \end{pmatrix}$$

Igualando término a término se tiene que $m = -2$ y $n = 2$.

73. **Página 29**

$$A^2 - \square A + \square I = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \square \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \square \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 - 2\square + \square & 4 + \square \\ 4 - \square & 5 + 2\square - \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \square = -4 \\ \square = 3 \end{cases}$$

74. **Página 29**

La matriz B tiene que tener dimensión 3×2 para que se pueda multiplicar con A y, además, para que tengamos como resultado una matriz 2×2.

Como la primera fila es $\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 - 2e & 2f \\ 4 - c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando términos se tiene que:

$$\begin{cases} -2 - 2e = 0 \\ 2f = 2 \\ 4 - c = 3 \\ d = 1 \end{cases} - \begin{cases} c = -1 \\ d = 1 \\ e = 1 \\ f = 1 \end{cases} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

75. **Página 29**

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, A y B no cumplen la propiedad conmutativa para el producto.

76. **Página 29**

Debido a que la matriz A es antisimétrica, tenemos que $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$.

Así:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 3 \\ -6 & -10 & -2 \\ 3 & -2 & -13 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -a^2 - b^2 & -bc & ac \\ -bc & -a^2 + c^2 & -ab \\ ac & -ab & -b^2 - c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 3 \\ -6 & -10 & -2 \\ 3 & -2 & -13 \end{pmatrix}$$

Igualando cada término se tiene que:

$$\begin{cases} -a^2 - b^2 = -5 \\ -bc = -6 \\ ac = 3 \\ -a^2 - c^2 = -10 \\ -ab = -2 \\ -b^2 - c^2 = -13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a, b, c = 1, 2, 3 \\ a, b, c = -1, -2, -3 \end{cases}$$

Por tanto, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

77. **Página 29**

a) $A - B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^2 - B^2 - 2 \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 8 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -8 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 12 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \\ -8 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{cases} A - B^2 = A - B \cdot A - B = A^2 - A\,B - B\,A + B^2 \\ A - B^2 = A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2 \end{cases} \rightarrow A \cdot B = B \cdot A$

Para que se verifique igualdad, las matrices deben cumplir la propiedad conmutativa de la multiplicación.

78. **Página 29**

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5a-2b & 2a-5b & 0 \\ 5c-2d & 2c-5d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5a-2c & 2d-5b & 0 \\ 5c-2a & 5d+2b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando cada término se tiene que:

$$\begin{cases} 5a-2c=5a-2b \\ 2d-5b=2a+5b \\ 5c-2a=5c+2d \\ 5d-2b=2c-5d \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=\lambda \\ b=\mu \\ c=\nu \\ d=\lambda \end{cases}$$

Las matrices que conmutan son de la forma $M=\begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 \\ \nu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Por otro lado:

$$a-d+1=5\rightarrow\lambda+\lambda+1=5\rightarrow 2\lambda=4\rightarrow\lambda=2$$

La matriz que conmuta con la dada, cuyos elementos de la diagonal principal suman 5, y donde a_{11} = -a_{12} está determinada por:

$$a-b=0\rightarrow 2-\mu=0\rightarrow\mu=-2\rightarrow M_1=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

79. **Página 29**

$$X^2=\begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m^2 & m-a & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & s^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases} m^2=1\rightarrow m=+1 \\ m-a=0\rightarrow m=-a \\ a^2=1\rightarrow a=+1 \\ s^2=1\rightarrow s=+1 \end{cases}$$

Así:

$$X=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$$

80. **Página 29**

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2-2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\cdot 2 & 1 \end{pmatrix}\qquad A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4-2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\cdot 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n-1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n-2-2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix}\qquad A^{41}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\cdot 41 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 82 & 1 \end{pmatrix}$$

81. **Página 29**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Vemos que se sigue un patrón, si el exponente es impar $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2^n & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y si es par $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

De modo que $A^{2000} = \begin{pmatrix} 2^{2000} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2000} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2000} \end{pmatrix}$.

82. **Página 29**

$A^2 = 2A - I$

$A^3 - \ 2A - I\ A - 2A^2 - A - 2\ 2A - I\ - A - 3A - 2I$

$A^4 - 4A - 3I$

$A^n - nA - \ n - 1\ I$

83. **Página 29**

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad B^3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad B^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

84. **Página 29**

a) $A \cdot B = B \cdot A - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a-c & b-d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b \\ c-d & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = a - b \\ b = b \\ a - c = c - d \\ b - d = d \end{cases} - \begin{cases} a = \lambda \\ b = 0 \\ c = \lambda \\ d = \lambda \end{cases} - B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix}$$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$

85. **Página 29**

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&0&0\\2&0&2\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&0&0\\2&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&4\\0&0&0\\4&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^2&0&2^2\\0&0&0\\2^2&0&2^2\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}4&0&4\\0&0&0\\4&0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0&8\\0&0&0\\8&0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^3&0&2^3\\0&0&0\\2^3&0&2^3\end{pmatrix}$$

$$A^5=\begin{pmatrix}8&0&8\\0&0&0\\8&0&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&0&16\\0&0&0\\16&0&16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^4&0&2^4\\0&0&0\\2^4&0&2^4\end{pmatrix}$$

$$A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&0&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}$$

86. **Página 29**

a) $A\cdot M=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-3c&b-3d\\2c&2d\end{pmatrix}$ $\quad M\cdot A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&3a-2b\\c&3c-2d\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}a-3c=a\\b-3d=3a+2b\\2c=c\\2d=3c-2d\end{cases}\;-\;\begin{cases}a=a\\b=3a-3d\\c=0\\d=d\end{cases}\rightarrow M=\begin{pmatrix}a&3a-3d\\0&d\end{pmatrix}$$

b) $A^2=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&9\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&b_2\\0&2^2\end{pmatrix}$, donde $b_2=2\cdot 3+3=2\cdot b_1+3$.

$A^3=\begin{pmatrix}1&9\\0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&21\\0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&b_3\\0&2^3\end{pmatrix}$, donde $b_3=2\cdot 9+3=2\cdot b_2+3$.

$A^4=\begin{pmatrix}1&21\\0&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&45\\0&16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&b_4\\0&2^4\end{pmatrix}$, donde $b_4=2\cdot 21+3=2\cdot b_3+3$.

$A^n=\begin{pmatrix}1&b_n\\0&2^n\end{pmatrix}$, donde $b_n=2\cdot b_{n-1}+3$.

Además de expresar A^n recurrentemente, se puede escribir de la siguiente forma:

$$A^n=\begin{pmatrix}1&3\sum_{i=1}^{n}2^{i-1}\\0&2^n\end{pmatrix}$$

87. **Página 29**

a) $M^2=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&2ab\\0&a^2\end{pmatrix}$ $\quad M^3=\begin{pmatrix}a^2&2ab\\0&a^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^3&3a^2b\\0&a^3\end{pmatrix}$.

$M^4=\begin{pmatrix}a^3&3a^2b\\0&a^3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^4&4a^3b\\0&a^4\end{pmatrix}$ $\quad M^n=\begin{pmatrix}a^n&na^{n-1}b\\0&a^n\end{pmatrix}$

b) $M^{100}=\begin{pmatrix}a^{100}&100a^{99}b\\0&a^{100}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\rightarrow a=-1$

- Si $a=1\rightarrow b=\frac{1}{100}\rightarrow M_1=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{100}\\0&1\end{pmatrix}$
- Si $a=-1\rightarrow b=-\frac{1}{100}\rightarrow M_2=\begin{pmatrix}-1&-\frac{1}{100}\\0&-1\end{pmatrix}$

88. **Página 30**

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & m \\ m & -2m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-n & m \\ m & -2m-n \end{pmatrix}$$

Así, igualando los términos:

$$\begin{cases} 2 = m + n \\ -1 = m \\ -1 = m \\ 5 = -2m - n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 3 \end{cases}$$

b) $A^2 = (A - 3I) \cdot A^5 = A^2 \cdot A^2 \cdot A = (A - 3I)(A - 3I)A = (A^2 - 3A)(A - 3I)A =$

$$= (-A - 3I)(-3A - 3A - 9I)A = (-7A + 12I)A = -7A^2 - 12A = -7(-A + 3I) - 12A = 19A - 21I$$

Por tanto:

$$A^5 = 19\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - 21\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 19 \\ -38 & -2 \end{pmatrix}$$

89. **Página 30**

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ m & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ m & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 - 2m & 8 - 6 \\ 4m - 3m & 2m - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 - 2m & 2 \\ m & 2m + 9 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ m & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 - 2m & 2 \\ m & 2m - 9 \end{pmatrix}$$

Así, igualando términos:

$$\begin{cases} 4 = 16 - 2m \\ m = m \\ 2 = 2 \\ -3 = 2m + 9 \end{cases} \rightarrow m = -6$$

c) $\begin{pmatrix} 1 & m \\ n & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 - mn & m \\ n & mn \end{pmatrix} \rightarrow mn = 0$

Las matrices son del tipo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 0 \end{pmatrix}$ o bien $\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

90. **Página 30**

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} - a_{12}b_{21} - \dots - a_{1n}b_{n1} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{21}b_{12} - a_{22}b_{22} - \dots - a_{2n}b_{n2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_{n1}b_{1n} - a_{n2}b_{2n} + \dots - a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} - b_{12}a_{21} - \dots - b_{1n}a_{n1} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & b_{21}a_{12} - b_{22}a_{22} - \dots - b_{2n}a_{n2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & b_{n1}a_{1n} - b_{n2}a_{2n} + \dots - b_{nn}a_{nn} \end{pmatrix}$$

El primer elemento de la diagonal de la matriz *BA* se compone de todos los primeros sumandos de los elementos de la diagonal de la matriz *AB*.

El segundo elemento de la diagonal de la matriz *BA* se compone de todos los segundos sumandos de los elementos de la diagonal de la matriz *AB*, y así sucesivamente.

b) $Tr\ AB = Tr \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} = 7 - 15 = 22$ $\qquad Tr\ BA = Tr \begin{pmatrix} a & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = a - 1$

$a - 1 = 22 \rightarrow a = 23$

91. **Página 30**

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ $\qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix} \rightarrow$ Las matrices son del tipo $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ o bien $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$.

92. **Página 30**

a) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 = F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow$ El rango es 2.

b) $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 = 3F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ El rango es 1.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$ El rango es 3.

d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 = F_2 - 2F_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 = 4F_1 + F_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ El rango es 2.

93. **Página 30**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 = F_2 + 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$ El rango es 2.

b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = 2F_3 - F_1]{F_2 = 4F_2 + F_1} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = 7F_3 + 9F_2} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ El rango es 2.

c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 + F_1]{F_2 = F_2 + 3F_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 7 \\ 0 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ El rango es 2.

94. **Página 30**

$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 & -5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{7}{2} & 4 & 4 & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 + \frac{7}{2}F_1]{F_2 = F_2 + 4F_1} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & -3 & -10 & -13 \\ 0 & -3 & -10 & -13 \end{pmatrix} \rightarrow$ El rango es 2.

95. **Página 30**

$\begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ a & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - aF_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1-3a & 3-a \end{pmatrix} \rightarrow 3 - a = 0 \rightarrow a = 3$

Si $a = 3$ el rango de la matriz es 2.

96. **Página 30**

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & m \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 - 3F_1]{F_2 = F_2 + 3F_1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & m \\ 0 & 7 & m \\ 0 & -2 & m-18 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = 7F_3 + 2F_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & m \\ 0 & 7 & m \\ 0 & 0 & 9m-126 \end{pmatrix}$

$9m - 126 = 0 \rightarrow m = 14$

- Si $m = 14$, entonces Rango $(A) = 2$.
- Si $m \neq 14$, entonces Rango $(A) = 3$.

97. **Página 30**

$\begin{pmatrix} a & a-3 & a-4 \\ a & a-5 & a-6 \\ a & a-7 & a-8 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 = C_3 - C_1]{C_2 = C_2 - C_1} \begin{pmatrix} a & 3 & 4 \\ a & 5 & 6 \\ a & 7 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 - F_1]{F_2 = F_2 - F_1} \begin{pmatrix} a & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} a & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ Rango $(M) = 2$

Es decir, el rango de la matriz siempre es 2, independientemente del valor del parámetro a.

98. **Página 30**

$$A=\begin{vmatrix} -2 & 1 & -\frac{1}{2} & -4 \\ 4 & -2 & 1 & 8 \\ 6 & -3 & \frac{3}{2} & m \end{vmatrix}$$

Las columnas 2 y 3 son linealmente dependientes con la 1:

$$C_2=-\frac{1}{2}C_1 \qquad C_3=\frac{1}{4}C_1$$

Si C_4 linealmente dependiente con $C_1 \longrightarrow$ Rango $=1$.

En caso contrario $\longrightarrow$ Rango $=2$.

Esto es:

- $m=12 \longrightarrow C_4=2C_1 \longrightarrow$ Todas las columnas son linealmente dependientes $\longrightarrow$ Rango $=1$.
- $m\neq 12 \longrightarrow$ La primera y la segunda columna son linealmente independientes $\longrightarrow$ Rango $=2$.

99. **Página 30**

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad A^2=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1-2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad A^3=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1-2-3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Entonces:

$$A^n=\begin{vmatrix} 1 & n & \frac{(n-1)n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Su rango es independiente de n y siempre es 3.

100. **Página 30**

a) Para que $A=\begin{vmatrix} d & a & a \\ b & d & 3 \\ c-4 & c & d \end{vmatrix}$ sea antisimétrica, se debe cumplir que:

$$\left.\begin{array}{l} a=-b \\ a=-(c-4) \\ 3=-c \end{array}\right\} \longrightarrow a=7, b=-7, c=-3, d=0$$. Así, $A=\begin{vmatrix} 0 & 7 & 7 \\ -7 & 0 & 3 \\ -7 & -3 & 0 \end{vmatrix}$.

b) $A=\begin{vmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 3 \\ -4 & 0 & d \end{vmatrix} \xrightarrow{4F_1+dF_3} \begin{vmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 3 \\ 0 & 0 & d^2 \end{vmatrix}$

- Si $d=0 \longrightarrow$ Rango $(A)=1$
- Si $d\neq 0 \longrightarrow$ Rango $(A)=3$

101. **Página 30**

$$A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} \\ 1 & 3 & -2 \\ a-2 & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3+(2a+4)F_1]{F_2=F_2+2F_1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & 4 & -2+a \\ 0 & a-2 & 3a-a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3-\frac{a+2}{4}F_2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & 4 & -2+a \\ 0 & 0 & \frac{3}{4}a^2-3a-1 \end{pmatrix}$$

Si $\frac{3}{4}a^2 \quad 3a \quad 1 \quad 0$ la matriz tiene rango 2, en caso contrario rango 3.

Veamos para que valores la matriz tiene rango 2:

$$\frac{3}{4}a^2 \quad 3a \quad 1 \quad 0 \quad 3a^2 \quad 12a \quad 4 \quad 0 \cdot a \quad \frac{12 \quad \sqrt{12^2 \quad 4\cdot 3\cdot 4}}{2\cdot 3} \quad \frac{12 \quad \sqrt{96}}{6} \quad 2 \; | \; \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

Si $a \cdot \quad 2 \quad \frac{2}{3}\sqrt{6}$, entonces la matriz tiene rango 3.

102. **Página 31**

a) $$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_2+F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1=F_1+5F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} \left(\begin{array}{cc} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{array}\right)$$

b) $$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=\frac{F_2}{3}} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1=4F_2-F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right) \rightarrow B^{-1}=\left(\begin{array}{cc} \frac{4}{3} & -1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right)$$

c) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=F_3-F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=-F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1=F_1-F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow C^{-1}=\left(\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

d) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2=F_2-2F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1=2F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow D^{-1}=\left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

103. **Página 31**

a) $$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1=F_1+3F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} \left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=3F_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=\frac{F_2}{4}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right) \rightarrow B^{-1}=\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

b) $A \cdot B^{-1}$

$$AB \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -6 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 = 6F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 = \frac{F_2}{4}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$AB^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Se cumple que $A \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

104. **Página 31**

a) $$\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & -4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 = 2F_1 + 3F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 = F_1 + 4F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 = -\frac{1}{3}F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

b) $$\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 = 3F_2 - 4F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 = F_1 - 2F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & 9 & -6 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 = -\frac{1}{3}F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right)$$

Se puede comprobar que:

$$A^{-1\,t} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = A^{t\,-1}$$

105. **Página 31**

a) $$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 = F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 = \frac{F_2}{2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 = 2F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$A^{-1\,-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A$$

b) $$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 = -\frac{F_2}{2}} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 = 3F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{array}\right)$$

$$B^{-1} \begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estos resultados se cumplen para cualquier matriz invertible.

106. **Página 31**

$A^{-1}\ \ 2I\ \ A\ \cdot AA^{-1}\ \ A\ 2I\ \ A\ \ \ 2A\ \ \ A^2\ \ I$

$2\begin{pmatrix}2 & a\\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & a\\ b & c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & a\\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2a\\ 2b & 2c\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}4 & ab & 2a & ac\\ 2b & cb & ab & c^2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}ab & ac\\ cb & 2c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ab & ac\\ ab & c^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot c\ \ 0, b\ \ \ \frac{1}{a}$

Por tanto:

$$A=\begin{pmatrix}2 & a\\ -\frac{1}{a} & 0\end{pmatrix}$$

107. **Página 31**

Buscamos una matriz de la forma:

$$M\ \ \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ \ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}a & 2a & c\\ b & 2b & d\end{pmatrix}\ \ \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$

Así, $M\ \ \begin{pmatrix}0 & c\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, pero M no es invertible.

Por tanto, no son semejantes.

108. **Página 31**

a) $A^2\ \ 3I\ \ 2A\ \cdot A^2\ \ 2A\ \ \ 3I\ \cdot A\ A\ \ 2I\ \ \ 3I\ \cdot A\left(\frac{1}{3}\ A\ \ 2I\right)\ \ I\ \rightarrow\ A^{-1}\ \ \frac{1}{3}\ A\ \ 2I$

b) $\begin{pmatrix}x & y\\ y & x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ y & x\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\ \ \begin{pmatrix}2x & 2y\\ 2y & 2x\end{pmatrix}\ \rightarrow\ \begin{pmatrix}x^2 & y^2 & 3 & 2xy\\ 2xy & x^2 & y^2 & 3\end{pmatrix}\ \ \begin{pmatrix}2x & 2y\\ 2y & 2x\end{pmatrix}$

$2xy = 2y - x = 1$ o bien $y = 0$.

- Si $x = 1 \rightarrow x^2 - y^2 - 3 = 2x - 1 + y^2 - 3 = 2 - y = -2$. Entonces:

  $A\ \ \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ o bien $A\ \ \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

- Si $y = 0 \rightarrow x^2 - y^2 - 3 = 2x - x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 3$. Entonces:

  $A\ \ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ o bien $A\ \ \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

109. **Página 31**

$AB^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$\begin{pmatrix}2 & 4\\ 5 & 3\end{pmatrix}\ B^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot B\cdot\begin{pmatrix}2 & 4\\ 5 & 3\end{pmatrix}\ \ BB^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\ \rightarrow\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ 5 & 3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{3}{14} & \frac{2}{7}\\ \frac{5}{14} & -\frac{1}{7}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{14} & \frac{3}{7}\end{pmatrix}$

110. **Página 31**

a) $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a & c & a & b \\ 2b & d & b & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a & b & 2c & d \\ a & 0 & c & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2a - c = 2a + b \\ a = 2c + d \\ 2b - d = -a \\ b = -c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -2c + d \\ b = -c \\ c = -c \\ d = d \end{cases}$

Las matrices que conmutan con A son de la forma $\begin{pmatrix} 2c & c \\ -c & c \end{pmatrix}$.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$A^n = \begin{pmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

111. **Página 31**

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{cF_1 - aF_2} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & cb-ad & c & -a \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 = cF_2 - aF_2} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & cb-ad & c & -a \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 = \frac{F_2}{cb-ad}} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{c}{cb-ad} & \frac{-a}{cb-ad} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 = F_1 - bF_2} \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1-\frac{bc}{cb-ad} & \frac{ab}{cb-ad} \\ 0 & 1 & \frac{c}{cb-ad} & \frac{-a}{cb-ad} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 = \frac{F_1}{a}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{cb-ad-bc}{a\,cb-ad} & \frac{ab}{a\,cb-ad} \\ 0 & 1 & \frac{c}{cb-ad} & \frac{-a}{cb-ad} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-d}{cb-ad} & \frac{b}{cb-ad} \\ \frac{c}{cb-ad} & \frac{-a}{cb-ad} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-cb} & \frac{-b}{ad-cb} \\ \frac{-c}{ad-cb} & \frac{a}{ad-cb} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-cb}\cdot\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Para que sea invertible se debe cumplir que $cb - da = 0$.

112. **Página 31**

$$A = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1/5^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5^3 \\ 0 & 1/5^3 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1/5^n & 0 & 0 \\ 0 & 1/5^n & 0 \\ 0 & 0 & 1/5^n \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es par.} \\ \begin{pmatrix} 1/5^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5^n \\ 0 & 1/5^n & 0 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

113. **Página 31**

$A^2 \quad 7A \quad I \cdot A \; A \mid 7I \quad I \qquad\qquad A^{-1} = A - 7I$

114. **Página 31**

a) $A^t = A^{-1} - A^t A = I - \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & b \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-a^2 & ab & ac \\ ab & \frac{1}{2}+b^2 & \frac{1}{2}+bc \\ ca & \frac{1}{2}-bc & \frac{1}{2}-c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a=0 \\ b=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ c=-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$ o $\begin{vmatrix} a=0 \\ b=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ c=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$

b) Si $b \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $c \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow A^4 = A^{2\,2} = I.$

Si $b \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $c \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow A^4 = A^{2\,2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$

115. **Página 31**

a) $A^2 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \quad 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 2I$

b) $A \cdot A = 2I \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot A = A^{-1} 2I \rightarrow \frac{1}{2} A = A^{-1} \rightarrow A^{-1} = A = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$

c) $A^2 = 2I \rightarrow A^{12} = A^{2\,6} = 2I^{\,6} = 2^6 I \qquad A^{-1} = \frac{1}{2} A \rightarrow A^{-12} = A^{-1\,12} = \left| \frac{1}{2} A \right|^{12} = \left| \frac{1}{2^2} A^2 \right|^6 = \left| \frac{1}{2^2} 2I \right|^6 = \frac{1}{2^6} I$

116. **Página 31**

a) $AX = B \rightarrow X = A^{-1}AX = A^{-1}B$

b) $XA = B \rightarrow X = XAA^{-1} = BA^{-1}$

c) $AX + B = C \rightarrow AX = C - B \rightarrow X \quad A^{-1}AX \quad A^{-1} \; C \quad B$

d) $AX - A = B \rightarrow AX = B - A \rightarrow X - A^{-1}AX - A^{-1} \; B - A \; - A^{-1}B - I$

e) $A^{-1}X = B \rightarrow X = AA^{-1}X = AB$

f) $AXB = C \rightarrow X = A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1}$

g) $A^t X = B \rightarrow X = A^{t\;-1} A^t X = A^{t\;-1} B$

h) $AXA = A^2 - I \rightarrow X = A^{-1}AXAA^{-1} = A^{-1} \; A^2 \quad I \; A^{-1} = A^{-1}A^2 \mid A^{-1} \; A^{-1} = A \mid A^{-1} \; A^{-1} = I \mid A^{-1\,2}$

117. **Página 31**

Si X $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, se tiene que $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 3 & c & 1 \\ b & 2 & d & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} a-3=1 \\ b-2=2 \\ c-1=-1 \\ d-5=7 \end{cases} - \begin{cases} a=-2 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=12 \end{cases} \rightarrow X \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Es una matriz diagonal.}$$

118. **Página 31**

Despejamos X, es decir: $A - X = 2B - X = 2B - A$

Entonces $X = 2B - A - X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

119. **Página 31**

$$2A \quad 5X \quad B \cdot 2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad 5\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} - 5\cdot\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot 5\cdot\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow X \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 14 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 8/5 \\ 1/5 & 14/5 \end{pmatrix}$$

120. **Página 32**

Despejamos la matriz *X*.

$$A - A^2 - A\cdot B - X \rightarrow -X - A - A^2 - A\cdot B \rightarrow X - A^2 - A - A\cdot B - X - A\cdot A - I - B$$

Operamos la matriz para obtener la matriz pedida. En efecto:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

121. **Página 32**

La matriz debe ser de orden 2×4 para que se puedan realizar el producto y la suma correspondientes.

Sea X $\begin{pmatrix} a & c & e & g \\ b & d & f & h \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & c & e & g \\ b & d & f & h \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & c & e & g \\ b & d & f & h \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & c & e & g \\ b & d & f & h \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c & e & g \\ b & d & f & h \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c & e & g \\ b & d & f & h \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ 13 & 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

Así, X $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & -1 \\ 13 & -3 & -10 & 4 \end{pmatrix}$.

122. **Página 32**

Sea $X \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & c & 1 \\ b & 1 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = b - c \\ b - 1 = a - d \\ c - 1 = d - a \\ d = c - b \end{cases} - \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = \frac{1}{3} \\ c = \frac{1}{3} \\ d = \frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow X - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

123. **Página 32**

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & a & 2c \\ b & b & 2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 2b & & 2d & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a & b & a & 3c & d \\ 3b & & b & 4d & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2a - b = 0 \\ 3b = 1 \\ -a - 3c - d = -2 \\ -b - 4d = 1 \end{cases} - \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = \frac{1}{3} \\ c = -\frac{1}{2} \\ d = \frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

124. **Página 32**

$$D - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot D \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$D \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$$

125. **Página 32**

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \\ -20 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

126. **Página 32**

$$X \quad I \; B \quad A \rightarrow X \quad I \; BB^{-1} \quad AB^{-1} \rightarrow X - I = AB^{-1} \rightarrow X = AB^{-1} - I \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -4 & 2 & -4 \\ 10 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

127. **Página 32**

a) $AX - A^t = A \longrightarrow AX = A - A^t \longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}\ A - A^t \longrightarrow X = I + A^{-1}A^t$

A debe tener inversa. Para ello, el rango de la matriz debe ser 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ -5 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 + 4F_1]{F_2 = F_2 + 5F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & 12 & 1 - 5m \\ 0 & 11 & 1 + 4m \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = 12F_3 - 11F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & 12 & 1 - 5m \\ 0 & 0 & 1 - 7m \end{pmatrix}$$

Si $1 - 7m = 0$, la matriz no tiene inversa. Es decir, para $m = \frac{1}{7}$ la ecuación sí tiene solución.

b) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -7 & -11 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$$\longrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \\ -29 & 25 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \\ -29 & 25 & 8 \end{pmatrix}$$

128. **Página 32**

$X - XA = B^t \rightarrow X\ I - A\ = B^t \rightarrow X = B^t\ I + A\ ^{-1}$

$$X \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow X = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

129. **Página 32**

a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 = -F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 7 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 = F_2 - 7F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right)$

b) $AXA = A^2 + A - X = A^{-1}(A^2 - A)A^{-1} = A^{-1}A(A - I)A^{-1} = (A - I)A^{-1} = I + A^{-1}$

$$A^{-1} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$I \quad A^{-1} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow X \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

130. **Página 32**

$XB - A = B - A^2 \longrightarrow XB = B + A^2 - A \longrightarrow XBB^{-1} = B - A^2 - A\ B^{-1} \longrightarrow X = I - A^2 - A\ B^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \longrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \longrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

131. **Página 32**

a) Sumando a la segunda ecuación la primera, resulta: $3X \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Despejando en la segunda ecuación, obtenemos *Y*. $X \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} Y \rightarrow Y \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) Restando a la primera ecuación la segunda, resulta: $2Y \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow Y \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Despejando en la segunda ecuación, obtenemos *X*. $X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

c) Sumando a la segunda ecuación dos veces la primera, resulta: $7X \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Despejando en la primera ecuación, obtenemos *Y*. $3X \quad Y \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow Y \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

d) Multiplicamos la primera ecuación por tres y le restamos dos veces la segunda.

$$\left.\begin{array}{l} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 6X - 9Y = \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \\ 6X - 4Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \rightarrow 13Y \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} -\frac{5}{13} & \frac{15}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix}$$

Despejando en la primera ecuación obtenemos *X*:

$$2X = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 3Y = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -\frac{5}{13} & \frac{15}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{13} & \frac{20}{13} \\ \frac{32}{13} & -\frac{12}{13} \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{10}{13} \\ \frac{16}{13} & -\frac{6}{13} \end{pmatrix}$$

132. **Página 32**

$A^2 \quad AB \quad BA \quad B^2 \quad A \quad B \; A \quad A \quad B \; B \quad A \quad B \quad A \quad B$

$$A - B^{-1} \; A + B \quad A - B = A - B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} A - B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$ Sumando las dos ecuaciones, resulta: $2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sustituyendo en la primera ecuación, obtenemos *B*: $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

133. **Página 32**

Hay que resolver este sistema:

$$\begin{matrix} 2X & Y & \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \\ 3X & 2Y & \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Multiplicamos la primera ecuación por dos y le restamos la segunda para obtener X:

$$\begin{matrix} 4X & 2Y & \begin{pmatrix} 10 & 24 & 14 \\ 8 & 4 & 14 \end{pmatrix} \\ 3X & 2Y & \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} \end{matrix} \rightarrow X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 14 \\ 12 & 6 & 21 \end{pmatrix}$$

Despejando en la primera ecuación, obtenemos Y:

$$Y \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} 2X \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 14 \\ 12 & 6 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ 28 & 14 & 49 \end{pmatrix}$$

134. **Página 32**

Restando a la primera ecuación la segunda, resulta:

$$BY = C - Y \rightarrow BY - Y = C \rightarrow B \quad I\,Y \quad C \rightarrow Y = B - I^{-1}C$$

$$Y = \left(\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Despejando en la segunda ecuación, obtenemos X:

$$AX = Y \rightarrow X = A^{-1}AX = A^{-1}Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

135. **Página 32**

$$2X - Y = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad 4X - 2Y = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -10 \\ 0 & 10 & 0 \\ -10 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$X - 2Y = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 20 & 0 & 20 \\ 0 & 30 & 0 \end{pmatrix} \quad X - 2Y = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 20 & 0 & 20 \\ 0 & 30 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow 5X = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 0 \\ 20 & 10 & 20 \\ -10 & 30 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Despejando en la segunda ecuación, obtenemos Y:

$$2Y = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 20 & 0 & 20 \\ 0 & 30 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -8 & -10 \\ -16 & 2 & -16 \\ -2 & -24 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 \\ -8 & 1 & -8 \\ -1 & -12 & 1 \end{pmatrix}$$

136. **Página 32**

a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 = F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 = \frac{F_2}{3}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 = F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$

- Si $a = 0$ $\longrightarrow$ No existe inversa de A.
- Si $a \neq 0$ $\xrightarrow{F_1 = \frac{F_1}{a}}$ $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3a} & -\frac{1}{3a} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$

Así:

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} a & 1 \\ -a & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3a} & -\frac{1}{3a} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \rightarrow a = -2$$

b) $\begin{pmatrix} a & 1 \\ -a & 2 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\rightarrow X = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{10}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

137. **Página 32**

a) $M^2 - 3M = \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1^2 + 3a - 3 & 0 \\ 3-a & -2 \end{pmatrix}$

$$a \quad 1^2 \quad 3a \quad 3 \quad 0 \quad a \quad 1 \quad a \quad 1 \quad 3 \quad 0 \quad a \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

La matriz no es invertible cuando $a = -1$ o cuando $a = -4$.

b) $M \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$MX \quad M \quad 2I \cdot MX \quad 2I \quad M \cdot X \quad M^{-1} \, 2I \quad M \quad 2M^{-1} \quad I \rightarrow X \quad 2M^{-1} \quad I \quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

138. **Página 33**

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^n = \begin{cases} A^{3n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^{3n+1} = A \\ A^{3n+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

b) $X \cdot A^4 \quad A^2 \quad A \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X \cdot A \quad A^2 \quad A \quad X \cdot A^2 \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$X \cdot A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

139. **Página 33**

a) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = 2F_3 + F_1]{F_2 = 2F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2a-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- Si $a = 1$, entonces Rango $(A) = 2$.
- Si $a \neq 1$, entonces Rango $(A) = 3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & a \\ 2 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F'_3 = F_2 + F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 = F_2 + 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 7 & a-8 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

- Si $a = -1$, entonces Rango $(B) = 2$.
- Si $a \neq -1$, entonces Rango $(B) = 3$.

b) $AX = B - \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} - X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9/4 & 7/2 & 1/4 & -3/2 \\ 5/2 & -3 & 1/2 & 2 \\ 5/2 & -3 & 1/2 & 3 \end{pmatrix}$$

140. **Página 33**

	Comida	Recibos
Septiembre	400 €	120 €
Octubre	500 €	180 €
Noviembre	350 €	250 €

$$A = \begin{pmatrix} 400 & 120 \\ 500 & 180 \\ 350 & 250 \end{pmatrix}$$

141. **Página 33**

Colocamos las líneas de autobuses *A*, *B* y *C* por columnas, y los días *Lunes*, *Martes* y *Miércoles* por filas:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

142. **Página 33**

Matriz fila de costes por unidad: $A = 32 \quad 46 \quad 71$ Matriz fila de ventas por unidad: $B \quad 53 \quad 82 \quad 140$

Matriz fila de beneficios por unidad: $C \quad B - A \quad 21 \quad 36 \quad 69$

Matriz columna de unidades vendidas: $D = \begin{pmatrix} 2100 \\ 1400 \\ 900 \end{pmatrix}$

Beneficio anual: $B \cdot D - A \cdot D = B - A \cdot D = C \cdot D = 21 \quad 36 \quad 69 \begin{pmatrix} 2100 \\ 1400 \\ 900 \end{pmatrix} = 156\,600$

143. **Página 33**

a) Colocamos el tipo de habitación por filas (*Lujo, Doble, Individual*), y el hotel por columnas (*Edén, Paraíso, Spa*):

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 30 & 50 & 50 \\ 10 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

En la segunda matriz colocamos, por filas, el tipo de habitación (*Lujo, Doble, Individual*), y en la columna, el dinero en euros:

$$\begin{pmatrix} 120 \\ 80 \\ 50 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{matrix} & & \end{matrix} 120 \quad 80 \quad 50 \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 30 & 50 & 50 \\ 10 & 10 & 8 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \text{Edén} & \text{Paraíso} & \text{Spa} \end{matrix} \begin{pmatrix} 3620 & 4980 & 4880 \end{pmatrix}$$

144. **Página 33**

$$\begin{matrix} & & \end{matrix} \begin{matrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{matrix} \begin{matrix} \text{D} & \text{No D} \end{matrix} \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}96 \\ 0{,}02 & 0{,}98 \\ 0{,}01 & 0{,}99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}26 & 12{,}74 \\ 0{,}28 & 13{,}72 \end{pmatrix}$$

El número de tornillos planos no defectuosos es 12 740, y el de tornillos de estrella no defectuosos es 13 720.

145. **Página 33**

Las columnas representan los productos *X* e *Y*, y las filas representan a las empresas *A*, *B* y *C*.

Inicialmente, las empresas recibían $M = \begin{pmatrix} 1000 & 1000 \\ 1000 & 1000 \\ 1000 & 1000 \end{pmatrix}$.

Este mes las empresas han recibido $N = \begin{pmatrix} 600 & 300 \\ 400 & 800 \\ 900 & 700 \end{pmatrix}$.

Las disminuciones producidas son: $M - N = \begin{pmatrix} 1000 & 1000 \\ 1000 & 1000 \\ 1000 & 1000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 600 & 300 \\ 400 & 800 \\ 900 & 700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 & 700 \\ 600 & 200 \\ 100 & 300 \end{pmatrix}$

Las disminuciones porcentuales son: $M - N = \begin{pmatrix} 40\% & 70\% \\ 60\% & 20\% \\ 10\% & 30\% \end{pmatrix}$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. **Página 34**

Solo es necesaria una arista que una los dos vértices, porque la representación en forma de grafo es independiente de la forma real de la carretera.

2. **Página 34**

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Es una matriz simétrica.}$$

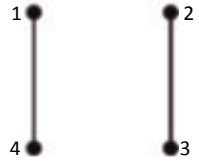
$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Es una matriz simétrica.}$$

3. **Página 34**

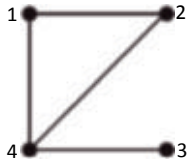
El número máximo de aristas es 4 porque si se añadiese otra arista, el vértice pasaría por segunda vez por alguno de los vértices, y el camino no sería simple.

4. **Página 34**

a)



b)



5. **Página 34**

Calculamos la matriz de adyacencia y su potencia tercera:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$a_{24} = 4 \longrightarrow$ Hay 4 caminos de longitud 3 aristas.

Determinantes

2

ACTIVIDADES

1. Página 36

a) $|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-4) - 2\ \ 5 = 12 - 10 = 2$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\ \ 1 - 0\ \ (-2)\cdot(-1) - 5\cdot 1\cdot 1 - 5\cdot 1\ \ (-1) - 0\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot(-2)\cdot 1 = 16$

2. Página 36

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2x \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4\cdot(-2) - 2x\cdot 1 = -8 - 2x \rightarrow -2x - 8 = 0 \rightarrow x = -4$

b) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & x & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot x\cdot 2 - (-2)\cdot(-5)\cdot 1 + (-3)\ \ 2\cdot 1 - (-3)\ \ x\cdot 1 - (-2)\cdot 2\cdot 2 - 3\cdot(-5)\cdot 1 = 9x - 27 \rightarrow 9x - 27 = 0 \rightarrow x = -3$

3. Página 37

a) $\begin{vmatrix} -1 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1\ \ 1 - 7\cdot(-2)\cdot 2 - 4\cdot 2\cdot(-1) - 4\cdot 1\cdot 2 - 7\cdot 2\cdot 1 - (-1)\cdot(-2)\cdot(-1) = -57$

b) $|A| = |A^t| = -57$

c) $|2A| = 2^3\ |A| = 8\cdot(-57) = -456$

d) $|-A| = (-1)^3\ |A| = -(-57) = 57$

4. Página 37

a) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^t \rightarrow \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}$

b) $\begin{vmatrix} a & 3b \\ c & 3d \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -2$

c) $\begin{vmatrix} 5b & 5d \\ 3a & 3c \end{vmatrix} = 3\cdot 5\cdot\begin{vmatrix} b & d \\ a & c \end{vmatrix} = 3\cdot 5\ \ (-1)\cdot\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 3\cdot 5\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 10$

5. Página 38

$$\begin{vmatrix} 3a & b-2a & c-a \\ 3d & e-2d & f-d \\ 3g & h-2g & i-g \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} a & b-2a & c-a \\ d & e-2d & f-d \\ g & h-2g & i-g \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3\cdot(-2) = -6$$

6. **Página 38**

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{\substack{F'_2=F_2-\frac{1}{2}F_1 \\ F'_3=F_3+F_1}}{=} \begin{vmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \overset{F'_3=F_3+F_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot (-1) = -4$$

$$\begin{vmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & \frac{1}{2} & -2 \end{vmatrix} \overset{\substack{F'_2=F_2-\frac{1}{4}F_1 \\ F'_3=F_3+\frac{1}{2}F_1}}{=} \begin{vmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

7. **Página 39**

$$\begin{vmatrix} a & a-1 & a-2 \\ a & a-3 & a-4 \\ a & a-5 & a-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ a & 3 & a \\ a & 5 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & 2 \\ a & a & 4 \\ a & a & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ a & 3 & 4 \\ a & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0 - 0 + 0 + \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ a & 3 & 4 \\ a & 5 & 6 \end{vmatrix} \overset{\substack{F'_3=F_3-F_2 \\ F'_2=F_2-F_1}}{=} \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

8. **Página 39**

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 21 & 23 \\ 23 & 12 & -14 \\ 30 & 43 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-7) \cdot 10 - 8 \cdot 3 \cdot 1 = -466$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \cdot 4 = 10 \qquad |A| \cdot |B| = -466 \cdot 10 = -4\,660$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} -16 & 21 & 23 \\ 23 & 12 & -14 \\ 30 & 43 & 1 \end{vmatrix} = (-16) \cdot 12 \cdot 1 - 21 \cdot (-14) \cdot 30 + 23 \cdot 23 \cdot 43 - 23 \cdot 12 \cdot 30 - 21\ 23 \cdot 1 - (-16) \cdot (-14) \cdot 43 = -4\,660$$

9. **Página 40**

a) $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{F'_2=F_2-2F_1 \\ F'_3=F_3-3F_1 \\ F'_4=F_4-2F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{F''_3=F'_3-\frac{4}{3}F'_2 \\ F''_4=F'_4-F'_2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \overset{F'''_4=F''_4+6F''_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1\ 3\ \left|\frac{-2}{3}\right| \cdot 9 = -18$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{F'_2=F_2-2F_1 \\ F'_3=F_3-F_1 \\ F'_4=F_4-3F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \end{vmatrix} \overset{F''_4=F'_4-\frac{2}{3}F'_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{3} & -\frac{16}{3} \end{vmatrix} = 0$$

10. **Página 40**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{F_3 \leftrightarrow F_4}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ a & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{F'_2=F_2-F_1 \\ F'_3=F_3-F_1 \\ F'_4=F_4-aF_1}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -1-a & -1-a & 1-2a \end{vmatrix} \overset{\substack{F''_3=F'_3+2F'_2 \\ F''_4=F'_4+(1+a)F'_2}}{=}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & -5-5a & 7-4a \end{vmatrix} \overset{F'''_4 = F''_4 - \left(\frac{5+5a}{8}\right)F''_3}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2-a \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot (-8) \cdot (2-a)$$

Por tanto, el determinante será 0 si y solo si $a = 2$.

11. **Página 41**

a) $\vdots_{21} = 3$

b) $\vdots_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 18 = -4$

12. **Página 41**

a) $A_{12} = -1^{1+2} \cdot 1 = -1$

b) $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -(8 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2)) = 4$

13. **Página 42**

a) $\begin{vmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5A_{11} + (-4)A_{12} - 0A_{13} = 5 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + (-4)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 5(3-2) + 4(-12) = -43$

$\begin{vmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 15 - 10 - 48 = -43$

b) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3A_{11} - 2A_{12} - 1A_{13} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \ (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$

$- 3(8-6) - 2(4-6) - (-2-4) - 32$

$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 24 - 12 - 2 - 4 - 18 + 8 = 32$

14. **Página 42**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \ A_{11} - 0 \ A_{12} - 1 \cdot A_{13} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 10 \end{vmatrix} = (-1) \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} = -(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 10 \end{vmatrix} - 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(-15) - 2 \cdot 7 = 1$

15. **Página 43**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1-a & 2-a & 3+a & 4-a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \overset{F'_2 = F_2 - F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

16. **Página 43**

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 5 & 7 \\ 0 & 2 & a & 6 \\ 0 & 0 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

17. **Página 44**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ -1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 6 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 \qquad \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \qquad \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -6 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \qquad \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad 6 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad 3 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad 1 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad 4 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 3$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad 4 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 3 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 1 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad 6$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad 0$$ Y cada uno de los elementos de la matriz es un menor de orden 1.

18. **Página 44**

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ $6 \quad 4 \quad 2 \cdot 0$; por tanto, el rango de *A* es 2.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ $4 \quad 4 \quad 8 \neq 0$; por tanto, el rango de *B* es 2.

19. **Página 45**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 2 - 2 = 0 \rightarrow$ Rango ≥ 2

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Rango < 3

Por tanto, el rango de la matriz *A* es 2.

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0 \rightarrow$ Rango ≥ 2.

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 12 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Rango < 3

Por tanto, el rango de la matriz *B* es 2.

20. **Página 45**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0 \rightarrow$ Rango ≥ 2

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & m \end{vmatrix} = m - 15 - 4 - 10 - 2m - 3 = 3m - 24 \rightarrow 3m - 24 = 0 \rightarrow m = 8$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & m \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 5m - 4 - 10 - 12 - m = -6m - 12 \rightarrow -6m - 12 = 0 \rightarrow m = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & m \\ 5 & m & 6 \end{vmatrix} = 18 + 10m + 4m - 30 - 24 - m^2 = -m^2 - 14m - 36 \rightarrow -m^2 + 14m - 36 = 0 \rightarrow m = 7 + \sqrt{13}$

Ningún valor de *m* anula los tres menores de orden 3 simultáneamente, luego el rango de *A* es 3.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0 \rightarrow$ Rango ≥ 2

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2m - m - 1 - 2 - m^2 = -m^2 + 3m - 2 \rightarrow -m^2 + 3m - 2 = 0 \rightarrow m = 1$ y $m = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 1 \end{vmatrix} = m + m - 1 + m^2 - m^2 \; m - 1 \; -1 - m = -m^3 - 2m^2 - m - 2 \rightarrow -m^3 + 2m^2 + m - 2 = 0 - \begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 1 \end{vmatrix} = m + 2 \; m - 1 \; - m - m \; m - 1 \; -2 - m = -m^2 + 4m - 4 \rightarrow -m^2 + 4m - 4 = 0 \rightarrow m = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ m-1 & m & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2m \; m - 1 + m - \; m - 1 - 2 - m^2 = m^2 - 2m \rightarrow m^2 \quad 2m \quad 0 \; \cdot \begin{cases} m & 0 \\ m & 2 \end{cases}$

Solo el valor $m = 2$ anula los cuatro menores de orden 3 simultáneamente, luego el rango de *B* es 3 para todo valor $m \neq 2$ y para $m = 2$ el rango de *B* es 2.

21. **Página 46**

a) $\text{Adj}(A)=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\text{Adj}(B)=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\text{Adj}(C)=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

22. **Página 46**

$$\text{Adj}(A)=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 16 & -16 \\ 2 & -16 & 10 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow Adj(A)^t=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 16 & -16 & 6 \\ -16 & 10 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot Adj(A)^t=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 16 & -16 & 6 \\ -16 & 10 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 8 \end{vmatrix}=40-96-72-120-64-36=-12 \qquad A\cdot Adj(A)^t=\begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}=-12\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

23. **Página 47**

a) $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}=1 \rightarrow Adj(A)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow Adj(A)^t=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj(A)^t=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $|B|=\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=24 \rightarrow Adj(B)=\begin{pmatrix} -4 & 7 & -1 \\ 4 & -1 & 7 \\ 20 & -11 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow Adj(B)^t=\begin{pmatrix} -4 & 4 & 20 \\ 7 & -1 & -11 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}Adj(B)^t=\frac{1}{24}\begin{pmatrix} -4 & 4 & 20 \\ 7 & -1 & -11 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{7}{24} & -\frac{1}{24} & -\frac{11}{24} \\ -\frac{1}{24} & \frac{7}{24} & \frac{5}{24} \end{pmatrix}$$

24. **Página 47**

a) $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix}=-m^2+4m-3 \rightarrow m^2-4m+3=0 \rightarrow \begin{matrix} m=1 \\ m=3 \end{matrix}$ → A es invertible si y solo si $m\neq 1$ y $m\neq 3$.

b) $|B|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & m \\ m & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=12-12-m^2-9m+2m+8=-m^2-7m-8 \rightarrow m^2+7m+8=0 \rightarrow \begin{matrix} m=-1 \\ m=-8 \end{matrix}$ → B es invertible y solo si $m\neq -1$ y $m\neq -8$.

SABER HACER

25. **Página 48**

a) $\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = (1+x)^3 - 1 - 1 - (1-x) - (1-x) - (1+x) = x^3 + 3x^2 \longrightarrow x^3 \quad 3x^2 \quad 0 \cdot \begin{vmatrix} x & 3 \\ x & 0 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} = x^2 - 1 \longrightarrow x^2 \quad 1 \quad 0 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ x & 2 & 1 \end{vmatrix} = x^2 - 3 - 2\ x - 1\ + 4 - 4x = x^2 - 2x - 1 \longrightarrow x^2 - 2x - 1 = -2 \longrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \longrightarrow x = 1$

26. **Página 48**

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ x & 0 & 2 \\ 1 & x & -1 \end{vmatrix} = x^2 - 4x = -4 - x^2 - 4x - 4 = 0 - x = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4}}{2} = 2$

27. **Página 48**

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ m & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 6 - 3m - 2 - 9 - 4m = -m - 9 \qquad -m - 9 = 0 \longrightarrow m = -9$

Si $m \neq 9$ el rango de la matriz es 3. Si $m = 9$, tiene rango 2.

28. **Página 49**

$\begin{vmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{vmatrix} = m(m-1) - m^2(m-1) + m^2(m-1) - m^2(m-1) - m(m-1)^2 - m^2 = m^2 - 2m = m(m-2)$

$m(m \quad 2) \quad 0 \cdot \begin{vmatrix} m & 0 \\ m & 2 \end{vmatrix}$ Si $m = 0$ y $m \neq 2$, el rango de la matriz A es 3.

Si $m = 0 \longrightarrow A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, que tiene rango 2. Si $m = 2 \longrightarrow A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, que tiene rango 2.

29. **Página 49**

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \quad 3 \cdot 0 \longrightarrow$ Rango ≥ 2.

$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ k & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -9 - 3k - 9 + 9 = 3k - 9 \longrightarrow 3k - 9 = 0 \longrightarrow k = 3$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 9 + 3k \rightarrow 9 - 3k = 0 \rightarrow k = -3$

Como no hay ningún valor que anule simultáneamente todos los menores de orden 3, el rango de A es 3.

30. **Página 50**

$$|A| = -2 \qquad Adj(A) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad Adj(A)^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 2x \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

31. **Página 50**

$$|A| = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} = m\ (m-1)^2 - 1 - m - (m-1) = m^3 - 2m^2 - m + 2 \rightarrow m^3 - 2m^2 - m - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Por tanto, *A* es invertible si y solo si $m = -1$, $m = 1$ y $m = 2$.

32. **Página 50**

Tomamos $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}\ B \rightarrow X = A^{-1}B$

Vamos a calcular A^{-1}:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -7 & -6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

33. **Página 51**

Consideramos $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$AX - B = C^2 \rightarrow AX = C^2 - B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(C^2 - B) \rightarrow X = A^{-1}(C^2 - B)$

$|A| = -3$ y $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

$$X = A^{-1}(C^2 - B) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -6 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & -7 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 19 & -22 & -4 \\ -26 & 23 & -1 \\ -50 & 44 & -10 \end{pmatrix}$$

34. **Página 51**

$$AX + X = B \rightarrow AX - IX = B \rightarrow (A - I)X = B \rightarrow (A-I)^{-1}(A+I)X = (A+I)^{-1}B \rightarrow X = (A-I)^{-1}B$$

$$X = (A-I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 15 & 15 \\ -20 & 55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$$

ACTIVIDADES FINALES

35. **Página 52**

$$|A| \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \quad 4 \qquad |B| \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \quad 11$$

$$A \quad B \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A \quad B| \quad \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad 5$$

$$A \quad B \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow |A \quad B| \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \quad 25$$

36. **Página 52**

$$|A| \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \quad 5 \qquad |B| \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad 3$$

$$A \cdot B \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow |A \cdot B| \quad \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \quad 15 \quad |A| \cdot |B|$$

$$B \cdot A \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 9 & 16 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow |B \cdot A| \quad \begin{vmatrix} 9 & 16 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \quad 15 \quad |B| \cdot |A|$$

37. **Página 52**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ 1

b) $\begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}$ 0

c) $\begin{vmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{vmatrix}$ $3a \quad 2b$

d) $\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & x \end{vmatrix}$ 0

e) $\begin{vmatrix} a & 4 & 2 \\ 6 & a & 3 \end{vmatrix}$ $a^2 \quad 7a$

f) $\begin{vmatrix} a & 1 & a & 1 \\ 1 & a & a & 1 \end{vmatrix}$ $2a^2 \quad 2$

38. **Página 52**

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & a \end{vmatrix}$ $4a \quad 6$, $4a - 6 = 26 \rightarrow a = 5$

b) $\begin{vmatrix} b & 4 \\ 3b & 3 \end{vmatrix}$ $15b$, $-15b = 45 \rightarrow b = -3$

c) $\begin{vmatrix} c & 3c & 1 \\ 4 & c & \end{vmatrix}$ $c^2 \quad 12c \quad 4$, $c^2 - 12c + 4 = 32 \rightarrow c = -2$ o $c = 14$

d) $\begin{vmatrix} \frac{1}{d} & \frac{-2}{d} \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = \frac{14}{d}$, $\frac{14}{d} \quad 7 \rightarrow d = 2$

e) $\begin{vmatrix} \sqrt{e} & 2 \\ 2 & \sqrt{e-6} \end{vmatrix} = \sqrt{e^2 - 6e} - 4$, $\sqrt{e^2 \quad 6e} \quad 4 \quad 0 \rightarrow e = 8$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 2f \\ f & 1 \end{vmatrix}$ $1 \; 2f^2$, $2f^2 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad 2f^2 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \cdot 4f^2 \quad 1 \quad 0 \cdot f \quad \frac{1}{2}$

39. **Página 52**

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A - B| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

$$A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A - B| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

40. **Página 52**

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 11$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 11$

c) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ -8 & 17 & 9 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} a & 2 & 4 \\ 0 & b & 3 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = a \cdot b \ c$

e) $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & x \\ x-1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4x$

f) $\begin{vmatrix} -a & b & c \\ -b & c & a \\ -c & a & b \end{vmatrix} = a^3 + b^3 - c^3 - 3 \cdot a \cdot b \ c$

41. **Página 52**

a) $\begin{vmatrix} 3 & a & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & a & -2 \end{vmatrix} = 3a - 4$, $3a - 4 = 2 \rightarrow a = 2$

b) $\begin{vmatrix} -2 & b & -1 \\ b & 1 & b \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = b^2 - 5b - 1$, $b^2 - 5b - 1 = 5 \rightarrow b = -6$ o $b = 1$

c) $\begin{vmatrix} c-1 & c-2 & 0 \\ c & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = c^2 - 23c + 3$, $c^2 - 23c + 3 = -197 \rightarrow$ No tiene solución.

d) $\begin{vmatrix} d & d^2 & d-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ d & 0 & d \end{vmatrix} = -2d^3 - d$, $-2d^3 - d = -18 \rightarrow d = 2$

42. **Página 52**

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 13 & -1 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 17 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 34 \\ 11 & -16 & 231 \\ 9 & -4 & 108 \end{pmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 34 \\ 11 & -16 & 231 \\ 9 & -4 & 108 \end{vmatrix} = -3456 - 4158 - 2618 + 4896 - 1848 - 2376 = -1112$$

43. **Página 52**

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad 6$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

44. **Página 52**

a) $|A| \quad \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad 11, \quad 2|A| - 22$

$2A \quad \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad |2A| \quad \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \quad 44 \rightarrow$ No se cumple.

b) $A \quad B \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad |A \quad B| \quad \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \quad 15$

$|A| \quad 11, \quad |B| \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \quad 14, \quad |A| \quad |B| \quad 3 \rightarrow$ No se cumple.

c) $C \quad 2B \quad \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad 2 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}, \quad |C \quad 2B| \quad \begin{vmatrix} 10 & 11 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} \quad 100$

$|B| \quad 14, \quad |C| \quad \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \quad 6, \quad |C| \quad 2|B| \quad 34 \rightarrow$ No se cumple.

d) $A \cdot B \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 9 & 17 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A \cdot B| \quad \begin{vmatrix} 9 & 17 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} \quad 154$

$|A| \quad 11, \quad |B| \quad 14, \quad |A| \cdot |B| - -154 \rightarrow$ Se cumple por la propiedad 9.

45. **Página 52**

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5 \qquad |A^t| = |A| = -5 \qquad |2A| - 2^3 |A| - -40$$

$$|A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = 25 \qquad \left|\frac{1}{2} A^3\right| \quad \frac{1}{2^3} |A| \cdot |A| \cdot |A| \quad \frac{1}{8} (\ 5)^3 \quad \frac{125}{8}$$

46. **Página 52**

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

a) $F_3 - F_2 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 2$

b) $C_3 - C_1 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2$

c) $C_2 - 3C_1 - C_3 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 12 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 9 & -2 \end{vmatrix} = 2$

d) $F_3 - F_1 - 2F_2 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2$

47. **Página 52**

$\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ b & 0 & -2 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2c - b + 2a$ $\quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$ $\quad \begin{vmatrix} a-2 & 1 & -1 \\ b-3 & 0 & -2 \\ c-5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2a - b - 2c - 3$

Por tanto, se cumple la igualdad: $\begin{vmatrix} a-2 & 1 & -1 \\ b-3 & 0 & -2 \\ c-5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ b & 0 & -2 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

48. **Página 52**

$|A| \quad 3$, $|2A| \quad 48$

$2^n |A| - 48 \longrightarrow 2^n \cdot 3 = 48 \longrightarrow 2^n = 16 \longrightarrow n = 4$

La matriz *A* es de orden 4.

49. **Página 52**

$|3A| \quad 54$, $n = 3$

$3^3 |A| - 54 \longrightarrow |A| \quad 2$

50. **Página 52**

a) $|M^t| = 5$

Propiedad 1

b) $|2M| \quad 2^2 |M| \quad 4 \cdot 5 \quad 20$

Propiedad 3

c) $|5M| \quad 5^2 |M| \quad 25 \ 5 \quad 125$

Propiedad 3

d) $|2M| \quad 2^3 |M| \quad 8 \cdot 5 \quad 40$

Propiedad 3

e) $|5M| - 5^3 |M| - 125 \ 5 - 625$

Propiedad 3

f) $|2M| \quad 2^4 |M| \quad 16 \cdot 5 \quad 80$

Propiedad 3

51. **Página 53**

a) Propiedad 3 – Propiedad 5 – Propiedad 2

b) Propiedad 5 $F'_1 = F_1 - 10F_2$

c) Propiedad 5 $F'_1 = F_1 - 10F_2$ y $F'_2 = F_2 - 10F_3$

d) Propiedad 8 – Propiedad 6

52. **Página 53**

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} \overset{F_3' = F_3 + 2F_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \dot{5}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 5 \\ 6 & 2 & 5 \end{vmatrix} \overset{C_3' = 100C_1 + 10C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 125 \\ 3 & 7 & 375 \\ 6 & 2 & 625 \end{vmatrix} = 25 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 15 \\ 6 & 2 & 25 \end{vmatrix} = \dot{25}$

c) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \\ -2 & 7 & -3 \end{vmatrix} \overset{F_3 = -F_1 - F_2 + 8F_3}{=} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \\ -14 & 56 & -35 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \\ -2 & 8 & -5 \end{vmatrix} = \dot{7}$

53. **Página 53**

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & -4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\ 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$

c) $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -5 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_1' = C_1 - C_2 - C_3}{=} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$

d) $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} - \begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & -4 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 = -10$

54. **Página 53**

$|A| \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \quad 2 \qquad |B| \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} \quad 3 \qquad |A| \cdot |B| \quad 2 \quad 3 \quad 5 \qquad A \quad B \quad \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 13 & 3 \end{vmatrix} \qquad |A \cdot B| \quad 18 \quad 13 \quad 5$

No, no es cierto para todas las matrices, por ejemplo $A \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ y $|A| \quad 0$. Y sea $B \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ y $|B| \quad 0$ y, sin embargo, $A \quad B \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ y $|A - B| - 1$.

55. **Página 53**

$$\begin{vmatrix} 2d & 2f & 2e \\ 2g & 2i & 2h \\ 2a & 2c & 2b \end{vmatrix} = 2^3 \begin{vmatrix} d & f & e \\ g & i & h \\ a & c & b \end{vmatrix} \overset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} -2^3 \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} \overset{F_1 \leftrightarrow F_3}{=} 2^3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} \overset{F_2 \leftrightarrow F_3}{=} -2^3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2^3 \cdot \frac{1}{2} = -4$$

56. **Página 53**

$|M^3| - |M| \cdot |M| \cdot |M| - 6^3 - 216$

$|2M| \quad 2^{(\text{Orden de } M)} \cdot |M| \quad 6 \cdot 2^{(\text{Orden de } M)}$

57. **Página 53**

a) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b & 5c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3 \ 5 \cdot 3 = 45$

b) $\begin{vmatrix} a-2b & c & b \\ d-2e & f & e \\ g-2h & i & h \end{vmatrix} \overset{C_1 = C_1 - 2C_3}{=} \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} \overset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -3$

58. **Página 53**

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ \frac{d}{3} & \frac{e}{3} & \frac{f}{3} \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{d}{3} & \frac{e}{3} & \frac{f}{3} \\ g & h & i \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \ 6 = 4$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-d & b-e & c-f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+d & b-e & c-f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3\left(\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\right) = 3(0+6) = 18$

c) $\begin{vmatrix} b & 2a & \frac{c}{5} \\ e & 2d & \frac{f}{5} \\ h & 2g & \frac{i}{5} \end{vmatrix} = \frac{2}{5}\begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} = -\frac{2}{5}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\frac{2}{5} \cdot 6 = -\frac{12}{5}$

59. **Página 53**

a) $C_3 = -2C_1$ b) $F_3 = F_1 + F_2$ c) $C_3 \quad \frac{1}{2}C_1 \quad C_2$ d) $F_3 = 3F_2 - 2F_1$

60. **Página 53**

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-2d & b-2e & c+2f \\ d-a & e-b & f-c \end{vmatrix} \overset{F_2 = F_2 - F_1}{=} 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d-a & e-b & f-c \end{vmatrix} \overset{F_3 = F_3 + F_1}{=} 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} x-y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x+y & y-z & z-x \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x-y-z & x-y-z & x+y-z \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (x+y-z)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

61. **Página 53**

a) Cierta, por las propiedades de los determinantes.

b) Falsa, se debería multiplicar por 4 el determinante.

c) Falsa, solo se multiplica por 4 el elemento *ad*, pero no *bc*.

d) Cierta, por las propiedades de los determinantes.

62. **Página 53**

$$\begin{vmatrix} a & d & f \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 8 \rightarrow a \cdot b \cdot c = 8$$

a) $$\begin{vmatrix} a-f & d-a & f \\ c-e & b & c-e \\ e & b & e \end{vmatrix} \overset{C_1 = C_1 - C_3}{=} \begin{vmatrix} a & d-a & f \\ 0 & b & c+e \\ 0 & b & e \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b & c-e \\ b & e \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} 1 & c-e \\ 1 & e \end{vmatrix} \overset{F_1 - F_2}{=} ab \begin{vmatrix} 0 & c \\ 1 & e \end{vmatrix} = ab(-c) = -8$$

b) $abc = 8 \rightarrow a \cdot 1 \cdot 2 = 8 \rightarrow a = 4$

63. **Página 54**

a) Es una matriz triangular, su determinante es $5 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 = 15$.

b) Es una matriz triangular, su determinante es $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.

64. **Página 54**

$|B| = |2 \cdot A^2| = 2^3 \cdot |A| \ \ |A| = 8 \cdot |A|^2 \rightarrow 8 \cdot |A|^2 = -32 \rightarrow |A|^2 = -4$ No puede ser; por tanto, no es posible que el valor del determinante de *B* sea –32.

65. **Página 54**

a) $$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & x-1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow 3x^2 - 7x - 6 = 2x \rightarrow 3x^2 \quad 9x \ \text{I} \ 6 \quad 0 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 \\ x & 2 \end{vmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} x & x-2 & x-1 \\ x & x-4 & x-3 \\ x & x-6 & x-6 \end{vmatrix} = -10 \rightarrow \begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ x & 4 & -3 \\ x & 6 & -6 \end{vmatrix} = -10 \rightarrow -2x = -10 \rightarrow x = 5$$

c) $$\begin{vmatrix} 2x & 4 & -2 \\ x & 2 & x \\ -1 & 3 & 2x \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -6x^2 - 10x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

d) $$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & x-3 \\ 1 & x-2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 - 7x \rightarrow x^2 - 4x - 3 = 1 - 7x \rightarrow x^2 \quad 3x \quad 2 \quad 0 \cdot \begin{vmatrix} x & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix}$$

66. **Página 54**

$$\begin{vmatrix} x & a & b \\ a & x & b \end{vmatrix} \quad (x \quad a)(x \quad b) \quad ab \quad x^2 \quad (a \quad b)x \quad 0 \cdot x^2 \quad 3x \quad 0 \cdot x \quad 0 \circ x \quad 3$$

67. **Página 54**

$$|M| - 3 \rightarrow |4M| - 4^2 |M| \overset{C_1 \leftrightarrow C_2}{-} - 4^2 |M| \overset{\frac{1}{2}F_2}{--} 4^2 \cdot \frac{1}{2} |M| - -24 - |P|$$

68. **Página 54**

$$|M| \quad 5 \rightarrow |3M| \quad 3^3 |M| \overset{F_1 \leftrightarrow F_3}{\cdot} 3^3 |M| \overset{-2C_2}{\cdot} \quad 3^3 \quad 2 \ |M| \quad 270 \quad |P|$$

69. **Página 54**

a) $A^2 = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d^2 \end{vmatrix}$ $\quad |A^2| = (abcd)^2$

b) $A^3 = \begin{vmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d^3 \end{vmatrix}$ $\quad |A^3| = (abcd)^3$

c) $|A^n| = (abcd)^n$

70. **Página 54**

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 7 - 6 - 84 - 9 = -80$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - (-2) \cdot (-39) + 7 = -80$

71. **Página 54**

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 60 - 3 - 24 - 8 - 10 - 54 = 117$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} \overset{\substack{C_2' = C_2 - 6C_1 \\ C_3' = C_3 - 5C_1}}{=} \begin{vmatrix} 3 & -17 & -13 \\ 2 & -8 & -13 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -17 & -13 \\ -8 & -13 \end{vmatrix} = 117$

72. **Página 54**

a) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & -5 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -5 & 6 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ -1 & -5 & 6 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix} =$

$= -(-8 + 10 - 24 - 24 - 20 - 4) - (-30 - 36 - 16 - 40 - 6 - 72) = 34$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$

$= 3(-8 - 24 - 20 + 30 - 16 - 8) - 3(8 - 24 - 16 + 24 - 16 + 8) - (8 - 20 - 8 - 16 - 8 - 10) = -92$

73. **Página 54**

Lo desarrollamos por la última fila:

$$2\begin{vmatrix}3&1&0\\4&0&-2\\1&3&1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}3&2&1\\4&2&0\\1&1&3\end{vmatrix}=2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}3&1&0\\2&0&-1\\1&3&1\end{vmatrix}-2\cdot 2\begin{vmatrix}3&2&1\\2&1&0\\1&1&3\end{vmatrix}=4\cdot(6-(-2))=16$$

Efectivamente es divisible entre 4.

74. **Página 54**

$$|A|=\begin{vmatrix}-a&1&0\\1&-a&1\\0&1&-a\end{vmatrix}=-a^3+2a=a(2-a^2)$$

Si $a\neq 0$ y $a=-\sqrt{2}$ el determinante es distinto de 0.

75. **Página 54**

$$\begin{vmatrix}3a&a&a&a\\a&3a&a&a\\a&a&3a&a\\a&a&a&3a\end{vmatrix}=a^4\cdot\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\overset{\substack{C_2=C_2-C_1\\C_3=C_3-C_1\\C_4=C_4-C_1}}{=}a^4\cdot\begin{vmatrix}3&-2&-2&-2\\1&2&0&0\\1&0&2&0\\1&0&0&2\end{vmatrix}=$$

$$=a^4\cdot-1\cdot\begin{vmatrix}-2&-2&-2\\0&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}3&-2&-2\\1&2&0\\1&0&2\end{vmatrix}=a^4-(-8)-2(12+4+4)=48a^4$$

76. **Página 54**

Para que el determinante sea 0, el rango de la matriz no puede ser tres, es decir, las tres columnas no pueden ser linealmente independientes. La segunda y tercera columnas son linealmente independientes, de modo que la primera tiene que ser dependiente; para ello es igual a una de las dos, o bien es combinación lineal de ambas.

Es igual a la segunda si $x=2$. Es igual a la tercera si $x=-3$. Y no existe una combinación lineal de la segunda y la tercera que nos dé algún valor de x posible para la primera, de modo que solo tenemos dos soluciones.

77. **Página 54**

$$\begin{vmatrix}x-2&1&1\\1&x-2&1\\x&x&3\end{vmatrix}=3(x+2)^2+x-x-x(x-2)-x(x+2)-3=3x^2-12x-12+2x-2x^2-4x-3=x^2+10x-9=0$$

$$x=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{2}=\frac{10\pm 8}{2}\begin{cases}x_1=1\\x_2=9\end{cases}$$

78. **Página 54**

a) $$f(a)=\begin{vmatrix}2a&1&-2\\-1&0&2a\\a&-1&a\end{vmatrix}=2a^2-2-4a^2-a=-2a^2-a-2$$

b) $f(0)=\begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ -1 & -a & 2a \\ a & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2a^2 - 2 - 2a^2 + 2a^2 = 2a^2 - 2$

c) $f(1)=\begin{vmatrix} 1-a & 1 & -2 \\ -1 & 1-a & 2a \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1-a)(1-a) + 2a^2 - 2 - 2a(1-a) - 2a(1+a) - 1 = 1 - a^2 - 2a^2 - 2 - 4a + 1 = a^2 + 4a = 5$

$a \quad \frac{4 \quad \sqrt{16 \; 20}}{2} \quad \frac{4 \quad 6}{2} \quad \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 5 \end{vmatrix}$

79. **Página 55**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \quad 6 \neq 0 \longrightarrow$ Rango $= 2$

b) $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} \quad 0$, $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 12 & 18 \end{vmatrix} \quad 0$ y $\begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 12 & 18 \end{vmatrix} \quad 0 \longrightarrow$ Rango $= 1$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 8 & 11 & -11 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow$ Rango < 3, $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \quad 7 \neq 0 \longrightarrow$ Rango $= 2$

d) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -39 = 0 \longrightarrow$ Rango $= 3$

e) $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 24 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 24 & 3 & 19 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 19 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \\ 2 & 24 & 19 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow$ Rango < 3

$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \quad 18 \neq 0 \longrightarrow$ Rango $= 2$

f) $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 24 & 1 \end{vmatrix} \quad 78 \quad 0 \longrightarrow$ Rango $= 2$

80. **Página 55**

a) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 9 = 0 \longrightarrow$ Rango $= 3$

b) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 7 & -4 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 7 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow$ Rango < 3

$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \quad 23 \quad 0 \longrightarrow$ Rango $= 2$

81. **Página 55**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow$ Rango $= 3$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Rango < 3, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ $8 \neq 0 \rightarrow$ Rango $= 2$

82. **Página 55**

$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5 = 0 \rightarrow$ Rango $= 3$

Una combinación sería, por ejemplo: $C_4 = C_1 - C_2 - 2C_3$.

83. **Página 55**

a) Si consideramos el menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ tenemos que su determinante es distinto de 0; por lo tanto, el rango es 2.

b) Respuesta abierta. Por ejemplo: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 8 \\ 8 & -4 & 6 \end{vmatrix}$

84. **Página 55**

a) Consideramos los menores $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ a & -1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ a & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & 3 \end{vmatrix}$ y vemos para que valores de a se anulan sus determinantes.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ a & -1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 2a^2 - 3a - 9 = 0 \rightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 72}}{4} = \frac{3 \pm 9}{4} = \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ a & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4a - 12 = 0 \rightarrow a = 3$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & 3 \end{vmatrix} = 5a - 15 = 0 \rightarrow a = 3$$

Si $a = 3$, no hay ningún menor cuyo determinante sea distinto de 0, por lo que la matriz tendrá rango menor que 3, pero sí que podemos encontrar un menor de orden 2 con determinante distinto de 0, por ejemplo $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, así que el rango será 2.

Si $a \neq 3$, podemos encontrar un menor de orden 3 con determinante distinto de 0, por lo que el rango es 3.

b) Consideramos los menores $\begin{vmatrix} 1 & 1 & b-1 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & b & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 2 \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & b-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ b & 2 & 0 \end{vmatrix}$ y vemos para qué valores de a se anulan sus determinantes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & b-1 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & b & 2 \end{vmatrix} = b^2(b-1) - 2b = b(b^2+b-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b^2 - b - 2 = 0 \end{cases}$$

$$b^2 - b - 2 = 0 \rightarrow b = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1-3}{2} = \begin{cases} b = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 2 \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix} = b^2 - 2b = b(b-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & b-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ b & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2b(b-1) - 4 = 2b^2 + 2b - 4 = 0 \rightarrow b = \frac{-2 \pm \sqrt{4-32}}{4} = \frac{-2+6}{4} = \begin{cases} b = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

No hay ningún valor que anule los tres menores de orden 3, de modo que siempre podremos encontrar un menor de orden 3 con determinante distinto de 0 y, por tanto, el rango de la matriz es siempre 3.

85. **Página 55**

$A' = \begin{vmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -6 & 9 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ $|A'| = 6 - 18 = -12$. El determinante es distinto de 0, el rango es 3.

No es posible añadir una columna a B y obtener rango 3, ya que las dos columnas que hay son linealmente dependientes y el rango de B es 1; al añadir una columna lo máximo que tendríamos es rango 2.

86. **Página 55**

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ m & m & 4 \\ 0 & m & 2 \end{vmatrix} = -m^2 \qquad |C| = \begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & m \end{vmatrix} = -2m^2 - 4m + 2$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} = 3m^2 - 3m \qquad |D| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -m & m & -3m \\ -2 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A| = -m^2 = 0 \rightarrow m = 0 \qquad |B| = 3m^2 - 3m = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases} \qquad |C| = -2m^2 + 4m - 2 = 0 \rightarrow m = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{-2} = \begin{cases} m = 1+\sqrt{2} \\ m = 1-\sqrt{2} \end{cases}$$

La matriz D tiene rango 1 para cualquier valor de m.

a) La matriz A tiene rango 3 si $m \neq 0$.

La matriz B tiene rango 3 si $m \neq 0$ y $m \neq 1$.

La matriz C tiene rango 3 si $m \neq 1-\sqrt{2}$ y $m \neq 1-\sqrt{2}$.

b) No hay ningún valor para el que la matriz A tenga rango 2.

Si $m = 0$ o $m = 1$, en la matriz B podemos encontrar un menor de orden 2 con determinante distinto de 0, por lo que la matriz tendrá rango 2.

Si $m = 1-\sqrt{2}$ o $m = 1-\sqrt{2}$, en la matriz C podemos encontrar un menor de orden 2 con determinante distinto de 0, por lo que la matriz tendrá rango 2.

87. **Página 55**

$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a+2 \end{vmatrix}$ a^2+2a-1, $a^2-2a-1=0 \rightarrow a=-1$; por tanto, $|A| \neq 0 \rightarrow$ Rango $A=1$.

88. **Página 55**

$A-tI=\begin{pmatrix} 2-t & 2 \\ 3 & 1-t \end{pmatrix}$ $|A-tI|=\begin{vmatrix} 2-t & 2 \\ 3 & 1-t \end{vmatrix}=t^2-3t-4$, $t^2-3t-4=0 \rightarrow \begin{matrix} t=-4 \\ t=1 \end{matrix}$

Por tanto, si $t=-4$ o $t=1$ el rango de $A-tI$ es 1.

89. **Página 55**

$\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ a & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix}=a(a^5-a^3-a^2-1)$, $a(a^5-a^3-a^2+1)=0 \rightarrow \begin{matrix} a=-1 \\ a=0 \\ a=1 \end{matrix}$

Si $a=1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, el rango es 1.

Si $a=-1 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2 \neq 0$, el rango es 2.

Si $a=0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1 \neq 0$, el rango es 2.

90. **Página 55**

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & a & a-1 \\ a-1 & a-1 & 2a \end{vmatrix}$, $C_3=C_1-C_2 \rightarrow$ Rango $A<3$

$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix}$ a^2-1, $-a^2-1=0$ para cualquier valor de $a \rightarrow$ Rango $A=2$.

91. **Página 55**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ $8-6=0 \rightarrow$ rango $=2$ $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & a \\ -5 & -6 & 2 \end{vmatrix}=-16a-48$, $-16a-48=0 \rightarrow a=-3$

Si $a=-3 \rightarrow$ rango $=3$

Si $a=-3 \rightarrow$ rango $=2$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}$ $4 \neq 0 \rightarrow$ rango ≥ 2

$\begin{vmatrix} b & 2 & -1 \\ 3 & 2 & b-1 \\ 7 & 6 & 1 \end{vmatrix}=-6b^2-10b+4$, $-6b^2-10b-4=0 \rightarrow \begin{matrix} b=-\frac{1}{3} \\ b=2 \end{matrix}$

Si $b=2$ y $b \neq \frac{1}{3} \rightarrow$ rango $=3$ Si $b=2$ o $b=\frac{1}{3} \rightarrow$ rango $=2$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ $3 \neq 0 \rightarrow$ rango $=$ 2

Como $C_1 = -C_4$ todos los menores se pueden reducir a uno.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ c & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 - 3c \text{ , } -6 - 3c = 0 \rightarrow c = 2$$

Si $c \neq 2 \rightarrow$ rango $= 3$

Si $c = 2 \rightarrow$ rango $= 2$

d) $\begin{vmatrix} 1 & -d & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ d & -4 & 6 \end{vmatrix} = 9d^2 - 36d + 36 \text{ , } 9d^2 - 36d - 36 = 0 \rightarrow d = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & -d & -2 \\ -3 & 6 & 6 \\ d & -4 & -4 \end{vmatrix} = -6d^2 - 24d - 24 \text{ , } -6d^2 - 24d - 24 = 0 \rightarrow d = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & -9 & 6 \\ d & 6 & -4 \end{vmatrix} = 0 \text{ , } \begin{vmatrix} -d & 3 & -2 \\ 6 & -9 & 6 \\ -4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ -3 & 6 & -9 & 6 \\ 2 & -4 & 6 & -4 \end{vmatrix}$$

Si $d = 2 \rightarrow$ rango $= 3$Si $d = 2 \rightarrow$ rango $= 1$, ya que todas las filas son proporcionales.

92. **Página 55**

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = a^3 - a \text{ , } a(a^2 - 1) = 0 - \begin{cases} a = -1 \\ a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$

Si $a = 0$, $a \neq 1$, $a \neq -1 \rightarrow$ rango $= 3$

Si $a = 1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ $1 \neq 0 \rightarrow$ rango $= 2$

Si $a = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ $1 \neq 0 \rightarrow$ rango $= 2$

Si $a = -1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ $3 \neq 0 \rightarrow$ rango $= 2$

b) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -2 \\ 2a-1 & a-1 & -1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - a \text{ , } a(a^2 - 1) = 0 - \begin{cases} a = -1 \\ a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$

Si $a = 0$, $a \neq 1$, $a \neq -1 \rightarrow$ rango $= 3$

Si $a = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ $1 \neq 0 \rightarrow$ rango $= 2$

Si $a = 1 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ $1 \neq 0 \rightarrow$ rango $= 2$

Si $a = -1 \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ $1 \neq 0 \rightarrow$ rango $= 2$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \quad 4 \cdot 0 \longrightarrow$ rango ≥ 2

$\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2a & -1 & a \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 3a - 4$, $a^2 \quad 3a \quad 4 \quad 0 \cdot \begin{vmatrix} a & 4 \\ a & 1 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2a & a & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a^2 - 4$, $-a^2 - 4 = 0$ no se cumple para ningún valor de a.

El rango de la matriz es 3, ya que para cualquier valor de a existe un menor de orden 3 distinto de cero.

93. **Página 56**

a) $|A| \quad 2 \neq 0 \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

b) $|B| \quad 1 \neq 0 \longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -2 & 7 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $|C| \quad 20 \neq 0 \longrightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{20} & \frac{7}{20} \end{pmatrix}$

d) $|D| \quad 10 \neq 0 \longrightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{10} & -\frac{9}{10} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{9}{10} & -\frac{11}{10} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{10} & -\frac{7}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

94. **Página 56**

a) $|A^t| = |A| = 5$

b) $|B^{-1}| \quad \frac{1}{|B|} \quad \frac{1}{4}$

c) $|AB| \quad |A| \, |B| \quad 20$

d) $|A^{-1}B| \quad |A^{-1}| \, |B| \quad \frac{1}{|A|} \, |B| \quad \frac{4}{5}$

e) $|BC^{-1}| \quad \frac{1}{|BC|} \quad \frac{1}{|B| \, |C|} \quad \frac{1}{8}$

f) $|C^{-1}B^t| \quad \frac{1}{|C|} \cdot |B^t| \quad \frac{1}{|C|} \, |B| \quad 2$

95. **Página 56**

$|A| \quad 4$, $|B| \quad 4$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{7}{4} \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $B^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{15}{2} & -3 & \frac{7}{2} \\ 9 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A - B^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{19}{2} & -3 & \frac{7}{2} \\ 10 & 5 & -5 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

a) $|A - B^{-1} \cdot A| = 0$

b) $|A^3 \quad B^{-1}| \quad |A^3| \, |B^{-1}| \quad |A|^3 \cdot \frac{1}{|B|} \quad 16$

96. **Página 56**

$A^2 = I \rightarrow |A^2| = |I| = 1 \rightarrow |A| \cdot |A| = 1 \rightarrow |A| = +1 \neq 0 \longrightarrow$ La matriz A es invertible.

$A^2 = A \cdot A = I \longrightarrow A^{-1} = A \rightarrow (A^{-1})^2 = A^{-1} \quad A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \rightarrow (A^{-1})^2 = I$

97. **Página 56**

$$A^2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$A^3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$-A - I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$A^3 = -A - I \rightarrow I = -A - A^3 = A(-I - A^2) \rightarrow A^{-1} = -I - A^2 \quad A^{-1} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

98. **Página 56**

$|M| \quad a^2 \quad a$, $|M| \quad 0$ si $a^2 \quad a \quad 0 \cdot \begin{vmatrix} a & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix}$; por tanto, la matriz *M* no tiene inversa para $a = 0$ y $a = 1$.

Si $a = 2$, $M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; $|M| \quad 2 \rightarrow M^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

99. **Página 56**

$|A| \quad m \quad 1$, $|A| \quad 0 \rightarrow -m - 1 = 0 \rightarrow m = -1 \rightarrow$ La matriz *A* es singular para $m = -1$.

Si $m = 2 \rightarrow A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$; $|A| - -3 \rightarrow A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -2 & -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$

100. **Página 56**

a) *A* es invertible, si y solo si, $|A| \neq 0$; $|A| - a^2 - 2ab - b^2$

$|A| \quad 0 \rightarrow a^2 - 2ab - b^2 = 0 \rightarrow a = b \rightarrow$ *A* es invertible si y solo si $a = b$.

b) $A \quad \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; $|A| \quad 4 \rightarrow A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{vmatrix}$

101. **Página 56**

a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 30 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 30 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

b) $Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 10 & 0 \\ 14 & 4 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 10 & 0 \\ 14 & 4 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

102. **Página 56**

a) $X - \begin{pmatrix} 66 & 14 \\ -13 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 66 & 14 \\ -13 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $Y = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 0 & -11 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 0 & -11 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

103. **Página 56**

a) $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ -17 & -10 \\ 17 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ -17 & -10 \\ 17 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $Y = \begin{pmatrix} 10 & -10 & -10 \\ -10 & 10 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ 13 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -8 \\ -23 & 12 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 8 & 6 & \frac{3}{2} \\ -4 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

104. **Página 56**

a) $Z = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 32 & 28 & 111 \\ 54 & 52 & 194 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 32 & 28 & 111 \\ 54 & 52 & 194 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 10 & 4 & 28 \\ -8 & 12 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

105. **Página 56**

$$C=\begin{vmatrix}2&11&12\\-1&-4&17\\2&12&2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&5&3\\2&5&-4\end{vmatrix}^{-1}=\begin{vmatrix}2&11&12\\-1&-4&17\\2&12&2\end{vmatrix}\cdot\frac{1}{76}\begin{vmatrix}35&-23&9\\-2&10&6\\15&1&-7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&0\\3&0&-2\\1&1&1\end{vmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&5&3\\2&5&-4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}2&11&12\\-1&-4&17\\2&12&2\end{vmatrix}^{-1}=\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&5&3\\2&5&-4\end{vmatrix}\cdot\frac{1}{76}\begin{vmatrix}212&-122&-235\\-36&20&46\\4&2&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-1&-2\\-5&3&6\\3&-2&-3\end{vmatrix}$$

$CD=BA^{-1}AB^{-1}=BIB^{-1}=BB^{-1}=I\rightarrow C$ y D son inversas, $C=D^{-1}$.

106. **Página 56**

a) La ecuación $AX+2B=3C$ tiene solución si existe A^{-1}, es decir, si $|A|\neq 0$.

$|A|$ $m\rightarrow$ La ecuación tiene solución si y solo si $m=0$

b) Si $m=1\rightarrow A=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}$, $|A|$ $1\rightarrow A^{-1}=\begin{vmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{vmatrix}$

$$X=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}^{-1}\cdot\begin{vmatrix}3&0&1&0\\0&1&0&1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}3&-2&-2\\-2&3&0\\3&0&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-2&-2\\-5&5&2\\5&-3&3\end{vmatrix}$$

107. **Página 56**

a) A es invertible si $|A|\neq 0$, $|A|$ $2a$ 1

$|A|$ 0 si $2a-1=0\rightarrow a$ $\frac{1}{2}$; por tanto, A es invertible si y solo si $a\cdot\frac{1}{2}$.

b) $XA-A=A^t\rightarrow X=$ A^t-A A^{-1}

Si $a=0\rightarrow A=\begin{vmatrix}2&1&2\\1&0&1\\3&1&4\end{vmatrix}$, $A^T-A=\begin{vmatrix}2&1&3\\1&0&1\\2&1&4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&1&2\\1&0&1\\3&1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{vmatrix}$, $A^{-1}=\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&-2&0\\-1&-1&1\end{vmatrix}$

$$X=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&-2&0\\-1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-1&1\\0&0&0\\-1&-2&1\end{vmatrix}$$

108. **Página 56**

A no es invertible$\rightarrow|A|$ 0, $|A|-x+1-0\rightarrow x=-1$.

$$A^2=\begin{vmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&0&-1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&0&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&-2\\0&1&0\\-2&0&2\end{vmatrix}\qquad A^4=\begin{vmatrix}-4&0&4\\0&-1&0\\4&0&-4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&0&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}8&0&-8\\0&1&0\\-8&0&8\end{vmatrix}$$

$$A^3=\begin{vmatrix}2&0&-2\\0&1&0\\-2&0&2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&0&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4&0&4\\0&-1&0\\4&0&-4\end{vmatrix}\qquad A^n=\begin{vmatrix}(-1)^n2^{n-1}&0&(-1)^{n-1}2^{n-1}\\0&(-1)^n&0\\(-1)^{n-1}2^{n-1}&0&(-1)^n2^{n-1}\end{vmatrix}$$

109. **Página 57**

a) No existe matriz inversa si $|A| \quad 0$.

$|A| - a^2 - 3$, $|A| \quad 0$ si $a^2 - 3 = 0$ si $a = +\sqrt{3}$

Por tanto, A no tiene inversa si $a = +\sqrt{3}$.

b) $a = 2 \longrightarrow A \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $|A| \quad 1 \longrightarrow A^{-1} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $A^t \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $(A^t)^2 \quad \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

$B \quad \frac{1}{2} \cdot (A^t)^2 \quad \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7/2 & 3 \\ 2 & 7/2 \end{pmatrix}$

c) $a = 2 \longrightarrow A \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $X = A^{-1} \cdot A^t - A^2$

$A^2 \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$

$X - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 13 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

110. **Página 57**

a) La ecuación $AX - A^t = A$ tiene solución si existe A^{-1}, es decir, si $|A| \neq 0$.

$|A| \quad 1 \quad 7m$, $1 - 7m = 0$ si $m \quad \frac{1}{7}$; por tanto, la ecuación tiene solución cuando $m \cdot \frac{1}{7}$.

b) Si $m = 0 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $|A| \quad 1 \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -7 & -11 & 12 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -7 & -11 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -3 & 4 & 4 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \\ -29 & 25 & 8 \end{pmatrix}$$

111. **Página 57**

a) A no es invertible si y solo si $|A| \quad 0$. $|A| \quad 3t^2 \quad 18t \quad 16 \quad 0 \cdot t \quad 3 \; \sqrt{\frac{11}{3}}$.

b) $t = 1 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$A^4 = (-I) \cdot A = -A \qquad A^5 = -A \cdot A = -A^2 \qquad A^6 = A^5 \cdot A = -A^2 \cdot A = -(-I) \cdot A = A$

$A^n = A^{(\text{Resto de la división } n:6)}$, por ejemplo $\frac{100}{6} \quad 16 \quad \frac{4}{6} \longrightarrow A^{100} = A^4 = -A$

112. **Página 57**

a) A es invertible si y solo si $|A| \neq 0$, $|A| \quad m^3 + 4m$.

$|A| \quad 0 \rightarrow -m^3 - 4m = 0$ si $m = 0$, $m = 2$ o $m = -2$; por tanto, A es invertible si y solo si $m = 0$ y $m = \quad 2$.

b) Si $m = 1$, $A = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $|A| \quad 3$

$|6 \quad A^{-1}| \quad 6^3 \, |A^{-1}| \quad 6^3 \, \frac{1}{|A|} \rightarrow |6 \cdot A^{-1}| \quad \frac{6^3}{3} \quad 72$

c) $m = 1$, $XA = B \rightarrow X = BA^{-1}$

$$A = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \; A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$X = (3 \quad 0 \quad 3) \cdot \frac{1}{3} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \quad 3 \quad 2)$$

113. **Página 57**

a) $|A| \quad 0 \rightarrow$ rango < 3, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 1 \quad 0 \rightarrow$rango $= 2$.

b) $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad 2 \neq 0 \rightarrow$rango ≥ 2.

$|B| \quad m \rightarrow |B| \quad 0$ si $m = 0$

Por tanto, si $m = 0 \rightarrow |B| \neq 0$ y el rango es 3; si en cambio $m = 0$, el rango es 2.

c) B no es invertible si $|B| \quad 0$, es decir, si $m = 0$.

d) Si $m = -1$, $B = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, $B^{-1} = \begin{vmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

$$B \cdot X \cdot B = A \rightarrow X = B^{-1} \; A \cdot B^{-1} \; X = \begin{vmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 11 & 7 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \\ -5 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

114. **Página 57**

a) A tiene inversa si $|A| \neq 0$, $|A| \quad a^2(a \quad 1)$.

$|A| \quad 0 \rightarrow a^2(a \quad 1) \quad 0 \cdot \begin{vmatrix} a & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix}$

Por tanto, A tiene inversa si y solo si $a \neq 0$ y $a \neq 1$.

b) Si $a = 3 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $|A| \quad 18 \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

c) $AB = \begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 5a \\ 2a-2 & 0 \\ -a & -2a \end{pmatrix} \longrightarrow (AB)^t \quad \begin{pmatrix} a & 2(a & 1) & a \\ 5a & 0 & & 2a \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} a & 2(a & 1) \\ 5a & 0 \end{vmatrix} \quad 10a(a \quad 1), \quad 10a(a \quad 1) \quad 0 \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} a & a \\ 5a & 2a \end{vmatrix} \quad 3a^2, \; 3a^2 = 0 \longrightarrow a = 0$

$\begin{vmatrix} 2(a & 1) & a \\ 0 & & 2a \end{vmatrix} \quad 4a(a \quad 1), \quad 4a(a \quad 1) \quad 0 \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$

Si $a = 0 \longrightarrow (AB)^t \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango 1.

Si $a = 1 \longrightarrow (AB)^t \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \quad 3 \neq 0$ tiene rango 2.

115. **Página 57**

a) Para que exista inversa el determinante tiene que ser distinto de 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 \end{vmatrix} = x^2 - x = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

La inversa existe para $x \neq 0$ y $x \neq 1$.

b) Para $x = 3$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$|A| = 6 \qquad Adj(A) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 6 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad Adj(A)^t = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

116. **Página 57**

$A + 2XB = C \rightarrow 2XB = C - A \rightarrow XB = (C - A)/2 \rightarrow X = \frac{C - A}{2}B^{-1}$

$$\frac{C-A}{2} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 8 & -4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \qquad Adj(B) = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad Adj(B)^t = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$X = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

117. **Página 57**

$XC + A = C + A^2 \rightarrow XC = C + A^2 - A \rightarrow X = (C + A^2 - A)C^{-1}$

$$A^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = A$$

$X = (C + A^2 - A)C^{-1} = (C + A - A)C^{-1} = CC^{-1} = I$

X es la matriz identidad de orden 3.

118. **Página 57**

a) $X + XA + B^t = 2C \rightarrow X + XA = 2C - B^t \rightarrow X(I + A) = 2C - B^t \rightarrow X = (2C - B^t)(I + A)^{-1}$

Tiene orden 2×3.

b) $2C - B^t = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$$I - A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \qquad |I - A| = -1 \qquad Adj(I - A) = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad Adj(I + A)^t = \begin{vmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

c) $X = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

119. **Página 57**

$$(A-B)X-A^tX=I\longrightarrow (A-B-A^t)X=I\longrightarrow X=(A-B-A^t)^{-1}$$

$$A-B-A^t=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&-1&-1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0&1\\0&-1&-1\\-2&1&1\end{vmatrix}$$

$$\left|A-B-A^t\right|=-2\qquad Adj(A-B-A^t)=\begin{vmatrix}0&2&-2\\1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}\qquad Adj(A-B-A^t)^t=\begin{vmatrix}0&1&1\\2&1&-1\\-2&1&1\end{vmatrix}$$

$$(A-B-A^t)^{-1}=\begin{vmatrix}0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{vmatrix}$$

120. **Página 57**

a) No, por ejemplo $X=\begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{vmatrix}\neq 0\qquad X^2=\begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{vmatrix}=0$

b) Se tiene que verificar cualquiera que sea A, de modo que sí es cierta. $XA=0\longrightarrow X=0A^{-1}=0$

c) Es cierto. $X^2=AX\longrightarrow XX=AX\longrightarrow XXX^{-1}=AXX^{-1}\longrightarrow X=A$

121. **Página 57**

Si A es diagonal: $A=\begin{vmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{vmatrix}$ y $A^{-1}=\begin{vmatrix}\frac{1}{a}&0&0\\0&\frac{1}{b}&0\\0&0&\frac{1}{c}\end{vmatrix}$

$$AB=BA\longrightarrow B=A^{-1}BA=\begin{vmatrix}\frac{1}{a}&0&0\\0&\frac{1}{b}&0\\0&0&\frac{1}{c}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}d&e&f\\g&h&i\\j&k&l\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}d&\frac{be}{a}&\frac{cf}{a}\\\frac{ag}{b}&h&\frac{ci}{b}\\\frac{aj}{c}&\frac{bk}{c}&l\end{vmatrix}$$

a) No se cumple necesariamente.

b) Para que se cumpla, los tres términos de la diagonal tienen que ser iguales.

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. **Página 58**

Porque los lados de los triángulos son líneas rectas.

2. **Página 58**

La triangulación no es única, puede haber tantas triangulaciones diferentes como imaginemos.

3. **Página 58**

No, porque no hay un triángulo cuya superficie sea nula.

4. **Página 58**

Respuesta abierta, puede ser cualquiera. No obstante, se recomienda dibujar la figura irregular sobre la cuadrícula previamente dibujada, de esa manera haremos coincidir los vértices de la triangulación con puntos de coordenada entera.

Sistemas de ecuaciones

3

ACTIVIDADES

1. Página 60

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$5x + 3y - z = -1$

Soluciones: 1) $x = 2, y = -1, z = 8$ 2) $x = -2, y = 3, z = 0$ 3) $x = 1, y = 3, z = 15$

2. Página 60

$$\left.\begin{array}{r} x - y - z = 1 \\ x - y = 2 \\ 2x - y - z = 4 \end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{r} -z = -1 \\ x - y = 2 \\ x + z = 2 \end{array}\right| \cdot (-) \left.\begin{array}{r} z = 1 \\ x + y = 2 \\ x - z = 2 \end{array}\right| - \left.\begin{array}{r} z = 1 \\ x - y = 2 \\ x = 1 \end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{r} z = 1 \\ y = 1 \\ x = 1 \end{array}\right|$$

Solución: $x = 1, y = 1, z = 1$.

3. Página 61

a) Tiene infinitas soluciones. El sistema es compatible indeterminado.

b) No tiene solución. El sistema es incompatible.

c) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right| - \left.\begin{array}{r} x = 1 \\ y = -1 \end{array}\right| -$ Tiene solución única. El sistema es compatible determinado.

4. Página 61

$$\left.\begin{array}{r} x - y - z = 1 \\ -y - 2z = 1 \\ -x - y + 2z = 6 \end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y - z = 1 \\ -y + 2z = 1 \\ -x = 5 \end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y - z = 1 \\ -y + 2z = 1 \\ y - z = 6 \end{array}\right| - \left.\begin{array}{r} x - y - z = 1 \\ -y - 2z = 1 \\ z = 7 \end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -5 \\ y = 13 \\ z = 7 \end{array}\right|$$

5. Página 62

$$\left|\begin{array}{rrr} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\right| - \left.\begin{array}{r} 2x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ -x - 2z = 3 \end{array}\right|$$

6. Página 62

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y - 2z = -1 \\ x - 3y - z = 0 \\ -4x - 5y - z = 3 \end{array}\right| - \left|\begin{array}{rrr} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 3 \end{array}\right|$$

7. **Página 63**

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F'2=F2+F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3-F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} x-2y-2z=1 \\ y-z=1 \end{array} \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{F1 \leftrightarrow F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=2F3-3F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -7 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3-6F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$

$\left.\begin{array}{r} 2x-2y-z=3 \\ y-z=1 \\ -z=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$

8. **Página 63**

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[F3 \leftrightarrow F2]{F1 \leftrightarrow F3 \; F2 \leftrightarrow F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3-2F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3+F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)$

$\left.\begin{array}{r} x-z=-4 \\ y-z=-5 \\ z=-3 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \\ z=-3 \end{cases}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F'3=F1+F3]{F'2=3F1+F2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F2+5F3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & 30 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} x-y-z=4 \\ -5y-3z=10 \\ -2z=30 \end{array} \rightarrow \begin{cases} x=-8 \\ y=-11 \\ z=-15 \end{cases}$

9. **Página 64**

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F'2=F2+F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3-F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{F'2=F2+F1} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3-F2} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado.

10. **Página 64**

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F'2=F1]{F'1=F2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F'3=F3-F1]{F'2=F2+2F1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3+F2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado.

11. **Página 65**

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$

En A^*, la tercera fila es la segunda fila menos la primera.

$|A| = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$ · Rango $(A^*) = 2$

Rango (A) = Rango (A^*) < N.º de incógnitas → Sistema compatible indeterminado.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F'3 = F3 - 2F1]{F'2 = F2 - 3F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3 = F3 - F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x - y - 2z = 2 \\ 3y - 7z = -3 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 - \dfrac{z}{3} \\ y = -1 - \dfrac{7z}{3} \end{array}\right.$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$|A| = -3 \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = N.º de incógnitas → Sistema compatible determinado.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3 = F3 - 2F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3 = F3 - F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x - y - z = 2 \\ y + z = -1 \\ -3z = -3 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

Rango (A) ≠ Rango $(A^*) = 4$ · Sistema incompatible.

12. **Página 65**

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

En A^*, si sumamos las dos primeras filas, obtenemos la tercera → Rango $(A^*) < 3$

$|A| = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$ · Rango $(A^*) = 2$

Rango (A) = Rango (A^*) < N.º de incógnitas · Sistema compatible indeterminado.

13. **Página 66**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

En A^*, si a la última fila le restamos la segunda, obtenemos la primera → Rango $(A^*) < 3$

$|A| = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$ · Rango $(A^*) = 2$

Rango (A) = Rango (A^*) < N.º de incógnitas · Sistema compatible indeterminado.

14. **Página 66**

a) Respuesta abierta. Por ejemplo: $\left.\begin{array}{r} 2x-2y-z=1 \\ -x-y-z=3 \\ x-y-z=3 \end{array}\right|$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo: $\left.\begin{array}{r} 2x-2y-z=1 \\ -x-y-z=3 \\ -2x-2y+2z=6 \end{array}\right|$

c) Respuesta abierta. Por ejemplo: $\left.\begin{array}{r} 2x-2y-z=1 \\ -x-y-z=3 \\ -x-y-z=1 \end{array}\right|$

15. **Página 67**

a) El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

b) El número de ecuaciones no es el mismo que el número de incógnitas; por tanto, no se puede aplicar la regla de Cramer.

16. **Página 67**

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$\left.\begin{array}{r} x-y-z=1 \\ x-y=0 \\ y-z=0 \end{array}\right|$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$\left.\begin{array}{r} x-y-z-t=4 \\ x-y-z-t=0 \\ 2x-y-z=2 \\ y-z-t=3 \end{array}\right|$

17. **Página 68**

El número de ecuaciones el igual al número de incógnitas.

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7 = 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7$

$|A_y| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -14$

$|A_z| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -7$

18. **Página 68**

El número de ecuaciones el igual al número de incógnitas.

$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -11 = 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -8 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 14 \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = -\frac{14}{11}$ $\qquad$ $|A_y| = \begin{vmatrix} -2 & 4 & -1 \\ -1 & -8 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -43 \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{43}{11}$

$|A_z| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -27 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{27}{11}$

19. **Página 69**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 41 \rightarrow$ Rango $(A) = 3 =$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Solución: $x = 0, y = 0, z = 0$.

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Rango $(A) <$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Consideramos el siguiente sistema:

$\left.\begin{matrix} 2x - y = 2z \\ 2x - 3y = -2z \end{matrix}\right| \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ $\qquad$ $\left.\begin{matrix} 2x - y = 2z \\ 2x - 3y = -2z \end{matrix}\right| \rightarrow \left|\begin{matrix} x = 2z \\ y = -2z \end{matrix}\right.$

La solución es: $x = 2\lambda, y = -2\lambda, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

20. **Página 69**

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$\left.\begin{matrix} 2x - y - 2z + t = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \\ x - 3y - 4z - t = 0 \\ x - 2y - t = 0 \end{matrix}\right| \rightarrow \left|\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{matrix}\right.$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$\left.\begin{matrix} 2x - y - t = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \\ 2y - t = 0 \end{matrix}\right| \rightarrow \left|\begin{matrix} x = -\frac{1}{5}\lambda \quad z = \lambda \\ y = -\frac{2}{5}\lambda \quad t = \frac{4}{5}\lambda \end{matrix}\right.$

21. **Página 70**

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & m \end{vmatrix} = 4 - 2m$

Si $m \neq 2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $m = 2 \rightarrow |A| = 0$

$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A^*) = 3$

Rango $(A) \neq$ Rango (A^*) $\rightarrow$ Sistema incompatible.

22. Página 70

El sistema es homogéneo · Rango (A) = Rango (A^*) → Sistema compatible.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -a & -3 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 7a - 63$$

Si $a \neq -9 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 3 =$ N.º de incógnitas → Sistema compatible determinado.

Si $a = -9 \rightarrow |A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0 \rightarrow$$ Rango $(A) = 2 <$ N.º de incógnitas → Sistema compatible indeterminado.

23. Página 71

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & m \end{vmatrix} = -2m - 4$$

Si $m \neq 2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2m & -2 & 2 \\ -4 & -2 & m \end{vmatrix} = -2m^2 - 6m - 4 = -2(1-m)(2-m)$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 2m & 2 \\ -3 & -4 & m \end{vmatrix} = -2(m^2 - m - 7)$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2m \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 22 - 10m$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-2(1-m)(2-m)}{4-2m} = -1 + m$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-2(m^2 - m - 7)}{4-2m} = \frac{m^2 - m - 7}{m-2}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{22 - 10m}{4-2m} = \frac{5m - 11}{m-2}$$

Si $m = 2 \rightarrow |A| = 0$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow$$ Rango $(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \rightarrow$$ Rango $(A^*) = 3$

Rango $(A) \neq$ Rango (A^*) · Sistema incompatible.

24. **Página 71**

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -a & -3 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 7a - 63$$

Si $a \neq -9 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 3 =$ N.º de incógnitas $\longrightarrow$ Sistema compatible determinado.

Como es sistema es homogéneo: $x = 0, y = 0, z = 0$.

Si $a = -9 \rightarrow |A| = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 <$ N.º de incógnitas $\longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Consideramos el sistema: $\left.\begin{matrix} 2x - 3y = -z \\ x - 9y = 3z \end{matrix}\right\}$.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -z & -3 \\ 3z & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 2 & -z \\ 1 & 3z \end{vmatrix} = 7z$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 0 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{7z}{21} = \frac{z}{3}$$

La solución es: $x = 0, y = \frac{\lambda}{3}, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

25. **Página 72**

Sean x, y, z las cantidades que deben poner Juan, Pepe y Javier, respectivamente.

$$\left.\begin{matrix} x - y - z = 26 \\ x = 2y \\ z = \frac{2}{3}x \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left.\begin{matrix} x - y - z = 26 \\ x - 2y = 0 \\ 2x - 3z = 0 \end{matrix}\right\}$$

26. **Página 72**

Sean x, y, z los obreros, los oficinistas y los directivos que trabajan en la fábrica, respectivamente.

$$\left.\begin{matrix} x - y - z = 22 \\ 2y - 3z = 2x \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left.\begin{matrix} x + y + z = 22 \\ 2x - 2y - 3z = 0 \end{matrix}\right\}$$

El número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas, por lo que el sistema no puede ser compatible determinado. No se puede determinar el número de obrero con estos datos.

27. **Página 73**

$x =$ N.º de personas que no son niños ni jubilados

$y =$ N.º de niños

$z =$ N.º de jubilados, respectivamente

$$\left.\begin{matrix} x - y - z = 200 \\ z = 0{,}25y \\ 30x - 15y - 21z = 4\,620 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left.\begin{matrix} x - y - z = 200 \\ 0{,}25y - z = 0 \\ 30x - 15y - 21z = 4\,620 \end{matrix}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 0{,}25 & -1 & 0 \\ 30 & 15 & 21 & 4620 \end{array}\right) \xrightarrow[F'3=F3-30F1]{F'2=4F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -15 & -9 & -1380 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3+15F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -69 & -1380 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x-y-z=200 \\ y-4z=0 \\ -69z=-1380 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=100 \\ y=80 \\ z=20 \end{array}\right.$$

Hay 80 niños, 20 jubilados y 100 personas que no son ni niños ni jubilados.

28. **Página 73**

Sean *x*, *y*, *z* los presupuestos para muebles, libros y material de oficina, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{l} x=5(y+z) \\ y=3z \\ x-z=7y \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-5y-5z=0 \\ y-3z=0 \\ x-7y-z=0 \end{array}\right.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{El rango de la matriz de coeficientes es 2.}$$

El sistema es compatible indeterminado, por lo que no podemos saber cuánto se ha destinado a cada compra con estos datos.

Si $y = 1800 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 5 \cdot 2400 = 12000 \\ z = 600 \end{array}\right.$

Para muebles se destinan 12 000 € y para material de oficina 600 €.

SABER HACER

29. **Página 74**

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a-2c & 5b-2c & 0 \\ 2a-5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a-2b & 2a-5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5a-2c & 5b-2c & 0 \\ 2a-5c & 2b-5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a-2b & 2a-5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Escribimos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 5a-2c=5a+2b \\ 2a-5c=7c \\ 5b-2c=2a-5b \\ 2b-5c=7c \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2c=2b \\ 2a=2c \end{array}\right. \rightarrow a=b=c$$

Luego $B = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $a \neq 0$.

30. **Página 74**

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ No existe A^{-1}.

El sistema que tenemos es: $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 1 \\ 3x - 2y + z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{array}\right\}$

Como sabemos que es un sistema compatible indeterminado, consideramos el sistema:

$\left.\begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ 3x - 2y = 1 - z \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = z - 1 \\ y = -2z - 1 \end{array}\right.$ → Soluciones: $x = \lambda + 1, y = -2\lambda - 1, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

31. **Página 75**

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 = 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ N.º de incógnitas → Sistema compatible indeterminado.

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 1 - z \\ x = 1 - z \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 + z \\ y = 0 \end{array}\right.$

Soluciones: $x = 1 + \lambda, y = 0, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 6 \rightarrow$ Rango $(A) = 3$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ N.º de incógnitas → Sistema compatible determinado.

$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 6 \rightarrow x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{6}{6} = 1$ $\qquad$ $|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = 0$

$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow z = \dfrac{|A_z|}{|A|} = 0$

Solución: $x = 1, y = 0, z = 0$.

32. **Página 75**

$\begin{vmatrix} m & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4 = (m - 2)(m - 2)$

Si $m - 2 \rightarrow |A| - 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 1$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 1 <$ N.º de incógnitas → Sistema compatible indeterminado.

$2x = 4 - 2y \rightarrow x = 2 - y$

Solución: $x = 2 - \lambda, y = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $m = -2 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 1$

Pero $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -8 \rightarrow$ Rango $(A^*) = 2$

Rango $(A) \neq$ Rango (A^*) $\cdot$ Sistema incompatible.

Si $m \neq 2,\ m \neq -2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 =$ N.º de incógnitas $\cdot$ Sistema compatible determinado.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2m & 2 \\ m-2 & m \end{vmatrix} = 2m^2 - 2m - 4 \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{2m^2 - 2m - 4}{m^2 - 4} = \frac{2m-2}{m+2}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} m & 2m \\ 2 & m-2 \end{vmatrix} = m^2 - 2m \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{m^2 - 2m}{m^2 - 4} = \frac{m}{m-2}$$

33. **Página 76**

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1-2m \\ 0 & 2 & m^2 \end{vmatrix} = -2m^2 - 4m - 6 = -2(m-3)(m-1)$$

Si $m = 3 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2$ $\cdot$ Sistema compatible indeterminado.

Consideramos el sistema: $\left.\begin{matrix} x - y = 1 - z \\ -x - 2y = 7 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{matrix} x = 9 - 2z \\ y = 8 - z \end{matrix}$

Soluciones: $x = 9 - 2\lambda,\ y = 8 - \lambda,\ z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $m = -1 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2$ $\cdot$ Sistema compatible indeterminado.

Consideramos el sistema: $\left.\begin{matrix} x - y = 1 - z \\ -x - 2y = -1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{matrix} x = 1 - 2z \\ y = -z \end{matrix}$

Soluciones: $x = 1 - 2\lambda,\ y = -\lambda,\ z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $m = 3,\ m \neq -1 \rightarrow$ Rango $(A^*) = 3$

Rango $(A) \neq$ Rango (A^*) $\cdot$ Sistema incompatible.

34. **Página 76**

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 0 & 2 & \\ 0 & m & -1 & \\ 1 & -1 & 1 & \end{array}\right) \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} m & 0 & 2 \\ 0 & m & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = m^2 - 3m = m(m-3)$$

Si $m = 0,\ m \neq 3 \rightarrow$ Rango $(A) = 3$

Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ N.º de incógnitas $\cdot$ Sistema compatible determinado.

Al ser un sistema homogéneo, solución: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

Si $m = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ N.º de incógnitas $\cdot$ Sistema compatible indeterminado.

Consideramos el sistema: $\left.\begin{matrix} 2z = 0 \\ x = y - z \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} z = 0 \\ x = y \end{matrix}\right\}$

Si $m = 3 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad |A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ N.º de incógnitas $\cdot$ Sistema compatible indeterminado.

Consideramos el sistema: $\left.\begin{matrix} 3x = -2z \\ 3y = z \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} x = -\dfrac{2z}{3} \\ y = \dfrac{z}{3} \end{matrix}\right.$

Solución: $x = -\frac{2\lambda}{3}, y = \frac{\lambda}{3}, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

35. **Página 77**

Si llamamos:

$x =$ N.º de billetes de 10 € $\quad$ $y =$ N.º de billetes de 20 € $\quad$ $z =$ N.º de billetes de 50 €

Obtenemos el sistema: $\left.\begin{matrix} x - y - z = 130 \\ 10x - 20y - 50z = 3000 \\ x - 2z = 0 \end{matrix}\right\}$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 130 \\ 10 & 20 & 50 & 3000 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F'2 = F2 - 10F3]{F'1 = F1 - F3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 130 \\ 0 & 20 & 70 & 3000 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F'2 = F2 - 20F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 130 \\ 0 & 0 & 10 & 400 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F'2 = F2:10} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 130 \\ 0 & 0 & 1 & 40 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F'3 = F3 + 2F2]{F'1 = F1 - 3F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 40 \\ 1 & 0 & 0 & 80 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{matrix} x = 80 \\ y = 10 \\ z = 40 \end{matrix}\right.$$

36. **Página 77**

Sean x, y, z el precio de un bolígrafo, un cuaderno y un lapicero, respectivamente.

$$\left.\begin{matrix} 5x - 3y + 2z = 13{,}80 \\ 3x - 4y + 3z = 14{,}5 \\ 7x - 2y + z = 13{,}10 \end{matrix}\right\} \qquad \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

El determinante de la matriz de coeficientes es 0; por tanto, el sistema es incompatible o compatible indeterminado, y no se puede calcular el precio de cada artículo.

ACTIVIDADES FINALES

37. **Página 78**

a) $\left.\begin{matrix} 3x-2y=5 \\ -5x+3y=-11 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} x=7 \\ y=8 \end{matrix}\right.$ Sistema compatible determinado.

b) $\left.\begin{matrix} 6x-9y=15 \\ -8x-12y=-20 \end{matrix}\right\} \rightarrow 6x-9y=15 \rightarrow x=\frac{5-3y}{2}$ Sistema compatible indeterminado.

Solución: $x=\frac{5-3\lambda}{2}, y=\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) $\left.\begin{matrix} -3x-9y=3 \\ 2x-6y=-1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{matrix} -3x+9y=3 \\ 0=3 \end{matrix} \rightarrow$ Sistema incompatible.

d) $\left.\begin{matrix} 2x-y-z=1 \\ 2y-z=0 \\ -x-3y-2z=7 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} x=0 \\ y=1 \\ z=-2 \end{matrix}\right.$ Sistema compatible determinado.

e) $\left.\begin{matrix} 3x-y-z=5 \\ -x-3y+2z=0 \\ x-7y-3z=5 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{F'3=F3-2F2} \left.\begin{matrix} 3x-y-z=5 \\ -x+3y-2z=0 \\ 3x-y-z=5 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} 3x-y=5-z \\ -x-3y=-2z \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} x=\frac{z-3}{2} \\ y=\frac{1-z}{2} \end{matrix}\right.$

Sistema compatible indeterminado.

Solución: $x=\frac{3-\lambda}{2}, y=\frac{1-\lambda}{2}, z=\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

f) $\left.\begin{matrix} 2x-y-3z=3 \\ -x-y-2z=4 \\ x-z=5 \end{matrix}\right\} \xrightarrow[F'2=F2+F3]{F'1=F1-2F3} \begin{matrix} -y-z=-7 \\ -y-z=9 \\ x-z=5 \end{matrix} \xrightarrow{F'2=F2+F1} \begin{matrix} -y+z=-7 \\ 0=2 \\ x+z=5 \end{matrix}$ Sistema incompatible.

38. **Página 78**

Respuesta abierta, por ejemplo:

$$\left.\begin{matrix} 2x-y=-4 \\ -x-3y=7 \\ x-2y=3 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} x=-1 \\ y=2 \end{matrix}\right.$$

39. **Página 78**

Respuesta abierta, por ejemplo:

$$\left.\begin{matrix} x-y-z=3 \\ 2x-2y-z=1 \\ -2x-3y-z=0 \\ x-2y-z=4 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} x=1 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{matrix}\right.$$

40. **Página 78**

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & -1 \\ 2 & 3 & -7 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[F'3=F3-F1]{F'2=F2-2F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} 2x-3y+5z=1 \\ y+3z=-3 \\ -12z=-4 \end{array} \Bigg\} \rightarrow \begin{cases} x=17/3 \\ y=-4 \\ z=1/3 \end{cases}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F'3=F3-2F1]{F'2=F2-F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3-F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} x-2y-z=1 \\ -y-2z=0 \\ z=-1 \end{array} \Bigg\} \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \\ z=-1 \end{cases}$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F3\leftrightarrow F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 12 \\ 5 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[F'3=F3-5F1]{F'2=F2+F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 14 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=4F3+3F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 14 \\ 0 & 0 & -11 & 22 \end{array}\right)$

$$\left.\begin{array}{r} x-y-z=2 \\ 4y-z=14 \\ -11z=22 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \\ z=-2 \end{cases}$$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \\ -2 & 0 & 2 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{F2\leftrightarrow F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=3F3+2F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 6 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=3F3-8F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & -30 \end{array}\right)$

$$\left.\begin{array}{r} 3x-4y=11 \\ 3y-z=3 \\ 10z=-30 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=-3 \end{cases}$$

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F'3=F3-F1]{F'2=F2-F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3-4F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -8 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} x-2y-z=-1 \\ y-3z=3 \\ -10z=-8 \end{array} \Bigg\} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{3}{5} \\ z=\frac{4}{5} \end{cases}$

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 12 \\ 3 & 0 & 2 & 7 \\ 5 & -6 & 4 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[F'3=F3+5F1]{F'2=F2+3F1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 12 \\ 0 & 9 & -1 & 43 \\ 0 & 9 & -1 & 65 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3-F2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 12 \\ 0 & 9 & -1 & 43 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema incompatible.

g) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & 19 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{F1\leftrightarrow F2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 19 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[F'3=F3+3F1]{F'2=F2+3F1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & 17 & 1 \\ 0 & 10 & 34 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3-2F1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & 17 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$\left.\begin{array}{r} -x-2y-5z=-2 \\ 5y-17z=1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{12-9z}{5} \\ y=\dfrac{1-17z}{5} \end{cases}$$

Solución: $x=\frac{12-9\lambda}{5}$, $y=\frac{1-17\lambda}{5}$, $z=\lambda$ con $\lambda\in\mathbb{R}$.

h) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -1 & -7 \\ -3 & 2 & -3 & -4 \\ -1 & -3 & -8 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow{F3\leftrightarrow F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 8 & 12 \\ -3 & 2 & -3 & -4 \\ 2 & -4 & -1 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[F'3=F3-2F1]{F'2=F2+3F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 8 & 12 \\ 0 & 11 & 21 & 32 \\ 0 & -10 & -17 & -31 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=11F3+10F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 8 & 12 \\ 0 & 11 & 21 & 32 \\ 0 & 0 & 23 & -21 \end{array}\right)$

$$\left.\begin{array}{r} a-3b+8c=12 \\ 11b-21c=32 \\ 23c=-21 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{123}{23} \\ b=\dfrac{107}{23} \\ c=-\dfrac{21}{23} \end{cases}$$

41. **Página 78**

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & 9 \\ -4 & 2 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{F'2=3F2+2F1} \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ → Sistema compatible indeterminado.

b) $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F'2=F2+2F1} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \end{array}\right)$ → Sistema compatible determinado.

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \\ 5 & -5 & 4 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[F'3=F3-5F1]{F'2=F2-2F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3-2F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ → Sistema compatible indeterminado.

d) $\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & -8 \\ 6 & -3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{F'2=2F2+3F1} \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & -14 \end{array}\right)$ → Sistema incompatible.

e) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F1 \leftrightarrow F2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F'2=2F2-3F1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{array}\right)$ → Sistema compatible determinado.

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F'3=2F3-5F1]{F'2=2F2-3F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -13 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3-F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{array}\right)$ → Sistema incompatible.

42. **Página 78**

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 6 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{F'2=F2+2F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 2x + y - 2z = 1 \\ 2z = -1 \end{array} \rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{-1}{2} \\ y = -2x \end{cases}$

Las soluciones son de la forma $\left(a, -2a, -\frac{1}{2}\right)$.

43. **Página 78**

a) Respuesta abierta. Por ejemplo: $\begin{array}{r} x - y - z = 1 \\ x - y = 3 \\ y - 2z = 2 \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F'2=F2-F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3-2F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \\ z = -2 \end{cases}$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo: $\begin{array}{r} x - y - z = 1 \\ x - y = 3 \\ 2x - 2y + z = 4 \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F'3=F3-2F1]{F'2=F2-F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3-F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\begin{array}{l} x - y - z = 1 \\ z = -2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} x = 3 - y \\ z = -2 \end{array}$

c) Respuesta abierta. Por ejemplo: $\begin{array}{r} x - y - z = 1 \\ x - y = 3 \\ -z = -4 \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{F'2=F2-F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3=F3-F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$

44. **Página 78**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-2y-z=1 \\ x-y+2z=1 \\ 3x-3y-4z=1 \end{array}\right|$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -4 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{F'2=2F2-F1 \\ F'3=2F3-3F1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \end{array}\right) \overset{F'3=F3+F2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-2y-z=1 \\ 5z=1 \end{array}\right| \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=y+\frac{3}{5} \\ z=\frac{1}{5} \end{array}\right.$$

45. **Página 78**

a) Repuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x-y+3z=9 \\ -2x-y-2z=9 \\ x-y+3z=2 \end{array}\right|$$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x-y-3z=9 \\ -2x-y-2z=9 \\ -x-5z=18 \end{array}\right|$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 9 \\ -2 & 1 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & 5 & 18 \end{array}\right) \overset{\substack{F'2=F2+2F1 \\ F'3=F3+F1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 8 & 27 \\ 0 & -1 & 8 & 27 \end{array}\right) \overset{F'3=F3-F2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 8 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y=9-3z \\ -y=27-8z \end{array}\right| \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5z-18 \\ y=8z-27 \end{array}\right.$$

Solución: $x = 5\lambda - 18, y = 8\lambda - 27, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

46. **Página 78**

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix} = 1 - 5m$$

Si $m = \frac{1}{5} \rightarrow |A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -9 \rightarrow \text{Rango } (A^*) = 3$$

Rango $(A) \neq$ Rango (A^*) $\rightarrow$ Sistema indeterminado.

Si $m = \frac{1}{5} \rightarrow |A| = 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 3$

Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

47. **Página 78**

Tenemos el sistema $\left.\begin{array}{r} 3x-y+z=5 \\ -2x+3y-z=-8 \\ 4x-y-az=b \end{array}\right\}$.

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & a \end{vmatrix}=7a-21$$

Como queremos que sea compatible indeterminado: $|A|=0 \rightarrow 7a-21=0 \rightarrow a=3$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -8 \\ 4 & 1 & b \end{vmatrix}=7b-14$$

Para que sea indeterminado, necesitamos que: Rango $(A^*)<3 \rightarrow 7b-14=0 \rightarrow b=2$

Solución: $a=3, b=2$.

48. **Página 78**

a) Respuesta abierta. Por ejemplo: $\left.\begin{array}{r} 3x-2y+z=5 \\ 2x-3y-z=-4 \\ 2x-3y-z=1 \end{array}\right\}$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo: $\left.\begin{array}{r} 3x-2y-z=5 \\ 2x-3y-z=-4 \\ 5x-5y-3z=1 \end{array}\right\}$

49. **Página 78**

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & 0 \end{vmatrix}=-cb \rightarrow |A|=-6 \rightarrow -cb=-6 \rightarrow cb=6$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-3b & 2a-4b \\ c & 2c \end{pmatrix} \qquad B\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-2c & b \\ 3a-4c & 3b \end{pmatrix}$$

Si $A\cdot B=B\cdot A \rightarrow \begin{pmatrix} a-3b & 2a-4b \\ c & 2c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-2c & b \\ 3a-4c & 3b \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a-3b=a+2c \\ 2a+4b=b \\ c=3a-4c \\ 2c=3b \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-\dfrac{3b}{2} \\ b=\dfrac{2c}{3} \end{array}\right.$

Como sabemos que $cb=6$: $\left.\begin{array}{l} a=-\dfrac{3b}{2} \\ b=\dfrac{2c}{3} \\ cb=6 \end{array}\right\}$ Si $c=+3$, $b=+2$ y $a=-3$. Si $c=-3$, $b=-2$ y $a=+3$.

Soluciones: $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ o $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

50. **Página 78**

a) $\left.\begin{array}{r} 2x-3y+5z=3 \\ x-2y-z=-1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} -2x-2y-z=2 \\ x-y+3z=0 \\ 2x-y=1 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} a-4b=-1 \\ 2a-3b=4 \\ a-5b=2 \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{r} x-2y+z=1 \\ 2x-z=2 \\ -2x+y-z=3 \end{array}\right\}$

51. **Página 79**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$

52. **Página 79**

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 1 = 0 - A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ -13 \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 36 \neq 0 - A^{-1} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 13 & 14 & 5 \\ -4 & 4 & 4 \\ 11 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

$A \cdot X = B - X = A^{-1} \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 13 & 14 & 5 \\ -4 & 4 & 4 \\ 11 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ -13 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 144 \\ 0 \\ -108 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

53. **Página 79**

a) $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & 6 & -5 \\ 4 & 9 & -10 \end{vmatrix}$ $\quad A^* = \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & -8 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 4 & 9 & -10 & -8 \end{array}\right|$

$|A| = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 9 & -8 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Rango $(A^*) = 2$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

b) $A = \begin{vmatrix} 8 & -6 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ $\quad A^* = \left|\begin{array}{ccc|c} 8 & -6 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 10 \\ -1 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right|$

$|A| = -14 \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

c) $A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ $\quad A^* = \left|\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -6 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ 6 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right|$

$|A| = 0 \rightarrow$ Rango $(A) < 3$ $\quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 6 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 110 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A^*) = 3$

Rango $(A) \neq$ Rango $(A^*) \rightarrow$ Sistema incompatible.

d) $A = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad A^* = \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 7 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right|$

$|A| = 0$ $\quad \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

54. **Página 79**

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -1 = 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3$ $\quad |A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 4$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = 3$ $\quad y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = -4$

b) El número de ecuaciones el igual al número de incógnitas.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ No se puede aplicar la regla de Cramer.

c) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$|A_a| = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 21$ $\qquad$ $|A_b| = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$

$a = \dfrac{|A_a|}{|A|} = 3$ $\qquad$ $b = \dfrac{|A_b|}{|A|} = 0$

d) El número de ecuaciones el igual al número de incógnitas.

$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & 0 & 7 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ No se puede aplicar la regla de Cramer.

55. Página 79

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow \begin{matrix} x - 2y = 6 - z \\ -3x - y = -3 - 2z \end{matrix}$

$|A_x| = \begin{vmatrix} 6 - z & 2 \\ -3 + 2z & 1 \end{vmatrix} = 12 - 5z$ $\qquad$ $|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 6 - z \\ -3 & -3 - 2z \end{vmatrix} = 15 - z$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{12 - 5z}{7}$ $\qquad$ $y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{15 - z}{7}$

La solución es: $x = \dfrac{12 - 5\lambda}{7}, y = \dfrac{15 - \lambda}{7}, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \begin{matrix} x - y - z = 4 - t \\ x - y - z = 1 \\ y - z = 1 - t \end{matrix}$

$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 - t & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 - t & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 2t \rightarrow x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = 2 - t$ $\qquad$ $|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 4 - t & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 - t & -1 \end{vmatrix} = 3 - t \rightarrow y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{3 - t}{2}$

$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 - t \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 - t \end{vmatrix} = 1 - t \rightarrow z = \dfrac{|A_z|}{|A|} = \dfrac{1 - t}{2}$

La solución es: $x = 2 - \lambda, \dfrac{3 - \lambda}{2}, \dfrac{1 - \lambda}{2}, t = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 11 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 11 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \rightarrow \begin{matrix} 2a - b = 0 \\ 11a - b = 3c \end{matrix}$

$|A_a| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3c & -1 \end{vmatrix} = 3c$ $\qquad$ $|A_b| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 11 & 3c \end{vmatrix} = 6c$

$a = \dfrac{|A_a|}{|A|} = \dfrac{c}{3}$ $\qquad$ $b = \dfrac{|A_b|}{|A|} = \dfrac{2c}{3}$

La solución es: $a = \dfrac{\lambda}{3}, b = \dfrac{2\lambda}{2}, c = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

d) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & 0 & 7 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & 0 & 7 \\ -6 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \rightarrow \begin{matrix} 3p - 3q = -11r \\ 4p = -7r \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} p = -\dfrac{7r}{4} \\ q = \dfrac{23r}{12} \end{matrix}$

La solución es: $p = -\frac{7}{4}\lambda, q = \frac{23}{12}\lambda, -\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

56. **Página 79**

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 3$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ N.º de incógnitas $\cdot$ Sistema compatible determinado.

$|A_x| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 12$ $\qquad$ $|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -12$ $\qquad$ $|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = -4$ $\qquad$ $y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = 4$ $\qquad$ $z = \dfrac{|A_z|}{|A|} = -1$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Rango $(A^*) = 2$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ N.º de incógnitas $\cdot$ Sistema compatible indeterminado.

Consideramos el sistema: $\begin{matrix} x - y = 3 - 2z \\ 2y = 2 - 3z \end{matrix}$

$|A_x| = \begin{vmatrix} 3 - 2z & 1 \\ 2 - 3z & 2 \end{vmatrix} = 4 - z$ $\qquad$ $|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 3 - 2z \\ 0 & 2 - 3z \end{vmatrix} = 2 - 3z$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{4 - z}{2}$ $\qquad$ $y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{2 - 3z}{2}$

La solución es: $x = \frac{4 - \lambda}{2}, y = \frac{2 - 3\lambda}{2}, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ $A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & -1 \end{array}\right)$

$|A| = 14 \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 11$ $|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -23$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{11}{14}$ $y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = -\dfrac{23}{14}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A^*) = 3$

Rango $(A) \neq$ Rango (A^*) · Sistema incompatible.

e) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ N.º de incógnitas · Sistema compatible indeterminado.

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{l} 2x - y = -t \\ x - 2y = -1 - z - 4t \end{array}\right|$

$|A_x| = \begin{vmatrix} -t & -1 \\ -1 + z - 4t & 2 \end{vmatrix} = -1 + z - 6t$ $|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & -t \\ 1 & -1 + z - 4t \end{vmatrix} = -2 + 2z - 7t$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{-1 + z - 6t}{5}$ $y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{-2 - 2z - 7t}{5}$

La solución es: $x = \dfrac{-1 - \lambda - 6\mu}{5}, y = \dfrac{-2 - 2\lambda - 7\mu}{5}, z = \lambda, t = \mu$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

f) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ $A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & 0 \end{array}\right)$

$|A| = 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 1$

Como es un sistema homogéneo, Rango (A) = Rango $(A^*) = 1 <$ N.º de incógnitas · Sistema compatible indeterminado.

Tenemos: $\left.\begin{array}{l} x = -4y \\ y = \lambda \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{l} x = -4\lambda \\ y = \lambda \end{array}\right.$, con $y = \lambda \in \mathbb{R}$.

57. **Página 79**

a) $A = \begin{pmatrix} 2m & -3 \\ -6 & m \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 2m & -3 & -3 \\ -6 & m & m \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} 2m & -3 \\ -6 & m \end{vmatrix} = 2m^2 - 18 = 2(m-3)(m+3)$

Si $m = 3,\ m = -3 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 =$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $m = 3 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 1 <$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Si $m = -3 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 1 <$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -m \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & m \\ 1 & 1 & -m & m \\ 2 & 3 & 1 & m \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -m \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -m$

Si $m = 0 \rightarrow |A| = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Si $m = 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & -1 & 2 \\ 2 & 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & -1 & m^2 \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & -1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = m^2 - m - 2 = (m-2)(m-1)$ $\qquad \begin{vmatrix} m & -1 & 2 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & -1 & m^2 \end{vmatrix} = m^4 + m^2 - 2m - 2$

Si $m \neq -2, m \neq 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $m = -2 \rightarrow |A| = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

Rango $(A) \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Si $m = 1 \rightarrow |A| = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

Rango $(A) \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

d) $A = \begin{pmatrix} m-3 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} m-3 & 2 & m-1 \\ 2 & m & m \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} m-3 & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + 3m - 4 = (m-1)(m-4)$

$\begin{vmatrix} 2 & m-1 \\ m & m \end{vmatrix} = m - m^2$ $\qquad \begin{vmatrix} m-3 & m-1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 - m - 2$

Si $m \neq 1, m \neq -4 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 =$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sist. compatible determinado.

Si $m = 1 \rightarrow$ Rango $(A) = 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 1 <$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sist. compatible indeterminado.

Si $m = -4 \rightarrow$ Rango $(A) = 1 \rightarrow$ Rango $(A^*) = 2 \neq$ Rango $(A) \rightarrow$ Sistema incompatible.

e) $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $\qquad A^* = \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ m & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right|$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m - 1$

Si $m \neq 1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 2 = N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $m = 1 \rightarrow |A| = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Rango (A^*) = Rango $(A) = 2 <$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

f) $A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & m \\ -1 & m & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ $\qquad A^* = \left|\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & m & 1 \\ -1 & m & 2 & m \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right|$

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & m \\ -1 & m & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6m - 2m^2 = 2m(3 - m)$

Si $m = 0, m = 3 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Si $m = 0 \rightarrow |A| = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 = 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Rango (A^*) = Rango $(A) = 2 <$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Si $m = 3 \rightarrow |A| = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 = 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \rightarrow$ Rango $(A^*) \neq$ Rango (A) $\cdot$ Sistema incompatible.

58. **Página 79**

a) $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix}$ $\qquad A^* = \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & m \\ 0 & m & 1 & m \\ 0 & 1 & m & m \end{array}\right|$

$|A| = m^2 - 1$

Si $m \neq 1, m \neq -1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $m = 1 \rightarrow |A| = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

$A^* = \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| \rightarrow$ Tiene dos columnas iguales $\rightarrow$ Rango (A^*) = Rango $(A) = 2 <$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Si $m = -1 \rightarrow |A| = 0$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A^*) = 3$$

Rango $(A^*) \neq$ Rango (A) · Sistema incompatible.

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & m & 4 \\ m & 2 & 6 \\ 2 & m & 6 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & m & 4 & 2 \\ m & 2 & 6 & 0 \\ 2 & m & 6 & 1 \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & m & 4 \\ m & 2 & 6 \\ 2 & m & 6 \end{vmatrix} = 8 - 2m^2 = -2(m-2)(m-2) = 0 \rightarrow m = -2$$

Si $m \neq 2, m \neq -2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $m = 2 \rightarrow |A| = 0$ $\quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4 = 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 4 \rightarrow$ Rango $(A^*) \neq$ Rango (A) · Sistema incompatible.

Si $m = -2 \rightarrow |A| = 0$ $\quad \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -20 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 28 \rightarrow$ Rango $(A^*) = 3 \neq$ Rango (A) · Sistema incompatible.

59. Página 79

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 4 & -3 & a \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & -3 & a \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 65 - 5a$$

Si $a = 13 \rightarrow$ Rango $(A^*) = 3 \neq$ Rango (A) · Sistema incompatible.

Si $a = 13 \rightarrow |A^*| = 0$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 3 \rightarrow$ Rango $(A^*) = 2$

Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 =$ N.º de incógnitas · Sistema compatible determinado.

b) $A = \begin{pmatrix} -3 & a \\ 2 & 1 \\ a & -2a \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} -3 & a & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ a & -2a & -1 \end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix} -3 & a & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ a & -2a & -1 \end{vmatrix} = 3 - 3a$$

Si $a = 1 \rightarrow$ Rango $(A^*) = 3 \neq$ Rango (A) $\rightarrow$ Sistema incompatible.

Si $a \neq 1 \rightarrow |A^*| \neq 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A^*) = 2$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 =$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

60. Página 79

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & m \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right)$

$|A| = 9 \neq 0$ para cualquier valor de m.

Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado para cualquier valor de m.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ m & m & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 & m \\ m & m & 1 & 1 \end{array}\right)$

$|A| = m^2 - 2m - 1 - (m-1)^2 = 0 \rightarrow m = 1$

Si $m \neq 1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $m = 1 \rightarrow |A| = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Todas las filas de A y A^* son iguales $\rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 1 <$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 1-m & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & 1-m & -1 & 1 \end{array}\right)$

$|A| = 0$ para cualquier valor de $m \rightarrow$ Rango $(A^*) < 3$

La primera y la cuarta columna de A^* son iguales $\rightarrow$ Rango $(A^*) < 3$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 =$ Rango (A^*) para cualquier valor de m.

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

61. **Página 79**

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{array}\right) \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$|A| = -a^2 - 3a - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

Si $a \neq 2, a \neq 1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $a = 1 \rightarrow |A| = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A^*) = 3$$

Rango $(A^*) = 3 \neq$ Rango $(A) \rightarrow$ Sistema incompatible.

Si $a = 2 \rightarrow |A| = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \text{Hay tres columnas iguales} \rightarrow \text{Rango } (A^*) = 2$$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F'3 = F3 - F1]{F'2 = F2 - 2F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} x - y - z = 1 \\ -y = 0 \\ y = 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

62. **Página 79**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ 3 & a & a \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & 1 & 1 \\ 3 & a & a & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = 3 - 2a$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a - 3$$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ N.º de incógnitas para cualquier valor de a.

Sistema compatible indeterminado para cualquier valor de a.

63. **Página 79**

a) $$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & 2 \\ 1 & a & 0 & a \\ 0 & -1 & a & 0 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$$

Si $a = 1, a = -1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $a - 1 \rightarrow |A| = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Si $a - -1 \rightarrow |A| = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \rightarrow$ Rango $(A^*) \neq$ Rango $(A) \rightarrow$ Sistema incompatible.

b) Calculamos la solución para $a \quad 1$.

Obtenemos el sistema: $\left.\begin{matrix} 2x - y = 2 - z \\ y = z \end{matrix}\right| \rightarrow \left|\begin{matrix} x = 1 - z \\ y = z \end{matrix}\right.$

Las soluciones son: $x = 1 - \lambda, y = \lambda, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

64. Página 80

$A = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & -a \\ 1 & a-1 & 0 \end{vmatrix}$ $\qquad$ $A^* = \left|\begin{matrix} a & 1 & 1 & 0 \\ a+1 & 1 & -a & a \\ 1 & a-1 & 0 & 2a \end{matrix}\right|$

$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & -a \\ 1 & a-1 & 0 \end{vmatrix} = a^3 - 2a^2 - a = a(a^2 - 2a - 1) = a(a+1)^2 e$

Si $a \neq 0, a \neq -1 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $a - -1 \rightarrow |A| = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \rightarrow$ Rango $(A^*) \neq$ Rango $(A) \rightarrow$ Sistema incompatible.

Si $a - 0 \rightarrow |A| = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Obtenemos el sistema: $\left.\begin{matrix} y = -z \\ x - y = 0 \end{matrix}\right| \rightarrow \left|\begin{matrix} x = z \\ y = -z \end{matrix}\right.$

Las soluciones son: $x = \lambda, y = -\lambda, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

65. **Página 80**

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & -1 \\ 3 & m & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ m & 1 & -1 & m-2 \\ 3 & m & 1 & m-2 \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & -1 \\ 3 & m & 1 \end{vmatrix} = 2m^2 - 8$

$m \neq 2, m \neq -2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $m = -2 \rightarrow |A| = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 32 \rightarrow$ Rango $(A^*) \neq$ Rango (A) $\therefore$ Sistema incompatible.

Si $m = 2 \rightarrow |A| = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ N.º de incógnitas $\therefore$ Sistema compatible indeterminado.

b) Si $m = 2$, obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = -2z \\ 2x - y = z \end{array}\right| - \left.\begin{array}{r} x - y = -2z \\ -y = 5z \end{array}\right| - \left.\begin{array}{l} x = 3z \\ y = -5z \end{array}\right|$$

Las soluciones son: $x = 3\lambda, y = -5\lambda, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $m = -1$, obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x - y - 2z = 0 \\ -x - y - z = -3 \\ 3x - y - z = -3 \end{array}\right| - \left.\begin{array}{r} x - y - 2z = 0 \\ 2y - z = -3 \\ -4y - 5z = -3 \end{array}\right| - \left.\begin{array}{r} x - y - 2z = 0 \\ 2y - z = -3 \\ -3z = -9 \end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -3 \\ y = -3 \\ z = 3 \end{array}\right|$$

66. **Página 80**

a) Si $m = 1$, obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - z = 3 \\ x - y - z = 2 \\ x - y - z = 1 \end{array}\right| - \left.\begin{array}{r} x - y - z = 1 \\ 3x - z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y - z = 1 \\ -3y - 2z = 0 \\ -2y - 2z = 1 \end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y - z = 1 \\ -3y - 2z = 0 \\ 2z = 3 \end{array}\right| - \left.\begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \\ y = 1 \\ z = \frac{3}{2} \end{array}\right|$$

b) $A = \begin{pmatrix} m-2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m-2 & m-1 & -1 & 3 \\ m & -1 & 1 & 2 \\ 1 & m & -1 & 1 \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} m-2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = -m^2 - m = -m(m-1)$

Si $m \neq 0, m \neq -1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $m = 0 \rightarrow |A| = 0$ $\quad \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \rightarrow$ Rango $(A^*) \neq$ Rango (A) $\therefore$ Sistema incompatible.

Si $m = -1 \rightarrow |A| = 0$ $\quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \rightarrow$ Rango $(A^*) \neq$ Rango (A) $\therefore$ Sistema incompatible.

67. **Página 80**

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m-3 \\ 1 & 1 & -4m \\ 2 & 4 & m-6 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m-3 & 3 \\ 1 & 1 & -4m & 3 \\ 2 & 4 & m-6 & 8 \end{array}\right)$

$|A| = m = 0$

Si $m \neq 0 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 3 =$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $m = 0 \rightarrow |A| = 0$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{array}\right)$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A^*) = 3$

Rango $(A^*) = 3 \neq$ Rango $(A) \rightarrow$ Sistema incompatible.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[F'3 = F3 - 2F1]{F'2 = F2 - F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} x - 2y - z = 3 \\ -y + 7z = 0 \\ 2z = 2 \end{array} \rightarrow \begin{cases} x = -12 \\ y = 7 \\ z = 1 \end{cases}$

68. **Página 80**

$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & -1 & 0 & -a \\ 1 & a & 1 & a \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ -1 & 0 & -a \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = -2a^2 + 2a = -2a(a-1)$

Si $a = 0, a = 1 \rightarrow$ Rango $(A^*) \neq$ Rango (A) $\therefore$ Sistema incompatible.

Si $a = 0$ → Rango (A) = Rango (A^*) = 2 < N.º de incógnitas → Sistema compatible indeterminado.

Consideramos el sistema: $\left.\begin{matrix} y - z = 0 \\ -y = -x \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} x = y \\ z = -y \end{matrix}\right.$

Las soluciones son: $x = \lambda \quad y = \lambda \quad z = -\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Si $a = 1$ → Rango (A) = Rango (A^*) = 2 < N.º de incógnitas → Sistema compatible indeterminado.

Consideramos el sistema: $\left.\begin{matrix} y - z = 1 - x \\ -y = -1 - x \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} y = 1 - x \\ z = -2x \end{matrix}\right.$

Las soluciones son: $x = \lambda, y = 1 + \lambda, z = -2\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

69. **Página 80**

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 & 3 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & m & 3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 2 & 3 & 0 \\ 2 & m & 2 & 2 \\ 2 & m & 3 & m-2 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 2 & 3 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & m & 3 \end{vmatrix} = m^2 - 4 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} m & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & m-2 \end{vmatrix} = 2m^2 - 16m + 24$$

Si $m \neq -2$ → Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas → Sistema compatible determinado.

$|A| = m^2 - 4$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & m & 2 \\ m-2 & m & 3 \end{vmatrix} = -3m^2 - 16m - 20 \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-3m^2 + 16m - 20}{m^2 - 4} = \frac{-3m - 10}{m - 2}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} m & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & m-2 & 3 \end{vmatrix} = -2m^2 + 16m - 24 \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-2m^2 - 16m - 24}{m^2 - 4} = \frac{-2m - 12}{m - 2}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} m & 2 & 0 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & m & m-2 \end{vmatrix} = m^3 - 4m^2 - 4m + 16 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{m^3 - 4m^2 - 4m - 16}{m^2 - 4} = m - 4$$

Si $m = -2$ → Rango (A) ≠ Rango (A^*) · Sistema incompatible.

Si $m = 2$ → Rango (A) = Rango (A^*) = 2 · Sistema compatible indeterminado.

Consideramos el sistema: $\left.\begin{matrix} 2x - 2z = 2 - 2y \\ 2x - 3z = -2y \end{matrix}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 - 2y & 2 \\ -2y & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2y \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = 3 - 2y \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 2 & 2 - 2y \\ 2 & -2y \end{vmatrix} = -4 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = -2$$

Las soluciones son: $x = 3 - \lambda, y = \lambda, z = -2$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

70. **Página 80**

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & a-2 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & a-2 & 2 \end{array}\right)$

$|A| = a - 1 - 0 \rightarrow a - 1$

Si $a \neq 1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $a - 1 \rightarrow |A| = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Rango $(A^*) = 2$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F'3 = F3 - F1]{F'2 = F2 - 3F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3 = F3 - F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} x - 2y + z = 1 \\ y - 2z = 1 \\ 4z = 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{array}$

71. **Página 80**

a) $A = \begin{pmatrix} m & 2 & 1 \\ 1 & -1 & m \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 2 & 1 & m-1 \\ 1 & -1 & m & -3 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 1 & -1 & m \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = m - 4$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & m-1 \\ -1 & m & -3 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 20 - 5m$

Si $m \neq 4 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $m - 4 \rightarrow |A| = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 =$ Rango $(A^*) \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

b) Para $m = 1$, obtenemos el sistema:

$\left.\begin{array}{r} x - 2y - z = 0 \\ x - y - z = -3 \\ 2x - 3z = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} x + 2y - z = 0 \\ -3y = -3 \cdot \\ -4y - z = -1 \end{array} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -5 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{array}\right.$

Para $m = -4$, obtenemos el sistema:

$\left.\begin{array}{r} -4x - 2y - z = -5 \\ x - y - 4z = -3 \\ 2x - 3z = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y - 4z = -3 \\ -4x - 2y - z = -5 \\ 2x - 3z = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{r} x - y - 4z = -3 \\ -2y - 15z = -17 \cdot \\ 2y - 11z = 5 \end{array} \begin{array}{r} x - y - 4z = -3 \\ -2y - 15z = -17 \\ -4z = -12 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} x = -5 \\ y = -14 \\ z = 3 \end{array}$

72. **Página 80**

a) $A = \begin{vmatrix} 3 & a & -1 \\ a & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $\qquad A^* = \left|\begin{array}{ccc|c} 3 & a & -1 & 2 \\ a & -2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right|$

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & a & -1 \\ a & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a - 7$ $\qquad \begin{vmatrix} 3 & a & 2 \\ a & -2 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 16a - 13$

Si $a \neq 7 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $a = 7 \rightarrow |A| = 0$ Rango (A) ≠ Rango $(A^*) = 3$ · Sistema incompatible.

b) Para $a = 7$, el sistema no tiene solución.

Para $a \quad 1$, consideramos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - y - z = 2 \\ -x - 2y + z = 7 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + y = 0 \\ 3x - y - z = 2 \\ -x - 2y - z = 7 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + y = 0 \\ -5y - 2z = 4 \\ -3y - 2z = 14 \end{array}\right. \quad \left.\begin{array}{r} 2x - y = 0 \\ -5y - 2z = 4 \\ 16y = 58 \end{array}\right| \cdot \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{9}{8} \\ y = -\frac{9}{4} \\ z = \frac{29}{8} \end{array}\right.$$

73. **Página 80**

a) $\left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & p-1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right| \xrightarrow{F'3 = 2F3 - F2} \left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & p-1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - (p-1)z = 2 \\ 2y + z = 2 \\ 3z = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{p-1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{array}\right.$

b) $\left|\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & p-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{r} (p-1)z = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

74. **Página 80**

a) $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & m^2 \end{vmatrix}$ $\qquad A^* = \left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & m^2 & 3m \end{array}\right|$

$|A| = 1 - m^2 = 0 \rightarrow m = \pm 1$

Si $m \neq \pm 1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $m = 1 \rightarrow |A| = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

$A^* = \left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right|$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A^*) = 3$

Rango $(A^*) = 3 \neq$ Rango $(A) \rightarrow$ Sistema incompatible.

Si $m = -1 \rightarrow |A| = 0$ $\quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \rightarrow$ Si a la tercera fila de A^* le restamos la segunda obtenemos la primera $\rightarrow$ Rango $(A^*) = 2$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

b) Si $m = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F'3 = F3 - F2]{F'2 = F2 - 2F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F'3 = F3 - F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} 2x - y - 3z = 2 \\ x - 2z = -11 \\ -z = 3 \end{array} \Bigg\} \rightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = 33 \\ z = -3 \end{cases}$$

Si $m = 1$ no tiene solución, como hemos visto en el apartado anterior.

c) Sustituimos las posibles soluciones:

$2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) - 0 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \neq 2 \rightarrow$ La solución propuesta no es resuelve la primera ecuación, por lo que no puede ser solución del sistema para ningún valor de m.

75. Página 80

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -k^2 \\ k & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -k^2 & -k \\ k & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -k^2 \\ k & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = k^2 - 6k - 7$ $\qquad \begin{vmatrix} 3 & -k^2 & -k \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - 2k - 9$

Si $k = -1,\ k = 7 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $k = -1,\ k = 7 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow$ Rango $(A) \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible.

b) Para $k = -1$ el sistema no tiene solución.

Para $k = 0$, obtenemos el sistema: $\begin{array}{r} -2x - 3y = 0 \\ y - z = -2 \\ x - 2z = 1 \end{array} \Bigg\} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{7} \\ y = -\frac{6}{7} \\ z = \frac{8}{7} \end{cases}$

Para $k = 1$, obtenemos el sistema:

$$\begin{array}{r} -2x + 3y - z = -1 \\ x - y - z = -2 \\ x - 2z = 1 \end{array} \Bigg\} - \begin{array}{r} x - y - z = -2 \\ -2x + 3y - z = -1 \\ x - 2z = 1 \end{array} \Bigg\} - \begin{array}{r} x - y - z = -2 \\ 5y - 3z = -5 \\ -y + 3z = 3 \end{array} \Bigg\} - \begin{array}{r} x - y - z = -2 \\ 5y - 3z = -5 \\ 4y = -2 \end{array} \Bigg\} - \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{5}{6} \end{cases}$$

76. **Página 80**

a) $A = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ $A^* = \left|\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & \alpha \end{array}\right|$

$|A| = -50 \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado para cualquier valor de α.

b) $|A_x| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ \alpha & 3 & 2 \end{vmatrix} = 10\alpha - 50 \rightarrow x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{10\alpha - 50}{-50} = \dfrac{5-\alpha}{5}$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = -30\alpha - 30 \rightarrow y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{-30\alpha - 30}{-50} = \dfrac{3\alpha + 3}{5}$

$|A_z| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & \alpha \end{vmatrix} = 15\alpha - 20 \rightarrow z = \dfrac{|A_z|}{|A|} = \dfrac{15\alpha - 20}{-50} = \dfrac{4 - 3\alpha}{10}$

c) Si $x - y - z = 1 \rightarrow \dfrac{5-\alpha}{5} + \dfrac{3\alpha - 3}{5} - \dfrac{4 - 3\alpha}{10} = 1 \rightarrow \alpha = 2 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{5} \\ y = \dfrac{3}{5} \\ z = -\dfrac{1}{5} \end{cases}$

77. **Página 80**

a) $A = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & b \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

$|A| = 2b - 20 \rightarrow b = 10$ $\quad \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

Si $b = 10 \rightarrow$ Rango $(A) = 3$

Si $b = 10 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

b) Al ser un sistema homogéneo, es compatible determinado si el rango de la matriz de los coeficientes es igual que el número de incógnitas, es decir, si $b = 10$.

En este caso, la solución única es: $x = y = z = 0$.

c) El sistema es compatible indeterminado si el rango de la matriz de los coeficientes es menor que el número de incógnitas, es decir, si $b = 10$.

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} -x - y = -3z \\ 2x = 10z \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = 5\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

78. **Página 80**

a) $A=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & k^2 & 3\\ 3 & 7 & 7\end{vmatrix}$ $\qquad A^*=\left|\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 2 & -1\\ 1 & k^2 & 3 & 2k\\ 3 & 7 & 7 & k-3\end{array}\right|$

$|A|=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & k^2 & 3\\ 3 & 7 & 7\end{vmatrix}=k^2-1=(k-1)(k-1)$ $\qquad \begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ k^2 & 3 & 2k\\ 7 & 7 & k-3\end{vmatrix}=-2k^3-k^2-5k-6$

Si $k\neq 1, k\neq -1 \rightarrow |A|\neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas → Sistema compatible determinado.

Si $k=1 \rightarrow |A|=0 \rightarrow$ Rango (A^*) ≠ Rango (A) → Sistema incompatible.

Si $k=-1 \rightarrow |A|=0$ $\qquad \begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2$

Rango (A) = Rango (A^*) = 2 < N.º de incógnitas → Sistema compatible indeterminado.

b) Para $k=0$, obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r}x-3y+2z=-1\\ x-3z=0\\ 3x-7y-7z=-3\end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{r}x-3y+2z=-1\\ -3y-z=1\\ -2y-z=0\end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{r}x-3y-2z=-1\\ -3y-z=1\\ y=-1\end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{l}x=6\\ y=-1\\ z=-2\end{array}\right.$$

Para $k=-1$, obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r}x-3y=-1-2z\\ x-y=-2-3z\end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{r}x-3y=-1-2z\\ -2y=-1-z\end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{l}x=\dfrac{-5-7z}{2}\\ y=\dfrac{z-1}{2}\end{array}\right.$$

Las soluciones son: $x=\dfrac{-5-7\lambda}{2}, y=\dfrac{\lambda-1}{2}, z=\lambda$ con $\lambda\in\mathbb{R}$.

79. **Página 81**

a) $A=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & -5 & a\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}$ $\qquad A^*=\left|\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 3 & 4\\ 1 & -5 & a & \dfrac{a}{2}\\ 1 & 1 & -2 & 4\end{array}\right|$

$|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & -5 & a\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=24-3a$ $\qquad \begin{vmatrix}-2 & 3 & 4\\ -5 & a & \dfrac{a}{2}\\ 1 & -2 & 4\end{vmatrix}=100-\dfrac{25a}{2}$

Si $a\neq 8 \rightarrow |A|\neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = N.º de incógnitas → Sistema compatible determinado.

Si $a=8 \rightarrow |A|=0$ $\qquad \begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & -5\end{vmatrix}=-3$

Rango (A) = Rango (A^*) = 2 < N.º de incógnitas → Sistema compatible indeterminado.

El sistema es compatible indeterminado para $a=8$.

Para $a=8$, obtenemos el sistema: $\left.\begin{array}{r}x-2y=4-3z\\ x-5y=4-8z\end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{r}x-2y=4-3z\\ -3y=-5z\end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{l}x=4-\dfrac{y}{5}\\ z=\dfrac{3y}{5}\end{array}\right.$

b) Como queremos obtener la solución $x=y=y=4-\dfrac{y}{5}=5y=20=y=y=5$

En este caso la solución es: $x=5, y=5, z=3$.

80. **Página 81**

a) $A = \begin{pmatrix} k & 1 & k \\ 1 & 1 & k \\ 2 & k-1 & k \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ 2 & k-1 & k & 0 \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 1 & k \\ 1 & 1 & k \\ 2 & k-1 & k \end{vmatrix} = -k^3 - 3k^2 - 2k = -k(k-2)(k-1)$$

Para $k = 0, k \neq 1, k \neq 2 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Para $k - 0,\ k - 1,\ k - 2 - |A| - 0$

Rango (A) = Rango (A^*) < N.º de incógnitas · Sistema compatible indeterminado.

Obtenemos la solución trivial para $k \neq 0, k \neq 1, k \neq 2$.

b) Al ser un sistema homogéneo, el rango de A es siempre igual que el rango de A^*, por lo que el sistema nunca será incompatible, y será compatible indeterminado para los valores de k para los que no es determinado, es decir, $k = 0, k = 1, k = 2$.

81. **Página 81**

Sean x, y, z los precios de cada docena de huevos de categorías *XL, L* y *M*, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x - y - z = 4{,}9 \\ 2x - 4z = 9{,}6 \\ 3y - 3z = 9{,}3 \end{array}\right| \begin{array}{r} x + y - z = 4{,}9 \\ -2y - 2z = -0{,}2 \\ y - z = 3{,}1 \end{array} \left.\begin{array}{r} x - y - z = 4{,}9 \\ -2y - 2z = -0{,}2 \\ 4z = 6 \end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1{,}8 \\ y = 1{,}6 \\ z = 1{,}5 \end{array}\right|$$

Así, la docena de huevos *XL* cuesta 1,80 €; la de categoría *L* 1,60 € y la de *M* 1,50 €.

82. **Página 81**

Sean *x, y, z* los precios por hora de trabajo del electricista, el fontanero y el albañil, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2z = 78 \\ 2y - z = 85 \\ x - y - 3z = 133 \end{array}\right| \begin{array}{r} x - y - 3z = 133 \\ 2y - z = 85 \\ x + 2z = 78 \end{array} \left.\begin{array}{r} x - y - 3z = 133 \\ 2y - z = 85 \\ -y - z = -55 \end{array}\right| \begin{array}{r} x - y + 3z = 133 \\ 2y - z = 85 \\ y = 30 \end{array} \left.\begin{array}{l} x = 28 \\ y = 30 \\ z = 25 \end{array}\right|$$

El electricista cobra 28 €, el fontanero, 30 € y el albañil, 25 €.

83. **Página 81**

Sean *x, y, z* los precios de las acciones de las empresas *A, B* y *C,* respectivamente.

Entonces: $\left.\begin{matrix} 200x - 150y + 100z = 3300 \\ 50x - 120y - 240z = 3750 \end{matrix}\right|$

$$A = \begin{pmatrix} 200 & 150 & 100 \\ 50 & 120 & 240 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 200 & 150 & 100 & 3300 \\ 50 & 120 & 240 & 3750 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 200 & 150 \\ 50 & 120 \end{vmatrix} = 16500 \neq 0$$

Rango (A) = Rango (A^*) = 2 < N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado, es decir, el sistema tiene infinitas soluciones.

$$\left.\begin{matrix} 200x - 150y + 100z = 3300 \\ 50x - 120y + 240z = 3750 \end{matrix}\right| - \left.\begin{matrix} 4x + 3y - 2z = 66 \\ 5x + 12y - 24z = 375 \end{matrix}\right| \rightarrow \left.\begin{matrix} 4x - 3y - 2z = 66 \\ 33y - 86z = 1170 \end{matrix}\right| \rightarrow \left.\begin{matrix} x = \dfrac{16z - 111}{11} \\ y = \dfrac{1170 - 86z}{33} \end{matrix}\right|$$

Las soluciones son de la forma: $x = \dfrac{16\lambda - 111}{11}, y = \dfrac{1170 - 86\lambda}{33}, z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Con los datos no es posible determinar los precios de las acciones. Si las acciones tienen un precio entero, el valor de la acción de la empresa *C* solo puede ser de 9 €, así las acciones de la empresa *A* valen 3 € y las de *B*, 12 €.

84. **Página 81**

Sean *x*, *y*, *z* el número de billetes de 10, 20 y 50 € que debe haber en el cajero, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{matrix} x - y - z = 800 \\ 10x - 20y - 50z = 16000 \\ \dfrac{z}{3} = \dfrac{y}{4} \end{matrix}\right| \rightarrow \left.\begin{matrix} x - y - z = 800 \\ x - 2y - 5z = 1600 \\ 3y - 4z = 0 \end{matrix}\right| \rightarrow \left.\begin{matrix} x - y - z = 800 \\ y + 4z = 800 \\ 3y - 4z = 0 \end{matrix}\right| \rightarrow \left.\begin{matrix} x + y - z = 800 \\ y - 4z = 800 \\ -16z = -2400 \end{matrix}\right| \rightarrow \left\{\begin{matrix} x = 450 \\ y = 200 \\ z = 150 \end{matrix}\right.$$

Tiene que haber 450 billetes de 10 €, 200 billetes de 20 € y 150 billetes de 150 €.

85. **Página 81**

a) Sean *x* e *y* la cantidad de megabytes que ocupan las fotografías de calidad normal y óptima, respectivamente.

Entonces: $\left.\begin{matrix} x - y = 24 \\ 0{,}2x - Ay = 9{,}2 \end{matrix}\right|$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}2 & A \end{pmatrix} \qquad M^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 24 \\ 0{,}2 & A & 9{,}2 \end{array}\right)$$

$|M| = A - 0{,}2 = 0 \rightarrow A = 0{,}2$

Si $A = 0{,}2$ $\rightarrow$ Rango (M) = Rango de (M^*) = 2 = N.º de incógnitas $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $A = 0{,}2 \rightarrow |M| = 0 \rightarrow$ Rango (M) = 1

$$M^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 24 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 9{,}2 \end{array}\right) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 24 \\ 0{,}2 & 9{,}2 \end{vmatrix} = 4{,}4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango de } (M^*) = 2$$

Rango (M) $\neq$ Rango de (M^*) $\rightarrow$ Sistema incompatible.

Si $A = 0{,}2$ el sistema no tiene solución.

b) Supongamos que todas las fotos están hechas en calidad óptima, es decir, $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 24 \\ 0{,}2x - Ay = 9{,}2 \end{array}\right| - \quad \left.\begin{array}{r} y = 24 \\ Ay = 9{,}2 \end{array}\right| \cdot \; - \; A = \frac{9{,}2}{24} = 0{,}383$$

Las fotos en calidad óptima no pueden ocupar más de $0{,}383$ megabytes ni 0,2 megabytes, según vimos en el apartado anterior.

c) No, porque si fuese así, el sistema planteado en el apartado a) tendría dos soluciones, y hemos visto que cuando dicho sistema tiene solución, esta es única, independientemente del valor de A.

86. Página 81

Sean x, y, z el número de ordenadores de tipo A, B y C, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x - y - z = 55 \\ 2\,400x - 1\,200y + 1\,000z = 73\,000 \\ 2\,400x = 1\,200y \end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y + z = 55 \\ 12x + 6y - 5z = 365 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y - z = 55 \\ 7x - y = 90 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right| - \quad \left.\begin{array}{r} x - y - z = 55 \\ 7x + y = 90 \\ 9x = 90 \end{array}\right| \cdot \rightarrow \cdot \quad \begin{array}{l} x = 10 \\ y = 20 \\ z = 25 \end{array}$$

Se compraron 10 ordenadores del tipo A, 20 del B y 25 del C.

87. Página 81

Sean x e y los gramos de los suplementos tipos A y B, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 2y = 12 \\ 3x - y = 16 \\ 2x - 4y = 14 \end{array}\right| \quad \left.\begin{array}{r} x + y = 6 \\ -3x - y = 16 \\ x + 2y = 7 \end{array}\right| \rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} x + y = 6 \\ -2y = -2 \\ y = 1 \end{array}\right| \rightarrow \quad \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 1 \end{array}$$

Hacen falta 5 gramos del suplemento A y 1 gramo del suplemento B para producir la dosis pedida.

88. Página 82

Sean x, y, z el número de alumnos matriculados con el primer monitor, el segundo y el tercero, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x - y - z = 352 \\ 4z = x \\ x - y = 2z - 2 \end{array}\right| \quad \left.\begin{array}{r} x - y - z = 352 \\ -x - 4z = 0 \\ x - y - 2z = -2 \end{array}\right| \rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} x - y + z = 352 \\ y + 5z = 352 \\ -2y - 3z = -354 \end{array}\right| \rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} x - y + z = 352 \\ y + 5z = 352 \\ 7z = 350 \end{array}\right| \cdot \; - \cdot \quad \begin{array}{l} x = 200 \\ y = 102 \\ z = 50 \end{array}$$

Hay 200 alumnos matriculados con el primer monitor, 102 con el segundo y 50 con el tercero.

89. Página 82

Sean x, y, z el número de onzas que se han comido Daniel, Manuel y Montse, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x - y - z = 36 \\ 2x - 2y = z \\ y - z = 3x \end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y - z = 36 \\ 2x + 2y - z = 0 \\ -3x + y - z = 0 \end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y + z = 36 \\ -3z = -72 \\ 4y + 4z = 108 \end{array}\right| \cdot \; - \left|\begin{array}{l} x = 9 \\ y = 3 \\ z = 24 \end{array}\right.$$

Daniel ha comido 9 onzas, Manuel 3 y Montse 24.

90. **Página 82**

Sean *x, y, z* el número de recipientes de medio litro, un litro y un litro y medio, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x-y-z=1100 \\ 0{,}5x-y-1{,}5z=1025 \\ x=2y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y-z=1100 \\ 0{,}5x-y+1{,}5z=1025 \\ x-2y=0 \end{array}\right\} \cdot(-) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y-z=1100 \\ y+2z=950 \\ -3y-z=-1100 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+z=1100 \\ y-2z=950 \\ 5z=1750 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=500 \\ y=250 \\ z=350 \end{array}\right.$$

Se han utilizado 500 recipientes de medio litro, 250 de un litro y 350 de litro y medio.

91. **Página 82**

Sean *x, y, z* el número inicial de profesores catedráticos, titulares y asociados, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x-y-z=1000 \\ y-50=2(x-50)-z \\ y-100=x+100+z \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y-z=1000 \\ -2x-y-z=150 \\ -x-y-z=200 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y-z=1000 \\ 3y-z=2150 \\ 2y=1200 \end{array}\right\} \cdot(-) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=50 \\ y=600 \\ z=350 \end{array}\right.$$

Hay 50 profesores catedráticos, 600 titulares y 350 asociados.

92. **Página 82**

Sean *x, y, z* el número de alumnos matriculados en ESO, en Bachillerato y en Ciclos Formativos, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x-y-z=1200 \\ y-2z=x-100 \\ 0{,}4x-0{,}3y+0{,}2z=0{,}3\cdot 1200+45 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y-z=1200 \\ -x+y-2z=100 \\ 0{,}4x+0{,}3y-0{,}2z=405 \end{array}\right\} \cdot(-) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y-z=1200 \\ -x+y-2z=100 \\ 4x+3y-2z=4050 \end{array}\right\} \cdot(-)$$

$$\left.\begin{array}{r} x-y-z=1200 \\ -2y+3z=1300 \\ -y-2z=-750 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y-z=1200 \\ 2y+3z=1300 \\ -z=-200 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=650 \\ y=350 \\ z=200 \end{array}\right.$$

Hay 650 alumnos matriculados en ESO, 350 en Bachillerato y 200 en Ciclos Formativos.

93. **Página 82**

Sean *x, y, z* lo que ha invertido en la primera, segunda y tercera empresa, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x-y-z=4000 \\ 0{,}07x-0{,}09y-0{,}1z=352 \\ z=2y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y-z=4000 \\ 7x-9y+10z=35200 \\ -2y-z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y-z=4000 \\ 2y-3z=7200 \\ -2y+z=0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} x-y-z=4000 \\ 2y-3z=7200 \\ 4z=7200 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1300 \\ y=900 \\ z=1800 \end{array}\right.$$

Ha invertido 1 300 € en la primera empresa, 900 € en la segunda y 1 800 € en la tercera.

94. **Página 82**

Sean *x, y, z,* la cantidad del cóctel 1, cóctel 2 y cóctel 3, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} 0{,}6x - 0{,}65y + 0{,}85z = 0{,}65 \\ 0{,}2x - 0{,}2y + 0{,}1z = 0{,}1875 \\ 0{,}2x - 0{,}15y - 0{,}05z = 0{,}1625 \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} 60x + 65y - 85z = 65 \\ -20x - 20y - 10z = 18{,}75 \\ 20x + 15y - 5z = 16{,}25 \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} 20x - 15y - 5z = 16{,}25 \\ 60x - 65y - 85z = 65 \\ 20x - 20y - 10z = 18{,}75 \end{array}\right| \to$$

$$- \left.\begin{array}{r} 20x - 15y - 5z = 16{,}25 \\ 20y + 70z = 16.25 \\ 5y - 5z = 2{,}5 \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} 20x + 15y - 5z = 16{,}25 \\ 20y + 70z = 16.25 \\ -50z = -6{,}25 \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} x = 0{,}5 \\ y = 0{,}375 \\ z = 0{,}125 \end{array}\right.$$

Para obtener el cóctel 4 hay que añadir el 50 % del cóctel 1, el 37,5 % del cóctel 2 y el 12,5 % del cóctel 3.

95. **Página 82**

Sean *x, y, z* el número de monedas de 10, 20 y 50 céntimos, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x - y - z = 2600 \\ 0{,}1x - 0{,}2y + 0{,}5z = 870 \\ x - y = z \end{array}\right| \to \left.\begin{array}{r} x - y - z = 2600 \\ y + 4z = 6100 \\ -2z = -2600 \end{array}\right| \to \left.\begin{array}{r} x = 400 \\ y = 900 \\ z = 1300 \end{array}\right.$$

Pablo tiene 400 monedas de 10 céntimos, 900 monedas de 20 céntimos y 1 300 de 50 céntimos.

96. **Página 82**

Sean:

x : Número de páginas que lee Óscar

y : Número de páginas que lee Beatriz

z : Número de páginas que lee Ainhoa

r : Número de días que tarda Óscar en leer la novela.

s : Número de días que tarda Beatriz en leer la novela.

t : Número de días que tarda Ainhoa en leer la novela.

Entonces: $\left.\begin{array}{r} x = y + 3 \\ y = z + 9 \end{array}\right| \to x = z + 12$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{r} r = s - 1 \\ s = t - 4 \end{array}\right| \to r = t - 5$

Sabemos que $rx = sy = tz =$ N.º de páginas del libro

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} rx = sy \\ sy = tz \end{array}\right| \to \left.\begin{array}{r} (t-5)\ z + 12 = (t-4)(z-9) \\ (t-4)(z+9) = tz \end{array}\right| \to \left.\begin{array}{r} \cancel{tz} - 12t - 5z - 60 = \cancel{tz} - 9t - 4z - 36 \\ \cancel{tz} - 9t - 4z - 36 = \cancel{tz} \end{array}\right| \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} 3t - z = 24 \\ 9t - 4z = 36 \end{array}\right| \to \begin{array}{r} z = 3t - 24 \\ 9t - 12t - 96 = 36 \end{array} \to \left.\begin{array}{r} z = 36 \\ t = 20 \end{array}\right|$$

El libro tiene $20 \cdot 36 = 720$ páginas.

97. **Página 82**

Sean *x, y, z* el precio de una medalla de oro, una de plata y una de bronce, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} 50x - 40y + 30z = 230 \\ 90x - 70y + 60z = 418 \\ 40x - 60y + 100z = 336 \end{array}\right| - \left.\begin{array}{r} 50x + 40y - 30z = 230 \\ -10y + 30z = 20 \\ 140y - 380z = 760 \end{array}\right| - \left.\begin{array}{r} 50x - 40y - 30z = 230 \\ -10y + 30z = 20 \\ 800z = 1040 \end{array}\right| - \left.\begin{array}{r} x = 2{,}3 \\ y = 1{,}9 \\ z = 1{,}3 \end{array}\right.$$

Una medalla de oro vale 2,30 €, una de plata, 1,90 € y una de bronce, 1,30 €.

98. **Página 82**

Sean *x, y, z* el número de hojas que reparten Alonso, Luisa y Alba, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} y = 0{,}2(x - y + z) \\ z = x - 100 \\ x - y = 850 \end{array}\right| - \left.\begin{array}{r} -0{,}2x + 0{,}8y - 0{,}2z = 0 \\ -x - z = 100 \cdot (-1) \\ x + y = 850 \end{array}\right| \to \left.\begin{array}{r} -2x + 8y - 2z = 0 \\ -x - z = 100 \\ x - y = 850 \end{array}\right| - \left.\begin{array}{r} -2x - 8y - 2z = 0 \\ z = 100 - x \cdot (-1) \\ y = 850 - x \end{array}\right| \to$$

$$\left.\begin{array}{r} x = 550 \\ -z = 100 - x \\ y = 850 - x \end{array}\right| - \left.\begin{array}{r} x = 550 \\ y = 300 \\ z = 650 \end{array}\right|$$

Alonso reparte 550 hojas, Luisa 300 y Alba 650.

99. **Página 83**

Sea *x* el peso de un frigorífico y sea *y* el peso de una lavadora.

Entonces: $\left.\begin{array}{r} x - y = 120 \\ 3x - 4y = 1550 - 1250 \\ 4x - 5y = 480 \end{array}\right| \to \left.\begin{array}{r} x + y = 120 \\ 3x - 4y = 300 \\ 4x - 5y = 480 \end{array}\right|$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to$ Rango $(A) = 2$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 120 \\ 3 & 4 & 300 \\ 4 & 5 & 480 \end{vmatrix} = 60 \neq 0 \to$ Rango $(A^*) = 3$

Rango $(A) \neq$ Rango (A^*) · Sistema incompatible.

El sistema no tiene solución; por tanto, los datos recogidos no pueden ser correctos.

100. **Página 83**

a) Sean *x, y, z* el número de hombres, mujeres y niños que han acudido a la excursión, respectivamente.

Entonces: $\left.\begin{array}{r} x - y - z = 20 \\ x = y + 1 \end{array}\right| - \left.\begin{array}{r} x - y + z = 20 \\ x - y = 1 \end{array}\right|$

Tenemos dos ecuaciones para tres incógnitas, luego no es posible averiguar cuántos hombres, mujeres y niños fueron con exactitud.

b) $$\left.\begin{array}{r} x - y - z = 20 \\ x = y + 1 \\ x = z \end{array}\right| - \left.\begin{array}{r} x - y + z = 20 \\ x - y = 1 \\ x - z = 0 \end{array}\right| \to \left.\begin{array}{r} x - y - z = 20 \\ -2y - z = -19 \\ -y - 2z = -20 \end{array}\right| - \left.\begin{array}{r} x - y - z = 20 \\ -2y - z = -19 \\ -3z = -21 \end{array}\right| \to \left.\begin{array}{r} x = 7 \\ y = 6 \\ z = 7 \end{array}\right.$$

Fueron 7 hombres, 6 mujeres y 7 niños a la excursión.

101. **Página 83**

Sean *x, y, z* el número de discos de pop, *rock* y *jazz*, respectivamente.

Entonces: $\left.\begin{matrix} x-y=z-30 \\ z-30=3x \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} x+y=z+30 \\ 3x=z-30 \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} x=\frac{z}{3}-10 \\ y=\frac{2z}{3}-20 \end{matrix}\right.$

En total tengo $x-y-z=\left(\frac{z}{3}+10\right)+\left(\frac{2z}{3}-20\right)+z=2z-30$ discos.

Como el total de discos no llega a 300, $2z-30 \leq 300 \to z \leq 135$.

Tomamos los múltiplos de 15 menores que 135:

- Si $z=15 \to \left.\begin{matrix} x=15 \\ y=30 \end{matrix}\right\} \to$ No es solución. Igual número de discos de *jazz* y pop.
- Si $z=30 \to \left.\begin{matrix} x=20 \\ y=40 \end{matrix}\right\} \to$ No es solución. No son múltiplos de 15.
- Si $z=45 \to \left.\begin{matrix} x=25 \\ y=50 \end{matrix}\right\} \to$ No es solución. No son múltiplos de 15.
- Si $z=60 \to \left.\begin{matrix} x=30 \\ y=60 \end{matrix}\right\} \to$ No es solución. Igual número de discos de *jazz* y *rock*.
- Si $z=75 \to \left.\begin{matrix} x=35 \\ y=70 \end{matrix}\right\} \to$ No es solución. No son múltiplos de 15.
- Si $z=90 \to \left.\begin{matrix} x=40 \\ y=80 \end{matrix}\right\} \to$ No es solución. No son múltiplos de 15.
- Si $z=105 \to \left.\begin{matrix} x=45 \\ y=90 \end{matrix}\right\} \to$ Es solución.
- Si $z=120 \to \left.\begin{matrix} x=50 \\ y=100 \end{matrix}\right\} \to$ No es solución. No son múltiplos de 15.

Tengo 45 discos de pop, 90 de *rock* y 105 de *jazz*.

102. **Página 83**

a) Sean *x, y, z* el número de viajes que realizarán Raúl, Marco y Antonio, respectivamente.

Entonces: $\left.\begin{matrix} x-y=30 \\ x-y=10-z \\ x-y=0{,}6(x-y-z) \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} x-y=30 \\ x-y-z=10 \\ 0{,}4x-0{,}4y-0{,}6z=0 \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} x-y=30 \\ x-y-z=10 \\ 4x-4y-6z=0 \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} x-y=30 \\ x+y-z=10 \\ 4x+4y-6z=0 \end{matrix}\right\}$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & -6 \end{pmatrix} \qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 30 \\ 1 & 1 & -1 & 10 \\ 4 & 4 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & -6 \end{vmatrix}=0 \to$ Rango $(A) <$ N.º de incógnitas

No se puede determinar el número de viajes que realizarán cada uno.

b) $\left.\begin{matrix} x-y=30 \\ x-y-z=10 \\ 3x=2y \end{matrix}\right| \xrightarrow{} \left.\begin{matrix} x+y=30 \\ x+y-z=10 \\ 3x-2y=0 \end{matrix}\right| \xrightarrow{} \left.\begin{matrix} x-y=30 \\ -z=-20 \\ -5y=-90 \end{matrix}\right| \xrightarrow{} \left.\begin{matrix} x=12 \\ y=18 \\ z=20 \end{matrix}\right|$

Raúl realizará 12 viajes, Marco 18 y Antonio 20.

103. **Página 83**

Sean *x, y, z* el peso de un anillo, una moneda y un pendiente, respectivamente.

Entonces: $\left.\begin{matrix} x-y-z=29 \\ 4x-3y-2z=89 \end{matrix}\right| \xrightarrow{} \left.\begin{matrix} x+y-z=29 \\ -y-2z=-27 \end{matrix}\right|$

Si $x=11 \rightarrow \left.\begin{matrix} y-z=18 \\ -y-2z=-27 \end{matrix}\right| \rightarrow \left.\begin{matrix} y-z=18 \\ -z=-9 \end{matrix}\right| \xrightarrow{} \left.\begin{matrix} y=9 \\ z=9 \end{matrix}\right|$

No es solución porque los dos objetos pesan lo mismo.

Si $y=11 \rightarrow \left.\begin{matrix} x-z=18 \\ -2z=-16 \end{matrix}\right| \rightarrow \left.\begin{matrix} x=10 \\ z=8 \end{matrix}\right|$

Es posible.

Si $z=11 \rightarrow \left.\begin{matrix} x-y=18 \\ -y=-5 \end{matrix}\right| \rightarrow \left.\begin{matrix} x=13 \\ y=5 \end{matrix}\right|$

No es solución porque la diferencia entre los pesos es superior a 3 g.

El objeto encontrado es una moneda.

104. **Página 83**

a) Sean *x, y, z* los precios de las tarifas «Ven al cine en tren», «Oro» y «Estándar», respectivamente.

Entonces: $\left.\begin{matrix} x-2y+2z=22 \\ 3x-y-z=23,5 \end{matrix}\right|$

Tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas, no podemos determinar el valor de las incógnitas.

b) El valor de *y* ha de ser un número natural par.

Si $y=2 \rightarrow \left.\begin{matrix} x-2z=18 \\ 3x-z=21,5 \end{matrix}\right| \xrightarrow{} \left.\begin{matrix} x+2z=18 \\ -5z=-32,5 \end{matrix}\right| \rightarrow \left.\begin{matrix} x=5 \\ z=6,5 \end{matrix}\right| \rightarrow$ Es solución.

Si $y=4 \rightarrow \left.\begin{matrix} x-2z=14 \\ 3x-z=19,5 \end{matrix}\right| \xrightarrow{} \left.\begin{matrix} x-2z=14 \\ -5z=-22,5 \end{matrix}\right| \rightarrow \left.\begin{matrix} x=5 \\ z=4,5 \end{matrix}\right|$

No es solución porque la tarifa «Estándar» es más barata que la tarifa «Ven al cine en tren».

$y=6 \rightarrow \left.\begin{matrix} x-2z=10 \\ 3x-z=17,5 \end{matrix}\right| \xrightarrow{} \left.\begin{matrix} x-2z=10 \\ -5z=-12,5 \end{matrix}\right| \rightarrow \left.\begin{matrix} x=5 \\ z=2,5 \end{matrix}\right|$

No es solución porque la tarifa «Estándar» es más barata que la tarifa «Ven al cine en tren».

Si continuamos vemos que según aumenta el valor de *y*, se reduce el de *z* y aumenta también el de *x*.

Por tanto, la solución es que la tarifa «Ven al cine en tren» cuesta 5 €, la «Oro» 2 € y la «Estándar» 6,50 €.

105. **Página 83**

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{z - 8}{7} \\ y = \dfrac{11z - 18}{7} \\ z = z \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 7x = z + 8 \\ 7y = 11z + 18 \end{array}\right| \cdot \rightarrow \left.\begin{array}{l} 7x - z = 8 \\ 7y - 11z = 18 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{y - 10}{11} \\ y = y \\ z = \dfrac{7y - 18}{11} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 11x = y + 10 \\ 11z = 7y - 18 \end{array}\right| - \quad \left.\begin{array}{l} 11x - y = 10 \\ 11z - 7y = -18 \end{array}\right| \cdot$$

Si formamos un sistema con las tres ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 7x - z = 8 \\ 7y - 11z = 18 \\ 11x - y = 10 \end{array}\right|$$

Comprobamos que ambas soluciones son correctas, ya que el sistema es compatible indeterminado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & -11 \\ 11 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad |A^*| = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 8 \\ 0 & 7 & 18 \\ 11 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. **Página 84**

$$\left.\begin{array}{l} 5Y - 20T - 6I = 1292 \\ Y = 18 - I \\ T = 0{,}15Y \end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{l} 5Y + 20T + 6I = 1292 \\ Y = 18 + I \\ T = 2{,}7 - 0{,}15I \end{array}\right| \rightarrow \left.\begin{array}{l} 5(18 - I) - 20(2{,}7 + 0{,}15I) - 6I = 1292 \\ Y = 18 - I \\ T = 2{,}7 + 0{,}15I \end{array}\right| \cdot - \quad \left.\begin{array}{l} I = 82 \\ Y = 100 \\ T = 15 \end{array}\right|$$

El resultado es correcto.

2. **Página 84**

Con dos ecuaciones tendríamos un sistema compatible indeterminado y, por tanto, infinitas soluciones.

Con cuatro ecuaciones puede obtenerse la solución si una de las ecuaciones es combinación lineal de las otras. Si no estamos en este caso tendríamos un sistema compatible indeterminado.

3. **Página 84**

Se puede hacer de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{l} 5Y - 20T - 6I = 1292 \\ Y = 18 - I \\ T = 0{,}15Y \\ T = 2{,}7 + 0{,}15I \end{array}\right|$$

Obtendríamos el mismo resultado.

4. **Página 84**

Si en 20 días hemos gastado 1 292 Mb:

$\dfrac{1292}{20} \cdot 30 = 1938 < 2024$ — Tendría suficiente para todo el mes.

Programación lineal

4

ACTIVIDADES

1. Página 86

a) $x = 1 \rightarrow \frac{1}{3} - 1 > \frac{2}{5} - 1 \rightarrow -\frac{2}{3} > -\frac{3}{5}$ Falso. No es solución de la inecuación.

b) $x = -2 \rightarrow -\frac{1}{2}\,-2-3 < \frac{-2}{2} - 2 \rightarrow -\frac{1}{2} < -3$ Falso. No es solución de la inecuación.

2. Página 86

a) $\frac{3x-1}{2} - \frac{x}{3} > 1 - \frac{x-3}{4} \rightarrow \frac{3x}{2} - \frac{1}{2} - \frac{x}{3} > 1 - \frac{x}{4} - \frac{3}{4} \rightarrow \frac{3x}{2} - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} > 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \rightarrow$

$\frac{18x - 4x + 3x}{12} > \frac{4-3-2}{4} \rightarrow \frac{17x}{3} > 9 \rightarrow 17x > 27 \rightarrow x > \frac{27}{17}$

b) $\frac{2-x}{5} - \frac{x-3}{2} > 1 - \frac{2}{5} - \frac{x}{5} + \frac{x}{2} - \frac{3}{2} > 1 \rightarrow -\frac{x}{5} - \frac{x}{2} > 1 + \frac{3}{2} - \frac{2}{5} \rightarrow \frac{-2x-5x}{10} > \frac{10-15-4}{10} \rightarrow -3x > 21 \rightarrow x < 7$

3. Página 87

a) $x^2 - 6x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{6 - \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6-4}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Las soluciones de la igualdad son $x_1 = 5$ y $x_2 = 1$, que dividen a la recta en los intervalos: $(-\infty, 1), (1, 5)$ y $(5, +\infty)$.

Para $(-\infty, 1)$: si $x = 0 \rightarrow 5 > 0$. Estos puntos no son solución de la inecuación.

Para $(1,5)$: si $x = 2 \rightarrow -4 - 12 - 5 < 0$. Estos puntos son solución de la inecuación.

Para $(5, \infty)$: si $x = 6 \rightarrow 36 - 36 - 5 > 0$. Estos puntos no son solución de la inecuación.

$x = 1 \rightarrow 1 - 6 - 5 < 0 \rightarrow x = 1$ es solución.

$x = 5 \rightarrow 25 - 30 - 5 < 0 \rightarrow x = 5$ es solución.

La solución es: $1, 5$.

b) $\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} = \frac{1}{6} \rightarrow 2x^2 - 3x - 1 = 0 \rightarrow \frac{3 - \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3-1}{4} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

Las soluciones de la igualdad son $x_1 \quad 1$ y $x_2 \quad \frac{1}{2}$, que dividen a la recta en los intervalos: $\left(\infty, \frac{1}{2} \right), \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$ y $(1, \infty)$.

Para $\left(\infty, \frac{1}{2} \right]$: si $x \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{(1)^2}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{5}{6} < \frac{1}{6}$. Estos puntos no son solución de la inecuación.

Para $\left[\frac{1}{2}, 1 \right]$: si $x \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2/3}{2} \quad \frac{2/3^{\,2}}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{27} \quad \frac{7}{27} > \frac{1}{6}$. Estos puntos son solución de la inecuación.

Para $(1,\infty)$: si $x = 2$, $\frac{2}{2} \cdot \frac{2^2}{3} = 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3} < \frac{1}{6}$. Estos puntos no son solución de la inecuación.

$x = \frac{1}{2}$, $\frac{1/2}{2} \cdot \frac{(1/2)^2}{3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \geq \frac{1}{6}$ es solución.

$x = 1$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1^2}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \geq \frac{1}{6}$ es solución.

La solución es: $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

c) Transformamos la inecuación $x(x-5) \geq 2x^2 \rightarrow x^2 - 5x \geq 2x^2 \rightarrow x(5-x) \geq 0$

$x(5-x) = 0 \cdot \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 5 \end{cases}$

Las soluciones de la igualdad son $x_1 = 0$ y $x_2 = 5$, que dividen a la recta en los intervalos:
$(-\infty, 0)$, $(0, 5)$ y $(5, \infty)$.

Para $(-\infty, 0)$: si $x = -1 \rightarrow -1(5-(-1)) = -6 < 0$. Estos puntos no son solución de la inecuación.

Para $(0, 5)$: si $x = 1 \rightarrow 1(5-1) = 4 \geq 0$. Estos puntos son solución de la inecuación.

Para $(5, \infty)$: si $x = 6 \rightarrow 6(5-6) = -6 < 0$. Estos puntos no son solución de la inecuación.

$x = 0 \rightarrow 0(5-0) = 0$ no es solución.

$x = 5 \rightarrow 5(5-5) = 0$ no es solución.

La solución es: $(0, 5)$.

4. Página 87

a) $(x-2)^2 - (x-2)^2 \leq 10x \rightarrow x^2 - 4x - 4 - x^2 - 4x - 4 \leq 10x \rightarrow 2x^2 - 10x - 8 \leq 0 \rightarrow x^2 - 5x - 4 \leq 0$

$x^2 - 5x - 4 = 0 \cdot x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 16}}{2} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

Los intervalos serían: $(-\infty, -1)$, $(-1, 4)$ y $(4, \infty)$.

Para $(-\infty, -1)$: si $x = 0 \rightarrow -4 \geq 0$

Para $(-1, 4)$: si $x = 2 \rightarrow 4 - 10 + 4 \leq 0$

Para $(4, \infty)$: si $x = 5 \rightarrow 25 - 25 + 4 \geq 0$

$x = -1 \rightarrow 1 - 5 + 4 = 0$ no es solución.

$x = 4 \rightarrow 16 - 20 - 4 = 0$ no es solución.

La solución es: $(-1, 4)$.

b) $\frac{3(2x+x-1)}{3} - 1 \geq \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{1-x}{2} \rightarrow \frac{3x + 2x^2 - 3 - 2x - 3}{3} \geq \frac{x^2 - 2x + 1 - 2 + 2x}{4}$

$\frac{2x^2 + x - 6}{3} \geq \frac{x^2 - 4x - 1}{4} \rightarrow 8x^2 + 4x - 24 \geq 3x^2 - 12x - 3 \rightarrow 5x^2 + 16x - 21 \geq 0$

$5x^2 - 16x - 21 = 0 \rightarrow x = \frac{-16 \pm \sqrt{256 + 420}}{10} = \frac{-16 \pm 26}{10} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{42}{10} = -\frac{21}{5} \end{cases}$

Los intervalos serían: $\left(-\infty, \frac{21}{5}\right)$, $\left(\frac{21}{5}, 1\right)$ y $(1, +\infty)$.

Para $\left(-\infty, \frac{21}{5}\right)$: si $x = -5 \rightarrow 125 - 80 - 21 > 0$

Para $\left(\frac{21}{5}, 1\right)$: si $x = 0 \rightarrow -21 < 0$

Para $(1, +\infty)$: si $x = 2 \rightarrow 20 - 32 - 21 > 0$

$x = \frac{21}{5}$ · $\frac{441}{5} - \frac{336}{5} - 21 = 0$ no es solución.

$x = 1 \rightarrow 5 - 16 - 21 = 0$ no es solución.

La solución es: $\left(-\infty, \frac{21}{5}\right) \cup (1, +\infty)$.

c) $2 - \sqrt{3}\ x - x^2 > 2\sqrt{3} \rightarrow x^2 - (2 + \sqrt{3})x - 2\sqrt{3} < 0$

$x^2 - (2 - \sqrt{3})x - 2\sqrt{3} = 0 \rightarrow x = \frac{2 - \sqrt{3} \pm \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \sqrt{3} \end{cases}$

Los intervalos serían: $(-\infty, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, 2)$ y $(2, +\infty)$.

Para $(-\infty, \sqrt{3})$: si $x = 0 \rightarrow 2\sqrt{3} > 0$

Para $(\sqrt{3}, 2)$: si $x = \frac{7}{4} \rightarrow \left(\frac{7}{4}\right)^2 - 2 - \sqrt{3}\ \frac{7}{4} - 2\sqrt{3} = \frac{49}{16} - \frac{14}{4} - \frac{7\sqrt{3}}{4} - 2\sqrt{3} = -\frac{7 - 28\sqrt{3} - 16\sqrt{3}}{16} = -\frac{7 - 12\sqrt{3}}{16} < 0$

Para $(2, +\infty)$: si $x = 3 \quad 3^2 \quad 2 \quad \sqrt{3}\ 3 \quad 2\sqrt{3} > 0$

$x \quad \sqrt{3} \quad \sqrt{3}^{\,2} \quad 2 \quad \sqrt{3}\ \sqrt{3} \quad 2\sqrt{3} \quad 0$ es solución.

$x = 2 \rightarrow 2^2 - 2 - \sqrt{3}\ 2 - 2\sqrt{3} = 0$ es solución.

La solución es: $(\sqrt{3}, 2)$.

5. Página 88

a) $4x - y - 4 < 0 \xrightarrow{x=1, y=-2} 4 - 2 - 4 = -2 < 0 \rightarrow$ el punto *A* forma parte de la solución.

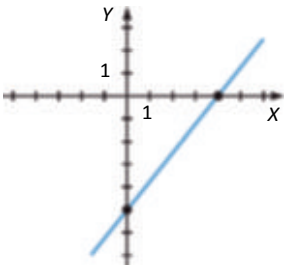
b) $2x \quad y \quad 5 > 0 \quad \xrightarrow{x=-\frac{1}{2}, y=3} \quad 1 \quad 3 \quad 5 \quad 1 < 0 \quad \rightarrow$ el punto *A* no forma parte de la solución.

6. Página 88

a) $5x - 4y \leq 20$

$5x \quad 4y \quad 20 \quad {}^{x=0} \cdot y \quad 5$

$5x \quad 4y \quad 20 \quad {}^{y=0} \cdot x \quad 4$



Tomamos dos puntos, uno de cada región del plano.

El punto (0, 0) pertenece a la región superior del plano y el punto (2, −4) pertenece a la región inferior del plano.

$5x - 4y \leq 20 \xrightarrow{0,0} 0 \leq 20 \rightarrow$ es solución

$5x - 4y \leq 20 \xrightarrow{2,-4} 10 - 16 \geq 20 \rightarrow$ no es solución

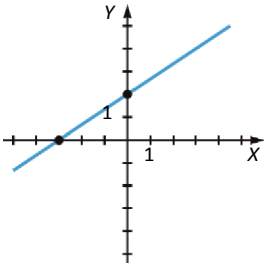
La solución de la inecuación es la región del plano formada por todos los puntos situados en la misma región que (0, 0).

Como la desigualdad contiene el signo =, la recta forma parte de la solución.

b) $3y - 2x \geq 6$

$3y \quad 2x \quad 6 \quad {}^{x=0} \cdot y \quad 2$

$3y \quad 2x \quad 6 \quad {}^{y=0} \cdot x \quad 3$



Tomamos dos puntos, uno de cada región del plano.

El punto (0, 0) pertenece a la región inferior del plano y el punto (−4, 4) pertenece a la región superior del plano.

$3y - 2x \leq 6 \xrightarrow{0,0} 0 \leq 6 \rightarrow$ no es solución.

$3y - 2x \geq 6 \xrightarrow{-4,4} 12 - 8 \geq 6 \rightarrow$ es solución.

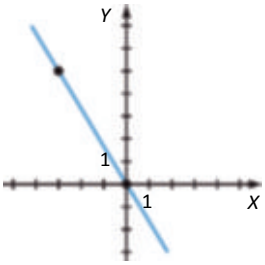
La solución de la inecuación es la región del plano formada por todos los puntos situados en la misma región que (−4, 4).

Como la desigualdad contiene el signo =, la recta forma parte de la solución.

c) $2(x-y)-3(x-y)\leq 4(x-2y)\rightarrow -2x-2y-3x-3y\leq 4x-8y\rightarrow -5x-3y\leq 0$

$5x-3y=0 \xrightarrow{x=0} y=0$

$5x-3y=0 \xrightarrow{y=5} x=3$



Tomamos dos puntos, uno de cada región del plano.

El punto (2, 2) pertenece a la región derecha del plano y el punto (−2, −2) pertenece a la región izquierda del plano.

$-5x-3y\leq 0 \xrightarrow{2,2} -10-6\leq 0 \rightarrow$ es solución.

$-5x-3y\leq 0 \xrightarrow{-2,-2} 10+6\geq 0 \rightarrow$ no es solución.

La solución de la inecuación es la región del plano formada por todos los puntos situados en la misma región que (2, 2).

Como la desigualdad no contiene el signo =, la recta no forma parte de la solución.

7. Página 89

a) $\left.\begin{matrix}3x-y\leq 1\\ 2x-y\geq 3\end{matrix}\right\} \xrightarrow{-1,-2} \left.\begin{matrix}-3+2\leq 1\\ -2+2\geq 3\end{matrix}\right\}$ es solución.

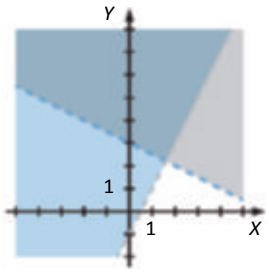
b) $\left.\begin{matrix}x-2y\leq 6\\ -x-4y\geq -2\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\left(3,-\frac{1}{2}\right)} \left.\begin{matrix}3-1-4\leq 6\\ -3-2\geq -5\leq -2\end{matrix}\right\} \rightarrow$ no es solución.

8. Página 89

a) $\left.\begin{matrix}2x-y\leq 1\\ 5x-10y\geq 30\end{matrix}\right\}$ Primero resolvemos las dos inecuaciones por separado:

$\left.\begin{matrix}2x-y=1 \xrightarrow{x=0} y=-1\\ 2x-y=1 \xrightarrow{y=1} x=1\end{matrix}\right\} 2x-y\leq 1 \xrightarrow{x=0,y=0} 0\leq 1 \rightarrow$ se cumple.

$\left.\begin{matrix}5x-10y=30 \xrightarrow{x=0} y=3\\ 5x-10y=30 \xrightarrow{y=0} x=6\end{matrix}\right\} 5x-10y\geq 30 \xrightarrow{x=0,y=0} 0\geq 30 \rightarrow$ no se cumple la inecuación.



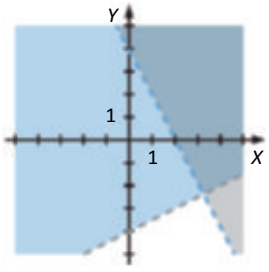
La solución es la intersección de las dos soluciones, la sombra más oscura. En este caso, los bordes de las funciones no son solución porque no contienen el signo =.

b)

$\left.\begin{array}{l} 2x - y \geq 4 \\ x - 2y \leq 8 \end{array}\right\}$ Primero resolvemos las dos inecuaciones por separado:

$\left.\begin{array}{l} 2x - y = 4 \xrightarrow{x=0} y = 4 \\ 2x - y = 4 \xrightarrow{y=0} x = 2 \end{array}\right\} - 2x - y \geq 4 \xrightarrow{x=0,y=0} 0 \leq 4 -$ no se cumple la inecuación.

$\left.\begin{array}{l} x - 2y = 8 \xrightarrow{x=0} y = -4 \\ x - 2y = 8 \xrightarrow{y=0} x = 8 \end{array}\right\} - x - 2y \leq 8 \xrightarrow{x=0,y=0} 0 \leq 8 -$ se cumple.



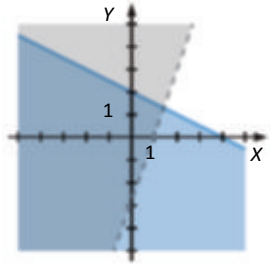
La solución es la intersección de las dos soluciones, la sombra más oscura. En este caso, los bordes de las funciones no son solución porque no contienen el signo =.

c)

$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{2} - y \leq 2 \\ -x - \frac{y}{3} \geq -1 \end{array}\right\} -$ Primero resolvemos las dos inecuaciones por separado:

$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{2} - y = 2 \xrightarrow{x=0} y = 2 \\ \frac{x}{2} - y = 2 \xrightarrow{y=0} x = 4 \end{array}\right\} - \frac{x}{2} - y \leq 2 \xrightarrow{x=0,y=0} 0 \leq 2 \rightarrow$ se cumple.

$\left.\begin{array}{l} -x - \frac{y}{3} = -1 \xrightarrow{x=0} y = -3 \\ -x - \frac{y}{3} = -1 \xrightarrow{y=0} x = 1 \end{array}\right\} - -x - \frac{y}{3} \geq -1 \xrightarrow{x=0,y=0} 0 \geq -1 \rightarrow$ no se cumple la inecuación.



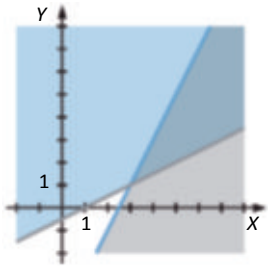
La solución es la intersección de las dos soluciones, la sombra más oscura. En este caso, el borde de la primera función pertenece a la solución porque la inecuación contiene el signo =, mientras que el borde de la segunda no es solución porque no contiene el signo =.

d)

$\left.\begin{array}{l} 2x-1 \leqslant y-3 \\ x-y \leqslant -x-3y+2 \end{array}\right\}$ → Primero resolvemos las dos inecuaciones por separado:

$\left.\begin{array}{l} 2x-1=y+3 \xrightarrow{x=0} y=-5 \\ 2x-1=y+3 \xrightarrow{y=0} x=\dfrac{5}{2} \end{array}\right\}$ → $2x-1 \leqslant y+3 \xrightarrow{x=0,y=0} -2 \leqslant 3$ → no se cumple la inecuación.

$\left.\begin{array}{l} x-y=-x+3y-2 \xrightarrow{x=0} y=-\dfrac{1}{2} \\ x-y=-x-3y+2 \xrightarrow{y=0} x=1 \end{array}\right\}$ → $x-y \leqslant -x-3y+2 \xrightarrow{x=0,y=0} 0 \leqslant 2$ → se cumple.



La solución es la intersección de las dos soluciones, la sombra más oscura. En este caso, los bordes de las funciones son solución porque contienen el signo =.

9. **Página 90**

	Modelo A	Modelo B	Totales
Unidad	65	55	120
Beneficio	4	6,50	

Definimos las variables:

x → número de productos *A* y — número de productos *B*

Maximizar $f(x,y)=4x+6,5y$

Sujeto a $\left.\begin{array}{l} x-y \leqslant 120 \\ x \leqslant 65 \\ y \leqslant 55 \end{array}\right\}$

10. **Página 90**

	Modelo *A*	Modelo *B*	Totales
Superficie	2	1	600
Horas	1	3	900
Beneficio	80	50	

Definimos las variables:

x → número de mesas tipo *A* y — número de mesas tipo *B*

Maximizar $f(x,y)=80x-50y$

Sujeto a $\left.\begin{array}{l} 2x-y \leqslant 600 \\ x-3y \leqslant 900 \end{array}\right\}$

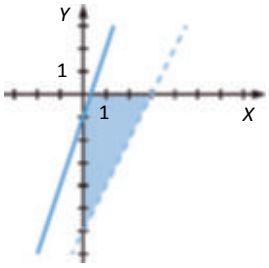
11. **Página 91**

a) Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$f: 3x \quad y \quad 1 \cdot$ pasa por $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ y $0, \quad 1$

$g: 2x - y - 6 \rightarrow$ pasa por $3,0$ y $0,-6$

Como $x \geq 0, y \leq 0$, tomo la región correspondiente al cuarto cuadrante:

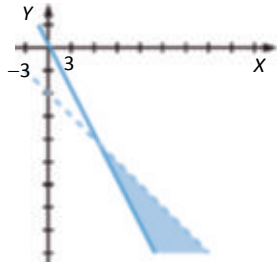


b) Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$f: 2x \quad y \quad 1 \cdot$ pasa por $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y $0,1$

$g: \quad x \quad y \quad 6 \cdot$ pasa por $\quad 6,0$ y $0, \quad 6$

Como $x \geq 0, y \leq 0$, tomo la región correspondiente al cuarto cuadrante:



12. **Página 91**

La región factible pertenece al primer cuadrante; por tanto, dos de las restricciones son $x \geq 0, y \geq 0$.

La recta azul pasa por los puntos: $-1,0$ y $0,2 \rightarrow -2x - y - 2 \rightarrow -2x - y \leq 2$ es una restricción.

La recta roja pasa por los puntos: $1,0$ y $0,3 \rightarrow -3x - y - -3 \rightarrow -3x - y \leq -3$ es una restricción.

Por tanto, las restricciones son:

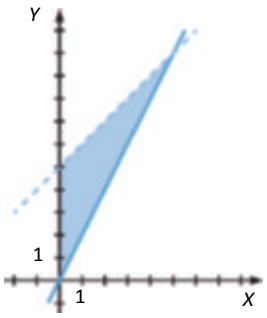
$$\left.\begin{array}{l} -2x - y \leq 2 \\ -3x - y \leq -3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right|$$

13. **Página 92**

Los vértices son $A(3, 1)$, $B(0, 4)$, $C(0, 0)$ y $D(7/2, 0)$.

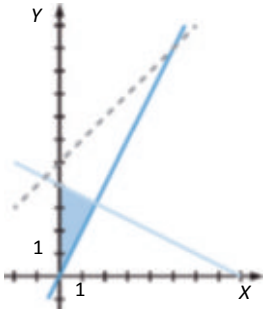
14. **Página 92**

a)



Los vértices son $A\ 0,0\ ,B\ 0,5\ ,C\ 5,10\ $.

b)



Los vértices son $A\ 0,0\ ,B\ 0,4\ ,C\left(\frac{8}{5},\frac{16}{5}\right)$.

15. **Página 93**

Maximizar $f\ x,y\ = 2x - y$

Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} 5x - 3y \leq 15 \\ x - y \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$

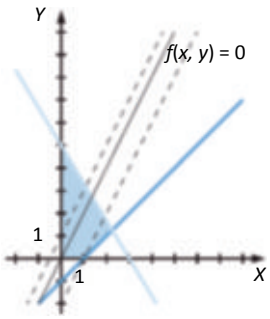
Buscamos los puntos en los que $k = f\ x,y\ $ sea máximo. Los puntos del plano $\ x,y\ $ tales que $k = f\ x,y\ $ forman una recta.

$$\left.\begin{array}{l} f\ x,y\ = 2x - y \\ f\ x,y\ = k \end{array}\right\} \rightarrow 2x - y = k \text{ es una recta.}$$

Para cada valor de *k* obtenemos rectas paralelas, que tienen la misma pendiente.

Si $k = 0 \rightarrow f\ x,y\ = 0 = y = 2x$ Si $k = -2 \rightarrow f\ x,y\ = -2 \rightarrow y = 2x - 2$

Si $k = 2 \rightarrow f\ x,y\ = 2 \rightarrow y = 2x - 2$



Como la recta debe cortar a la región factible, la solución óptima se alcanza en el vértice (9/4, 5/4), y el valor de la función es:

$$f\left(\frac{9}{4},\frac{5}{4}\right)=\frac{18}{4}-\frac{5}{4}=\frac{13}{4}$$

16. **Página 93**

Maximizar $f(x,y)=x-2y$

Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} x-y\leq 5 \\ x-y\leq 3 \\ x\geq 0, y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Buscamos los puntos en los que $k=f(x,y)$ sea máximo. Los puntos del plano (x,y) tales que $k=f(x,y)$ forman una recta.

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y)=x-2y \\ f(x,y)=k \end{array}\right\} \rightarrow x-2y=k$$ es una recta.

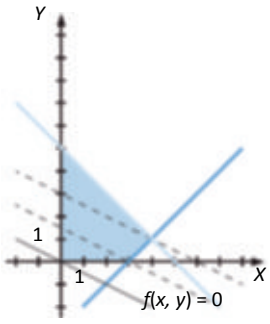
Para cada valor de *k* obtenemos rectas paralelas, que tienen la misma pendiente.

$$\text{Si } k=0 \rightarrow f(x,y)=0 \rightarrow y=-\frac{x}{2}$$

$$\text{Si } k=\frac{3}{2} \rightarrow f(x,y)=\frac{3}{2} \rightarrow y=-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}$$

$$\text{Si } k=3 \rightarrow f(x,y)=3 \rightarrow y=-\frac{x}{2}-3$$

$$\text{Si } k=5 \rightarrow f(x,y)=5 \rightarrow y=-\frac{x}{2}-5$$



Como la región factible está acotada, el máximo se alcanza en el punto *D*(0, 5) y vale 10.

17. **Página 94**

	Modelo *A*	Modelo *B*	Totales
Superficie	3 000	5 000	90 000
Número máx.	150	120	
Beneficio	10 000	20 000	

Definimos las variables:

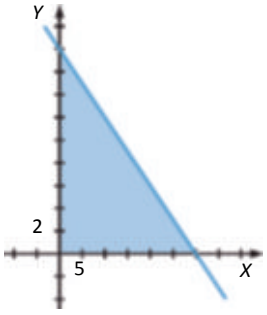
$x\geq 0, x\rightarrow$ número de parcelas tipo *A*

$y\geq 0, y\rightarrow$ número de parcelas tipo *B*

Maximizar $f(x, y) = 10\,000x + 20\,000y$

Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} 3\,000x - 5\,000y \leq 90\,000 \\ x \leq 150,\ y \leq 120 \end{array}\right|$$



Los vértices son (0, 0), (0, 18) y (30, 0).

$f(x, y) = 10\,000x + 20\,000y$

$A\ (0,0) \rightarrow f\ (0,0) = 0\,€$ $B\ (0,18) \rightarrow f\ (0,18) = 360\,000\,€$ $C\ (30,0) \rightarrow f\ (30,0) = 300\,000\,€$

El punto que maximiza la función es *B*(0, 18). La solución óptima es 0 unidades del tipo A y 18 del tipo *B*.

18. **Página 94**

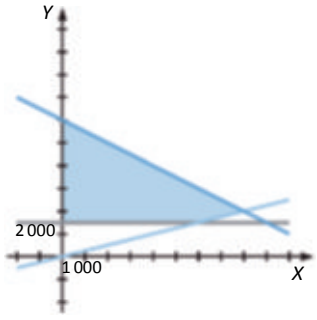
Definimos las variables:

$x \geq 0$, $x \rightarrow$ inversión en producto *A* $y \geq 0$, $y \rightarrow$ inversión en producto *B*

Maximizar $f(x, y) = 0{,}1x - 0{,}05y$

Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} x - y \leq 12\,000 \\ x \leq 2y \\ y \geq 3\,000 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right|$$



Los vértices son (0, 12 000), (8 000, 4 000), (6 000, 3 000) y (0, 3 000).

$f(x, y) = 0{,}1x - 0{,}05y$

$A\ (0,12\,000) \rightarrow f\ (0,12\,000) = 600\,€$

$B\ (8\,000,4\,000) \rightarrow f\ (8\,000,4\,000) = 1000\,€$

$C\ (6\,000,3\,000) \rightarrow f\ (6\,000,3\,000) = 750\,€$

$D\ (0,3\,000) \rightarrow f\ (0,3\,000) = 150\,€$

El punto que maximiza la función es *B*(8 000,4 000). La solución óptima es invertir 8 000 € en el producto *A* y 4 000 € en el producto *B*. Con esta inversión el beneficio será de 1 000 €.

19. **Página 95**

Definimos las variables:

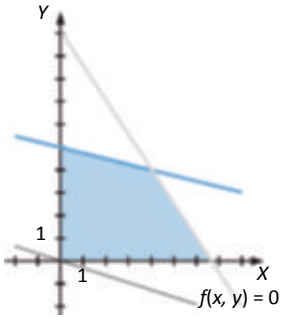
$x \geq 0, x$ — aparatos modelo *A* $\qquad$ $y \geq 0, y$ — aparatos modelo *B*

$$\text{Maximizar } f(x, y) = 100x - 150y$$

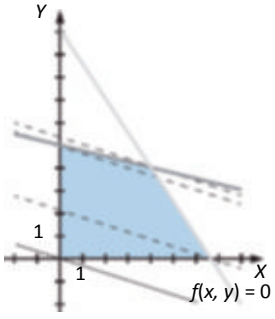
Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y \leq 100 \\ x - 2y \leq 100 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right|$$

Dibujamos la región factible y la recta $f(x, y) = 0$, que representa la función objetivo igualada a cero.



Trazamos rectas paralelas a la recta $f(x, y) = 0$ que pasen por cada vértice.



La recta con mayor ordenada es la que pasa por el vértice (20, 40) luego: $f(20, 40) = 8000$ €

20. **Página 95**

Definimos las variables:

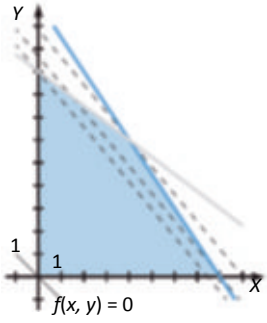
$x \geq 0, x$ — paquetes tipo *A* $\qquad$ $y \geq 0, y$ — paquetes tipo *B*

$$\text{Maximizar } f(x, y) = 6x + 5y$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 2y \leq 120 \\ 3x - 4y \leq 180 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right|$$

Dibujamos la región factible y la recta $f(x, y) = 0$, que representa la función objetivo, igualada a cero.

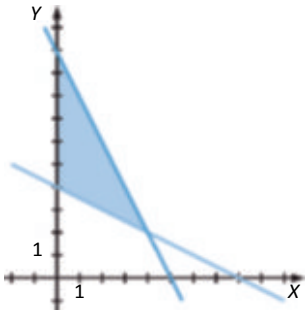
También trazamos rectas paralelas a la recta $f(x, y) = 0$ que pasen por cada vértice.



La recta con mayor ordenada es la que pasa por el vértice (20, 30), es decir, 20 paquetes tipo *A* y 30 paquetes tipo *B*. Obteniendo un beneficio máximo de 270 €.

21. **Página 96**

La región factible es:



Los vértices de la región factible son: $A\ 0,10\ ,B\ 4,2\ ,C\ 0,4\ .$

Sustituimos en la función objetivo:

$f\ x,y\ = x - 2y$

$A\ 0,10\ \rightarrow 0 - 20 = -20$

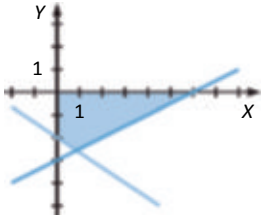
$B\ 4,2\ \rightarrow 4 - 4 = 0 \rightarrow$ Máximo

$C\ 0,4\ \rightarrow 0 - 8 = -8$

Existe una única solución óptima: $x = 4$, $y = 2$.

22. **Página 96**

La región factible es:



Los vértices de la región factible son: $A\ 0,0\ ,B\ 6,0\ ,C\left|\frac{6}{7},-\frac{18}{7}\right|,D\ 0,-2\ .$

Sustituimos en la función objetivo:

$f\ x,y\ \rightarrow x - y$

$A\ 0,0\ \rightarrow 0$

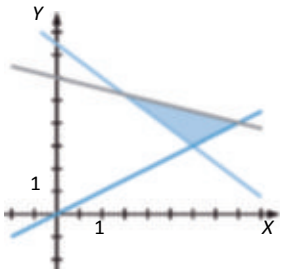
$B\ 6,0\ \rightarrow 6 \rightarrow$ Máximo

$C\left|\frac{6}{7},-\frac{18}{7}\right| \rightarrow \frac{-12}{7}$

$D\ 0,-2\ \rightarrow -2$

23. **Página 97**

La región factible es:



Los vértices de la región factible son: $A\left(\frac{3}{2},\frac{21}{4}\right), B(4,4), C(3,3)$.

Sustituimos en la función objetivo:

$f(x,y) = 2x + 4y$

$A\left(\frac{3}{2},\frac{21}{4}\right) \rightarrow 3 - 21 = 24 \rightarrow$ Máximo

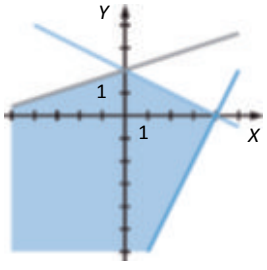
$B(4,4) \rightarrow 8 - 16 = 24 \rightarrow$ Máximo

$C(3,3) \rightarrow 6 - 12 = 18$

La función objetivo alcanza el valor máximo en los vértices *A* y *B*; por tanto, en todos los puntos del segmento *AB*. La solución es múltiple.

24. **Página 97**

La región factible es:



La región factible no está acotada. Tiene dos vértices de la región factible, que son: $A(0,2), B(4,0)$.

Sustituimos en la función objetivo:

$f(x,y) = 3x + 6y$

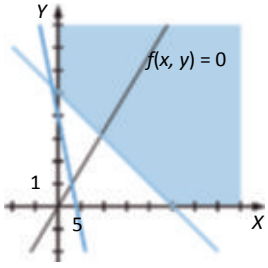
$A(0,2) \rightarrow 12 \rightarrow$ Máximo

$B(4,0) \rightarrow 12 \rightarrow$ Máximo

La función objetivo alcanza el valor máximo en los vértices *A* y *B*; por tanto, en todos los puntos del segmento *AB*. La solución es múltiple.

25. Página 98

La región factible es:



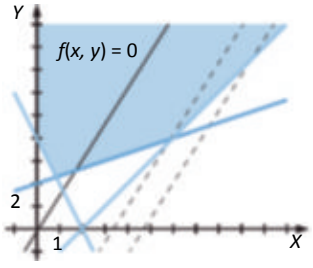
La región factible no está acotada. Tiene dos vértices de la región factible, que son: $A\ 0{,}5\ ,B\ 25{,}0\ .$

La función objetivo crece indefinidamente para valores crecientes de *x* e *y*. Trazando rectas paralelas a la función objetivo podemos ver que siempre existe una recta paralela por encima de la anterior que sigue cortando a la región factible.

En este caso no existe un valor que haga máxima la función objetivo, es decir, el problema carece de solución.

26. Página 98

La región factible es:



La región factible no está acotada. Tiene tres vértices de la región factible, que son:
$A\ 0{,}8\ ,B\left(\frac{12}{7},\frac{32}{7}\right),C\ 12{,}8\ .$

Sustituimos en la función objetivo:

$f\ x,y\ = 3x - 2y$

$A\ 0{,}8\ \rightarrow -16$

$B\left(\frac{12}{7},\frac{32}{7}\right)\rightarrow -4$

$C\ 12{,}8\ \rightarrow 20$

La función objetivo crece indefinidamente para valores crecientes de *x* e *y*. Trazando rectas paralelas a la función objetivo podemos ver que siempre existe una recta paralela por encima de la anterior que sigue cortando a la región factible.

En este caso no existe un valor que haga máxima la función objetivo, es decir, el problema carece de solución.

27. **Página 99**

	Trajes	Vestidos	Total
Lana	3	2	140
Algodón	1	2	80
Beneficio	50	50	

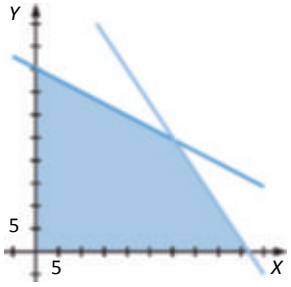
Definimos las variables:

$x \geq 0, x$ — número de trajes $\quad y \geq 0, y$ — número de vestidos

Maximizar $f(x, y) = 50x - 50y$

Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 2y \leq 140 \\ x - 2y \leq 80 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right|$$



Los vértices de la región factible son: $A\ 0,40\ , B\ 30,25\ , C\ 47,0\ , D(0,0)$.

Sustituimos en la función objetivo:

$f\ x, y\ = 50x - 50y$

Sujeto a:

$A\ 0,40\ \rightarrow 2000$

$B\ 30,25\ - 2750 \rightarrow$ Máximo

$C\ 47,0\ \rightarrow 2350$

$D\ 0,0\ \rightarrow 0$

El beneficio será 2 750 € con 30 trajes y 25 vestidos.

28. **Página 99**

	Pequeñas	Grandes	Total
Guisantes	0,2	0,5	800
Latas	2 000	1 000	
Beneficio	0,1	0,3	

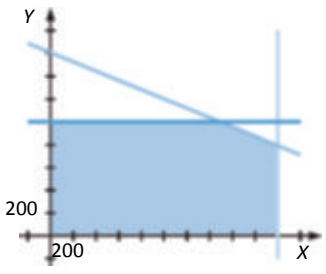
Definimos las variables:

$x \geq 0, x$ — número de latas pequeñas $\quad y \geq 0, y$ — número de latas grandes

Maximizar $f(x, y) = 0,1x - 0,3y$

Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} 0,2x - 0,5y \leq 800 \\ 0 \leq x \leq 2000 \\ 0 \leq y \leq 1000 \end{array}\right|$$



Los vértices de la región factible son: $A\ 0,0\ ,B\ 2000,0\ ,C\ 0,1000\ ,D(1500,1000),E\ 2000,800\ .$

Sustituimos en la función objetivo:

$f\ x,y\ = 0,1x - 0,3y$

$A\ 0,0\ \rightarrow 0$

$B\ 2000,0\ \rightarrow 200$

$C\ 0,1000\ \rightarrow 300$

$D\ 1500,1000\ - 450 - Máximo$

$E\ 2000,800\ \rightarrow 440$

El beneficio será 450 € con 1 500 latas pequeñas y 1 000 latas grandes.

29. **Página 100**

	Cápsula *A*	Cápsula *B*	Total
Sustancia *M*	6	3	36
Sustancia *N*	2	4	24
Sustancia *P*	18	18	8
Coste	3	4,5	

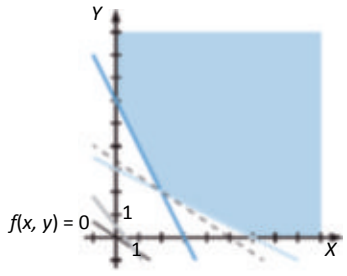
Definimos las variables:

$x \vdots 0, x -$ número de cápsulas *A* $\qquad y \vdots 0, y \rightarrow$ número de cápsulas *B*

Minimizar $f(x,y) = 3x + 4,5y$

Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} 6x - 3y \vdots 36 \\ 2x - 4y \vdots 24 \\ 18x - 18y \vdots 8 \\ 0 \vdots x, 0 \vdots y \end{array}\right|$$



La región factible no está acotada superiormente y tiene tres vértices: $A\ 4,4\ ,B\ 0,12\ ,C\ 12,0$. Trazando paralelas a la función objetivo obtenemos que se alcanza el mínimo en el punto $A\ 4,4$. Por tanto, un deportista necesita 4 cápsulas de cada tipo, siendo el coste 30 céntimos.

30. **Página 100**

	Compuesto *X*	Compuesto *Y*	Total
Vitamina A	10	10	60
Vitamina B	15	10	90
Coste	0,5	0,3	

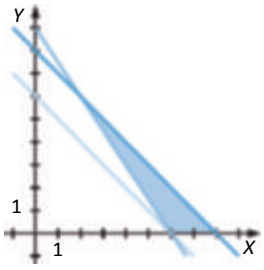
Definimos las variables:

$x \geq 0, x$ — número de dosis de compuesto *X* $y \geq 0, y$ — número de dosis de compuesto *Y*

Mínimo $f(x, y) = 0{,}5x - 0{,}3y$

Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} x - y \leq 8 \\ 10x - 10y \geq 60 \\ 15x - 10y \geq 90 \\ x \geq 0, y > 0 \end{array}\right|$$



Los vértices de la región factible son: $A\ 6{,}0\ , B\ 8{,}0\ , C\ 2{,}6\ .$

Sustituimos en la función objetivo:

$f\ x, y\ = 0{,}5x - 0{,}3y$

$A\ 6{,}0\ \rightarrow 3\ €$

$B\ 8{,}0\ \rightarrow 4\ €$

$C\ 2{,}6\ \rightarrow 2{,}80\ € \rightarrow$ Mínimo

El coste mínimo sería 2,80 € con 2 dosis del compuesto *X* y 6 del compuesto *Y*.

31. Página 101

	Lote *A*	Lote *B*	Total
Queso	1	3	200
Vino	2	1	100
Coste	0,9	1,5	

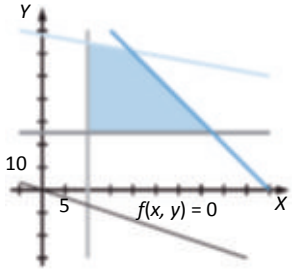
Definimos las variables:

$x \geq 0, x$ — número de lotes *A* $y \geq 0, y \rightarrow$ número de lote *B*

Minimizar $f(x, y) = 0{,}9x - 1{,}5y$

Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} x - 3y \leq 200 \\ 2x - y \leq 100 \\ x \geq 10, y \geq 25 \end{array}\right|$$



Los vértices de la región factible son: $A\ 10{,}25\ , B\left|\frac{75}{2}, 25\right|, C\left|10, \frac{190}{3}\right|, D\ 20{,}60\ .$

Trazando paralelas a la función objetivo obtenemos que se alcanza el mínimo en el punto $A\ 10{,}25\ .$ Por tanto, es necesario elaborar 10 lotes tipo *A* y 25 tipo *B*, siendo el gasto 46,50 €.

32. **Página 101**

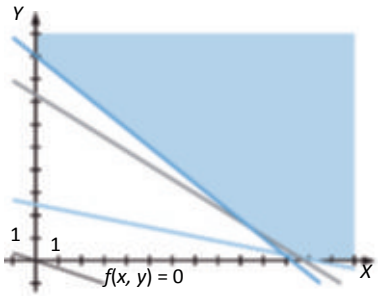
Definimos las variables:

$x \geq 0, x$ — número de artículos *A* $y \geq 0, y$ — número de artículos *B*

Minimizar $f(x, y) = 50x - 60y$

Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y \geq 45 \\ 3x - 2y \geq 71 \\ x - 2y \geq 25 \\ x \geq 0, y \quad 0 \end{array}\right|$$

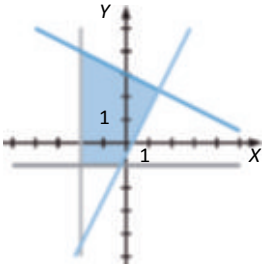


La región factible no está acotada. Los vértices de la región factible son: $A\ 25,0$, $B\ 23,1$, $C\ 19,7$, $D\ 0,45$.

Trazando paralelas a la función objetivo obtenemos que se alcanza el mínimo en el punto, $B\ 23,1$. Por tanto, hay que elaborar 23 artículos *A* y 1 tipo *B*. El coste será de 1 200 €.

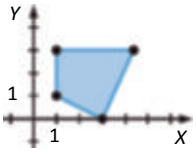
SABER HACER

33. **Página 102**



34. **Página 102**

Dibujamos gráficamente el recinto.



Las rectas que limitan la región factible son:

$AB: -x - 2y = -3$ $BC: x = 1$ $CD: y = 3$ $DA: 3x - \frac{3}{2}y = 9$

El punto $2, 2$ pertenece a la región factible, entonces:

$-2 - 4 \leq -3 \rightarrow -x - 2y \leq -3$

$2 \geq 1 \rightarrow x \geq 1$

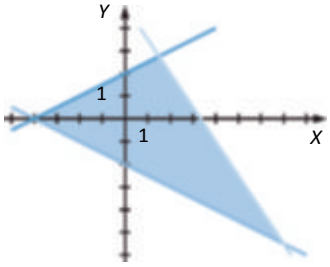
$2 < 3 \rightarrow y < 3$

$6 - 3 < 9 \rightarrow 3x - \frac{3}{2}y \leq 9$

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{l} -x-2y \leq -3 \\ 3x-\frac{3}{2}y \leq 9 \\ x \geq 1, y \leq 3 \end{array}\right|$

35. **Página 103**

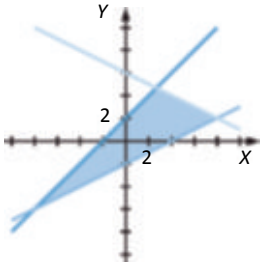
La región factible:



Los vértices son: $A\left(\frac{3}{2},\frac{11}{4}\right), B(-4,0), C\left(7,-\frac{11}{2}\right)$

36. **Página 103**

Representa la región factible.



Los vértices de la región factible son: $A\left(\frac{8}{3},\frac{14}{3}\right), B(8,2), C(-8,-6)$.

Sustituimos en la función objetivo:

$f(x,y) = 2x+3y$

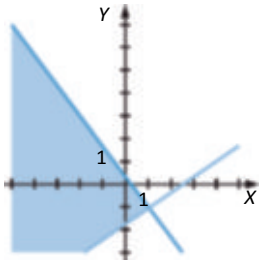
$A\left(\frac{8}{3},\frac{14}{3}\right) \rightarrow f(A) = \frac{16}{3}+14 = \frac{58}{3}$

$B(8,2) \rightarrow f(B) = 16+6 = 22 \rightarrow$ Máximo

$C(-8,-6) \rightarrow f(C) = -16-18 = -34 \rightarrow$ Mínimo

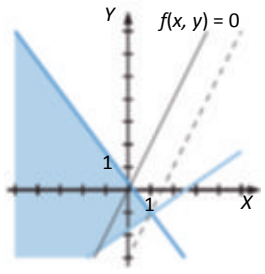
37. **Página 103**

Se representa la región factible:



La región no está acotada, el vértice es $A(1,-1)$.

Se determinan las rectas de la función objetivo que pasa por los vértices, la recta que pasa por el vértice es: $2x - y - 3$



El coeficiente de *y* es negativo; por tanto, A es mínimo. No existe máximo, se pueden trazar rectas con cortan a la región factible con mayor ordenada cada vez.

38. Página 104

Definimos las variables:

$x \geq 0, x$ — cantidad de dinero invertido en acciones de tipo *A*

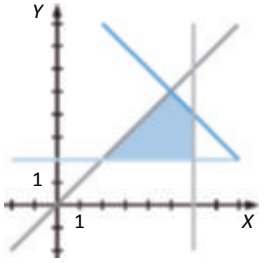
$y \geq 0, y$ — cantidad de dinero invertido en acciones de tipo *B*

Maximizar $f(x, y) = 0{,}1x - 0{,}07y$

Sujeto a:

$$\begin{cases} x - y \leq 10 \\ x \geq y \\ 0 \leq x \leq 6 \\ y \geq 2 \end{cases}$$

La región factible es:



Los vértices de la región factible son: $A\ 5{,}5\ , B\ 6{,}4\ , C\ 6{,}2\ , D\ 2{,}2\ .$

Sustituimos en la función objetivo:

$f\ x, y\ = 0{,}1x - 0{,}07y$

$A\ 5{,}5\ \rightarrow f\ A\ = 0{,}85$ millones de €

$B\ 6{,}4\ \rightarrow f\ B\ = 0{,}88$ millones de € → Máximo

$C\ 6{,}2\ \rightarrow f\ C\ = 0{,}74$ millones de €

$D\ 2{,}2\ \rightarrow f\ D\ = 0{,}34$ millones de €

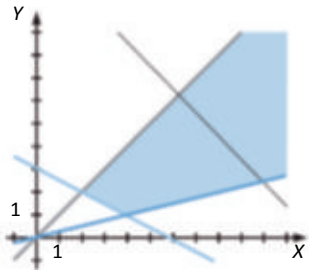
Invirtiendo 6 millones de € en acciones de tipo *A* y 4 en acciones de tipo *B* obtendrá 0,88 millones de € de beneficio.

39. **Página 104**

Definimos las variables:

$x \geq 0, x \rightarrow$ cantidad de aceite *C* $\qquad$ $y \geq 0, y \rightarrow$ cantidad de aceite *D*

$$\left.\begin{array}{l} x - y \geq 6 \\ \frac{y}{2} \leq x \leq 2y \\ 2{,}5x - 1{,}25y = 31{,}25 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right|$$



Los vértices de la región factible son: $A\left(\frac{25}{4}, \frac{25}{2}\right), B\ (10{,}5\ ,C\ 4{,}2\ ,D\ 2{,}4\ )$.

La cantidad mínima de aceite tipo *D* es 5 litros y la máxima es 12,5 litros, ya que deben pertenecer a la recta $2{,}5x - 1{,}25y - 31{,}25$.

40. **Página 105**

	Taller *A*	Taller *B*	Total
Carrera	3	2	350
Montaña	2	5	500
Coste	900	1 200	

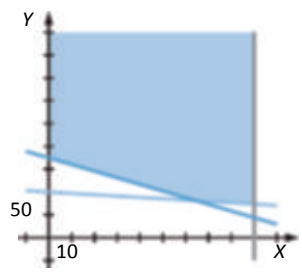
Definimos las variables:

$x \geq 0, x \rightarrow$ número de días taller *A* $\qquad$ $y \geq 0, y \rightarrow$ número de días taller *B*

Miminizar $f(x, y) = 900x + 1200y$

Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 2y \geq 350 \\ 2x - 5y \geq 500 \\ 0 \leq x \leq 90 \\ y \geq 0 \end{array}\right|$$



Los vértices de la región factible son: $A\ (0{,}175\ ,B\ 90{,}64\ ,C\left(\frac{750}{11}, \frac{800}{11}\right)$.

Sustituimos en la función objetivo:

$f(x,y) = 900x + 1200y$

$A(0,175) \to 210\,000 \qquad B(90,64) \to 157\,800 \qquad C\left(\frac{750}{11}, \frac{800}{11}\right) \to 148\,636,36 \to$ Mínimo

41. **Página 105**

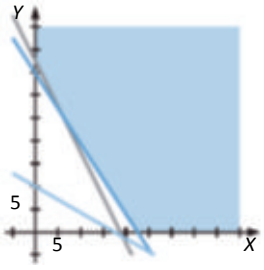
Definimos las variables:

$x \geq 0, x \to$ número de lotes de Bulbshop $\qquad y \geq 0, y \to$ número de lotes de Light

Miminizar $f(x,y) = 405x - 210y$

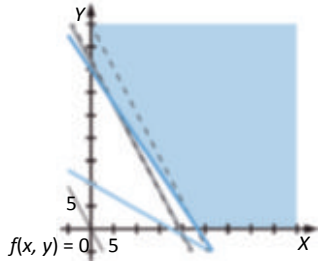
Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} 20x - 10y > 375 \\ 15x - 10y > 350 \\ 12x - 20y \geq 200 \\ x \geq 0, y > 0 \end{array}\right|$$



Los vértices de la región factible son: $A\left(0, \frac{75}{2}\right), B\left(5, \frac{55}{2}\right), C\left(\frac{70}{3}, 0\right)$

Trazando rectas paralelas a la función objetivo, tenemos que se obtiene un mínimo en el punto *B*.



Observa que para tomar la decisión la condición de las bombillas halógenas no se ha utilizado, pues las otras restringen mucho más.

ACTIVIDADES FINALES

42. **Página 106**

a) $\frac{4-2x}{5} - \frac{x-2}{6} \leq -6 \to \frac{24-12x+5x-10}{30} \leq \frac{-180}{30} \to 14 - 7x \leq -180 \to x \geq \frac{194}{7}$

b) $\frac{3}{2}\left(2-x\right) - x \leq \frac{16}{5} - \frac{x-1}{5} \to \frac{30-15x-10x}{10} \leq \frac{32-2x-2}{10} \to 30 - 25x \leq 30 - 2x \to x \geq 0$

c) $8x - 6 + 4x^2 - 3x \geq 9 - 12x - 4x^2 \to 17x \geq 15 \to x \geq \frac{15}{17}$

43. Página 106

a) $x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow \frac{3 - \sqrt{9 - 16}}{2} = \frac{3 - 5}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

Los intervalos serían: $(-\infty, -1), (-1, 4)$ y $(4, \infty)$.

Para $(-\infty, -1)$: si $x = -2 \rightarrow 4 - 6 - 4 > 0$. No es solución.

Para $(-1, 4)$: si $x = 0 \rightarrow -4 < 0$. Es solución.

Para $(4, \infty)$: si $x = 6 \rightarrow 36 - 18 - 4 > 0$. No es solución.

$x = -1 \rightarrow 1 - 3 - 4 < 0 \rightarrow x = -1$ es solución.

$x = 4 \rightarrow 16 - 12 - 4 < 0 \rightarrow x = 4$ es solución.

La solución es: $[-1, 4]$.

b) $-x^2 - 5x + 14 < 0 \rightarrow \frac{-5 - \sqrt{25 + 56}}{-2} = \frac{-5 + 9}{-2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 7 \end{cases}$

Los intervalos serían: $(-\infty, -2), (-2, 7)$ y $(7, \infty)$.

Para $(-\infty, -2)$: si $x = -3 \rightarrow -9 - 15 + 14 < 0$. Es solución.

Para $(-2, 7)$: si $x = 0 \rightarrow 14 > 0$. No es solución.

Para $(7, \infty)$: si $x = 8 \rightarrow -64 - 40 - 14 < 0$. Es solución.

$x = -2 \rightarrow -4 - 10 - 14 < 0 \rightarrow x = -2$ es solución.

$x = 7 \rightarrow -49 - 35 + 14 < 0 \rightarrow x = 7$ es solución.

La solución es: $(-\infty, -2) \cup [7, \infty)$.

c) $2x^2 - 3x - 1 = 0 \rightarrow \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} \rightarrow \frac{3 \pm 1}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

Los intervalos serían: $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y $(1, \infty)$.

Para $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$: si $x = 0 \rightarrow 1 > 0$. Es solución.

Para $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$: si $x = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{18}{16} - \frac{9}{4} - 1 < 0$. No es solución.

Para $(1, \infty)$: si $x = 2 \rightarrow 8 - 6 - 1 > 0$. Es solución.

$x = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$ no es solución.

$x = 1 \rightarrow 2 - 3 - 1 = 0 \rightarrow x = 1$ no es solución.

La solución es: $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, \infty)$.

d) $x^2-\frac{3}{2}x-1>0 \rightarrow \frac{-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}-4}}{2}=\frac{-3+5}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{1}{2} \\ x_2=-2 \end{cases}$

Los intervalos serían: $(-\infty,-2)$, $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$.

Para $(-\infty,-2)$: si $x=-3 \rightarrow 9-\frac{9}{2}-1>0$. Es solución.

Para $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$: si $x=0 \rightarrow -1<0$. No es solución.

Para $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$: si $x=1 \rightarrow 1-\frac{3}{2}-1>0$. Es solución.

$x=-2 \rightarrow 4-3-1>0 \rightarrow x=-2$ es solución.

$x=\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{4}+\frac{3}{4}-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$ es solución.

La solución es: $(-\infty,-2] \cup \left[\frac{1}{2},\infty\right)$.

44. **Página 106**

a)

$$\begin{cases} 2x-3 \ge x-1 \\ 2x-3 \ge x-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x \le 4 \rightarrow x \le 1 \\ x \ge -4 \end{cases}$$

Por tanto, la solución es $[-4,1]$.

b)

$$\begin{cases} \frac{3(2-x)}{2}-x<\frac{16}{5}-\frac{x-1}{5} \\ \frac{x-4}{3}-\frac{x-5}{6} \ge 3-\frac{2x-3}{18} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{30-15x-10x}{10}<\frac{32-2x-2}{10} \\ \frac{6x-24-3x-15}{18} \ge \frac{54-2x-3}{18} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0<23x-x \\ 5x \ge 18-x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0<22x \\ 6x \ge 18 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \ge \frac{18}{5} \end{cases}$$

Por tanto, la solución es $\left[\frac{18}{5},\infty\right)$.

c)

$$\begin{cases} 3x-\frac{x}{2}-5<0 \\ \frac{1}{2}(x-1)+\frac{x-1}{3}-\frac{x}{5} \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{5x}{2}<-\frac{10}{2} \\ \frac{15x-15+10x-10-6x}{30} \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x<-2 \\ 19x \ge -5-x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x<-2 \\ x \ge \frac{-5}{19} \end{cases}$$

Por tanto, no tiene solución.

d)

$$\begin{cases} x^2-x-2 \ge 0 \\ 12-x-x^2<0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-8}}{2}=\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-1 \end{cases} \\ \frac{-1+\sqrt{1-48}}{-2}=\begin{cases} x_1=-3 \\ x_2=4 \end{cases} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (-\infty,-1) \cup (2,\infty) \\ (-3,4) \end{cases}$$

Por tanto, la solución es $(2,4)$.

45. **Página 106**

a) $P\ (1, -2)$; $3x - y > 2$

El punto (1, –2) pertenece al semiplano determinado por $3x - y > 2$ porque $3 - 2 > 2$.

b) $P\ (-1, 3)$; $x - 2y < 3$

El punto (–1, 3) no pertenece al semiplano determinado por $x - 2y < 3$ porque $-1 - 6 > 3$.

c) $P\ (0, 5)$; $-4x - y \geq 5$

El punto (0, 5) pertenece al semiplano determinado por $-4x - y \geq 5$ porque $5 \geq 5$.

d) $P\ (1, 3)$; $x - 3y - 8 \leq 0$

El punto (1, 3) no pertenece al semiplano determinado por $x - 3y - 8 \leq 0$ porque $1 - 9 - 8 = 0$.

e) $P\left(\frac{1}{2}, 1\right)$; $-2x + 3y > 0$

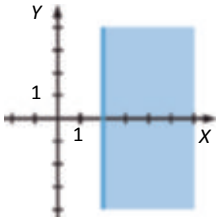
El punto (1/2, 1) pertenece al semiplano determinado por $-2x + 3y > 0$ porque $-1 - 3 > 0$.

f) $P\left(2, -\frac{1}{3}\right)$; $x - 3y \leq \frac{7}{3}$

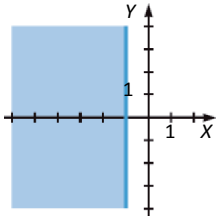
El punto (2, –1/3) pertenece al semiplano determinado por $x - 3y \leq \frac{7}{3}$ porque $2 - 1 \leq \frac{7}{3}$.

46. **Página 106**

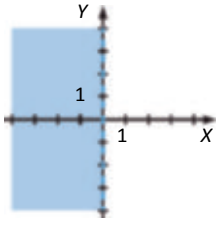
a)



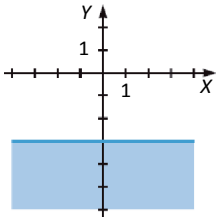
b)



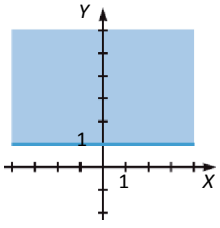
c)



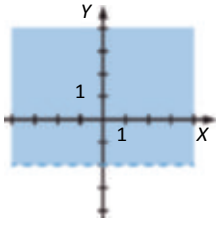
d)



e)

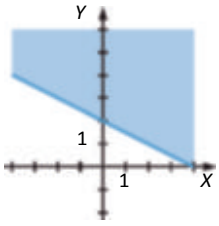


f)

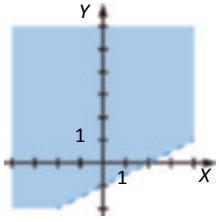


47. **Página 106**

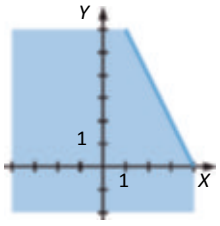
a)



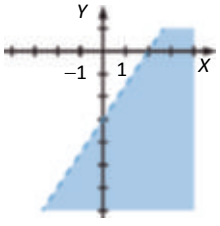
b)



c)



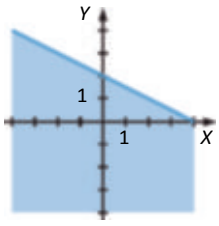
d)



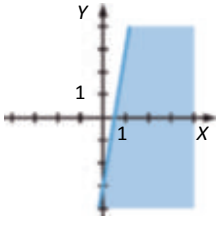
48. **Página 106**

Las soluciones son las siguientes regiones del plano.

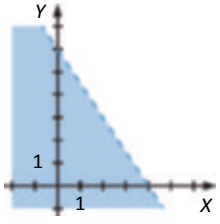
a)



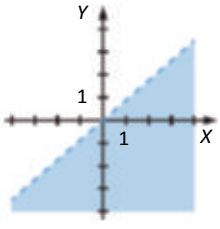
b)



c)



d)



49. **Página 106**

a) Recta que pasa por $4,0$ y $0,6$ $\rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 6$. La región de puntos no contiene el punto $0,0$, por lo que la inecuación es $y \geq -\frac{3}{2}x - 6$

b) Recta que pasa por $0,0$ y $4,1$ $\rightarrow y = \frac{1}{4}x$. La región de puntos contiene el punto $0,-1$, por lo que la inecuación es $x \leq 4y$

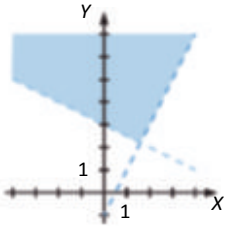
c) Recta que pasa por $0,2$ y $-4,0$ $\rightarrow y = \frac{1}{2}x - 2$. La región de puntos contiene el punto $0,0$, por lo que la inecuación es $2y \leq x + 4$

d) Recta que pasa por $1,1$ y $0,-1$ $\rightarrow y - 2x - 1$. La región de puntos no contiene el punto $0,0$, por lo que la inecuación es $y \leq 2x - 1$

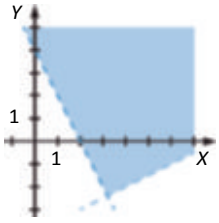
50. **Página 106**

Las soluciones son las siguientes regiones del plano.

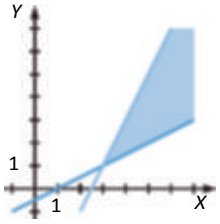
a)



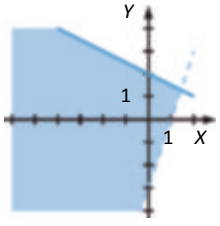
b)



c)



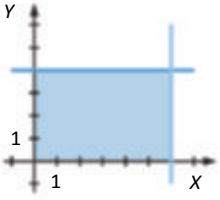
d)



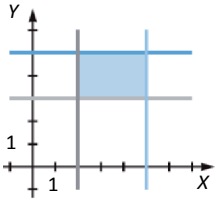
51. **Página 106**

Las soluciones son las siguientes regiones del plano.

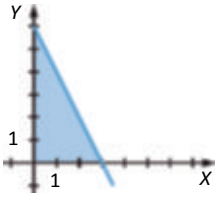
a)



b)

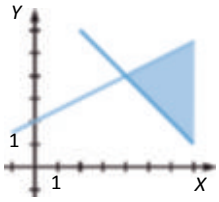


c)

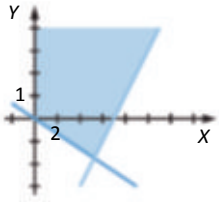


d) No tiene solución, porque las regiones solución de cada una de las rectas no se intersecan en el segundo cuadrante.

e)

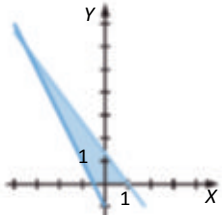


f)



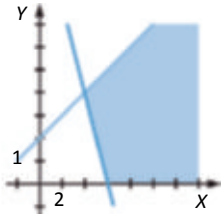
52. **Página 106**

a) La región es:



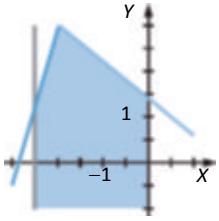
Los vértices son $A\ -7,6\ ,B\ 2,0\ ,C\ -1,0\ $. Está acotada.

b) La región es:



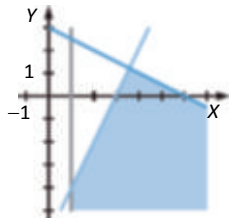
Los vértices son $A\ 4,4\ ,B\ 6,0\ $. No está acotada.

c) La región es:



Los vértices son $A\ -2,3\ ,B\left|-\frac{5}{2},\frac{5}{4}\right|,C\left|0,\frac{7}{5}\right|$. No está acotada.

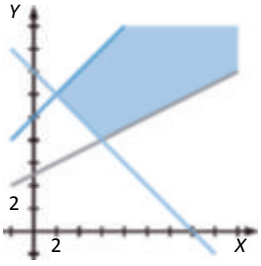
d) La región es:



Los vértices son $A\left(\frac{18}{5},\frac{6}{5}\right), B(1,-4)$. No está acotada.

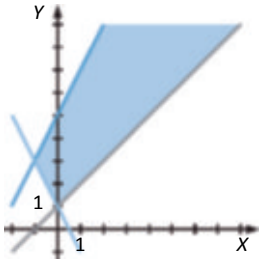
53. **Página 107**

a) La región es:



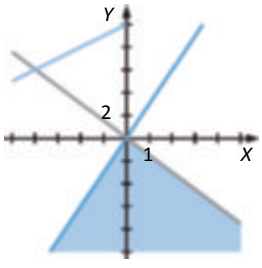
La región no está acotada, los vértices son $A\ 2,12\ , B\ 6,8\ $.

b) La región es:



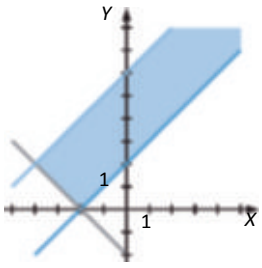
La región no está acotada, los vértices son $A\ -1,3\ , B\ 0,1\ $.

c) La región es:



La región no está acotada, el vértice es $A\ 0,0\ $.

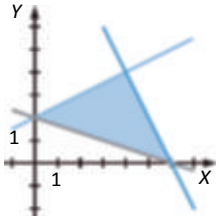
d) La región es:



La región no está acotada, los vértices son $A\ -4,2\ ,B\ -2,0$.

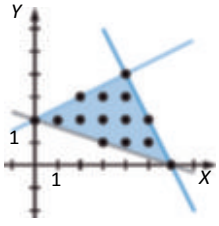
54. Página 107

a)



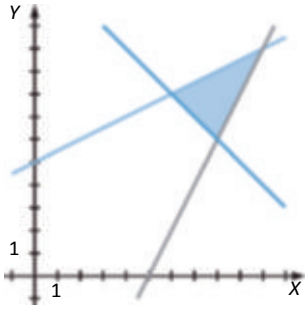
b) Los vértices son $A\ 4,4\ ,B\ 0,2\ ,C\ 6,0$.

c) Las soluciones enteras son las marcadas con puntos en la siguiente imagen:



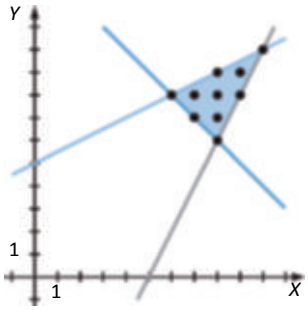
55. Página 107

a)



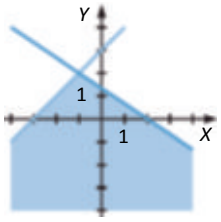
b) Los vértices son $A\ 6,8\ ,B\ 8,6\ ,C\ 10,10$.

c) Las soluciones enteras son las marcadas con puntos en la siguiente imagen:



56. Página 107

$2x - my - 4 = 0 \xrightarrow{A(-1,2)} -2 - 2m - 4 = 0 \rightarrow m = 3 - 2x - 3y - 4 \therefore 0$



57. Página 107

a) Las ecuaciones de las rectas son $x - y = 6, x - 2y = 10$. El sistema de inecuaciones que da lugar a la región es:

$$\left.\begin{array}{l} x - y \therefore 6 \\ x - 2y \therefore 10 \\ x \therefore 0, y \therefore 0 \end{array}\right\}$$

b) Las ecuaciones de las rectas son $x = 4, x - 4y = 12, 2x - 3y = 12, y = 0$. El sistema de inecuaciones que da lugar a la región es:

$$\left.\begin{array}{l} x - 4y \therefore 12 \\ 2x - 3y \therefore 12 \\ 0 \therefore x \therefore 4 \\ y \therefore 0 \end{array}\right\}$$

c) Las ecuaciones de las rectas son $x = 3, 3x = -2y, x - 2y = 6, y = 2$. El sistema de inecuaciones que da lugar a la región es:

$$\left.\begin{array}{l} 3x \therefore -2y \\ x - 2y \therefore 6 \\ 0 \therefore x \therefore 3 \\ 2 \therefore y \end{array}\right\}$$

d) Las ecuaciones de las rectas son $3x - y - 9, x + 2y - 10$. El sistema de inecuaciones que da lugar a la región es:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y \therefore 9 \\ x - 2y \therefore 10 \end{array}\right\}$$

58. **Página 107**

Las rectas que unen los vértices son:

$AB: -x - y - 1$

$BC: 4x - y - 14$

$CA: x - y - 1$

El sistema de ecuaciones será:

$$\left.\begin{array}{l} -x + y \leq 1 \\ 4x - y \leq 14 \\ x - y \geq 1 \end{array}\right\}$$

59. **Página 107**

La región factible está acotada, y tiene como vértices $A\ 0,0\ ,B\ 4,0\ ,C\ 2,3\ ,D\ 0,5$.

a) $f(x,y) = 3x + y$, como $f(A) = 0, f\ B\ = 12, f(C) = 9, f(D) = 5$, el máximo se alcanza en el punto *B* y vale 12.

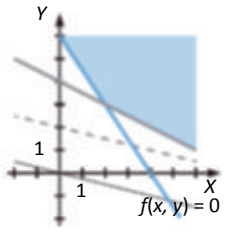
b) $f(x,y) = x - 2y - 1$, como $f(A) = -1, f\ B\ = 3, f(C) = 7, f(D) = 9$, el máximo se alcanza en el punto *D* y vale 9.

c) $f(x,y) - 3x - 2y - 1$, como $f(A) - -1, f\ B\ - 11, f(C) - 11, f(D) - 9$, el máximo se alcanza en el punto *B* y *C*, y en todos los puntos del segmento *BC* y vale 11.

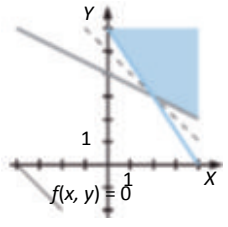
60. **Página 107**

La región factible no está acotada y tiene como vértices $A\ 8,0\ ,B\ 2,3\ ,C\ 0,6$.

a) Al trazar rectas paralelas a la función objetivo $f\ x,y\ - x + 4y$ que pasen por los vértices, se observa que el mínimo se alcanza en *A*(8, 0) y vale 8.



b) Al trazar rectas paralelas a la función objetivo $f\ x,y\ - x - y + 4$ que pasen por los vértices, se observa que el mínimo se alcanza en *B*(2,3) y vale 9.



61. **Página 107**

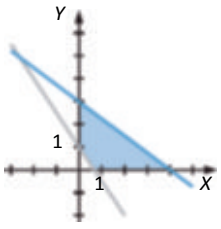
La región factible está acotada y tiene como vértices $A\left(\frac{3}{2},\frac{3}{4}\right), B\left(3,\frac{3}{2}\right), C(3,4), D(0,4), E(0,3)$.

a) Sustituyendo los vértices en la función objetivo, obtenemos que $f(A)=\frac{15}{4}, f(B)=\frac{15}{2}, f(C)=10, f(D)=4, f(E)=3$, por lo que el máximo se alcanza en *C* y vale 10 y el mínimo se alcanza en *E* y vale 3.

b) Sustituyendo los vértices en la función objetivo, obtenemos que $f(A)=3, f(B)=9, f(C)=14, f(D)=5, f(E)=3$, por lo que el máximo se alcanza en *C* y vale 14, y el mínimo se alcanza en *A* y *E*, y por tanto en todos los puntos del segmento *AE* y vale 3.

62. **Página 107**

La región factible es:



$A(0,3), B(0,1), C\left(\frac{2}{3},0\right), D(4,0)$ son los vértices.

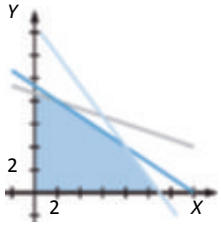
$f(x,y)=3x+2y$

$f(A)=6 \quad f(B)=2 \quad f(C)=2 \quad f(D)=12$

El mínimo está en los puntos *B, C* y en la recta *BC*.

63. **Página 107**

La región factible es:



Los vértices de la región factible son: $A\left(0,\frac{26}{3}\right), B(2,8), C(8,4), D(11,0), E(0,0)$.

Sustituimos en la función objetivo: $f(x,y)=x+y$

$A\left(0,\frac{26}{3}\right) \rightarrow f(A)=\frac{26}{3}$

$B(2,8) \rightarrow f(B)=10$

$C(8,4) \rightarrow f(C)=12 \rightarrow$ Máximo

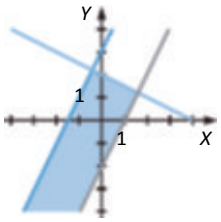
$D(11,0) \rightarrow f(D)=11$

$E(0,0) \rightarrow f(E)=0$

En el punto (8, 4) se alcanza el máximo.

64. **Página 107**

La región factible es:



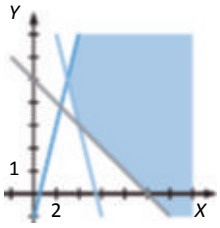
$A\left(-\frac{2}{5},\frac{11}{5}\right), B\left(\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right)$, son los vértices de la región factible.

$f(x,y) = 4y - x$

$A\left(-\frac{2}{5},\frac{11}{5}\right) \to f(A) = \frac{44}{5} - \frac{2}{5} = \frac{46}{5}$ — Máximo $\qquad B\left(\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right) \to f(B) = \frac{24}{5} - \frac{8}{5} = \frac{16}{5}$

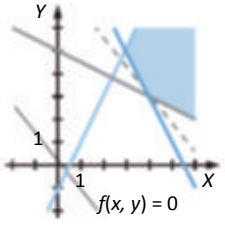
65. **Página 107**

a) La región factible es:



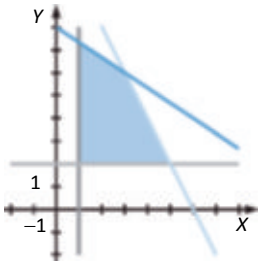
b) La región no está acotada y los vértices de la región factible son: $A(3,5)$, $B(4,3)$.

Gráficamente trazando rectas paralelas a la función objetivo obtenemos que el mínimo está en el punto $B(4,3)$ y su valor es $f(B) = 24 + 15 - \frac{1}{2} = \frac{77}{2}$.



66. **Página 108**

La región factible es:



Los vértices de la región son: $A\ 1,2\ ,B\ 5,2\ ,C\ 3,6\ ,D\left|1,\frac{22}{3}\right|$.

$f\ x,y\ =3x+2y$

$A\ 1,2\ \rightarrow f\ A\ =3+4=7$

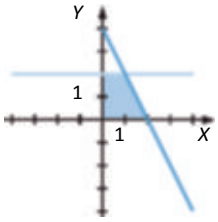
$B\ 5,2\ \rightarrow f\ B\ =15+4=19$

$C\ 3,6\ \rightarrow f\ C\ =9+12=21\rightarrow$ Máximo

$D\left|1,\frac{22}{3}\right|\rightarrow f\ D\ =3+\frac{44}{3}=\frac{53}{3}$

67. **Página 108**

La región factible es:



Los vértices de la región son: $A\ 0,2\ ,B\ 1,2\ ,C\ 2,0\ ,D\ 0,0$.

$f\ x,y\ =y-x$

$A\ 0,2\ \rightarrow f\ A\ =2$

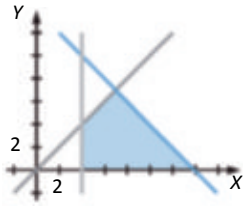
$B\ 1,2\ \rightarrow f\ B\ =3\rightarrow$ Máximo

$C\ 2,0\ \rightarrow f\ C\ =2$

$D\ 0,0\ \rightarrow f\ D\ =0$

68. **Página 108**

La región factible es:



Los vértices de la región son: $A\ 7,7\ ,B\ 14,0\ ,C\ 4,0\ ,D\ 4,4$.

$f\ x,y\ =2x+3y$

$A\ 7,7\ \rightarrow f\ A\ =35\rightarrow$ Máximo

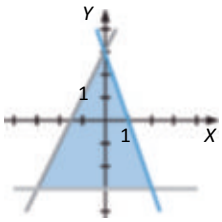
$B\ 14,0\ \rightarrow f\ B\ =28$

$C\ 4,0\ \rightarrow f\ C\ =8$

$D\ 4,4\ \rightarrow f\ D\ =20$

69. **Página 108**

La región factible es:



Los vértices de la región factible son $A\ 0,3\ ,B\ 2,-3\ ,C\ -3,-3\ .$

$f\ x,y\ =3x-y$

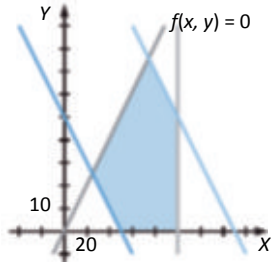
$A\ 0,3\ \rightarrow f\ A\ =-3$

$B\ 2,-3\ \rightarrow f\ B\ =9\rightarrow$ Máximo

$C\ -3,-3\ \rightarrow f\ C\ =-6\rightarrow$ Mínimo

70. **Página 108**

La región factible es:



Los vértices de la región factible son $A\ 25,25\ ,B\ 50,0\ ,C\ 100,0\ ,D\ 100,50\ ,E\ 75,75\ .$

$f\ x,y\ =3x-2y+1$

$A\ 25,25\ \rightarrow f\ A\ =126$

$B\ 50,0\ \rightarrow f\ B\ =151$

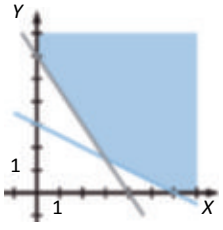
$C\ 100,0\ \rightarrow f\ C\ =301$

$D\ 100,50\ \rightarrow f\ D\ =401\rightarrow$ Máximo

$E\ 75,75\ \rightarrow f\ E\ =376$

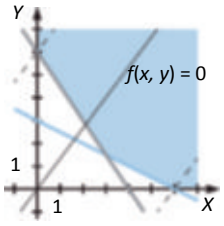
71. **Página 108**

La región factible es:



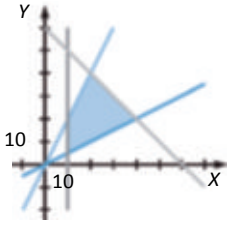
Los vértices de la región factible son $A\ 0,6\ ,B\left[3,\frac{3}{2}\right],C\ 6,0\ .$

La región no está acotada, trazando rectas paralelas a $4x - 3y - 0$ vemos que siempre se puede trazar una recta paralela por encima de la anterior que corte la región factible; por tanto, no es posible maximizar o minimizar la función objetivo:



72. **Página 108**

La región factible es:



Los vértices son $A\ 10,5\ , B\ 40,20\ , C\ 20,40\ , D\ 10,20\ .$

$f\ x,y\ = 4x - 9y + 3$

$A\ 10,5\ - f\ A\ = 88 \rightarrow$ Mínimo

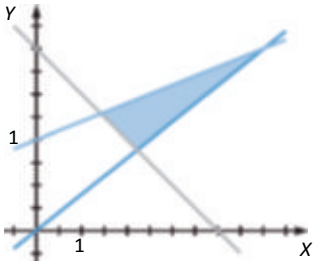
$B\ 40,20\ - f\ B\ = 343$

$C\ 20,40\ - f\ C\ = 443 \rightarrow$ Máximo

$D\ 10,20\ - f\ D\ = 223$

73. **Página 108**

La región factible es:



Los vértices de la región factible $A\left[\frac{10}{7}, \frac{9}{7}\right], B\ \frac{20}{9}, \frac{8}{9}\right], C\ 5,2\ .$

$f\ x,y\ = 2x - 8y - 1$

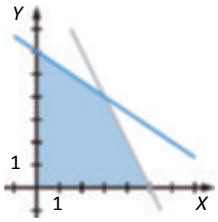
$A\left[\frac{10}{7}, \frac{9}{7}\right] - f\ A\ = \frac{20}{7} + \frac{72}{7} - 1 = \frac{85}{7}$

$B\left[\frac{20}{9}, \frac{8}{9}\right] - f\ B\ = \frac{40}{9} + \frac{64}{9} - 1 = \frac{95}{9} \rightarrow$ Mínimo

$C\ 5,2\ - f\ C\ = 25 -$ Máximo

74. **Página 108**

La región factible es:



La región factible tiene como vértices $A\ 0,0\ ,B\ 5,0\ ,C\ 3,4\ ,D\ 0,6$.

$f\ x,y\ = ax + by$

$A\ 0,0\ \rightarrow f\ A\ = 0 \qquad B\ 5,0\ \rightarrow f\ B\ = 5a \qquad C\ 3,4\ \rightarrow f\ C\ = 3a + 4b \qquad D\ 0,6\ \rightarrow f\ D\ = 6b$

Situamos el máximo en *C*.

Los siguientes casos no se pueden producir:

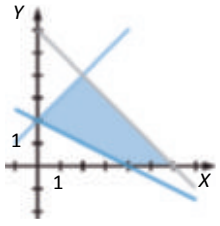
- *a* y *b* no pueden ser nulos, ya que no obtendríamos una función de la forma $ax + by$.
- *a* y *b* no pueden tener signos opuestos porque la función objetivo no alcanzaría su máximo en *C*.
- *a* y *b* no pueden ser negativos, pues no se cumpliría la primera de las restricciones.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} 3a + 4b \geq 0 \\ 3a + 4b \geq 5a \\ 3a + 4b \geq 6b \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3a \geq -4b \\ 4b \geq 2a \\ 3a \geq 2b \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2b \geq a \\ 3a \geq 2b \end{array}\right\} \rightarrow 3a \geq 2b \geq a$$

75. **Página 108**

a) La región factible es:



Los vértices de la región factible son $A\ 2,4\ ,B\ 0,2\ ,C\ 4,0\ ,D\ 6,0$.

$f\ x,y\ = 2x + my + 5$

$A\ 2,4\ \rightarrow f\ A\ = 9 - 4m$

$B\ 0,2\ \rightarrow f\ B\ = 2m - 5$

$C\ 4,0\ \rightarrow f\ C\ = 13$

$D\ 6,0\ \rightarrow f\ D\ = 17$

Para que el mínimo no sea único tiene que darse uno de estos casos:

- $9 - 4m = 2m + 5 \rightarrow 2m = -4 \rightarrow m = -2$. Este resultado no es válido porque *m* tiene que ser natural.
- $2m + 5 = 13 \rightarrow m = 4$; por tanto, *B* y *C* son dos mínimos con coordenadas enteras (comprobamos que es mínimo viendo que 9 + 4*m* es mayor que 13, esto sería 9 + 4 · 4 = 25).
- $9 - 4m = 13 \rightarrow m = 1$. Este resultado no es válido porque $2m - 5 = 7 \neq 13$

b) El mínimo se encuentra en la recta *BC* y vale 13 en toda la recta.

c) El máximo es el punto *A*, $f\ A\ = 9 + 16 = 25$.

76. **Página 108**

La región factible está definida por las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x-2y \leq -2 \\ x-y \leq 10 \\ x-y \geq -2 \end{array}\right|$$

Como *a*, *b* y *c* son naturales: $a,b,c \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(3,4) = 3a-4b-c \\ f(4,4) = 4a-4b-c \end{array}\right| \rightarrow f(3,4) \leq f(4,4)$$

77. **Página 108**

a) Definimos las variables:

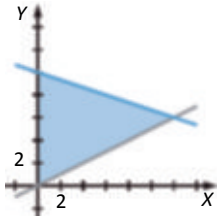
$x \geq 0, x \rightarrow$ número de libros $\qquad y \geq 0, y \rightarrow$ número de juegos

	Libros	Juegos	Total
Coste (€)	8	24	240

El sistema de inecuaciones que hay que resolver es:

$$\left.\begin{array}{l} 8x-24y \leq 240 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right|$$

La región factible está acotada y sus vértices son $A(0,0)$, $B(12,6)$, $C(0,10)$.



b) Los vértices pertenecen a la región factible porque las inecuaciones incluyen la igualdad. El punto *B* representa 12 libros y 6 juegos, por lo que el ganador sí los podrá comprar.

c) Sí podrá comprar 7 libros y 7 juegos, porque el punto (7, 7) pertenece a la región factible. El coste será 224 € y le sobrarán 16 €.

78. **Página 108**

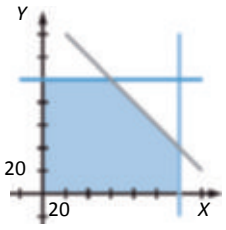
	Empresa A	Empresa B	Total
Paquetes	1	1	160
Folletos/bolsa	120	100	
Beneficio	0,1	0,15	

Definimos las variables:

$x \geq 0, x \rightarrow$ número de paquetes de la empresa *A* $\quad y \geq 0, y \rightarrow$ número de paquetes de la empresa *B*

$$\text{Maximizar } f(x,y) = 0{,}10x - 0{,}15y$$

$$\left.\begin{array}{l} x - y \leq 160 \\ 0 \leq x \leq 120 \\ 0 \leq y \leq 100 \end{array}\right\}$$



Los vértices de la región factible son: $A\ (0,100)$, $B\ (60,100)$, $C\ (120,40)$, $D\ (120,0)$, $E\ (0,0)$.

Sustituimos en la función objetivo:

$f(x,y) = 0{,}10x - 0{,}15y$

$A\ (0,100) \rightarrow 15$

$B\ (60,100) \rightarrow 6 - 15 = 21 \rightarrow$ Máximo

$C\ (120,40) \rightarrow 12 + 6 = 18$

$D\ (120,0) \rightarrow 12$

$E\ (0,0) \rightarrow 0$

Le conviene repartir 60 paquetes de la empresa *A* y 100 de la *B*, obteniendo un beneficio de 21 €.

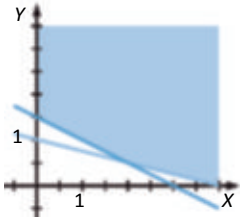
79. Página 109

$x \geq 0, x \rightarrow$ cantidad de alimentos *A* $\quad y \geq 0, y \rightarrow$ cantidad de alimentos *B*

$$\text{Minimizar } f(x,y) = x - 3y$$

$$\left.\begin{array}{l} 1000x - 2000y \geq 3000 \\ 25x - 100y \geq 100 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$

La región factible es:



Los vértices de la región factible son $A\left(0,\frac{3}{2}\right), B\left(2,\frac{1}{2}\right), C\ (4,0)$.

$f(x,y) = x - 3y$

$A\left(0,\frac{3}{2}\right) \rightarrow -4{,}5 \qquad B\left(2,\frac{1}{2}\right) \rightarrow 2 + \frac{3}{2} = 3{,}5 \rightarrow$ Mínimo $\qquad C\ (4,0) \rightarrow 4$

El coste mínimo es de 3,50 €.

80. **Página 109**

$x \geq 0, x$ — número de días que debe reciclar el centro de producción *A*

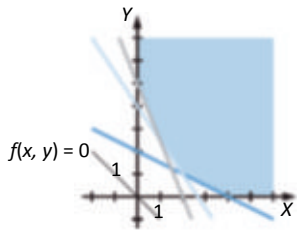
$y \geq 0, y$ — número de días que debe reciclar el centro de producción *B*

	Centro *A*	Centro *B*	Total
Radiación alta	1	2	80
Radiación media	3	2	160
Radiación baja	5	2	200
Coste	20 000	20 000	

Minimizar $f(x, y) = 20\,000x + 20\,000y$

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y \geq 80 \\ 3x - 2y \geq 160 \\ 5x - 2y \geq 200 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right|$$

La región factible es:



Los vértices de la región factible son $A\ 0,100$, $B\ 20,50$, $C\ 40,20$, $D\ 80,0$. Trazando paralelas a la función objetivo que pasen por los vértices, observamos que el mínimo se alcanza en *C*, y vale 1 200 000 €. Para que el coste del reciclaje sea el menor posible, el primer centro debe trabajar 40 días y el segundo 20 días.

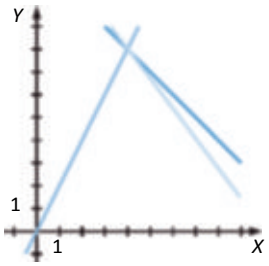
81. **Página 109**

$x \geq 0, x$ — número de microbuses *A* $y \geq 0, y$ — número de microbuses *B*

	Microbús A	Microbús B	Total
Plazas	16	12	160
Coste	110	96	

Minimizar $f(x, y) = 110x - 96y$

$$\left.\begin{array}{l} 16x - 12y \geq 160 \\ x - y \leq 12 \\ x \leq \dfrac{y}{2} \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right|$$



El único valor que cumple las restricciones es el punto *A*(4, 8), 4 microbuses de 16 plazas y 8 de 12 plazas. El coste será 1 208 €.

82. **Página 109**

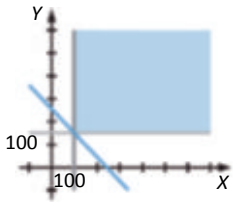
$x \geq 0, x$ — número de botellas A $\qquad$ $y \geq 0, y$ — número de botellas B

	Botellas A	Botellas B	Total
Botellas	1	1	250
Coste	0,40 €	0,60 €	

Minimizar $f(x,y) = 0{,}4x - 0{,}6y$

$$\left\{\begin{array}{l} x - y \leq 250 \\ x \geq 100 \\ y \geq 150 \end{array}\right.$$

La región factible es:



La región no está acotada, $A\ 100{,}150$ es un vértice de la región. Trazando rectas paralelas de la función objetivo, vemos que el mínimo es el vértice $A\ 100{,}150$ y, por tanto, el mínimo coste es 130 € con 100 botellas tipo A y 150 tipo B.

83. **Página 109**

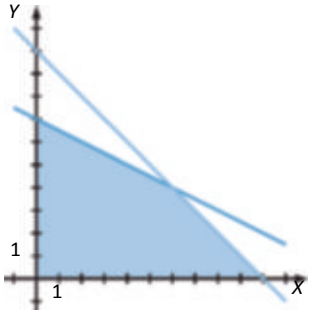
$x \geq 0, x$ — joyas *A* $\qquad$ $y \geq 0, y$ — joyas *B*

	Joyas A	Joyas B	Total
Oro	1	2	70
Plata	2	2	100
Coste	50 €	80 €	

Maximizar $f(x,y) = 50x - 80y$

$$\left\{\begin{array}{l} x - 2y \leq 70 \\ 2x - 2y \leq 100 \\ x \geq 0, y \leq 0 \end{array}\right.$$

La región factible es:



Los vértices de la región son $A\ 0{,}35\ , B\ 30{,}20\ , C\ 50{,}0\ , D\ 0{,}0$.

$f\ x,y\ = 50x - 80y$

$A\ 0{,}35\ — f\ A\ = 2800$

$B\ 30{,}20\ — f\ B\ = 3100$ — *Máximo*

$C\ 50{,}0\ — f\ C\ = 2500$

$D\ 0{,}0\ — f\ D\ = 0$

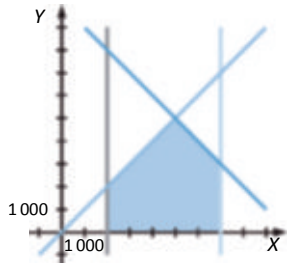
El beneficio máximo se obtiene con 30 joyas tipo *A* y 20 tipo *B*, obteniendo un beneficio de 3 100 €.

84. **Página 109**

a) $x \geq 0, x$ — inversión A $\quad y \geq 0, y$ — inversión B

$$\begin{cases} x - y \leq 10\,000 \\ 2000 \leq x \leq 7000 \\ x \geq y \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La región factible es:



Los vértices de la región son $A\ 5000{,}5000\ ,B\ 2000{,}2000\ ,C\ 2000{,}0\ ,D\ 7000{,}0\ ,E\ 7000{,}3000$.

Las posibilidades de inversión según las condiciones planteadas vienen determinadas por el área marcada.

b) La función objetivo en este caso sería:

$f\ x,y\ = 0{,}09x - 0{,}12y$

$A\ 5000{,}5000\ - f\ A\ = 1050 \rightarrow$ Máximo

$B\ 2000{,}2000\ - f\ B\ = 420$

$C\ 2000{,}0\ - f\ C\ = 180$

$D\ 7000{,}0\ - f\ D\ = 630$

$E\ 7000{,}3000\ - f\ B\ = 990$

Debería invertir 5 000 € en cada tipo de inversiones para optimar el rendimiento global. De esta manera el rendimiento serán 1 050 €.

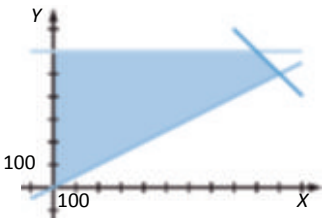
85. **Página 109**

$x \geq 0, x$ — número de entradas de adulto $\quad y \geq 0, y$ — número de entradas de niño

Maximizar $f(x,y) = 8x + 4{,}8y$

$$\begin{cases} x - y \leq 1500 \\ 0 \leq x \leq 2y \\ 0 \leq y \leq 600 \end{cases}$$

La región factible:



Está acotada por los vértices $A\ 0{,}0\ ,B\ 1000{,}500\ ,C\ 900{,}600\ ,D\ 0{,}600$.

$f\ x,y\ = 8x - 4{,}8y$

$A\ 0{,}0\ - f\ A\ = 0$

$B\ 1000{,}500\ - f\ B\ = 10\,400$ — *Máximo*

$C\ 900{,}600\ - f\ C\ = 10\,080$

$D\ 0{,}600\ - f\ D\ = 2880$

Para maximizar el dinero, se deben vender 1 000 entradas de adulto y 500 entradas de niño, obteniéndose 10 400 €.

86. **Página 109**

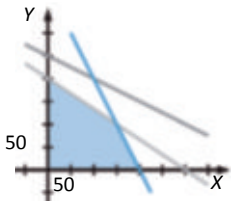
	Lote A	Lote B	Total
Cuadernos	2	3	600
Carpetas	1	2	500
Bolígrafos	2	1	400
Coste	7	10	

$x \geq 0, x \rightarrow$ número de lotes *A* $\quad y \geq 0, y \rightarrow$ número de lotes *B*

Maximizar $f(x, y) = 7x + 10y$

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 3y \leq 600 \\ x - 2y \leq 500 \\ 2x - y \leq 400 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right|$$

La región factible es:



Los vértices de la región factible son: $A\ 0,0\ , B\ 200,0\ , C\ 150,100\ , D\ 0,200\ .$

Sustituimos en la función objetivo:

$f\ x, y\ = 7x + 10y$

$A\ 0,0\ \rightarrow 0$

$B\ 200,0\ \rightarrow 1400$

$C\ 150,100\ \rightarrow 2050 \rightarrow$ Máximo

$D\ 0,200\ \rightarrow 2000$

$E\ 0,0\ \rightarrow 0$

La solución óptima son 150 lotes *A* y 100 lotes *B*, obteniendo 2 050 €.

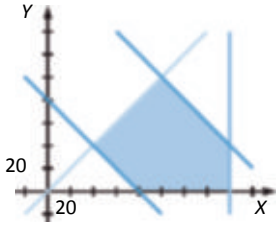
87. **Página 109**

$x \geq 0, x \rightarrow$ número de vuelos T1 $\quad y \geq 0, y \rightarrow$ número de vuelos T2

Minimizar $f(x, y) = 2800x - 2400y$

$$\left.\begin{array}{l} y \leq x \leq 160 \\ 80 \leq x - y \leq 200 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{array}\right|$$

La región factible es:



Los vértices de la región factible son:
$A\ 100,100\ , B\ 160,40\ , C\ 160,0\ , D\ 80,0\ , E\ 40,40\ .$

Sustituimos en la función objetivo:

$f\ x, y\ = 2800x - 2400y$

$A\ 100,100\ \rightarrow 520\,000$

$B\ 160,40\ \rightarrow 544\,000$

$C\ 160,0\ \rightarrow 448\,000$

$D\ 80,0\ \rightarrow 224\,000$

$E\ 40,40\ \rightarrow 208\,000 \rightarrow$ Mínimo

Para que el gasto de combustible sea mínimo cada avión debe hacer 40 vuelos y el gasto será de 208 000 €.

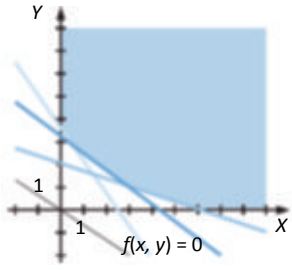
88. **Página 109**

$x \geq 0, x$ — cantidad de alimentos *A* $y \geq 0, y$ — cantidad de alimentos *B*

Minimizar $f(x, y) = 2x + 3y$

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 2y \geq 7 \\ 6x - 8y \geq 26 \\ x - 3y > 6 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right|$$

La región factible es:



Los vértices de la región factible son $A\left(0, \frac{7}{2}\right), B\left(\frac{1}{3}, 3\right), C(3,1), D(6,0)$.

Trazando rectas paralelas a la función objetivo, vemos que se obtiene un mínimo en el punto *C*. Esto quiere decir que la combinación óptima es de 3 latas de la marca *A* y 1 de la marca *B*, siendo el coste de 9 €.

89. **Página 110**

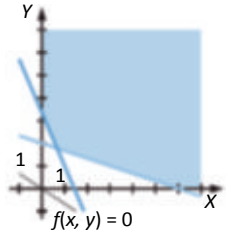
$x \geq 0, x$ — pienso tipo I $y \geq 0, y$ — pienso tipo II

	Tipo I	Tipo II	Total
Sustancia *A*	2	6	24
Sustancia *B*	7	3	21
Coste	16 €	20 €	

Minimizar $f(x, y) = 16x + 20y$

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 6y \leq 24 \\ 7x - 3y \leq 21 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right|$$

La región factible es:



Los vértices de la región son $A(0,7), B\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right), C(12,0)$. Trazando rectas paralelas de la función objetivo, vemos que alcanza el mínimo en el punto *B*, lo que supone 94 € de coste.

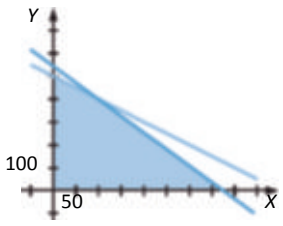
90. **Página 110**

$x \geq 0, x$ — plazas tarifa preferente $y \geq 0, y$ — plazas tarifa turista

	Preferente	Turista	Total
Peso	50	35	18400
Plazas	1	1	500
Coste	80 €	50 €	

Maximizar $f(x, y) = 80x - 50y$

$$\begin{cases} 50x - 35y \leq 18400 \\ x - y \leq 500 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices de la región acotada son $A\ 0{,}500$, $B\ 60{,}440$, $C\ 368{,}0$, $D\ 0{,}0$.

$f(x, y) = 80x - 50y$

$A\ 0{,}50 \rightarrow 25000$

$B\ 60{,}440 \rightarrow 26800$

$C\ 368{,}0 \rightarrow 29440 \rightarrow$ Máximo

$D\ 0{,}0 \rightarrow 0$

Se obtendrá el mayor beneficio si ofrecen 368 plazas en preferente.

91. **Página 110**

	Surtido A	Surtido B	Total
Polvorones	0,15	0,2	200
Mantecados	0,1	0,15	138
Mazapanes	0,08	0,1	100
Beneficio	3	4	

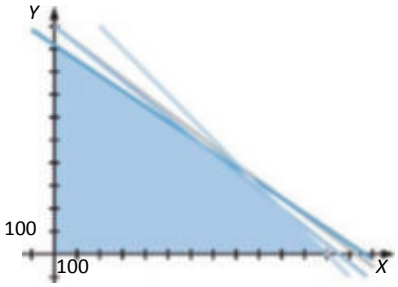
Definimos las variables:

$x \geq 0, x$ — cajas de surtido *A* $y \geq 0, y$ — cajas de surtido *B*

Maximizar $f(x, y) = 3x + 4y$

$$\begin{cases} x - y \leq 1200 \\ 0{,}15x - 0{,}2y \leq 200 \\ 0{,}1x - 0{,}15y \leq 138 \\ 0{,}08x - 0{,}1y \leq 100 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

La región factible es:



Los vértices de la región acotada son $A\ 0{,}0$, $B\ 0{,}920$, $C\ 600{,}520$, $D\ 1000{,}200$, $E\ 1200{,}0$.

$f(x,y) = 3x + 4y$

$A(0,0) \rightarrow 0$

$B(0,920) \rightarrow 3680$

$C(600,520) \rightarrow 3880 \rightarrow$ *Máximo*

$D(1000,200) \rightarrow 3800$

$E(1200,0) \rightarrow 3600$

Para que el beneficio sea máximo, que será de 3 880 €, habría que hacer 600 surtidos tipo A y 520 surtidos tipo B.

92. Página 110

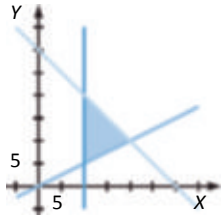
Definimos las variables:

$x \equiv 0, x \rightarrow$ vagones dedicados a coches $\qquad y \equiv 0, y \rightarrow$ vagones dedicados a motocicletas

$$\text{Maximizar } f(x,y) = 670x + 360y$$

$$\left.\begin{array}{l} x - y \leq 30 \\ x \equiv 10 \\ y \equiv \dfrac{x}{2} \\ x \equiv 0, y \equiv 0 \end{array}\right\}$$

La región factible es:



Los vértices de la región factible son: $A(10,20)$, $B(20,10)$, $C(10,5)$.

Sustituimos en la función objetivo:

$f(x,y) = 670x + 360y$

$A(10,20) \rightarrow 13900$

$B(20,10) \rightarrow 17000 \rightarrow$ Máximo

$C(10,5) \rightarrow 8500$

Debe haber 20 vagones dedicados a coches y 10 a motocicletas.

93. Página 110

	E_1	E_2	Total
I_1	1	5	150
I_2	1	2	90
I_3	2	1	150
Coste	10	23	

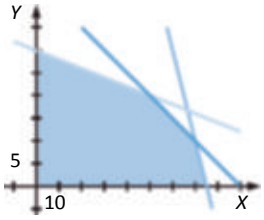
Definimos las variables:

$x \geq 0, x \rightarrow$ número de E_1 $\qquad$ $y \geq 0, y \rightarrow$ número de E_2

Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} x - 5y \leq 150 \\ x - 2y \leq 90 \\ 2x - y \leq 150 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right|$$

La región factible es:



Los vértices de la región factible son: $A\ 0,0\ , B\ 0,30\ , C\ 50,20\ , D\ 70,10\ , E\ 75,0\ .$

a) Queremos maximizar $f(x,y) = 10x + 23y$.

$A\ 0,0\ \rightarrow 0$

$B\ 0,30\ \rightarrow 690$

$C\ 50,20\ \rightarrow 960 \rightarrow$ Máximo

$D\ 70,10\ \rightarrow 930$

$E\ 75,0\ \rightarrow 750$

Para maximizar el beneficio se necesitan 50 empanadas tipo 1 y 20 empanadas tipo 2, obteniendo un beneficio de 960 €.

b) Fijando el precio de la empanada del tipo 1 por 15 €: $960 = 15 \cdot 60 - C_2 \cdot 15 \rightarrow C_2 = 4\,€$

94. Página 110

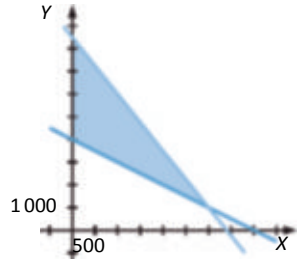
Definimos las variables:

$x \geq 0, x \rightarrow$ yogures de maracuyá $\qquad$ $y \geq 0, y \rightarrow$ yogures de chirimoya

Minimizar $f(x,y) = x - 2y$

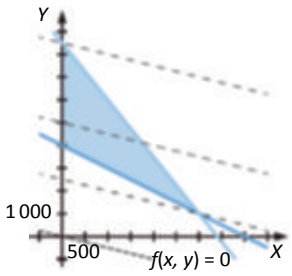
$$\left.\begin{array}{l} x - y \geq 4000 \\ 0{,}5x - 0{,}2y \leq 1700 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right|$$

La región factible es:



Los vértices de la región factible no acotada son $A\ 3\,000,1000\ , B\ 0,4\,000$ y $C(0,8\,500)$.

Trazando rectas paralelas de la función objetivo para tener el menor coste, vemos que se deben producir 3 000 yogures de maracuyá y 1 000 de chirimoya.



95. **Página 110**

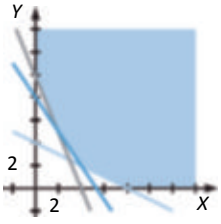
$x \geq 0, x$ — meses de actividad del avión *A* $y \geq 0, y$ — meses de actividad del avión *B*

	Tipo A	Tipo B	Total
Trayecto T1	10	20	80
Trayecto T2	30	20	160
Trayecto T3	50	20	200
Coste	200 000	200 000	

Minimizar $f(x, y) = 200\,000x - 200\,000y$

$$\left.\begin{array}{l} 10x - 20y \geq 80 \\ 30x - 20y \geq 160 \\ 50x - 20y \geq 200 \\ x \geq 0, y > 0 \end{array}\right|$$

La región factible es:



Los vértices de la región son $A\ 0,10$, $B\ 2,5$, $C\ 4,2$, $D\ 8,0$. Trazando rectas paralelas de la función objetivo, obtenemos que se alcanza el mínimo en el punto *C*. Es decir, que el modelo *A* vuela 4 meses y el modelo *B*, 2. El coste de combustible ascenderá a 1 200 000 €.

96. **Página 110**

	Turismo	Camión	Total
Nave A	2	7	385
Nave B	3	3	240
Coste	3 000	6 000	

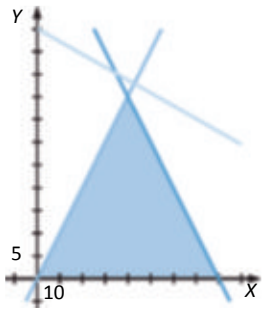
Definimos las variables:

$x \geq 0, x$ — número de turismos

$y \geq 0, y$ — número de camiones

$$\text{Maximizar } f(x,y) = 3000x - 6000y$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 7y \leq 385 \\ 3x - 3y \leq 240 \\ x \geq y \\ x \geq 0, y > 0 \end{array}\right|$$



Los vértices de la región factible son $A\ 0,0\ , B\ 40,40\ , C\ 80,0\ .$

$f\ x,y\ = 3000x - 6000y$

$A\ 0,0\ - 0$

$B\ 40,40\ - 360\,000 \rightarrow \text{Máximo}$

$C\ 80,0\ - 240\,000$

Se deben producir 40 camiones y 40 turismos y las ganancias serán de 360 000 €.

97. Página 110

	Lote *A*	Lote *B*	Total
Tenedor	1	2	40
Cuchara	2	1	40
Sacacorchos	1	1	24
Beneficio	2	1,5	

Definimos las variables:

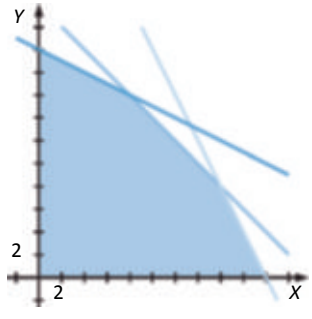
$x \geq 0, x$ — número de lotes *A*

$y \geq 0, y$ — número de lotes *B*

$$\text{Maximizar } f(x,y) = 2x + 1{,}5y$$

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y \leq 40 \\ 2x - y \leq 40 \\ x - y \leq 24 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right|$$

La región factible es:



Los vértices de la región acotada son
$A\ 0,0\ , B\ 20,0\ , C\ 16,8\ , D\ 8,16\ , E\ 0,20\ .$

$f\ x,y\ = 2x + 1{,}5y$

$A\ 0,0\ - 0$

$B\ 20,0\ - 40$

$C\ 16,8\ - 44 \rightarrow \text{Máximo}$

$D\ 8,16\ - 40$

$E\ 0,20\ - 30$

Para obtener el beneficio sea máxima debe vender 16 del lote *A* y 8 del lote *B*.

98. **Página 111**

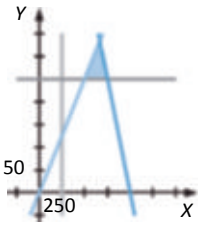
Definimos las variables:

$x \geq 0, x$ — periódicos $\qquad$ $y \geq 0, y$ — radio

$$\text{Maximizar } f(x,y) = 50x - 80y$$

$$\left.\begin{array}{l} x - y \leq 1000 \\ x \geq 2y \\ x \geq 250 \\ y \geq 250 \end{array}\right|$$

La región factible es:



Los vértices de la región acotada son $A\ 500,250$, $B\left\{\frac{2000}{3}, \frac{1000}{3}\right\}$, $C\ 750,250$.

$f\ x,y\ = 50x - 80y$

$A\ 500,250\ - 45000$

$B\left\{\frac{2000}{3}, \frac{1000}{3}\right\} - 60000 - \text{Máximo}$

$C\ 750,250\ - 57500$

Debería asignar un presupuesto de 666,67 € a periódicos y uno de 333,33 € a radio.

99. **Página 111**

	Jersey	Pantalones	Total
Cortar	1	1	7
Coser	3	1	11
Teñir	1	0	3
Beneficio	8	5	

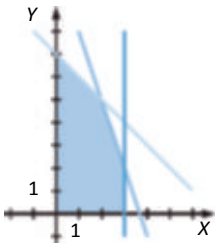
Definimos las variables:

$x \geq 0, x$ — número de jerséis $\qquad$ $y \geq 0, y$ — número de pantalones

$$\text{Maximizar } f(x,y) = 8x - 5y$$

$$\left.\begin{array}{l} x - y \leq 7 \\ 3x - y \leq 11 \\ x \leq 3 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right|$$

La región factible es:



Los vértices de la región acotada son $A\ 0,0$, $B\ 3,0$, $C\ 3,2$, $D\ 2,5$, $E\ 0,7$.

$f(x,y) = 8x + 5y$

$A\ (0,0) \rightarrow 0$

$B\ (3,0) \rightarrow 24$

$C\ (3,2) \rightarrow 34$

$D\ (2,5) \rightarrow 41 \rightarrow$ Máximo

$E\ (0,7) \rightarrow 35$

Para conseguir el beneficio máximo, se deben producir 2 jerséis y 5 pantalones, con un beneficio de 41 €.

100. **Página 111**

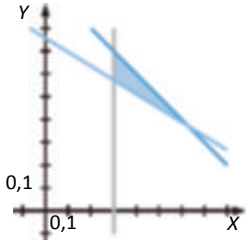
Definimos las variables:

$x \geq 0, x =$ bonos $\qquad y \geq 0, y =$ acciones

Maximizar $f(x,y) = x - y$

$$\left.\begin{array}{l} x - y \leq 1 \\ x \geq 0{,}30 \\ 0{,}06x - 0{,}10y \geq 0{,}075 \\ x \geq 0, y > 0 \end{array}\right|$$

La región factible es:



Los vértices de la región acotada son $A\ (0{,}63;0{,}38)$, $B\ (0{,}3;0{,}7)$, $C\ (0{,}3;0{,}57)$.

$f(x,y) = x - y$

$A\ (0{,}62;0{,}37) \rightarrow 0{,}99$

$B\ (0{,}3;0{,}7) \rightarrow 1 \rightarrow$ Máximo

$C\ (0{,}3;0{,}57) \rightarrow 0{,}87$

Se debe asignar un 30 % a los bonos y un 70 % a las acciones

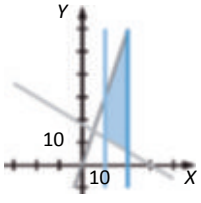
101. **Página 111**

$x \geq 0, x =$ trajes de nacionales $\qquad y \geq 0, y =$ trajes de importación

Minimizar $f(x,y) = x - y$

$$\left.\begin{array}{l} 10 \leq x \leq 20 \\ x \geq \dfrac{y}{3} \\ 120x - 200y \geq 3600 \end{array}\right|$$

La región factible es:



Los vértices de la región son $A\ (10,12)$, $B\ (20,6)$, $C\ (20,60)$, $D\ (10,30)$.

$f(x,y) = x - y$

$A\ (10,12) \rightarrow 22 \rightarrow$ Mínimo

$B\ (20,6) \rightarrow 26$

$C\ (20,60) \rightarrow 80$

$D\ (10,30) \rightarrow 40$

Por tanto, la tienda deberá pedir 10 trajes naciones y 12 de importación. De esta manera, el beneficio obtenido con venta será 3 600 € ($120 \cdot 10 + 200 \cdot 12 = 3600$).

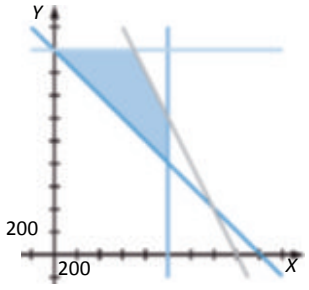
102. **Página 111**

$x \geq 0, x$ — páginas de Lola $\quad y \geq 0, y$ — páginas de Manuel

Maximizar $f(x,y) = 9x + 6y$

$$\begin{cases} 3x - 1{,}5y \leq 4800 \\ x - y \geq 1800 \\ 0 \leq x \leq 1000 \\ 0 \leq y \leq 1800 \end{cases}$$

La región factible es:



Los vértices de la región son
$A\ (0,1800)$, $B\ (700,1800)$, $C\ (1000,1200)$, $E\ (1000,800)$.

$f(x,y) = 9x + 6y$

$A\ (0,1800) \rightarrow 10\,800$

$B\ (700,1800) \rightarrow 17\,100 \rightarrow \textit{Máximo}$

$C\ (1000,1200) \rightarrow 16\,200$

$E\ (1000,800) \rightarrow 13\,800$

Se deben asignar 700 páginas a Lola y 1 800 a Manuel.

103. **Página 111**

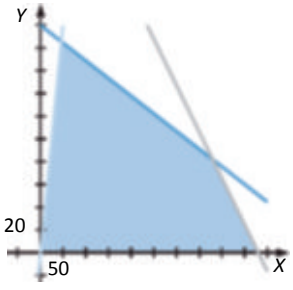
$x \geq 0, x$ — tamaño estándar $\quad y \geq 0, y$ — tamaño extra grande

	Estándar	Grande	Total
Aleación	0,125	0,4	80
Tiempo	10	12	4800
Beneficio	10	15	

Maximizar $f(x,y) = 10x - 15y$

$$\begin{cases} 0{,}125x - 0{,}4y \leq 80 \\ 10x - 12y \leq 4800 \\ x \geq 0{,}2\ x + y \end{cases}$$

La región factible es:



Los vértices de la región son $A\ (0,0)$, $B\ (480,0)$, $C\ (384,80)$, $D\ (46{,}38;185{,}51)$.

$f(x,y) = 10x - 15y$

$A\ (0,0) \rightarrow 0$ $\quad B\ (480,0) \rightarrow 4800$ $\quad C\ (384,80) \rightarrow 5040 \rightarrow \textit{Máximo}$ $\quad D\ (46{,}38;185{,}51) \rightarrow 3246{,}45$

Para maximizar los beneficios se deben vender 384 raquetas estándar y 80 raquetas grandes.

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Página 112

Usar los recursos que se tienen de la forma más eficiente posible.

2. Página 112

Un algoritmo es un proceso sistemático y ordenado por el que se realizan una serie de instrucciones con el fin de lograr un objetivo o resolver un problema.

3. Página 112

Bombardeando pocos puntos, pero que fuesen claves para la economía del país al que se enfrentaban en la guerra.

4. Página 112

Fabricación ropa militar, distribución de elementos, uso de la munición...

5. Página 112

Respuesta abierta.

En una compañía aérea se podría usar para buscar el modo más eficiente de entrar los pasajeros en un avión o a la oferta de precios especiales sin que suponga pérdidas a la compañía.

En una fábrica textil podría ser para desperdiciar la menor cantidad de tela posible.

6. Página 112

Respuesta abierta.

Sean x la cantidad de horas al día que estoy en clase, y la cantidad de horas que duermo, z horas de estudio y t horas de ocio, para comer y otros quehaceres diarios.

$x + y + z + t = 24$

$x = 6,\ 6 \leq y \leq 10,\ 1 \leq z \leq 3,\ 5 \leq t \leq 11$

Límites y continuidad

5

ACTIVIDADES

1. **Página 114**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \quad 2}{x^2 \quad 1} \quad 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 \quad 2}{x^2 \quad 1} \quad 1$$

2. **Página 114**

$$\left| \frac{3x}{x \quad 5} \quad 3 \right| \quad \left| 3 \cdot \frac{x}{x \quad 5} \quad 1 \right| \quad 3 \left| \frac{5}{x \quad 5} \right| \cdot \quad \cdot \frac{15}{|x \quad 5|} \cdot 15 \cdot |x \quad 5| \cdot |x \quad 5| \cdot \frac{15}{\cdot} \cdot x \cdot \frac{15}{\cdot} \quad 5$$

Para $\cdot = 0{,}001$:

$$x_0 \quad \frac{15}{0{,}001} \quad 5 \quad 15005$$

Tomando $x = 15\,006$:

$$|f(15006) \quad 3| \cdot 0{,}00099 \cdot 0{,}001$$

3. **Página 115**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \quad \cdot$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = + \cdot$$

4. **Página 115**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $f(x) = x^2 - x + 1$ d) $f(x) = x^3 - x$

b) $f(x) = x - x^2$ e) $f(x) = \cos x$

c) $f(x) = x^2 + x - 4$ f) $f(x) = 1 - \operatorname{sen} 2x$

5. **Página 116**

a) $2 + (+\infty) = +\infty$ c) $2 \cdot (+\infty) + (+\infty) = +\infty$

b) $2 + (-\infty) = -\infty$ d) $2 \cdot (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$

6. **Página 116**

a) $2^{+\infty} + (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$

b) $2^{-\infty} + (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

c) $(+\infty)^2 + (+\infty) = +\infty$

d) $(-\infty)^2 \cdot (+\infty) = +\infty$

7. **Página 117**

a) $\lim_{x\to+\infty} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to+\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to+\infty} g(x) = 8 \cdot \infty = \infty$

b) $\lim_{x\to+\infty} [f(x) : g(x)] = \lim_{x\to+\infty} f(x) : \lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{8}{\infty} = 0$

c) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty} f(x)} = \sqrt[3]{-8} = -2$

d) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[4]{g(x)} = \sqrt[4]{\lim_{x\to+\infty} g(x)} = \sqrt[4]{-\infty} = +\infty$

8. **Página 117**

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) - g(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) - \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty - \frac{4}{9} = -\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to-\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to-\infty} g(x) = \infty \cdot \left(\frac{4}{9}\right) = \infty$

c) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[4]{f(x)} = \sqrt[4]{\lim_{x\to-\infty} f(x)} = \sqrt[4]{-\infty}$ (No existe en $\mathbb{R}$)

d) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{g(x)} \quad \sqrt{\lim_{x\to-\infty} g(x)} \quad \sqrt{\frac{4}{9}} \quad \frac{2}{3}$

9. **Página 118**

a) $\lim_{x\to+\infty} x^5 \quad (+\infty)^5 \quad \infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} x^5 = (-\infty)^5 = -\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty} x^{-5} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^5} \quad \frac{1}{\infty} \quad 0$

d) $\lim_{x\to-\infty} x^{-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^5} = \frac{1}{-\infty} = 0$

e) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[5]{x} = \sqrt[5]{\lim_{x\to+\infty} x} = +\infty$

f) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[5]{x} = \sqrt[5]{\lim_{x\to-\infty} x} = -\infty$

10. **Página 118**

a) $\lim_{x\to+\infty} 5^x \quad 5^{+\infty} \quad \infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} 5^x \quad 5^{-\infty} \quad \frac{1}{5^{+\infty}} \quad \frac{1}{\infty} \quad 0$

c) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{-x} = \lim_{x\to+\infty} 5^x = 5^{+\infty} = +\infty$

d) $\lim_{x\to+\infty} 5^{\frac{1}{x}} \quad 5^{\frac{1}{+\infty}} \quad 5^0 \quad 1$

e) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{5}^{\,x} = \sqrt{5}^{\,+\infty} = -\infty$

f) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{5}^{\,\frac{1}{x}} \quad \sqrt{5}^{\,\frac{1}{+\infty}} \quad \sqrt{5}^{\,0} \quad 1$

11. **Página 119**

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 3x - 7}{x - 13} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3 \quad 2x}{x^2 \quad 1} \quad \frac{2}{1} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \quad 0$

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2 - x}{9 - 2x^2} = \frac{4}{2} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 2$

d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \quad 1^{\,2} \quad x^2}{4 \quad x^2} \quad \frac{1}{1} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^2} \quad \lim_{x\to+\infty} x^2 \quad \infty$

12. **Página 119**

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-x-2}{5x-1}\right)^2=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{5x}\right)^2=\frac{9}{25}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{x^2}=\frac{9}{25}\cdot(-\infty)=+\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2}{2x^2-15}\right)^{-3}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-15}{x^2-2}\right)^{-3}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{x^2}\right)^3=2^3\lim_{x\to+\infty}\frac{x^6}{x^6}=8\cdot1=8$

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2-3x}{2x-1}\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2}{2x}\quad\frac{a}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}\quad\begin{cases}+\infty & \text{si } a>0\\ -\infty & \text{si } a<0\end{cases}$

Si $a=0$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2-3x}{2x-1}\quad\frac{3}{2}$

d) Si $a=-2$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{4x-(a-2)x^2}=\frac{1}{-(a-2)}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=-\frac{1}{a-2}$

Si $a=-2$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{4x-(a-2)x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{4x}=-\infty$

13. **Página 120**

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-3}}{2x-1}=\frac{1}{2}$

b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x-1}{\sqrt{x^2-3}}=+\infty$

c) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x-1}{\sqrt{x^2-3}}=+\infty$

d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-12x-9}{\sqrt[3]{x^5-5x-2}}=+\infty$

14. **Página 120**

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-x}{x}=1$

b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{7x-\sqrt{3x-2}}{2x}=\frac{7}{2}$

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{6x}}{2x-4}\quad1$

d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}+2x}{6x-3}\quad\frac{1}{2}$

15. **Página 121**

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2x}{x-3}-\frac{3x^2-1}{1+3x}\right)\quad\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x^3-2x-6x^2-(3x^3-9x^2-x-3)}{x-3x^2-3-9x}\right)\quad\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{16x^2}{3x^2}\right)\quad\frac{16}{3}$

b) $\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt{4x^3-x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-(4x^3+x-1)}{x-\sqrt{4x^3-x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^3}{\sqrt{4x^3}}=-\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-x+1}-2x=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-x+1-4x^2}{\sqrt{4x^2-x-1}-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{4x}=\frac{1}{4}$

d) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2-(x^2-2x)}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2\sqrt{x^2}}=1$

16. **Página 121**

a) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-ax}-x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-ax-x^2}{\sqrt{x^2-ax}-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{\sqrt{x^2-ax}-x} = \frac{a}{2} = 1 \to a = 2$

b) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2-bx-3}-2x = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2-bx-3-4x^2}{\sqrt{4x^2-bx-3}+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{bx-3}{\sqrt{4x^2-bx-3}+2x} = \frac{b}{4} = -\frac{1}{4} \to b = -1$

c) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{9x^2-7}-cx = \lim_{x\to+\infty} \frac{9x^2-7-c^2x^2}{\sqrt{9x^2-7}+cx} = 0 \to c = 3$

d) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{dx^2-x-5}-2x = \lim_{x\to+\infty} \frac{dx^2-x-5-4x^2}{\sqrt{dx^2-x-5}+2x} = -\infty \to d < 4$

17. **Página 122**

a) $\lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{2}{x-3}\right)^{x+2} \quad e^{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x+3}-1\right)(x+2)} \quad e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+4}{x+3}\right)} \quad e^2$

b) $\lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{2x}{x^2-1}\right)^{x+2} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2x}{x^2-1}-1\right)(x+2)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2x^2+4x}{x^2-1}\right)} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

c) $\lim_{x\to+\infty} \left(3-\frac{4x}{2x-1}\right)^{x-3} \quad e^{\lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{4x}{2x+1}-1\right)(x-3)} \quad e^{\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{4x}{2x+1}\right)(x-3)} \quad e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{2x+1}\right)(x-3)} \quad e^1 \quad e$

d) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}-\frac{3x^2-9}{6x^2-5}\right)^{2x+1} - e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3x^2-9}{6x^2+5}-1\right)(2x+1)} - e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-9}{6x^2+5}-\frac{1}{2}\right)(2x+1)} - e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-23}{12x^2+10}\right)(2x+1)} - e^0 - 1$

18. **Página 122**

a) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-3}{x^2-5}\right)^{\frac{x^2}{2-x}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-5}-1\right)\left(\frac{x^2}{2-x}\right)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{8}{x^2-5}\right)\left(\frac{x^2}{2-x}\right)} = e^0 = 1$

b) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-3}{x^2-5}\right)^{\frac{x^3}{2-x}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-5}-1\right)\left(\frac{x^3}{2-x}\right)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{8}{x^2-5}\right)\left(\frac{x^3}{2-x}\right)} = e^{-8} = \frac{1}{e^8}$

c) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{3x^2-3x}{7-3x^2}\right)^{\frac{x^4+x}{x^3-1}} = e^{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2+3x}{7+3x^2}-1\right)\left(\frac{x^4+x}{x^3-1}\right)} = e^{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-7}{7+3x^2}\right)\left(\frac{x^4+x}{x^3-1}\right)} = e^1 = e$

d) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{3x^2-3x}{7-3x^2}\right)^{\frac{x^2+x}{x^3-1}} = e^{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2+3x}{7+3x^2}-1\right)\left(\frac{x^2+x}{x^3-1}\right)} = e^{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-7}{7+3x^2}\right)\left(\frac{x^2+x}{x^3-1}\right)} = e^0 = 1$

19. **Página 123**

a) $\lim_{x\to0^-} f(x) = 1$

b) $\lim_{x\to0^+} f(x) = 3$

20. **Página 123**

a) $\lim_{x\to-1^-} f(x) = 0$

b) $\lim_{x\to-1^+} f(x) = 2$

c) $\lim_{x\to3^-} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x\to3^+} f(x) = 2$

21. **Página 124**

a) $\lim_{x\to 0} f(x) \quad \frac{2}{1} \quad 2$

b) $\lim_{x\to -2} f(x) \quad \frac{2}{4} \quad \frac{2}{1} \quad 0$

c) $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{3}{0} = \infty \rightarrow \left.\begin{matrix} \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty \end{matrix}\right| \rightarrow$ No existe $\lim_{x\to 1} f(x)$.

d) $\lim_{x\to \sqrt{2}} f(x) = \frac{\sqrt{2}-2}{1} = \sqrt{2}-2$

22. **Página 124**

a) $\lim_{x\to -1} f(x) = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow \left.\begin{matrix} \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty \end{matrix}\right| \rightarrow$ No existe $\lim_{x\to -1} f(x)$.

b) $\lim_{x\to 4} f(x) = 1-\sqrt{4} = 3$

c) $\lim_{x\to 9} f(x) = 1-\sqrt{9} = 4$

d) $\left.\begin{matrix} \lim_{x\to 0^-} (x-1)^{-1} = \frac{1}{1} = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} 1-\sqrt{x} = 1+0 = 1 \end{matrix}\right| \rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 1$

23. **Página 125**

a) $\lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow \left.\begin{matrix} \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \\ \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x-1} = -\infty \end{matrix}\right| \rightarrow$ No existe $\lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x^2-2x+1}$.

b) $\lim_{x\to 2} \frac{x \quad 2}{x^2 \quad x \quad 2} \quad \lim_{x\to 2} \frac{x \quad 2}{(x \quad 2)(x \quad 1)} \quad \lim_{x\to 2} \frac{1}{x \quad 1} \quad \frac{1}{3}$

c) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3-6x^2-12x-8}{x^3-2x^2-4x-8} = \lim_{x\to -2} \frac{(x-2)(x^2-4x-4)}{(x-2)(x^2-4x-4)} = \lim_{x\to -2} \frac{x^2+4x-4}{x^2-4x-4} = \frac{0}{16} = 0$

d) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2-2x}{x^2-4x-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2-x)}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2-x)}{(x-2)} = \frac{2}{0} = \infty \rightarrow \left.\begin{matrix} \lim_{x\to 2^-} \frac{(x^2-x)}{(x-2)} = -\infty \\ \lim_{x\to 2^+} \frac{(x^2-x)}{(x-2)} = -\infty \end{matrix}\right| \rightarrow$ No existe $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4x-4}$.

e) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2-x-1)}{(x-1)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-x-1}{x-1} = \frac{-1}{2}$

f) $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{x^2 \quad 3x} \quad \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(x \quad 3)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{2}{x \; 1 \; 3} \quad \frac{2}{3}$

24. **Página 125**

a) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}}{1-x}=\dfrac{0}{0}$ $\quad\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}}{1-x}=\lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^{1/2}}{-(x-1)}=\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{-\sqrt{(x-1)}}=\dfrac{1}{0}=\pm\infty\rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{-\sqrt{(x-1)}}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{-\sqrt{(x-1)}}=-\infty\end{array}\right\}\rightarrow$ No existe $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}}{1-x}$.

b) $\lim_{x\to -2}\dfrac{2-x}{\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -2}\frac{2-x}{\sqrt{4-x^2}}=\lim_{x\to -2}\frac{2-x}{\sqrt{2-x}\sqrt{2-x}}=\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}}=\frac{0}{2}=0$$

c) $\lim_{x\to 3}\dfrac{3-x}{\sqrt{x-3}}=\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x-3}}=-\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)^{1/2}}=-\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-3)^{1/2}}{(x-3)}=-\lim_{x\to 3}(x-3)^{1/2}=0$$

d) $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{3x-x^2}=\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-9}}{3x-x^2}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+3}\sqrt{x-3}}{-x(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+3}}{-x\sqrt{x-3}}=\frac{\sqrt{6}}{0}=\pm\infty\rightarrow-\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{x-3}}{-x\sqrt{x-3}}\rightarrow\text{No existe}\\ \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{\sqrt{x-3}}{-x\sqrt{x-3}}=-\infty\end{array}\right\}\rightarrow\text{No existe }\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-9}}{3x-x^2}.$$

e) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{1-x^2}=\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(1+x)(1-x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(1-x)(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=-\frac{1}{4}$$

f) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{x-2}}=\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{(x-2)^{1/2}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)^{1/2}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)(x-2)^{1/2}}{(x-2)}=\lim_{x\to 2}(x-1)(x-2)^{1/2}=0$$

25. **Página 126**

$\nexists f(-2)=\dfrac{1}{0}\rightarrow$ La función no es continua en $x=-2$.

$\nexists f(2)=\dfrac{5}{0}\rightarrow$ La función no es continua en $x=-2$.

26. **Página 126**

Expresamos la función como una función definida a trozos: $f(x)\left\{\begin{array}{ll}2(x-1) & \text{si } x<1\\ 2(x-1) & \text{si } 1\leq x\end{array}\right.$

$f(-1)=2(-1-1)=0\rightarrow$ Existe $f(-1)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}-2(x+1)=0\\ \lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}2(x-1)=0\end{array}\right\}\rightarrow\lim_{x\to -1}f(x)=0$$

$f(-1)=0=\lim_{x\to -1}f(x)\rightarrow$ La función es continua en $x=-1$.

27. **Página 127**

Si $x < 0 \rightarrow f(x) = 1 - x^2 \rightarrow f(x)$ es continua en $(-\infty, 0)$.

Si $0 < x < 2 \rightarrow f(x) = \sqrt{4x - 1} \rightarrow f(x)$ no está definida en $\left]0, \frac{1}{4}\right[$. Es continua en $\left]\frac{1}{4}, 2\right[$.

Si $x > 2 \rightarrow f(x) = x + 1 \rightarrow f(x)$ es continua en $(2, +\infty)$.

Si $x = 0 \rightarrow f(0) = 1 - 0 = 1 \rightarrow$ Existe $f(0)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (1 - x^2) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{4x - 1} \rightarrow \text{No existe} \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \to 0} f(x).$$

La función no es continua en $x = 0$.

Si $x = 2 \rightarrow f(2) = 2 + 1 = 3 \rightarrow$ Existe f(2).

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt{4x - 1} = \sqrt{7} \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} x - 1 = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \to 2} f(x).$$

La función no es continua en $x = 2$.

28. **Página 127**

Si $x < 3 \rightarrow f(x) = x^2 - 4 \rightarrow f(x)$ es continua en $(-\infty, 3)$.

Si $x > 3 \rightarrow f(x) = \frac{x \quad m}{x} \rightarrow f(x)$ es continua en $(3, +\infty)$.

Si $x = 3 \rightarrow f(3) = 9 - 4 = 5 \rightarrow$ Existe $f(3)$.

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (x^2 - 4) = 5 \qquad \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{x \quad m}{x} \quad 1 \quad \frac{m}{3}$$

$f(x)$ es continua en $x = 3$ si:

$$f(3) = 5 = \lim_{x \to 3} f(x) \rightarrow 5 = 1 \quad \frac{m}{3} \rightarrow m = 12$$

SABER HACER

29. **Página 128**

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{2t}{1 \quad t^2} \quad 0$$ Cuando pasan muchos años, los beneficios se reducen a cero.

30. **Página 128**

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 \quad ax \; I \; 1} \quad x \quad \cdot (\quad \cdot) \; : \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 \quad ax \; I \; 1} \quad x \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{ax \quad 1}{\sqrt{x^2 \quad ax \quad 1} \quad x} \qquad \frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} \quad 2 \cdot a \quad 4$$

31. **Página 128**

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4-ax^3}{2-x^4}\right)^{\frac{3x^3+1}{x^2-2}}\to 1^{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4-ax^3}{2-x^4}\right)^{\frac{3x^3+1}{x^2-2}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4+ax^3}{2+x^4}-1\right)\left(\frac{3x^3+1}{x^2-2}\right)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax^3-2}{2+x^4}\right)\left(\frac{3x^3+1}{x^2-2}\right)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{3ax^5}{x^5}}=e^{3a}$$

$$e^{3a}=e^3\to a=1$$

32. **Página 129**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{3x}-7e^{-5x}}{2e^{-5x}-4e^{3x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-e^{3x}+7e^{-5x}}{e^{3x}}}{\frac{2e^{-5x}-4e^{3x}}{e^{3x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+7e^{-8x}}{2e^{-8x}-4}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-e^{3x}-7e^{-5x}}{2e^{-5x}-4e^{3x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{-e^{3x}+7e^{-5x}}{e^{-5x}}}{\frac{2e^{-5x}-4e^{3x}}{e^{-5x}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-e^{8x}+7}{2-4e^{8x}}=\frac{7}{2}$$

33. **Página 129**

$$\lim_{x\to-\frac{1}{5}}2^{\frac{2x}{5x^2+x}}=\lim_{x\to-\frac{1}{5}}2^{\frac{2}{5x+1}}=2^{\infty}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to-\frac{1}{5}^-}\frac{2x}{5x^2-x}=\lim_{x\to-\frac{1}{5}^-}\frac{2}{5x+1}=-\infty\\ \lim_{x\to-\frac{1}{5}^+}\frac{2x}{5x^2-x}=\lim_{x\to-\frac{1}{5}^+}\frac{2}{5x-1}=-\infty\end{array}\right\}\to\text{No existe }\lim_{x\to-\frac{1}{5}}\frac{2x}{5x^2-x}\to\text{No existe }\lim_{x\to-\frac{1}{5}}2^{\frac{2x}{5x^2+x}}.$$

34. **Página 129**

a) $\lim_{x\to5}\frac{5x-25}{\sqrt{x-1}-2}\to\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to5}\frac{5x-25}{\sqrt{x-1}-2}=\lim_{x\to5}\frac{5(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}{x-5}=\lim_{x\to5}5(\sqrt{x-1}+2)=20$$

b) $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1}\to\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to1}\frac{-x-1}{\sqrt{2-x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{(-1-x)(\sqrt{2-x}+1)}{1-x}=\lim_{x\to1}\left[-(\sqrt{2-x}+1)\right]=-2$$

c) $\lim_{x\to-1}\frac{x-1}{\sqrt{3-x}-2}\to\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to-1}\frac{x-1}{\sqrt{3-x}-2}=\lim_{x\to-1}\frac{(x-1)(\sqrt{3-x}-2)}{-x-1}=\lim_{x\to-1}\left(\sqrt{3-x}-2\right)=-4$$

d) $\lim_{x\to5}\frac{2x-10}{\sqrt{2x-6}-4}\quad\lim_{x\to5}\frac{0}{2}=0$

35. **Página 130**

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-ax+6}{x^3-4x^2-4x-16}=\frac{14-2a}{0}$$

Si $a>7$ entonces:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^3-ax+6}{x^3-4x^2-4x-16}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^3-ax+6}{x^3-4x^2-4x-16}=-\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim_{x\to 2} f(x).$$

Si $a<7$ entonces:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^3-ax+6}{x^3-4x^2-4x-16}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^3-ax+6}{x^3-4x^2-4x-16}=-\infty\end{array}\right\}\to \text{No existe } \lim_{x\to 2} f(x).$$

Si $a=7$ entonces:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-7x-6}{x^3-4x^2-4x-16}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2\quad x^2-2x-3}{x-2\quad x^2-2x-8}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x-8}=-\frac{5}{8}$$

36. **Página 130**

$f(-1)=(-1)^2-4\cdot(-1)-1=-4\to$ Existe $f(-1)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} 3x-2=-5\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} x^2-4x-1=-4\end{array}\right\}\to \lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)\to \text{No existe } \lim_{x\to -1} f(x)\to f(x) \text{ es discontinua en } x=-1.$$

37. **Página 131**

Si $x<0\to f(x)=ax^2+b$

Por ser una función polinómica, es continua en $\mathbb{R}$ y, por tanto, en el intervalo $(-\infty, 0)$.

Si $0\le x<1\to f(x)=x-a$

Por ser una función polinómica, es continua en $\mathbb{R}$ y, por tanto, en el intervalo $(0, 1)$.

Si $x\ge 1\to f\ x\quad \dfrac{a}{x}\quad b$

Es una función racional. No está definida en $x=0$. Es continua en $(1, -\infty)$.

Para $x=0\to f\ 0\quad a$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f\ x\quad \lim\limits_{x\to 0^-} ax^2\quad b\quad b$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f\ x=\lim\limits_{x\to 0^+} x-a=-a$

Para $x=1\to f\ 1\quad a\quad b$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f\ x=\lim\limits_{x\to 1^-} x\quad a=1\quad a$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f\ x\quad \lim\limits_{x\to 1^+}\left|\dfrac{a}{x}\right|\ b\quad a\quad b$

Para $x=0\quad f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f\ x=\lim\limits_{x\to 0^+} f\ x\to b=-a$

Para $x=1\quad f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f\ x=\lim\limits_{x\to 1^+} f\ x\to a+b=1-a$

$$\left.\begin{array}{l}b\quad a\\ a\quad b\quad 1\quad a\end{array}\right\}\cdot 0\quad 1\quad a\cdot a\quad 1;b\quad 1$$

38. **Página 131**

$P(t) = t^2$ → Función polinómica → $P(t)$ es continua en $(0, 5)$.

$P(t)$ $\dfrac{50t \quad 62{,}5}{0{,}5t \quad 5}$ → Definida en $\quad - \quad -10$ → $P(t)$ es continua en $5, \infty$.

$P(5) = 25$

$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{t \to 5^-} P(t) = 25 \\ \lim\limits_{t \to 5^+} P(t) = 25 \end{matrix}\right\} - \lim\limits_{t \to 5} P(t) = 25 = P(5) -$ $P(t)$ es continua en $t = 5$.

Luego la función es continua en $0, \infty$.

ACTIVIDADES FINALES

39. **Página 132**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$

40. **Página 132**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^5 = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2}$ ∞

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x^2}$ ∞

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^4}$ 0

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^4}$ 0

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} 5^x = +\infty$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} 5^x = 0$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^x = 0$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^x = +\infty$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} 4^{x^2}$ ∞

l) $\lim\limits_{x \to -\infty} 4^{x^2} = -\infty$

41. **Página 132**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 \quad 1}{x \quad 3}$ ∞

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 \quad 1}{x \quad 3}$ ∞

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 \quad 1}{3x^2}$ $\dfrac{1}{3}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 \quad 1}{3x^2}$ $\dfrac{1}{3}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - x^6}{3x^2 - 2x - 1} = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 - x^6}{3x^2 - 2x - 1} = -\infty$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - x^4}{-x^4 + 2x^2 - 5} = 1$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 - x^4}{-x^4 - 2x^2 - 5} = 1$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 \quad 2x \quad 3}{x^3 \quad 3x^2 \quad 5}$ 0

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 \quad 2x \quad 3}{x^3 \quad 3x^2 \quad 5}$ 0

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{16}{x \quad 2}$ 0

l) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{16}{x \quad 2}$ 0

42. **Página 132**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f \quad x \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x \quad 3}{2x^2 \quad 1} \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x}$ 0 $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f \quad x \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x \quad 3}{2x^2 \quad 1} \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x}$ 0

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f \quad x = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 - 3}{2x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2}{2x^2} = 2$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f \quad x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2 - 3}{2x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2}{2x^2} = 2$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f \quad x = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^3 - 3}{2x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x}{2} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f \quad x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^3 - 3}{2x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x}{2} = -\infty$

43. **Página 132**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x-1}-\sqrt{x^2-x+2}}{\frac{1}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-3}{\frac{1}{2}\sqrt{x^2-x-1}+\sqrt{x^2-x+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\frac{1}{2}\,2\sqrt{x^2}}=2$$

44. **Página 132**

a) $\lim_{x\to+\infty}\ 0{,}7^{\ 3x+2}\quad 0{,}7^{\ +\infty}\quad 0$

b) $\lim_{x\to+\infty}\ 2x\quad 0{,}01x^2\quad \lim_{x\to+\infty}\quad 0{,}01x^2\quad \infty$

c) $\lim_{x\to+\infty}\ 3x\quad 7^{\ 2-x}\quad \lim_{x\to+\infty}\ 3x^{\ -x}\quad 0$

d) $\lim_{x\to+\infty}\quad x\quad 2^{\ 2}\quad x^2\quad \lim_{x\to+\infty}\quad 4x\quad 4\quad \infty$

45. **Página 132**

a) $\lim_{x\to+\infty}\ x-\sqrt{x^2-6x}\ -\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{x-\sqrt{x^2-6x}}-\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{x+\sqrt{x^2}}-\frac{6}{2}-3$

b) $\lim_{x\to-\infty}\ x-\sqrt{x^2-6x}\ -\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{x-\sqrt{x^2-6x}}-\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{x+\sqrt{x^2}}-\frac{6}{2}-3$

c) $\lim_{x\to+\infty}\ x^2\quad \sqrt{x^2\quad 6x}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\quad x^2\quad 6x}{x^2\quad\sqrt{x^2\quad 6x}}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{x^2}\quad \infty$

d) $\lim_{x\to-\infty}\ x^2\quad \sqrt{x^2\quad 6x}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4\quad x^2\quad 6x}{x^2\quad\sqrt{x^2\quad 6x}}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{x^2}\quad \infty$

46. **Página 132**

a) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^4-2x^2}-x^2=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{\sqrt{x^4-2x^2}+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{\sqrt{x^4}-x^2}=1$

b) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^4-2x^2}-x^2=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{\sqrt{x^4-2x^2}+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{\sqrt{x^4}+x^2}=1$

c) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x}-x^2=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x-x^4}{\sqrt{x^2-3x}-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^4}{2x^2}=-\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3x}-x^2=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x-x^4}{\sqrt{x^2-3x}-x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^4}{2x^2}=-\infty$

47. **Página 132**

a) $\lim_{x\to+\infty}\left|1\quad \frac{3}{x}\right|^{x-1}\quad e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}\right)x-1}\quad e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-3}{x}}\quad e^3$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left|1\quad \frac{3}{x}\right|^{x-1}\quad e^{\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{3}{x}\right)x-1}\quad e^{\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{3x-3}{x}\right)}\quad e^{-3}\quad \frac{1}{e^3}$

c) $\lim_{x\to-\infty}\left|1\quad \frac{3}{x}\right|^{1-x}\quad e^{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{x}\right)1-x}\quad e^{\lim_{x\to-\infty}\frac{3-3x}{x}}\quad e^{-3}\quad \frac{1}{e^3}$

d) $\lim_{x\to-\infty}\left|1\quad \frac{3}{x}\right|^{1-x}\quad e^{\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{3}{x}\right)1-x}\quad e^{\lim_{x\to-\infty}\frac{-3+3x}{x}}\quad e^3$

48. **Página 132**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-3x-2}-\sqrt{x^2+x}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x-2}{2\left(\sqrt{x^2-3x-2}-\sqrt{x^2-x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{2\cdot 2\sqrt{x^2}}=-1$$

49. **Página 132**

a) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^4-2x^3-5}-\sqrt{x^4-3x}}{x-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-5-3x}{(x-4)\left(\sqrt{x^4-2x^3-5}-\sqrt{x^4-3x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x\cdot 2\sqrt{x^4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x\cdot 2\sqrt{x^4}}=1$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3}}=2$$

50. **Página 132**

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^4-3x^2-2}-x^2+3=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^4-3x^2-2}-(x^2-3)=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2-11}{\sqrt{x^4-3x^2-2}-(x^2-3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2}{2x^2}=\frac{9}{2}$$

51. **Página 132**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-4}-\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{8}{\sqrt{x-4}-\sqrt{x-4}}}{\dfrac{4}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x-2}\right)}{4\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x-4}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=2$$

52. **Página 132**

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{x^3-1}{x^2-3x}-\frac{x^2-2x}{x-3}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3-2x^3+6x^2}{x^2-3x\quad x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^3}{x^3}=-2$$

53. **Página 132**

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x-\sqrt{2x}}-\sqrt{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x-\sqrt{2x}}+\sqrt{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x}}{2\sqrt{2x}}=\frac{1}{2}$$

54. **Página 132**

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\quad 3x\quad 8}\quad\sqrt{x^2\ \mathrm{I}\ mx\quad 7}\qquad\lim_{x\to+\infty}\frac{(3\quad m)x\quad 15}{\sqrt{x^2\quad 3x\quad 8}\ \mathrm{I}\ \sqrt{x^2\quad mx\quad 7}}\qquad\lim_{x\to+\infty}\frac{(3\quad m)x}{2\sqrt{x^2}}\qquad\frac{3\quad m}{2}\qquad 1\ \because\ m\quad 5$$

55. **Página 132**

a) $$\lim_{x\to+\infty}2x^2-\sqrt{4x^4+mx^2-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-mx^2+5}{2x^2-\sqrt{4x^4+mx^2-5}}=\frac{-m}{4}=2\rightarrow m=-8$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{9x^2-4x}-3x+m=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{9x^2-4x}-(3x-m)=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2-4x-(9x^2-6mx-m^2)}{\sqrt{9x^2-4x}+(3x-m)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(4\quad 6m)x}{6x}\qquad\frac{4\ \mathrm{I}\ 6m}{6}\qquad\frac{1}{2}\ \cdot\ m\qquad\frac{1}{6}$$

56. **Página 132**

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{1}\ \frac{2x}{2x}\right)^{x-6}$ $e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{1+2x}\right)x-6}$ $e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-12}{1+2x}\right)}$ e^{1} e

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x-2}{x^2-3x}\right)^{\frac{x}{2}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-6x+2}{x^2+3x}\right)\left(\frac{x}{2}\right)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-6x^2}{2x^2}\right)} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3-3x}{1-2x^3}\right)^{\frac{x^2-3}{3}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x-1}{1+2x^3}\right)\left(\frac{x^2-3}{3}\right)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x^3}{6x^3}\right)} = e^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-4x}{4x-7}\right)^{\frac{x^3+1}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-6}{4x+7}\right)\left(\frac{x^3+1}{x}\right)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-6x^3}{4x^2}\right)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x}{2}\right)} = e^{-\infty} = 0$

e) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-6}{6x-3x^2}\right)^{-\frac{x}{4}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{6-6x}{6x+3x^2}\right)\left(-\frac{x}{4}\right)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{6x^2}{12x^2}\right)} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

f) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^4-2}{2x^2-1^2-1}\right)^{\frac{x^3-3x}{x+2}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2-4}{4x^4-4x^2+2}\right)\left(\frac{x^3-3x}{x+2}\right)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^5}{4x^5}\right)} = e^{1} = e$

57. **Página 133**

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-3}{mx-2x^2}\right)^{x+2} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{+3-mx}{mx+2x^2}\right)x+2} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-mx^2}{2x^2}\right)} = \frac{1}{e} \to \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-mx^2}{2x^2}\right) = -1 \to m = 2$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x-3}{2-5x}\right)^{\frac{x^2-2}{8+mx}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2+5x}\right)\left(\frac{x^2-2}{8+mx}\right)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{5mx^2}\right)} = e^{\frac{1}{5m}} = \frac{7}{10} \to \frac{1}{5m} = \ln\left(\frac{7}{10}\right) \to m = \frac{1}{5\ln\left(\frac{7}{10}\right)}$

58. **Página 133**

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\ \ 10}{3^{x+1}}$ $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3^x}{3^{x+1}}\right.$ $\left.\frac{10}{3^{x+1}}\right)$ $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right.$ $\left.\frac{10}{3^{x+1}}\right)$ $\frac{1}{3}$

b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{x+1}}{3^x-10} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3^{x+1}}{3^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\cdot 3}{3^x} = 3$

59. **Página 133**

a) $f(x)\begin{cases} x\ \ 2 & \text{si}\ \ x < 2 \\ x\ \ 2 & \text{si}\ \ 2 < x \end{cases}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x-2 = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x-2 = -\infty$

b) $f(x) = \begin{cases} x-(3-2x) & \text{si}\ x < \frac{3}{2} \\ x-(-3+2x) & \text{si}\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \to f(x) = \begin{cases} 3x-3 & \text{si}\ x < \frac{3}{2} \\ -x-3 & \text{si}\ x > \frac{3}{2} \end{cases}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3x-3 = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x-3 = -\infty$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-3}{x-2} & \text{si } x < -\dfrac{3}{2}\\ -\dfrac{2x-3}{x-2} & \text{si } -\dfrac{3}{2} < x < 2\\ \dfrac{2x-3}{x-2} & \text{si } x > 2\end{cases}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x \quad 3}{x \quad 2} \quad 2 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{2x \quad 3}{x \quad 2} \quad 2$

d) $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x-3}{1-x} & \text{si } x < 1\\ \dfrac{x-3}{1-x} & \text{si } 1 < x < 3\\ -\dfrac{x-3}{1-x} & \text{si } x > 3\end{cases}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad \lim_{x\to-\infty}\left| \frac{x \quad 3}{1 \quad x}\right| \quad 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \lim_{x\to+\infty}\left| \frac{x \quad 3}{1 \quad x}\right| \quad 1$

60. **Página 133**

a) $\lim_{x\to1} f(x) = -1$

b) $\lim_{x\to0} f(x) = 0$

c) $\lim_{x\to2} f(x) = 4$

d) $\lim_{x\to3} f(x) = 0$

e) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

f) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

61. **Página 133**

a) $\lim_{x\to-3} g(x) = 0{,}7$

b) $\lim_{x\to0} g(x) = 0$

c) $\lim_{x\to1} g(x) = -2{,}9$

d) $\lim_{x\to2} g(x) = 0$

e) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

f) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$

62. **Página 133**

a) $\lim_{x\to1} 2^{\ln x} = 2^{\ln 1} = 2^0 = 1$

b) $\lim_{x\to e} 2^{\ln x} = 2^{\ln e} = 2^1 = 2$

c) $\lim_{x\to\frac{1}{e}} 2^{\ln x} - 2^{\ln\frac{1}{e}} - 2^{-1} - \frac{1}{2}$

d) $\lim_{x\to2} 3^{\ln x-1} = 3^{\ln 1} = 3^0 = 1$

e) $\lim_{x\to e+1} 3^{\ln x-1} \quad 3^{\ln e} \quad 3^1 \quad 3$

f) $\lim_{x\to\frac{e+1}{e}} 3^{\ln x-1} = 3^{\ln\left(\frac{e+1-e}{e}\right)} = 3^{\ln\left(\frac{1}{e}\right)} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

63. **Página 133**

a) $\lim_{x\to2} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3}} = \frac{4-1}{\sqrt{4-3}} = 5$

b) $\lim_{x\to-2} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3}} = \frac{-4-1}{\sqrt{4-3}} = -3$

c) $\lim_{x\to3} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3}} = \frac{6-1}{\sqrt{9-3}} = \frac{7}{\sqrt{6}}$

64. **Página 133**

a) $\lim_{x\to4} \log_2(x-3)+1 = \log_2 1+1 = 0-1 = 1$

b) $\lim_{x\to11} \log_2(x-3)+1 = \log_2(8)+1 = 3-1 = 4$

c) $\lim_{x\to\frac{7}{2}} \log_2(x \quad 3) \; 1 \quad \log_2\left|\frac{1}{2}\right| \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0$

d) $\lim_{x\to\frac{13}{4}} \log_2(x \quad 3) \quad 1 \quad \log_2\left|\frac{1}{4}\right| \; 1 \quad 2 \quad 1 \quad 1$

65. **Página 133**

a) $\lim_{x \to \frac{1}{4}} \left(\frac{1}{x-2} - \log_{\frac{1}{2}} x \right) = \frac{1}{\frac{-7}{4}} - \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = -\frac{4}{7} - 2 = \frac{10}{7}$

b) $\lim_{x \to 8} \left(\frac{1}{x \quad 2} \quad \log_{\frac{1}{2}} x \right) \quad \frac{1}{6} \quad \log_{\frac{1}{2}} 8 \quad \frac{1}{6} \quad 3 \quad \frac{17}{6}$

66. **Página 133**

$\lim_{x \to 0} \frac{6x \quad 12}{x^2 \quad 3x \quad 4} \quad 3$

$\lim_{x \to -1} \frac{6x - 12}{x^2 - 3x - 4} = \frac{-18}{0} \rightarrow \left. \begin{matrix} \lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{matrix} \right\} \rightarrow$ No existe $\lim_{x \to -1} f(x)$.

$\lim_{x \to 1} \frac{6x \quad 12}{x^2 \quad 3x \quad 4} \quad 1$

$\lim_{x \to 4} \frac{6x - 12}{x^2 - 3x - 4} = \frac{12}{0} \rightarrow \left. \begin{matrix} \lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to 4^+} f(x) = -\infty \end{matrix} \right\} \rightarrow$ No existe $\lim_{x \to 4} f(x)$.

67. **Página 133**

a) $\lim_{x \to 5} \; m(x) - n(x) - p(x) \; = -\infty$

b) $\lim_{x \to 5} \; m(x) \cdot n(x) - p(x) \; = -\infty$

c) $\lim_{x \to 5} \; m(x) \cdot p(x) \; = -\infty$

d) $\lim_{x \to 5} \frac{n(x)}{m(x)} \quad 0$

e) $\lim_{x \to 5} \frac{m(x)}{n(x)} \quad \frac{4}{0} \cdot$ Indeterminación

f) $\lim_{x \to 5} \; n(x) \cdot p(x) \; = 0 \cdot (+\infty) \rightarrow$ Indeterminación

g) $\lim_{x \to 5} \frac{p(x)}{m(x)} \quad \infty$

h) $\lim_{x \to 5} \frac{n(x)}{p(x)} = 0$

i) $\lim_{x \to 5} \; m(x)^{\,n(x)} = 1$

j) $\lim_{x \to 5} \; m(x)^{\,p(x)} = +\infty$

k) $\lim_{x \to 5} \; n(x)^{\,p(x)} = 0$

l) $\lim_{x \to 5} \; p(x)^{\,n(x)} = \; +\infty^{\,0} \; —$ Indeterminación

68. **Página 133**

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$ $\quad \lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

b) $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$ $\quad \lim_{x \to -2^-} g(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x \to 1^-} g(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ $\quad \lim_{x \to -2^+} g(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x \to 1^+} g(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x \to -2^-} h(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x \to -2^+} h(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$

d) $\lim_{x \to -\infty} m(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x \to 1^-} m(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to 1^+} m(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to +\infty} m(x) = -\infty$

69. **Página 134**

a) $\lim_{x \to 1} f(x) = -1$ b) $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 3$ c) $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 5$

70. **Página 134**

a) $\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 \quad 2x \quad 1}{x \quad 3}$ 1

b) $\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 \quad 2x \; | \; 1}{x \quad 3}$

c) $\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 \quad 2x \; | \; 1}{x^2 \quad 9}$

d) $\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 \quad x \quad 6}{x^3 \quad x^2 \quad 8x \quad 12}$ $\lim_{x \to 2^-} \frac{x \quad 2 \quad x \quad 3}{x \quad 2^2 \quad x \quad 3}$ $\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x \quad 2}$

e) $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 \quad 2x \quad 1}{x \quad 3}$ 1

f) $\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 \quad 2x \; | \; 1}{x \quad 3}$

g) $\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 \quad 2x \; | \; 1}{x^2 \quad 9}$

h) $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 \quad x \quad 6}{x^3 \quad x^2 \quad 8x \quad 12}$ $\lim_{x \to 2^+} \frac{x \quad 2 \quad x \quad 3}{x \quad 2^2 \quad x \quad 3}$ $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x \quad 2}$

71. **Página 134**

a) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{x - 1 \quad x - 2}{x - 1^2} = \lim_{x \to -1} \frac{x + 2}{x - 1} = \frac{1}{0} = \cdots \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to -1^-} \frac{x - 2}{x - 1} = \frac{1}{0^-} = -\cdots \\ \lim_{x \to -1^+} \frac{x - 2}{x - 1} = \frac{1}{0^+} = -\cdots \end{cases}$ — No existe $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 3x - 2}{x^2 + 2x - 1}$.

b) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x - 1}{4x^2 - 4x - 1} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2\left[x - \frac{1}{2}\right]}{4\left[x - \frac{1}{2}\right]^2} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{1}{2x - 1} = \frac{1}{0} - \begin{cases} \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{1}{2x - 1} = -\cdots \\ \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{1}{2x - 1} = -\cdots \end{cases}$ → No existe $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x - 1}{4x^2 - 4x - 1}$.

c) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3^2} = \lim_{x \to 3} \frac{x - 3 \quad x - 3}{x - 3^2} = \lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x - 3} = \frac{6}{0} = \cdots \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 3^-} \frac{x - 3}{x - 3} = -\cdots \\ \lim_{x \to 3^+} \frac{x - 3}{x - 3} = -\cdots \end{cases}$ → No existe $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3^2}$.

d) $\lim_{x \to \frac{5}{3}} \frac{3x^2 - x - 10}{9x^2 - 30x + 25} = \lim_{x \to \frac{5}{3}} \frac{3x - 5 \quad x - 2}{3x - 5^2} = \lim_{x \to \frac{5}{3}} \frac{x - 2}{3x - 5} = \frac{11}{0} - \begin{cases} \lim_{x \to \frac{5}{3}^-} \frac{x - 2}{3x - 5} = -\cdots \\ \lim_{x \to \frac{5}{3}^+} \frac{x - 2}{3x - 5} = -\cdots \end{cases}$ — No existe $\lim_{x \to \frac{5}{3}} \frac{3x^2 - x - 10}{9x^2 - 30x - 25}$.

72. **Página 134**

a) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4x - 3} = \lim_{x \to -1} \frac{x - 1 \quad x - 2}{x - 1 \quad x + 3} = \lim_{x \to -1} \frac{x + 2}{x - 3} = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x - 1}{x - 2x^2} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x - 1}{-x \quad 2x - 1} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{1}{-x} = -2$

c) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-x}{2x^3-x^2-4x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{x\ (x-1)^2}{(x-1)^2\ 2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{2x-3}=\frac{1}{5}$

d) $\lim_{x\to 3}\frac{9-x^2}{x^2-x-6}=\lim_{x\to 3}\frac{-(x+3)\ (x-3)}{(x-3)\ (x+2)}=-\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x+2}=-\frac{6}{5}$

e) $\lim_{x\to\frac{5}{3}}\frac{3x^2\quad x\quad 10}{9x\quad 15}\quad \lim_{x\to\frac{5}{3}}\frac{3x\quad 5\quad x\quad 2}{3\ \ 3x\quad 5}\quad \lim_{x\to\frac{5}{3}}\frac{x\ \ 2}{3}\quad \frac{11}{9}$

f) $\lim_{x\to 0}\frac{5x^3}{x^3-2x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{5x^3}{x^3(1-2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{5}{1-2x}=5$

73. Página 134

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-5x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{x\ \ x-2}{x-2\quad x-3}=\lim_{x\to 2}\frac{x}{x-3}=-2$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{x\quad 1^2\quad 1}{x^2}\quad \lim_{x\to 0}\frac{x\ \ x\quad 2}{x^2}\quad \lim_{x\to 0}\frac{x\quad 2}{x}\quad \frac{2}{0}\ \to\ \cdot\ \lim_{x\to 0^-}\frac{x\quad 2}{x}\quad \to -\infty\ ,\ \lim_{x\to 0^+}\frac{x\quad 2}{x}\quad \to +\infty\ \Big\}\ \cdot$ No existe $\lim_{x\to 0}\frac{x\quad 1^2\quad 1}{x^2}$.

c) $\lim_{x\to 0}\frac{4x-3x^2}{3x-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ \ 4-3x}{x\ \ 3-x}=\lim_{x\to 0}\frac{4-3x}{3-x}=\frac{4}{3}$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2-x}-\frac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x}{4-2x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{4-2x}=-\frac{1}{4}$

e) $\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2}\cdot\frac{x^2-4}{x^3-3}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{x-2\quad x-2}{x-2\quad x^3-3}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x^3-3}=\frac{4}{5}$

f) $\lim_{x\to 3}\left[\frac{x-1}{x-3}-\frac{x+5}{x^2-4x-3}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{x-1^2-x-5}{x-3\quad x-1}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x-4}{x-3\quad x-1}=\frac{-4}{0}\ \to\ \infty\ -$

$-\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-3x-4}{x-3\quad x-1}=+\infty\ ,\ \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-3x-4}{x-3\quad x-1}=-\infty\ \Big\}\to$ No existe $\lim_{x\to 3}\left[\frac{x-1}{x-3}-\frac{x-5}{x^2-4x+3}\right]$.

74. Página 134

a) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{3x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{3\ \ x-1\ \ \sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{3\ \ \sqrt{x}-1}=\frac{1}{6}$

b) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x-2}-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2\quad \sqrt{x-2}-2}{x-2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2\quad \sqrt{x+2}+2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\sqrt{x-2}-2\ =4$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\ \ 1-\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x^2}}=0$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\ \ 2-\sqrt{4-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2-\sqrt{4-x}}=\frac{1}{4}$

e) $\lim_{x\to 3}\frac{2x-6}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}=\lim_{x\to 3}\frac{2\ \ x-3\quad \sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}=\lim_{x\to 3}2\sqrt{x}+2\sqrt{3}\ \ -4\sqrt{3}$

f) $\lim_{x\to 3}\frac{1-\sqrt{x-2}}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{-\ x-3}{x-3\quad x-3\quad 1-\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to 3}\frac{-1}{x-3\quad 1-\sqrt{x-2}}=-\frac{1}{12}$

75. **Página 134**

a) $\lim_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{2x-1}-3}=\lim_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(x-4)(\sqrt{2x-1}+3)}{2(x-4)}=\lim_{x\to 4}\dfrac{(x+4)(\sqrt{2x+1}+3)}{2}=24$

b) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{5x-5}{8x-\sqrt{9x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{5(x-1)(8x+\sqrt{9x^2-1})}{55x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{55x^2}{55x^2}=1$

c) $\lim_{x\to 4}\dfrac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16}=\lim_{x\to 4}\dfrac{-(x-4)}{(x-4)(x-4)(1-\sqrt{x-3})}=\lim_{x\to 4}\dfrac{-1}{(x-4)(1-\sqrt{x-3})}=-\dfrac{1}{16}$

d) $\lim_{x\to -1}\dfrac{1-x^2}{\sqrt{x-1}}\quad\lim_{x\to -1}\dfrac{(x-1)(x-1)\sqrt{x-1}}{x-1}\quad\lim_{x\to -1}(1-x)\sqrt{x-1}=0$

e) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{-2x}{x(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})}=\lim_{x\to 0}\dfrac{-2}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-x}}=-1$

f) $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{\sqrt{2x-5}-3}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(\sqrt{x-2}-2)(\sqrt{2x-5}+3)}{2(x-2)}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(\sqrt{2x-5}+3)}{2(x-2)(\sqrt{x-2}+2)}=\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+5}+3}{2(\sqrt{x-2}+2)}=\dfrac{3}{4}$

g) $\lim_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{13-4x}-\sqrt{28+x}}{\sqrt{x-3}}=\lim_{x\to -3}\dfrac{-5(x+3)}{\sqrt{x-3}(\sqrt{13-4x}+\sqrt{28+x})}=\lim_{x\to -3}\dfrac{-5(x-3)\sqrt{x-3}}{(x-3)(\sqrt{13-4x}+\sqrt{28+x})}=$

$=\lim_{x\to -3}\dfrac{-5\sqrt{x-3}}{\sqrt{13-4x}+\sqrt{28-x}}=0$

h) $\lim_{x\to 2}\left|\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}\right|\quad\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{(x-2)(x+2)}}{x\sqrt{x-2}}\quad\lim_{x\to 2}\left|\dfrac{\sqrt{x+2}}{x}\right|\quad 1$

76. **Página 134**

a) $\lim_{x\to 1}\dfrac{2x^3-3x^2-11x-6}{x^3-x^2-8x-12}=\dfrac{-6}{-18}=\dfrac{1}{3}$

b) $\lim_{x\to -1}\dfrac{2x^3-3x^2-11x-6}{x^3-x^2-8x-12}=\dfrac{12}{-4}=-3$

c) $\lim_{x\to -2}\dfrac{2x^3-3x^2-11x-6}{x^3-x^2-8x-12}=\lim_{x\to -2}\dfrac{(x-2)(2x^2-7x-3)}{(x-2)^2(x-3)}=\lim_{x\to -2}\dfrac{2x^2-7x-3}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{19}{0}=\infty$

$-\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to -2^-}\dfrac{2x^2-7x-3}{(x-2)(x-3)}=-\infty\\ \lim_{x\to -2^-}\dfrac{2x^2-7x-3}{(x-2)(x-3)}=-\infty\end{array}\right\}\to$ No existe $\lim_{x\to -2}\dfrac{2x^3-3x^2-11x-6}{x^3-x^2-8x-12}$

d) $\lim_{x\to 3}\dfrac{2x^3-3x^2-11x-6}{x^3-x^2-8x-12}\quad\lim_{x\to 3}\dfrac{(x-2)(x-3)(2x+1)}{(x-2)^2(x-3)}\quad\lim_{x\to 3}\dfrac{2x+1}{x-2}\quad 1$

e) $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3-3x^2-11x-6}{x^3-x^2-8x-12}=\lim_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3}{x^3}=2$

f) $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3-3x^2-11x-6}{x^3-x^2-8x-12}=2$

77. **Página 134**

a) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^3-x}{\sqrt{x^2-3}-2x^2}=\lim_{x\to -1}\dfrac{x\ (x-1)\ (x-1)\ \sqrt{x^2-3}-2x^2}{x^2-3-4x^4}=\lim_{x\to -1}\dfrac{x\ (x-1)\ (x-1)\ \sqrt{x^2+3}-2x^2}{(x-1)\ (x-1)\ -4x^2-3}=$

$=\lim_{x\to -1}\dfrac{x\ \sqrt{x^2-3}-2x^2}{-4x^2-3}=\dfrac{4}{7}$

b) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-x}{\sqrt{x^2-3}-2x^2}=\lim_{x\to 1}\dfrac{x\ (x-1)\ (x-1)\ \sqrt{x^2-3}-2x^2}{x^2-3-4x^4}=\lim_{x\to 1}\dfrac{x\ (x+1)\ (x-1)\ \sqrt{x^2-3}-2x^2}{(x-1)\ (x-1)\ -4x^2-3}=$

$=\lim_{x\to 1}\dfrac{x\ \sqrt{x^2-3}-2x^2}{-4x^2-3}=-\dfrac{4}{7}$

c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^3-x}{\sqrt{x^2-3}-2x^2}=\dfrac{0}{\sqrt{3}}=0$

d) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-x}{\sqrt{x^2-3}-2x^2}=\dfrac{6}{\sqrt{7}-8}=\dfrac{6\ \sqrt{7}-8}{-57}=-\dfrac{2\sqrt{7}+16}{19}$

e) $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{x^3-x}{\sqrt{x^2-3}-2x^2}=\lim_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{-2x^2}=\lim_{x\to +\infty}\dfrac{x}{-2}=-\infty$

f) $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{x^3-x}{\sqrt{x^2-3}-2x^2}=\lim_{x\to -\infty}\dfrac{x^3}{-2x^2}=\lim_{x\to -\infty}\dfrac{x}{-2}=-\infty$

78. **Página 134**

a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 0}\sqrt[6]{x}=0$

b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}}=\dfrac{1}{0}=\infty-\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^-}\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}}-\text{No existe}\\ \lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}}=-\infty\end{array}\right\}-\text{No existe }\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}}.$

c) $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x^2-3x-2}}=\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)\ (x-1)}}=\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt[3]{x-1}}=0$

d) $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=-\dfrac{\sqrt{2}-2}{2}$

e) $\lim_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\dfrac{x-4}{(x-4)\ \sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{1}{4}$

f) $\lim_{x\to 9}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}=\lim_{x\to 9}\dfrac{(x-9)\ \sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to 9}\sqrt{x}-3\ -6$

79. **Página 134**

a) $\lim_{x\to 0}\left(2-\frac{1}{x^4}\right)=-\infty$ $\left.\begin{matrix}\lim_{x\to 0^-}\left(2-\frac{1}{x^4}\right)=-\infty\\ \lim_{x\to 0^+}\left(2-\frac{1}{x^4}\right)=-\infty\end{matrix}\right\}\to \lim_{x\to 0}\left(2-\frac{1}{x^4}\right)=+\infty$

b) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^{x-3}=4^{-1}=\frac{1}{4}$

c) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{1-x}\right)^{x^2}=1^0=1$

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x-2}{4x-3}\right)^{4x^2-1}=e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{4x-3}\right)4x^2-1}=e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2-1}{4x-3}\right)}=e^{+\infty}=+\infty$

e) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x-3}{3x}\right)^{3x}=\left(\frac{4}{3}\right)^{+\infty}=+\infty$

f) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x-5}\right)^{x}$ $e^{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-5}{x+5}\right)x}$ $e^{\lim_{x\to-\infty}\frac{-5x}{x+5}}$ e^{-5} $\frac{1}{e^5}$

80. **Página 134**

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-2}{x-2}\right)^{-x^2+3}=3^{-\infty}=0$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2}{x^2-3x}\right)^{x^2+4}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2-3x}{x^2+3x}\right)x^2+4}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x^3}{x^2}\right)}=e^{\lim_{x\to+\infty}-3x}=e^{-\infty}=0$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-1}{3x^2-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3x^2-1}\right)\left(\frac{x^2+1}{x}\right)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{3x^3}\right)}=e^0=1$

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{3}\frac{3}{2x}\right)^{\frac{2x^2-1}{1+3x}}$ $e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-6}{3+2x}\right)\left(\frac{2x^2-1}{1+3x}\right)}$ $e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-12x^2}{6x^2}\right)}$ e^{-2} $\frac{1}{e^2}$

e) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-x^2}{x^2-6x-2}\right)^{\frac{1-x^3}{x^2}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{8x+2}{x^2-6x-2}\right)\left(\frac{1-x^3}{x^2}\right)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-8x^4}{x^4}\right)}=e^{-8}=\frac{1}{e^8}$

f) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[x]{\frac{7x^2-1}{2-7x^2}}\right)^{x^2+3}-\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{7x^2+1}{2+7x^2}\right)^{\frac{x^2+3}{x}}-e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{2+7x^2}\right)\left(\frac{x^2+3}{x}\right)}-e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2}{7x^3}\right)}-e^0-1$

81. **Página 134**

a) $\lim_{x\to 0}\cos^2 x^{\frac{1}{senx}}=e^{\lim_{x\to 0}\left(\cos^2 x-1\right)\left(\frac{1}{senx}\right)}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{senx}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{-sen^2 x}{senx}}=e^{\lim_{x\to 0}-senx}=e^0=1$

b) $\lim_{x\to 0}2x$ $1^{\frac{1}{x}}$ $e^{\lim_{x\to 0}2x\left(\frac{1}{x}\right)}$ $e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{x}\right)}$ e^2

82. **Página 134**

Si $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2 \quad ax \quad 3}{x \quad 3}$ [illegible] (x–3) divide a $x^2 - ax + 3 - 3^2 - 3a - 3 - 0 - a - \dfrac{12}{3} - 4$

$\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2 \quad 4x \quad 3}{x \quad 3} \quad \lim_{x\to 3}\dfrac{x \quad 3 \quad x \quad 1}{x \quad 3} \quad \lim_{x\to 3} x \quad 1 \quad 2$

83. **Página 135**

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2 - ax + 3}{x^2 - 1} = \frac{7 + 2a}{5} = 5 \to 2a = 25 - 7 - a = 9$$

84. **Página 135**

a) $\lim_{x\to 3}\left[\dfrac{1-2x}{x-4}\right]^{\frac{m}{3-x}} = e^{\lim_{x\to 3}\left(\frac{x-3}{x+4}\right)\left(\frac{m}{3-x}\right)} = e^{\lim_{x\to 3}\left(\frac{-m}{x+4}\right)} = e^{\frac{-m}{7}} = e \to m = -7$

b) $\lim_{x\to 2}\left[\dfrac{x^2-2}{3x-4}\right]^{\frac{m}{x-2}} = e^{\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-3x+2}{3x-4}\right)\left(\frac{m}{x-2}\right)} = e^{\lim_{x\to 2}\frac{m}{3x-4}\frac{x-2}{x-2}\frac{x-1}{}} = e^{\lim_{x\to 2}\frac{m}{3x-4}\frac{x-1}{}} = e^{\frac{m}{2}} = e^2 \to m = 4$

85. **Página 135**

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2 - ax} - \sqrt{x^2 - 2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-ax - 2}{\sqrt{x^2 - ax} + \sqrt{x^2 - 2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-ax}{2\sqrt{x^2}} = \frac{-a}{2} = 3 \Rightarrow a = -6$$

86. **Página 135**

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{mx+6}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{1-m \quad x-4}{x-2 \quad \sqrt{x+2} - \sqrt{mx-6}} = \text{[illegible]} \to 2 \text{ es raíz de } 1-m \quad x-4 - \quad 1-m \quad 2-4 = 0 \to m = -1$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{-x+6}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2 \quad x-2}{x-2 \quad \sqrt{x-2} + \sqrt{-x-6}} = \lim_{x\to 2}\frac{2}{\sqrt{x-2} - \sqrt{-x-6}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

87. **Página 135**

a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{tg\ x}{x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{sen\ x}{x\ cosx} = \lim_{x\to 0}\dfrac{sen\ x}{x}\dfrac{1}{cosx} = 1$

b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-cos^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left[\dfrac{sen\ x}{x}\right]^2 = 1$

c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-cosx}{x^2} = \lim_{x\to 0}\dfrac{1-cosx \quad 1-cosx}{x^2 \quad 1-cosx} = \lim_{x\to 0}\dfrac{1-cos^2 x}{x^2 \quad 1-cosx} = \lim_{x\to 0}\dfrac{1-cos^2 x}{x^2}\dfrac{1}{1+cosx} = \dfrac{1}{2}$

d) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1 \quad cosx}{x} \quad \lim_{x\to 0}\dfrac{x \quad 1 \quad cosx}{x^2} \quad \lim_{x\to 0}\dfrac{1 \quad cosx}{x^2}\ x \quad 0$

88. **Página 135**

a) $\lim_{x \to -2} -x^2 + 1 = -3$

b) $\begin{cases} \lim_{x \to -1^-} -x^2 + 1 = 0 \\ \lim_{x \to -1^+} \sqrt{x-1} = 0 \end{cases} \rightarrow \lim_{x \to -1} f(x) = 0$

c) $\lim_{x \to 0} \sqrt{x-1} = 1$

d) $\lim_{x \to 1} \sqrt{x-1} = \sqrt{2}$

e) $\lim_{x \to 2} \sqrt{x-1} = \sqrt{3}$

f) $\begin{cases} \lim_{x \to 3^+} 3x - 7 = 2 \\ \lim_{x \to 3^-} \sqrt{x-1} = 2 \end{cases} \rightarrow \lim_{x \to 3} f(x) = 2$

89. **Página 135**

a) $\lim_{x \to -\infty} 2^x - 1 = 1$

b) $\begin{cases} \lim_{x \to 0^-} 2^x - 1 = 2 \\ \lim_{x \to 0^+} -3x - 2 = 2 \end{cases} \rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 2$

c) $\lim_{x \to -1} 2^x - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$

d) $\lim_{x \to 1} -3x + 2 = -1$

e) $\begin{cases} \lim_{x \to 2^+} \frac{-2x}{x-1} = -4 \\ \lim_{x \to 2^-} -3x - 2 = -4 \end{cases} \rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = -4$

f) $\lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{x-1} = -2$

90. **Página 135**

a) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 4}{-x^2 - x - 2} = -1$

b) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 4}{-x^2 - x + 2} = \frac{-3}{0} = \cdots \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 - 4}{x - 1 \quad -x + 2} = -\cdots \\ \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 - 4}{x - 1 \quad -x + 2} = -\cdots \end{cases} \rightarrow$ No existe $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 4}{-x^2 - x + 2}$.

c) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 4}{-x^2 - x + 2} = \frac{-4}{2} = -2$

d) $\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 4}{-x^2 - x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x - 2 \quad x - 2}{- \quad x - 2 \quad x - 1} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x - 2}{- \quad x + 1} = -\frac{4}{3}$;

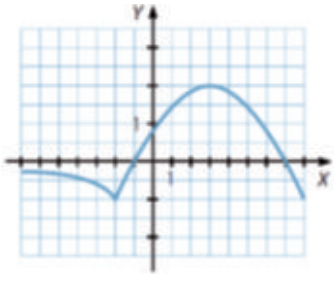
$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 4}{-x^2 - x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x - 2 \quad x - 2}{- \quad x - 2 \quad x + 1} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x - 2}{- \quad x + 1} = -\frac{4}{3} \rightarrow$ Por lo tanto, $\lim_{x \to 2} f(x) = -\frac{4}{3}$.

e) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4}{-x^2 - x - 2} = -\frac{5}{4}$

f) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4}{-x^2 - x - 2} = -1$

91. **Página 135**

Respuesta abierta, por ejemplo:



92. Página 135

a) $f(0) = 0 = \lim_{x \to 0} f(x)$ $\longrightarrow$ La función es continua en $x = 0$.

$f(2) = 4 = \lim_{x \to 2} f(x)$ $\longrightarrow$ La función es continua en $x = 2$.

b) No existe $f(0)$.

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0{,}5 \longrightarrow$ Existe $\lim_{x \to 0} f(x) = 0{,}5$.

La función no es continua en $x = 0$ tiene una discontinuidad evitable.

$f(2) = 2{,}5 = \lim_{x \to 2} f(x)$

La función es continua en $x = 2$.

c) No existe f(1).

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = 3 \end{array}\right\} \longrightarrow$ No existe $\lim_{x \to 1} f(x)$.

La función no es continua en $x = 1$ tiene una discontinuidad de salto finito.

d) $f(-1) = 1 = \lim_{x \to -1} f(x)$ $\longrightarrow$ La función es continua en $x = -1$.

$f(2) = 1{,}5$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 2{,}5 \longrightarrow$ Existe $\lim_{x \to 2} f(x) = 2{,}5$.

$f(2) = \lim_{x \to 2} f(x) = 2{,}5$

La función no es continua en $x = 2$ tiene una discontinuidad evitable.

e) No existe $f(-2)$.

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \longrightarrow$ No existe $\lim_{x \to -2} f(x)$.

La función no es continua en $x = -2$ tiene una discontinuidad de salto infinito.

$f(2) = 3$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = 3 \end{array}\right\} \longrightarrow$ No existe $\lim_{x \to 2} f(x)$

La función no es continua en $x = -2$, tiene una discontinuidad de salto finito.

f) $f(1) = -1$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = 5 \end{array}\right\} \longrightarrow$ No existe $\lim_{x \to 1} f(x)$.

La función no es continua en $x = 1$, tiene una discontinuidad de salto finito.

93. Página 135

a) La función es polinómica; por tanto, es continua en $\mathbb{R}$.

b) La función es continua en $\mathbb{R}-\{2, 3\}$. Estudiamos la discontinuidad en los ceros del denominador, $x = 2$ y $x = 3$.

No existe $f(2)$. Además, $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to$ No existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

La función no es continua en $x = 2$, tiene una discontinuidad de salto infinito.

No existe $f(3)$. Además, $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to$ No existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

La función no es continua en $x = 3$, tiene una discontinuidad de salto infinito.

c) $x^2 - 4 > 0 \cdot x < -2 \quad x > 2 \cdot \begin{cases} x > 2 \\ x < -2 \end{cases}$

La función es continua en su dominio, el intervalo $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

d) $4 - x^2 \geq 0 \to -2 \leq x \leq 2$

La función es continua en su dominio, el intervalo $[-2, 2]$.

e) No existe $f(0)$. Además, $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

La función es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$, tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 0$.

f) $2 - x > 0 \to x < 2$

La función es continua en su dominio, el intervalo $(-\infty, 2)$.

g) $y = 2|x - 1| \quad \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x \geq 1 \\ 2 - 2x & \text{si } x < 1 \end{cases} \to$ Es continua en todos los puntos salvo, quizás, en $x = 1$:

$\lim\limits_{x\to 1^-} 2|x-1| = \lim\limits_{x\to 1^-} 2 - 2x = 0$; $\lim\limits_{x\to 1^+} 2|x-1| = \lim\limits_{x\to 1^+} 2x - 2 = 0$

$\lim\limits_{x\to 1} 2|x-1| = 0 = y(0)$

La función es continua en $\mathbb{R}$.

g) $y = |x-3| - |x-3| = \begin{cases} -2x & \text{si } x < -3 \\ 6 & \text{si } -3 \leq x < 3 \\ 2x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ Es continua en todos los puntos salvo quizás en $x = -3$ o $x = 3$.

En $x = -3$:

$\lim\limits_{x\to -3^-} |x-3| + |x-3| = \lim\limits_{x\to -3^-} -2x = 6$; $\lim\limits_{x\to -3^+} |x-3| + |x-3| = \lim\limits_{x\to -3^+} 6 = 6$

$\lim\limits_{x\to -3} |x-3| + |x-3| = 6 = y(-3) \to$ La función es continua en $x = -3$.

En $x = 3$:

$\lim\limits_{x\to 3^-} |x-3| + |x-3| = \lim\limits_{x\to 3^-} 6 = 6$; $\lim\limits_{x\to 3^+} |x-3| - |x-3| = \lim\limits_{x\to 3^+} 2x = 6$

$\lim\limits_{x\to 3} |x-3| + |x-3| = 6 = y(3)$

La función es continua en $x = 3$ y, por tanto, en todo $\mathbb{R}$.

94. Página 135

a) Estudiamos la continuidad en $x = 2$, ya que la función es continua en el resto de puntos.

No existe $f(2)$. Además, $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to$ No existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 2$.

b) $x^2 - 2x + 3 \neq 0$ para cualquier x real $\to$ La función es continua en $\mathbb{R}$.

c) Estudiamos la continuidad en $x = 1$, que es el único cero del denominador.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to \lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$$

La función tiene en $x = 1$ una discontinuidad de salto infinito.

d) Estudiamos la continuidad en $x = -1$ y $x = 3$, que anulan el denominador.

No existe $f(-1)$.

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{2\ (x-1)}{(x-1)\ (x-3)} = \lim_{x\to -1} \frac{2}{x-3} = -\frac{1}{2}.$$

La función tiene una discontinuidad evitable en $x = -1$.

No existe $f(3)$. Además, $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to$ No existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 3$.

e) Estudiamos la continuidad en $x = -3$ y $x = 1$, que anulan el denominador.

No existe $f(-3)$. Además, $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to$ No existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = -3$.

No existe $f(1)$.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x\ (x-1)}{2\ (x-1)\ (x+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{2\ (x-3)} = \frac{1}{8}$$

La función tiene una discontinuidad evitable en $x = 3$.

f) Estudiamos la continuidad en $x = 0$ y $x = 1$, que anulan el denominador.

No existe $f(0)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \to$$ No existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 0$.

No existe $f(1)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \to$$ No existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$.

95. **Página 135**

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{2 - x} = \dfrac{(x-1)(x-2)}{-(x-2)}$

El único punto donde $f(x)$ puede ser discontinua es en $x = 2$:

No existe $f(2)$.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{2 - x} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{-(x-2)} = \lim_{x \to 2} (-x - 1) = -3$$

$f(x)$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$.

b) Si definimos $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{2 - x} & \text{si } x = 2 \\ -3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$, $g(x)$ contiene a $f(x)$ y además es continua en $\mathbb{R}$.

96. **Página 136**

a) El dominio de la función es $[-5, 4) \cup (4, \infty)$, $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en $x = 4$.

$$\lim_{x \to 4} \frac{1 - 8 - 6\sqrt{x-5}}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{6(3 - \sqrt{x-5})}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{-6(x-4)}{(x-4)(3 - \sqrt{x-5})} = \lim_{x \to 4} \frac{-6}{3 - \sqrt{x-5}} = -1$$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo: $g(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -5 \\ f(x) & \text{si } -5 < x < 4 \\ -1 & \text{si } x = 4 \\ f(x) & \text{si } x > 4 \end{cases}$

97. **Página 136**

a) $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) \quad \lim_{x \to 0} \frac{x(3x^2 - 2x + 1)}{4x} \quad \lim_{x \to 0} \frac{3x^2 - 2x + 1}{4} \quad \frac{1}{4}$$

b) $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

98. **Página 136**

$f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x^2 - 3x - 2} = \dfrac{-(x-2)(x-2)}{(x+2)(x+1)} \rightarrow$ La función es continua en $\mathbb{R} - \{-2, -1\}$.

En $x = -2$: $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{4 - x^2}{x^2 - 3x + 2} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{-(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-1)} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{-(x-2)}{x+1} = -4$

$f(x)$ es discontinua evitable en $x = -2$.

En $x = -1$: $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{4 - x^2}{x^2 - 3x - 2} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{4 - x^2}{(x+2)(x-1)} = \dfrac{3}{0} = \infty \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{4 - x^2}{(x-2)(x+1)} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{4 - x^2}{(x-2)(x+1)} = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow$ No existe $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$.

$f(x)$ es discontinua de salto infinito en $x = -1$.

99. **Página 136**

Las funciones tienen la misma gráfica salvo en el punto $x = -2$. La primera es una recta y es continua, la segunda está formada por dos semirrectas y no es continua en $x = -2$.

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x - 1 \quad x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to -2} 2x - 1 = -5$$

La discontinuidad de la segunda función en $x = -2$ es evitable.

Así, la segunda función es: $g(x)$ $\begin{cases} 2x \quad 1 \text{ si } x \cdots \quad 2 \\ 2x \quad 1 \text{ si } x \cdots \quad 2 \end{cases}$

100. **Página 136**

a) En $x = -1$, la función $f(x) = -x$; por tanto, es continua.

En $x = 0$: Existe $f(0) = 2$.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -x = 0; \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x - 2 = 2$$

$f(x)$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 0$.

En $x = 3$: No existe $f(3)$.

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} x - 2 = 5; \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} 5 = 5$$

$f(x)$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 3$.

b) En $x = -1$: Existe $f(-1) = -3$.

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} 5x - 2 = -3; \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \left| \frac{x - 6}{x^2} \right| = 5$$

$f(x)$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x = -1$.

En $x = 0$: No existe $f(0)$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - 6}{x^2} = \frac{6}{0} = \cdots \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} \dfrac{x - 6}{x^2} = -\cdots \\ \lim_{x \to 0^+} \dfrac{x - 6}{x^2} = -\cdots \end{cases}$$

$f(x)$ tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 0$.

En $x = 3$: Existe $f(3) = 1$.

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{x - 6}{x^2} = 1; \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} x^2 - 2x - 2 = 1$$

$f(x)$ es continua en $x = 3$.

101. **Página 136**

Existe $f(2)$: $f(2) = -\frac{2}{3}$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 3}{2 - x} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{2 - x \quad \sqrt{x^2 + 5} - 3} = \lim_{x \to 2} \frac{-x - 2}{\sqrt{x^2 - 5} - 3} = \frac{-2}{3}$$

$\lim_{x \to 2} f(x) = -\frac{2}{3} = f(2) =$ $f(x)$ es continua en $x = 2$.

102. **Página 136**

Las tres funciones son polinómicas, y por tanto, continuas en su dominio.

Estudiamos la continuidad en $x = 0$ y $x = 2$:

En $x = 0$: Existe $f(0) = 0$.

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0; \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0) \rightarrow$ $f(x)$ es continua en $x = 0$.

En $x = 2$: Existe $f(2) = 3$.

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x = 2; \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x - 1 = 3;$

$f(x)$ presenta una discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

103. **Página 136**

No existe $f(0)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = -1$$

La función tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$.

$f(3) = 2$ $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 3^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow$ No existe $\lim_{x \to 3} f(x)$.

La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 3$.

104. **Página 136**

Estudiamos la continuidad de la función en $x = 0$, $x = 2$ y $x = 3$:

En $x = 0$: Existe $f(0) = e^0 = 1$.

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x - 1 = -1; \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^x = 1;$

$f(x)$ es continua en $x = 0$.

En $x = 2$: Existe $f(2) = 2$.

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} e^x = e^2; \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{2}{3 - x} = 2;$

$f(x)$ presenta una discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

En $x = 3$: No existe $f(3)$.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{2}{3 - x} = \frac{2}{0} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 3^-} \frac{2}{3 - x} = -\infty \\ \lim_{x \to 3^+} \frac{2}{3 - x} = -\infty \end{array}\right|$$

$f(x)$ presenta una discontinuidad de salto infinito en $x = 3$.

105. **Página 136**

a) $f(x)\begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ x & si\ x < 0 \end{cases}$

Las funciones de ambos trozos son continuas en $\mathbb{R}$, por lo que solo puede ser discontinua en $x = 0$.

$f(0) = 0$ $\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 \end{matrix}\right\} - \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \longrightarrow$ Es continua en $x = 0$.

b) $f(x)\begin{cases} x - 5 & si\ x \geq 5 \\ x - 5 & si\ x < 5 \end{cases}$

Las funciones de ambos trozos son continuas en $\mathbb{R}$, por lo que solo puede ser discontinua en $x = -5$.

$f(-5) = 0$ $\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to -5^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to -5^+} f(x) = 0 \end{matrix}\right\} - \lim\limits_{x\to -5} f(x) = 0 \longrightarrow \lim\limits_{x\to -5} f(x) = f(-5) \longrightarrow$ Es continua en $x = -5$.

c) $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & si\ x < \dfrac{3}{2} \\ 2x - 3 & si\ x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Las funciones de ambos trozos son continuas en $\mathbb{R}$, por lo que solo puede ser discontinua en $x = \dfrac{3}{2}$.

$f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$ $\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to \frac{3}{2}^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to \frac{3}{2}^+} f(x) = 0 \end{matrix}\right\} - \lim\limits_{x\to \frac{3}{2}} f(x) = 0 \longrightarrow \lim\limits_{x\to \frac{3}{2}} f(x) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) \longrightarrow$ Es continua en $x = \dfrac{3}{2}$.

d) $x^2 - x - 6 = 0 \longrightarrow x = -2;\ x = 3 \longrightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 6 & si\ x < -2 \\ -x^2 + x - 6 & si\ -2 \leq x < 3 \\ x^2 - x - 6 & si\ x \geq 3 \end{cases}$

Las funciones de cada trozo son continuas en $\mathbb{R}$. Solo puede ser discontinua en $x = -2$ o en $x = 3$.

$f(-2) = 0$ $\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 0 \end{matrix}\right\} - \lim\limits_{x\to -2} f(x) = 0 \longrightarrow \lim\limits_{x\to -2} f(x) = f(-2) \longrightarrow$ Es continua en $x = -2$.

$f(3) = 0$ $\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 0 \end{matrix}\right\} - \lim\limits_{x\to 3} f(x) = 0 \longrightarrow \lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3) \longrightarrow$ Es continua en $x = 3$.

e) $6 - x^2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{6} \\ x = -\sqrt{6} \end{cases} \longrightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 6 & si\ x < -\sqrt{6} \\ 6 - x^2 & si - \sqrt{6} \leq x < \sqrt{6} \\ x^2 - 6 & si\ x \geq \sqrt{6} \end{cases}$

Las funciones de cada trozo son continuas en $\mathbb{R}$. Solo puede ser discontinua en $x = -\sqrt{6}$ o en $x = \sqrt{6}$.

$f\left(-\sqrt{6}\right) = 0$ $\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to -\sqrt{6}^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to -\sqrt{6}^+} f(x) = 0 \end{matrix}\right\} - \lim\limits_{x\to -\sqrt{6}} f(x) = 0 \longrightarrow \lim\limits_{x\to -\sqrt{6}} f(x) = f\left(-\sqrt{6}\right) \longrightarrow$ La función es continua en $x = -\sqrt{6}$.

$f\left(\sqrt{6}\right) = 0$ $\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to \sqrt{6}^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to \sqrt{6}^+} f(x) = 0 \end{matrix}\right\} - \lim\limits_{x\to \sqrt{6}} f(x) = 0 \longrightarrow \lim\limits_{x\to \sqrt{6}} f(x) = f\left(\sqrt{6}\right) \longrightarrow$ La función es continua en $x = \sqrt{6}$.

106. **Página 136**

La función será continua en $x = 2$ si $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = -1$$

Entonces la función es continua en $x = 2$ si:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{si } x < 2 \\ -1 & \text{si } x = 2 \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

107. **Página 136**

a) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = 4$:

Existe $f(4) = 12$. $\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} x^2 = 16$; $\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} x - a = 4 - a$;

$f(x)$ es continua $\Rightarrow \lim_{x \to 4^-} f(x) = 12 = 4 - a = \lim_{x \to 4^+} f(x) \Rightarrow a = 8$

b) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = 1$:

Existe $f(1) = 3 - a$. $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 3 - ax = 3 - a$; $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2 - a \ln x = 2$;

$f(x)$ es continua $\Rightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 - a = 2 = \lim_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow a = 1$

c) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = -2$.

Existe $f(-2) = 2$. $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \sqrt{2 - x} = 2$; $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} x^2 - 3x + a = 10 + a$;

$f(x)$ es continua $\Rightarrow \lim_{x \to -2^-} f(x) = 2 = 10 - a = \lim_{x \to -2^+} f(x) \Rightarrow a = -8$

d) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = -1$.

Existe $f(-1) = -a$. $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \dfrac{a}{x} = -a$; $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} x^2 - 1 = 2$

$f(x)$ es continua $\Rightarrow \lim_{x \to -1^-} f(x) = -a = 2 = \lim_{x \to -1^+} f(x) \Rightarrow a = -2$

e) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = 2$.

Existe $f(2) = 3a^2$. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 3a^x = 3a^2$; $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \dfrac{12}{x-1} = 12$

$f(x)$ es continua $\Rightarrow \lim_{x \to 2^-} f(x) = 3a^2 = 12 = \lim_{x \to 2^+} f(x) \Rightarrow a = 2$

f) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = 0$ o $x = 2$.

Existe $f(0)=1$. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 + 1 = 1$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x - a^2 = a^2$

$f(x)$ es continua $\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 = a^2 = \lim_{x \to 0^+} f(x) \Rightarrow a = \pm 1$

Existe $f(2) = 2a + 1$. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x + a^2 = 2 + a^2$; $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} ax + 1 = 2a + 1$

$f(x)$ es continua $\Rightarrow \lim_{x \to 2^-} f(x) = 2 + a^2 = 2a + 1 = \lim_{x \to 2^+} f(x) \Rightarrow a = 1$

Por tanto, $f(x)$ será continua si $a = 1$.

g) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = a$.

Existe $f(a) = 2^a + 1$. $\lim_{x \to a^-} f(x) \quad \lim_{x \to a^-} 2^x + 1 \quad 2^a \quad 1$; $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} 5 = 5$

$f(x)$ es continua $\cdot \lim_{x \to a^-} f(x) \quad 2^a \quad 1 \quad 5 \quad \lim_{x \to a^+} f(x) \; : a \quad 2$

h) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = 0$.

Existe $f(0) = 2 + a$. $\lim_{x \to 0^-} f(x) \quad \lim_{x \to 0^-} 2 \quad a \; cosx \quad 2 + a$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) \quad \lim_{x \to 0^+} 2^{-x} \quad 6x \quad 3 \quad 2$

$f(x)$ es continua $- \lim_{x \to 0^-} f(x) = 2 + a = -2 = \lim_{x \to 0^+} f(x) - a = -4$

i) $f(x)$ es continua salvo, quizás, en $x = 4$.

Existe $f(4) = 1$. $\lim_{x \to 4^-} f(x) \quad \lim_{x \to 4^-} cos \; x \quad 4 \quad 1$; $\lim_{x \to 4^+} f(x) \quad \lim_{x \to 4^+} 2^{x-2a} \quad 2^{4-2a}$

$f(x)$ es continua $\lim_{x \to 4^-} f(x) \quad 1 \quad 2^{4-2a} \quad \lim_{x \to 4^+} f(x) \quad a \quad 2$

108. **Página 136**

a) Como las funciones por separado son continuas en los intervalos en los que están definidas, la función será continua si lo es en $x = 0$ y $x = 3$.

En $x = 0$, la función será continua si: $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

Existe $f(0) = b$.

$\lim_{x \to 0^-} f(x) \quad \lim_{x \to 0^-} x^2 \quad 2x \quad 1 \quad 1$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) \quad \lim_{x \to 0^+} ax \quad b \quad b$

Por tanto, $b = -1$.

En $x = 3$, la función será continua si: $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$

Existe $f(3) = 1$.

$\lim_{x \to 3^-} f(x) \quad \lim_{x \to 3^-} ax + b \quad 3a \quad 1$; $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} 1 = 1$

Por tanto, $a - \frac{2}{3}$.

b) Como las funciones por separado son continuas en los intervalos en los que están definidas, la función será continua si lo es en $x = -1$ y $x = 2$.

En $x = -1$, la función será continua si: $\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$

Existe $f(-1) = a - 3$.

$\lim_{x \to -1^-} f(x) \quad \lim_{x \to -1^-} ax^2 + 3x \quad a \quad 3$; $\lim_{x \to -1^+} f(x) \quad \lim_{x \to -1^+} x^3 \quad a \quad 1 \quad a$

Por tanto, $a = 1$.

En $x = 2$, la función será continua si: $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$

Existe $f(2) = 8 - a = 7$.

$\lim_{x \to 2^-} f(x) \quad \lim_{x \to 2^-} x^3 \quad a \quad 8 \quad a \quad 7$; $\lim_{x \to 2^+} f(x) \quad \lim_{x \to 2^+} bx \quad 3 \quad 2b \quad 3$

Por tanto, $b = 5$.

109. Página 137

a) La función $\frac{2}{2-x}$ no es continua en $x = 2$, sean cuales sean los valores de a y b.

b) Como las funciones por separado son continuas en los intervalos en los que están definidas, la función será continua si lo es en $x = -1$ y $x = 1$.

En $x = -1$, la función será continua si: $\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$

Existe $f(-1) = -a + 3$.

$\lim_{x \to -1^-} f(x) \quad \lim_{x \to -1^-} ax \quad 3 \quad a \quad 3;$ $\lim_{x \to -1^+} f(x) \quad \lim_{x \to -1^+} bx^2 \quad 5 \quad b \quad 5$

Por tanto, $b = -a - 2$.

En $x = 1$, la función será continua si: $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

Existe $f(1) = b + 5$.

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} bx^2 - 5 = b - 5;$ $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2\sqrt{x+3} + a = 4 + a$

Por tanto, $a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$.

c) Como las funciones por separado son continuas en los intervalos en los que están definidas, la función será continua si lo es en $x = 0$ y $x =$.

En $x = 0$, la función será continua si: $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

Existe $f(0) = 3$.

$\lim_{x \to 0^-} f(x) \quad \lim_{x \to 0^-} x^3 \quad 2x \quad 3 \quad 3;$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) \quad \lim_{x \to 0^+} a \cdot \operatorname{sen} x \quad b \quad b$

Por tanto, $b = 3$.

En $x =$, la función será continua si: $\lim_{x \to \pi} f(x) = f(\pi)$

Existe $f(\pi) = b = 3$.

$\lim_{x \to \pi^-} f(x) \quad \lim_{x \to \pi^-} a \cdot \operatorname{sen} x \quad b \quad b \quad 3;$ $\lim_{x \to \pi^+} f(x) = \lim_{x \to \pi^+} x - \pi^2 + a = a$

Por tanto, $a = 3$.

d) Como las funciones por separado son continuas en los intervalos en los que están definidas, la función será continua si lo es en $x = -2$ y $x = 2$.

En $x = -2$, la función será continua si: $\lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$

Existe $f(-2) = -7$.

$\lim_{x \to -2^-} f(x) \quad \lim_{x \to -2^-} 3x \quad 1 \quad 7;$ $\lim_{x \to -2^+} f(x) \quad \lim_{x \to -2^+} ax^2 \quad bx \quad 4a \quad 2b$

En $x = 2$, la función será continua si: $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$

Existe $f(2) = 4a + 2b$.

$\lim_{x \to 2^-} f(x) \quad \lim_{x \to 2^-} ax^2 \quad bx \quad 4a \quad 2b;$ $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} 2^x - 5 = -1$

Entonces: $\left.\begin{matrix} 4a - 2b = -7 \\ 4a - 2b = -1 \end{matrix}\right\} \rightarrow a = -1; b = \frac{3}{2}$

110. **Página 137**

a) $f(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ -1-2x & \text{si } \frac{1}{2} < x < 3 \\ a^x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Cada una de las funciones son continuas en su dominio; por tanto, $f(x)$ será continua si lo es en $x = \frac{1}{2}$ y $x = 3$.

En $x = \frac{1}{2}$, la función será continua si: $\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$

Existe $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} 1-2x = 0$; $\quad \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} -1-2x = 0$

$f(x)$ es continua en $x = \frac{1}{2}$.

En $x = 3$, la función será continua si: $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$

Existe $f(3) = a^3 - 3$.

$\lim_{x \to 3^-} f(x) \quad \lim_{x \to 3^-} 1 \; 2x \quad 5$; $\quad \lim_{x \to 3^+} f(x) \quad \lim_{x \to 3^+} a^x \quad 3 \quad a^3 \quad 3$

Entonces, $a = 2$.

b) $f(x) = \begin{cases} 4-3x & \text{si } x < \frac{4}{3} \\ 3x-4 & \text{si } \frac{4}{3} < x < 2 \\ a^x - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Cada una de las funciones son continuas en su dominio; por lo tanto, $f(x)$ será continua si lo es en $x = \frac{4}{3}$ y $x = 2$.

En $x = \frac{4}{3}$, la función será continua si: $\lim_{x \to \frac{4}{3}} f(x) = f\left(\frac{4}{3}\right)$

Existe $f\left(\frac{4}{3}\right) = 0$.

$\lim_{x \to \frac{4}{3}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{4}{3}^-} 4-3x = 0$; $\quad \lim_{x \to \frac{4}{3}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{4}{3}^+} 3x-4 = 0$

$f(x)$ es continua en $x = \frac{4}{3}$.

En $x = 2$, la función será continua si: $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$

Existe $f(2) = a^2 - 2$.

$\lim_{x \to 2^-} f(x) \quad \lim_{x \to 2^-} 3x \quad 4 \quad 2$; $\quad \lim_{x \to 2^+} f(x) \quad \lim_{x \to 2^+} a^x \quad x \quad a^2 \quad 2$

Entonces, $a = 2$.

c) $f(x)=\begin{cases}4-5x & \text{si } x<\frac{4}{5}\\ 5x-4 & \text{si } \frac{4}{5}\le x<1\\ |a-2| & \text{si } x\ge 1\end{cases}$

Cada una de las funciones es continua en su dominio; por lo tanto, $f(x)$ será continua si lo es en $x=\frac{4}{5}$ y $x=1$.

En $x=\frac{4}{5}$, la función será continua si: $\lim_{x\to\frac{4}{5}} f(x)=f\left(\frac{4}{5}\right)$

Existe $f\left(\frac{4}{5}\right)=0$. $\lim_{x\to\frac{4}{5}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{4}{5}^-}(4-5x)=0$; $\lim_{x\to\frac{4}{5}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{4}{5}^+}(5x-4)=0$

$f(x)$ es continua en $x=\frac{4}{5}$.

En $x=1$, la función será continua si: $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$

Existe $f(1)=|a-2|$. $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ $\lim_{x\to 1^-}(5x-4)=1$; $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ $\lim_{x\to 1^+}|a-2|$ $|a-2|$

Entonces, $a=1$ o $a=3$.

d) Supongamos que $a\le 4$, entonces: $f(x)=\begin{cases}-x-4 & \text{si } x<a\\ x^2-6x+8 & \text{si } x\ge a\end{cases}$

Cada una de las funciones son continuas en su dominio; por lo tanto, $f(x)$ será continua si lo es en $x=a$.

En $x=a$, la función será continua si: $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

Existe $f(a)=a^2-6a+8$.

$\lim_{x\to a^-} f(x)$ $\lim_{x\to a^-}(x+4)$ $a+4$; $\lim_{x\to a^+} f(x)$ $\lim_{x\to a^+}(x^2-6x+8)$ a^2-6a+8

$-a-4=a^2-6a-8\rightarrow a^2-5a-4=0\rightarrow a=4$ o $a=1$

Supongamos que $a>4$, entonces: $f(x)=\begin{cases}-x-4 & \text{si } x<4\\ x-4 & \text{si } 4<x<a\\ x^2-6x+8 & \text{si } x\ge a\end{cases}$

Cada una de las funciones son continuas en su dominio.

$f(x)$ es continua en $x=4$ porque proviene del valor absoluto; $f(x)$ será continua si lo es en $x=a$.

$\lim_{x\to a^-} f(x)$ $\lim_{x\to a^-}(x-4)$ $a-4$; $\lim_{x\to a^+} f(x)$ $\lim_{x\to a^+}(x^2-6x+8)$ a^2-6a+8

$a-4=a^2-6a+8\rightarrow a^2-7a+12=0\rightarrow a=3$ o $a=4$, pero hemos supuesto que a es mayor que 4.

Se deduce que la función es continua para $a=1$ y $a=4$.

e) Cada una de las funciones son continuas en su dominio; por lo tanto, $f(x)$ será continua si lo es en $x=a$.

En $x=a$, la función será continua si: $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

Existe $f(a)=sen^2 a$.

$\lim_{x\to a^-} f(x)$ $\lim_{x\to a^-} sen^2 x$ $sen^2 a$; $\lim_{x\to a^+} f(x)$ $\lim_{x\to a^+}(\cos^2 x)$ x $\cos^2 a$ a

$sen^2 a=-\cos^2 a-a\rightarrow sen^2 a+\cos^2 a=a\rightarrow a=1$

111. **Página 137**

La población inicial es $f(0) = \dfrac{18 - 0^2}{(0-3)^2} = 2$ millones de individuos.

$\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{18 - t^2}{(t-3)^2} = 1 \rightarrow$ A largo plazo, la población tiende a ser de un millón de individuos.

112. **Página 137**

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{36x - 8}{x - 2} = 36$ flexiones.

113. **Página 137**

$R(x) = 0 \longrightarrow$ Función constante $\longrightarrow R(x)$ es continua en (0, 600).

$R(x) = 40 + \dfrac{400 - 56x}{1640 - 0{,}1x} -$ Está definida en $\mathbb{R} - \{16\,400\} \longrightarrow R(x)$ es continua en $[200, -\infty)$.

$R(600) = 60$ $\quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 600^-} R(x) = 60 \\ \lim\limits_{x \to 600^+} R(x) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$ No existe $\lim\limits_{x \to 600} R(x)$.

Luego la función no es continua en $x = 600$, y tiene una discontinuaidad de salto finito.

114. **Página 137**

$$f(x) = \begin{cases} 10{,}50x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 10 \\ 7{,}50x & \text{si} \quad 10 \leq x \leq 20 \\ 5{,}50x & \text{si} \quad 20 \leq x \end{cases}$$

La función está formada por funciones polinómicas, que son continuas en los intervalos donde están definidas.

Estudiamos los puntos donde cambia su expresión algebraica.

En $x = 10$: $f(10) = 75$ $\quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 10^-} f(x) = 105 \\ \lim\limits_{x \to 10^+} f(x) = 75 \end{array}\right\} \rightarrow$ No existe $\lim\limits_{x \to 10} f(x) \longrightarrow$ En $x = 10$ tiene una discontinuidad de salto finito.

En $x = 20$: $f(20) = 110$ $\quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 20^-} f(x) = 150 \\ \lim\limits_{x \to 20^+} f(x) = 110 \end{array}\right\} -$ No existe $\lim\limits_{x \to 10} f(x) \longrightarrow$ En $x = 20$ tiene una discontinuidad de salto finito.

Al estar formada por funciones polinómicas, $\text{Dom } f = [0, +\infty)$.

115. **Página 137**

$G(x) = 6 + 2x - \dfrac{x^2}{6} \rightarrow$ Función polinómica $\longrightarrow G(x)$ es continua en $[0, 9]$.

$G(x) - 3 + \dfrac{75x - 5400}{10x^2} -$ Definida en $\mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow G(x)$ es continua en $[9, -\infty)$.

Estudiamos la función en el punto donde cambia su expresión algebraica: $x = 9$.

$G(9) = 10{,}5$ $\quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 9^-} G(x) = 10{,}5 \\ \lim\limits_{x \to 9^+} G(x) = 10{,}5 \end{array}\right\} - \lim\limits_{x \to 9} G(x) = 10{,}5 = G(9) -$ La función es continua en $[0, -\infty)$.

116. **Página 137**

$P(t)$ 50 t^2 · Función polinómica → $P(t)$ es continua en $0, 9$.

$P(t) = 56 - \frac{20t}{t-1}$ → Definida en -1 → $P(t)$ es continua en $3, -\infty$.

Estudiamos la función en el punto donde cambia su expresión algebraica: $x = 3$.

$P(3) = 41$ $\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 3^-} P(t) = 41 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} P(t) = 41\end{matrix}\right\} - \lim\limits_{x\to 9} P(t) = 41 = P(3)$ — La función es continua en $0, -\infty$.

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty}\left[56 - \frac{20t}{t-1}\right] = 56 - 20 = 36$$

Por tanto, con el paso del tiempo, la plancha soportará un peso de 36 toneladas.

117. **Página 137**

a) Las funciones que componen $P(x)$ son continuas en los intervalos donde están definidas, en los que también $P(x)$ es continua. Solo tenemos que estudiar lo que ocurre en $x = 20$, donde cambia su expresión algebraica.

Para que la función sea continua: $\lim\limits_{x\to 20^-} P(x) = \lim\limits_{x\to 20^+} P(x) = 41 = P(20)$

$P(20) = 60$ $\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 20^-} P(x) = 60 \\ \lim\limits_{x\to 20^+} P(x) = \sqrt{a\cdot 20^2 - 2000}\end{matrix}\right\} - \sqrt{a\ 20^2 + 2000} = 60 \to 400a + 2000 = 3600 - a = 4$.

b) El precio de cada litro sería: $\frac{P(x)}{x} - \lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{ax^2 - 2000}}{x} = \sqrt{a}$ €/litro costaría el aceite.

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. **Página 138**

No, el ejemplo anterior se trata de un caso concreto, son términos de una serie geométrica con razón $\frac{1}{2}$, por eso la suma de sus términos es un valor finito.

Por ejemplo, el conjunto de los números naturales pares, su suma no es un valor finito: $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \ldots = +\infty$

2. **Página 138**

Sí, si trabajamos con un recorrido de cualquier distancia $d > 0$ las distancias recorridas en cada zancada serían los términos de la siguiente sucesión:

$\left\{a_1 = \frac{d}{2}, a_2 = \frac{d}{4}, a_3 = \frac{d}{8}, a_4 = \frac{d}{16}, \ldots, a_n = \frac{d}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}\right]^{n-1}, \ldots\right\}$ → Serie geométrica con $r - \frac{1}{2}$.

3. **Página 138**

Se trata de un límite cuando n tiende a infinito.

4. **Página 138**

El término general de la sucesión es $a_n = \frac{d}{2}\left[\frac{1}{2}\right]^{n-1}$. Tal y como se ha estudiado en cursos anteriores, podemos sumar los infinitos términos de una serie geométrica usando la siguiente fórmula si $0 < r < 1$: $S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{d}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{d}{2}}{\frac{1}{2}} = d$

Derivadas

6

ACTIVIDADES

1. **Página 140**

Función $f(x) = x^2 + 1$: $T.V.M.([0,1]) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{2 - 1}{1} = 1$ $\qquad$ $T.V.M.([-2,-1]) = \dfrac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)} = \dfrac{2 - 5}{1} = -3$

Función $g(x) = x^3 + 7$: $T.V.M.([0,1]) = \dfrac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = \dfrac{8 - 7}{1} = 1$ $\qquad$ $T.V.M.([-2,-1]) = \dfrac{g(-1) - g(-2)}{-1 - (-2)} = \dfrac{6 - (-1)}{1} = 7$

2. **Página 140**

$$T.V.M.([1,5]) = \frac{e(5) - e(1)}{5 - 1} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 25 - 5 - \frac{1}{3} \cdot 1 - 1}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ m/s}$$

3. **Página 141**

a) $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2-h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{7(2+h) - 1 - 15}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{7h}{h} = 7$

b) $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2-h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{1}{(2-h)^2} - \frac{1}{4}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-4h - h^2}{4h(2-h)^2} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-4 - h}{4(2-h)^2} = -\dfrac{1}{4}$

4. **Página 141**

a) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1-h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(1-h)^3 - 1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3h - 3h^2 + h^3}{h} = 3$

$f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2-h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2-h)^3 - 8}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{12h + 6h^2 - h^3}{h} = 12$

b) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1-h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{1-h} - 1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{1-h} - 1 \quad \sqrt{1+h} - 1}{h \quad \sqrt{1-h} - 1} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1 + h - 1}{h \quad \sqrt{1+h} - 1} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1-h} - 1} = \dfrac{1}{2}$

$f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2-h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{2-h} - \sqrt{2} \quad \sqrt{2-h} + \sqrt{2}}{h \quad \sqrt{2-h} - \sqrt{2}} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2 - h - 2}{h \quad \sqrt{2+h} - \sqrt{2}} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{2-h} - \sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

5. **Página 142**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq -2 \\ -\dfrac{4}{x} & \text{si} \quad x > -2 \end{cases}$$

$f'(-2^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(-2-h) - f(-2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{-\frac{4}{-2+h} - 4}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{4 - 4h}{-2 - h \cdot h} = -\infty$ — No existe.

$f'(-2^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(-2-h) - f(-2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{-2 - h^2 - 4}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{h^2 - 4h}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} h - 4 = -4$

6. **Página 142**

a) $f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0^+} h^{\left(\frac{1}{3}-1\right)} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$

$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0^-} h^{\left(\frac{1}{3}-1\right)} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$

Las derivadas laterales no existen, por lo que la función no es derivable en $x = 0$.

b) $f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^{\frac{1}{4}}}{h} = \lim_{h\to 0^+} h^{\left(\frac{1}{4}-1\right)} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[4]{h^3}} = +\infty$

$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^{\frac{1}{4}}}{h} = \lim_{h\to 0^-} h^{\left(\frac{1}{4}-1\right)} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{\sqrt[4]{h^3}} = \nexists$

$f'(0^-)$ no existe ya que h es un número negativo y la función no está definida para números negativos. Por tanto, la función no es derivable en $x = 0$.

7. **Página 143**

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x < 3 \\ 12x - x^2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

- Si $x < 3 \longrightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty, 3)$.
- Si $x > 3 \longrightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(3, -\infty)$.
- Si $x = 3$:

$f(3^+) \quad \lim_{x\to 3^+}(12x \quad x^2) \quad 27 \qquad\qquad f(3^-) \quad \lim_{x\to 3^-}(2x \quad 3) \quad 3$

La función no es continua en $x = 3$ por no coincidir los límites laterales.

Como la función no es continua en $x = 3$, se puede afirmar que tampoco es derivable en ese punto.

8. **Página 143**

$$f(x) = 2x - |x+2| \rightarrow f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x < -2 \\ 3x-2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = -4 \qquad \lim_{x\to -2^-} f(x) = -4 \longrightarrow$ La función es continua en $x \quad 2 \longrightarrow$ Es continua en toda la recta real.

$f'(-2^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(-2-h)-f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3(-2-h)-2-4}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3h}{h} = 3$

$f'(-2^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(-2-h)-f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-2+h-2-4}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$

Como las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en $x \quad 2$.

9. **Página 144**

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x-h)^3+2(x-h)^2-x^3-2x^2}{h} = 3x^2 - 4x$

$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x-h)-f'(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)^2-4(x-h)-3x^2-4x}{h} = 6x+4$

$$f'''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f''(x-h) - f''(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6(x-h) - 4 - 6x + 4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6h}{h} = 6$$

$$f^{IV}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f'''(x-h) - f'''(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6-6}{h} = 0$$

A partir de la cuarta derivada todas las derivadas son iguales a 0.

10. Página 144

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x-h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x-h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h\cdot x\cdot(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x-h) - f'(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-x^2 + (x-h)^2}{h\cdot x^2\cdot(x-h)^2} = \frac{2}{x^3}$$

$$f'''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f''(x-h) - f''(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{(x-h)^3} - \frac{2}{x^3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-6h^2x - 6hx^2 - 2h^3}{h\cdot x^3\cdot(x+h)^3} = \frac{-6x^2}{x^6} = \frac{-6}{x^4}$$

$$f^{n)}(x) \quad 1^{n}\,\frac{n!}{x^{n+1}}$$

11. Página 145

a) $f(x) \quad x^2$ y $g(x) - x$

$$h'(x) - 7\cdot f'(x) + 3\cdot g'(x)$$

$$h'(x) = 7\cdot\lim_{h\to 0}\frac{x^2 - 2hx - h^2 - x^2}{h} - 3\lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 7\lim_{h\to 0}\frac{2hx - h^2}{h} - 3\lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 14x - 3$$

b) $f(x) - x$ y $g(x) - x - 1$

$$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)} - 2\cdot f(x) - h'(x) = \frac{g'(x)\cdot f(x) - g(x)\cdot f'(x)}{f^2(x)} + 2\cdot f'(x)$$

Así: $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x-h) - x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{x - h - 1 - (x+1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$$

Entonces: $h'(x) = \frac{1\cdot x - (x-1)\cdot 1}{x^2} - 2\cdot 1 = \frac{-1}{x^2} + 2$

c) $f(x) - x$ y $g(x) - x - 1$

$$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)} \rightarrow h'(x) = \frac{g'(x)\cdot f(x) - g(x)\cdot f'(x)}{f^2(x)}$$

Entonces: $h'(x) = \frac{1\cdot x - (x-1)\cdot 1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$

d) $f(x) - \frac{1}{x^2}$ y $g(x) - x^2$

$$h(x) - f(x) - 5\cdot g(x) \rightarrow h'(x) - \lim_{h\to 0}\frac{-2hx - h^2}{h\cdot x^2\cdot(x+h)^2} + 5\cdot\lim_{h\to 0}\frac{2hx - h^2}{h} - -\frac{2}{x^3} + 10x$$

12. **Página 145**

$$[f(x)-g(x)]' = \lim_{h\to 0}\frac{[f(x-h)-g(x-h)]-[f(x)-g(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)-g'(x)$$

Sean $f(x)=x$ y $g(x)=x^2$.

Entonces: $h(x)=3\cdot f(x)-g(x) \Rightarrow h'(x)=3f'(x)-g'(x)$

Así: $h'(x) = 3\lim_{h\to 0}\frac{x-h-x}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{x-h^2-x^2}{h} = 3\lim_{h\to 0}\frac{h}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{2hx-h^2}{h} = 3-2x$

13. **Página 146**

Aplicamos la derivada de las funciones potenciales: $(x^4)' = 4x^3$ $\qquad$ $(x^2)' = 2x$

Teniendo en cuenta las operaciones con derivadas: $f'(x) = 5\cdot 4x^3 + 3\cdot 2x = 20x^3 + 6x$

14. **Página 146**

$$f'(x) = 4\left(\frac{x-2}{x^5}\right)^3\cdot\frac{1\cdot x^5-(x-2)5x^4}{x^{5^2}} = \frac{4(x-2)^3}{x^{15}}\ \frac{x^5-5x^5-10x^4}{x^{10}} = \frac{(x-2)^3(-16x-40)}{x^{21}}$$

15. **Página 147**

$$[g\circ f(x)]' = \lim_{h\to 0}\frac{g\circ f(x-h)-g\circ f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x-h))-g(f(x))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x-h)-f(x)}\cdot\frac{f(x-h)-f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x-h))-g(f(x))}{f(x-h)-f(x)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h} = g'(f(x))\cdot f'(x)$$

16. **Página 147**

$$k'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{k(x-h)-k(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2(x+h)-5}-\sqrt{2x-5}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2(x-h)+5}-\sqrt{2x-5}}{h}\cdot\frac{\sqrt{2(x+h)-5}-\sqrt{2x+5}}{\sqrt{2(x-h)+5}-\sqrt{2x+5}} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2x-2h+5-2x-5}{h\left(\sqrt{2(x-h)+5}-\sqrt{2x+5}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{2}{\sqrt{2(x-h)+5}-\sqrt{2x+5}} = \frac{1}{\sqrt{2x-5}}$$

Si $f(x) = 2x-5 \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2(x-h)-5-(2x-5)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2h}{h} = -2$

Si $g(x)=\sqrt{x} \Rightarrow g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x-h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x-h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x-h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x-h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x-h}+\sqrt{x}} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x-h}+\sqrt{x}\right)} =$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x-h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Como $k(x) = (g\circ f)(x)$, aplicando la regla de la cadena:

$$k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x-5}}\cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$$

17. **Página 148**

a) $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

b) $f'(x) = \frac{-(x-1) \cdot \operatorname{sen} x - \cos x}{(x-1)^2} = \frac{-\operatorname{sen} x}{x-1} - \frac{\cos x}{(x-1)^2}$

c) $f'(x) = e^x \cdot \operatorname{sen} x - \cos x$

d) $f'(x) = 2e^{2x}$

18. **Página 148**

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x-h) - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{h} \ln\left(\frac{x-h}{x}\right) \right] = \lim_{h \to 0} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \ln\left[\lim_{h \to 0} \left(\frac{x-h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] = \ln e^{\lim_{h \to 0}\left[\left(\frac{x+h}{x}-1\right)\frac{1}{h}\right]} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

19. **Página 149**

a) $f'(x) = 2x\left(e^{x^2} - e^{-x^2}\right)$

b) $f'(x) = 2\cos x \cdot e^{2\operatorname{sen} x}$

c) $f'(x) = -2x \cdot 2 \cdot \cos(x^2+1)\ \operatorname{sen}(x^2-1) - -2x \cdot \operatorname{sen}(2x^2-2)$

d) $f'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

20. **Página 149**

a) $f'(x) = -\frac{3}{1-3x}$

b) $f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{1-2x}\right) = \ln(2x+1) - \ln(1-2x) \rightarrow f'(x) = \frac{2}{2x-1} - \frac{2}{1-2x} = \frac{4}{1-4x^2}$

c) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(5x+3) \rightarrow f'(x) = \frac{5}{10x-6}$

d) $f(x) = \frac{1}{2}\ln(2x+1) - \ln(1-2x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{2x-1} - \frac{2}{1-2x}\right] = \frac{2}{1-4x^2}$

SABER HACER

21. **Página 150**

Primero determinamos la expresión algebraica de la función a partir de la gráfica:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{20}x & 0 \leq x \leq 20 \\ 3 & 20 \leq x \leq 25 \\ \frac{3}{25}x & 25 \leq x \leq 50 \\ -\frac{3}{5}x + 36 & 50 \leq x \leq 60 \end{cases}$$

Ahora hallamos la tasa de variación media en los intervalos pedidos:

$$T.V.M.([5,10]) = \frac{f(10)-f(5)}{10-5} = \frac{\frac{3}{2}-\frac{3}{4}}{5} = \frac{3}{20}$$

$$T.V.M.([52,56]) = \frac{f(56)-f(52)}{56-52} = \frac{2,4-4,8}{4} = -0,6$$

22. **Página 150**

Hallamos la tasa de variación media de los intervalos que se quieren analizar.

$$T.V.M.([0,7]) = \frac{f(7)-f(0)}{7-0} = \frac{9,2-(-2)}{7} = 1,6$$

$$T.V.M.([6,7]) = \frac{f(7)-f(6)}{7-6} = \frac{9,2-5,8}{1} = 3,4$$

23. **Página 150**

a) $f'(-1) = \lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-1} = \lim_{x\to -1} \frac{x^3-2-1}{x-1} = \lim_{x\to -1} \frac{x^3-1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} (x^2-x+1) = 3$

b) $f'(-1) = \lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-1} = \lim_{x\to -1} \frac{2x^4-3x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(2x^3-2x^2-x+1)}{x-1} = \lim_{x\to -1} (2x^3-2x^2-x-1) = -2$

24. **Página 151**

a) $f'(x) - 15x^4 - 6 - \frac{6}{x^4}$

b) $f'(x) - \frac{-5}{x^3} - 30x^2$

25. **Página 151**

$f(1) = a = 3$ (ya que $\ln 1 = 0$)

$f'(x) = 4ax^3 - (b \cdot \ln x + b)$ $\qquad$ $f'(1) = 4 \cdot 3 \cdot 1^3 - b = 11 \to b = 1$

26. **Página 151**

Primero se estudia la continuidad de la función:

Si $x < 1$ o $x > 1$, la función es continua por ser un polinomio. Hay que comprobar qué sucede en el punto en el que cambia su expresión algebraica.

$f\ 1\ -\ 1-4-3-0$

$f\ 1^{-}\quad \lim_{x\to 1^{-}} x^2\quad 4x\quad 3\quad 1\quad 4\quad 3\quad 0 \qquad f\ 1^{+}\quad \lim_{x\to 1^{+}} x^2\ \mathrm{I}\ 4x\quad 3\quad 1\quad 4\quad 3\quad 0$

Por tanto, la función es continua en .

A continuación se estudia la derivabilidad de la función:

$$f'\ x\ = \begin{cases} 2x-4 & \text{si } x \cdot 1 \\ -2x-4 & \text{si } x \therefore 1 \end{cases}$$

Si x < 1 o x > 1, la función es derivable por ser un polinomio. Hay que comprobar qué sucede en el punto en el que cambia su expresión algebraica.

$x = 1 \rightarrow \begin{cases} f'(1^-) = 2 - 4 = -2 \\ f'(1^+) = -2 - 4 = 2 \end{cases}$ → Como las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en $x = 1$.

27. **Página 152**

Calculamos los límites laterales y el valor de la función en el punto.

$f(3^-) = \lim_{x \to 3^-} x^2 - 2x = 3 = f(3)$

$f(3^+) = \lim_{x \to 3^+} 2x - a = 6 - a$

Para que sea continua: $3 = 6 + a \rightarrow a = -3$.

La función continua es: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 3 \\ 2x - 3 & x < 3 \end{cases}$

Calculamos la derivada: $f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x > 3 \\ 2 & x < 3 \end{cases}$

Calculamos las derivadas laterales:

$f'(3^-) = \lim_{x \to 3^-} 2x - 2 = 4$

$f'(3^+) = \lim_{x \to 3^+} 2 = 2$

Las derivadas laterales no coinciden, de modo que la función no es derivable en $x = 3$.

28. **Página 152**

Primero se estudia la continuidad de la función:

Si $x < 0$ o $x > \pi$, la función es continua por ser un polinomio. Si $0 < x < \pi$, la función es continua por ser una función trigonométrica. Veamos qué sucede en los puntos donde cambia su expresión algebraica.

- Si $x = 0$:

$f(0) = 0 \qquad f(0^-) \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) \quad 0 \qquad f(0^+) \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) \quad sen(a \cdot 0) \quad 0$

En $x = 0$ la función siempre es continua, independientemente del parámetro a.

- Si $x \quad \pi$:

$f(\pi) \quad (\pi \quad \pi)^2 \mid 1 \quad 1 \qquad f(\pi^-) \quad \lim_{x \to \pi^-} f(x) \quad sen(a \cdot \pi) \qquad f(\pi^+) \quad \lim_{x \to \pi^+} f(x) \quad \pi \quad \pi^2 \quad 1 \quad 1$

Para que la función sea continua en $x \quad \pi$ debe cumplirse que:

$$sen(a \cdot \pi) = 1 = a \cdot \frac{(2k-1) \cdot \pi}{2} = a = \frac{2k+1}{2}, \; k \in \mathbb{Z}$$

A continuación se calcula la derivabilidad de la función:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2k-1}{2} \cdot \cos\left(\frac{(2k+1) \cdot x}{2}\right) & \text{si } 0 < x < \pi, \; k \in \mathbb{Z} \\ 2x - \pi & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

Si $x < 0$ o $x > \pi$, la función es derivable por ser un polinomio. Veamos qué sucede en los puntos en los que cambia su expresión algebraica:

$f'(0^-) \quad 2 \qquad f'(0^+) = \frac{2k-1}{2} \qquad f'(\pi^-) = \frac{2k-1}{2} \cdot \cos\left(\frac{2k+1}{2} \cdot \pi\right) \qquad f'(\pi^+) \quad 0$

En $x = 0$ la función no es derivable, porque $2 - \frac{2k-1}{2} \longrightarrow k - \frac{3}{2} \neq$.

En x la función es derivable para cualquier valor entero de k.

29. **Página 153**

a) $g' x = 2e^x$ $g' f x = 2e^{tg\ x^2+1} \longrightarrow (g \circ f)'(x) = g' f(x) \cdot f'(x) = \frac{4x \cdot e^{tg(x^2+1)}}{cos^2(x^2-1)}$

b) $f' x = \frac{2x}{cos^2\ x^2-1}$ $f' g x = \frac{4e^x}{cos^2\ 2e^x\ ^2-1}$

$(f \circ g)'(x) = f' g(x) \cdot g'(x) = \frac{8e^{2x}}{cos^2\ 2e^x\ ^2-1}$

c) $f' x = \frac{2x}{cos^2\ x^2-1}$ $f' f x = \frac{2tg\ x^2-1}{cos^2\ tg\ x^2-1\ ^2+1}$

$(f \circ f)'(x) = f' f(x) \cdot f'(x) = \frac{2 \cdot tg(x^2-1)}{cos^2\ (tg(x^2-1))^2-1} \cdot \frac{2x}{cos^2(x^2-1)}$

30. **Página 153**

Tenemos la derivada de un cociente de modo que:

$$g(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

$$g'(x) = \frac{f_1'(x)f_2(x) - f_1(x)f_2'(x)}{f_2(x)^2} = \frac{\frac{1}{x \ln 2} 2x^3 - 6x \log_2 x}{4x^6} = \frac{\frac{2x}{\ln 2} - 6\log_2 x}{4x^5} = \frac{x - 3\ln 2 \log_2 x}{2x^5}$$

31. **Página 153**

a) $g(x)$ es el producto de $2x^2$ y de $(2x - x^3)^5$. De modo que la calculamos como la derivada de un producto.

$g'(x) = 4x(2x - x^3)^5 + 2x^2 \cdot 5(2x - x^3)^4 \cdot (2 - 3x^2) = (2x - x^3)^4 (8x - 4x^4 + 20x^2 - 30x^4) = (2x - x^3)^4 (8x - 34x^4 + 20x^2)$

b) $g(x)$ es el producto de x^3 y de $\cos x^2$. De modo que la calculamos como la derivada de un producto.

$g'(x) = 3x^2 \cos x^2 + x^3 (-\text{sen}\ x^2)\ 2x = x^2 (3\cos x^2 - 2x^2\ \text{sen}\ x^2)$

ACTIVIDADES FINALES

32. **Página 154**

$$T.V.M.\ 2,3 = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{6}$$

$$T.V.M.\ 2,5 = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{2}}{3} = -\frac{1}{10}$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2-h} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 - 2 - h}{2h(2-h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{2(2-h)} = -\frac{1}{4}$$

33. **Página 154**

$$T.V.M.\ -1,2 = \frac{f(2)-f(-1)}{2-1} = \frac{3}{3} = 1$$

$$T.V.M.\ -1,3 = \frac{f(3)-f(-1)}{3-1} = \frac{5-3}{4} = 2$$

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{-1+h^2-4-3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2h+h^2}{h} = -2$$

34. **Página 154**

$$T.V.M.\ 1,6 = \frac{f(6)-f(1)}{6-1} = \frac{\frac{3}{8}-1}{5} = -\frac{1}{8}$$

$$T.V.M.\ 1,4 = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{\frac{1}{2}-1}{3} = -\frac{1}{6}$$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3}{1-h+2}-\frac{3}{1+2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3-3+h}{h(3-h)} = -\frac{1}{3}$$

35. **Página 154**

$f(x) \quad \ln(x \ b)$

$$T.V.M.\ 0,2 = \frac{f(2)-f(0)}{2} = \frac{\ln(2+b)-\ln b}{2} = \frac{\ln\left|\frac{2-b}{b}\right|}{2} = \ln 2 \longrightarrow b \quad \frac{2}{3}$$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left|0-h-\frac{2}{3}\right|-\ln\left|0+\frac{2}{3}\right|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left|\frac{h-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}\right|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left|\frac{3h-2}{2}\right|}{h} = \frac{3}{2}$$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left|2-h+\frac{2}{3}\right|-\ln\left|2+\frac{2}{3}\right|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left|\frac{h-\frac{8}{3}}{\frac{8}{3}}\right|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left|\frac{3h-8}{8}\right|}{h} = \frac{3}{8}$$

36. **Página 154**

$$T.V.M.\ 0,6 \quad \frac{s(6)-s(0)}{6} \quad \frac{116-2}{6} \quad 19$$

37. **Página 154**

La función que mide la superficie de un círculo según la longitud de su radio x es: $f(x) \quad \pi x^2$

$$T.V.M.\ 1,3 \quad \frac{f(3) \quad f(1)}{3 \quad 1} \quad \frac{9\pi \quad \pi}{2} \quad 4\pi \qquad T.V.M.\ 3,5 \quad \frac{f(5) \quad f(3)}{5 \quad 3} \quad \frac{25\pi \quad 9\pi}{2} \quad 8\pi$$

Aunque la variación del radio es la misma, la variación de la superficie no permanece constante.

38. **Página 154**

a) $T.V.M.\ [1,7] = \dfrac{f(7)-f(1)}{7-1} = \dfrac{245-5}{6} = 40$

$T.V.M.\ [1,5] = \dfrac{f(5)-f(1)}{5-1} = \dfrac{125-5}{4} = 30$

b) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{5(1-h)^2-5}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{10h+5h^2}{h} = 10$

39. **Página 154**

a) $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2-h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2(2+h)-4}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2h}{h} = 2$

b) $f'(-2) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-2-h)-f(-2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(-2+h)^3-(-2)^3}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^3-6h^2-12h}{h} = 12$

c) $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2-h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2-h)^2-3(2+h)-2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2+h}{h} = 1$

40. **Página 154**

a) $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0-h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{ah-b-b}{h} = a$

b) $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0-h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a(0-h)^2-b(0-h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{ah^2-bh}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(ah-b) = b$

c) $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0-h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{ah^2+bh+c-c}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(ah-b) = b$

d) $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0-h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{ah^3+bh^2+ch+d-d}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(ah^2-bh-c) = c$

41. **Página 154**

a) $f'(x) = 4x + 4x^3 \rightarrow f'(2) = 40$

b) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \rightarrow f'(2) = -\dfrac{1}{4}$

c) $f'(x) = \dfrac{2}{x^3} \rightarrow f'(2) = \dfrac{1}{4}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} \rightarrow f'(2) = \dfrac{1}{4}$

e) $f'(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \geq -3 \\ -x-3 & \text{si } x < -3 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq -3 \\ -1 & \text{si } x < -3 \end{cases} \rightarrow f'(2) = 1$

f) $f'(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 2 \\ -x-2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

$f'(2^+) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2-h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2-h-2}{h} = 1$

$f'(2^-) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2-h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-(2-h)-2}{h} = -1$

Las derivadas laterales existen pero no son iguales; por tanto, la función no es derivable en $x = 2$.

42. **Página 154**

a) $f'(1^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1-h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h-2}-\sqrt{2}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h-2}-\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = f'(1^-)$

b) $f'(1^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1-h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = -\infty$ $\qquad f'(1^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1-h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{h}}$

No existe la derivada por la izquierda porque la raíz cuadrada no está definida para valores negativos.

43. **Página 154**

a) $f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{si } x < 3 \\ x-4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

La función es continua en $x = 3$: porque $f(3^-) = f(3^+) = f(3) = -1$.

$f'(3^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(3-h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h-1+1}{h} = 1$

$f'(3^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(3-h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-(3-h)+2-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$

Las derivadas laterales existen pero son distintas, entonces la función no es derivable.

b) $f(x) \begin{cases} x \quad 9 \quad x^2 & \text{si } x < 3 \\ x \quad 9 \quad x^2 & \text{si } 3 \leq x \leq 3 \\ x \quad 9 \quad x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

La función es continua en $x = 3$, $f(3^-) = f(3^+) = f(3) = 3$

$f'(3^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(3-h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3+h-9-(3-h)^2-3}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-h^2-5h}{h} = -5$

$f'(3^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(3-h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h-3-9+(h-3)^2-3}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2-7h}{h} = 7$

Las derivadas laterales existen pero son distintas, entonces la función no es derivable.

44. **Página 154**

$f(x) = \begin{cases} 4-x-x^2 & \text{si } x < -2 \\ 3x-4 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

$f'(-2^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(-2-h)-f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3\cdot(-2+h)-4-2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3h-4}{h} = -\infty$ — No existe.

$f'(-2^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(-2-h)-f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{4-(-2+h)-(-2-h)^2-2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{3h-h^2}{h} = 3$

45. **Página 154**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-1} & \text{si} \quad x \neq 1\\ 5 & \text{si} \quad x=1\end{cases}$$

$$f'(1^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{1-h}{1-h-1}-5}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1-4h}{h^2}=-\infty=f'(1^-)$$

No existen las derivadas laterales.

46. **Página 154**

a) $f(x)=\begin{cases}-2-x & x>2\\ 2-x & x\leq 2\end{cases}$

$$f'(2^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-2+2+h}{h}=-1$$
$$f'(2^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{2-(2-h)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

Las derivadas laterales no son iguales, por lo que $f(x)$ no es derivable en $x=2$.

b) $g(x)=\begin{cases}x^2-4 & x<-2\\ -x^2-4 & -2\leq x\leq 2\\ x^2-4 & x>2\end{cases}$

$$g'(2^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{g(2-h)-g(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(2-h)^2-4}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{4h+h^2}{h}=4$$
$$g'(2^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{g(2-h)-g(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-(2+h)^2-4}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-4h-h^2}{h}=-4$$

Las derivadas laterales no son iguales, por lo que $g(x)$ no es derivable en $x=2$.

47. **Página 154**

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0-h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h^2}=-\infty$$
$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0-h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h^2}=-\infty$$

48. **Página 154**

$$f'(1^+)\quad\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1\quad h)\quad f(1)}{h}\quad\lim_{h\to 0^+}\frac{2\quad(1\mid h)^2\quad 4}{h}\quad\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2\quad 2h\quad 3}{h}\quad\infty$$
$$f'(1^-)\quad\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1\quad h)\quad f(1)}{h}\quad\lim_{h\to 0^+}\frac{(1\mid h)^2\quad 3\quad 4}{h}\quad\lim_{h\to 0^+}\frac{2h\mid h^2}{h}\quad 2$$

49. **Página 155**

$\lim_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x}\quad\lim_{x\to 0^-}\sqrt[3]{x}\quad 0\quad f(0)\longrightarrow f(x)$ es continua en $x=0$.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0-h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}=-\infty\longrightarrow f(x)$$ no es derivable en $x=0$.

50. Página 155

a) • Si $x \geq 0: f(x) = \cos x$ Función trigonométrica continua y derivable en $[0, -\infty)$.

• Si $x < 0: f(x) = -x^2 - 1$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty, 0)$.

• Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x = 0$:

$$f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \cos x = 1 \qquad f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} -x^2 - 1 = 1 \qquad f(0) = 1$$

Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ -\operatorname{sen} x & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 0 \end{cases}$$

Las derivadas laterales existen y son iguales, entonces $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$.

b) • Si $x \geq 0: f(x) = -x^3 - 2x - 1$ Función polinómica continua y derivable en $[0, -\infty)$.

• Si $x < 0: f(x) = 2 \cdot \operatorname{sen} x - 1$ Función trigonométrica continua y derivable en $(-\infty, 0)$.

• Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x = 0$:

$$f(0^+) \quad \lim_{x \to 0^+} \quad x^3 \quad 2x \quad 1 \quad 1 \qquad f(0^-) \quad \lim_{x \to 0^-} \quad 2 \cdot \operatorname{sen} x \quad 1 \quad 1 \qquad f(0) = 1$$

Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2 \cdot \cos x & \text{si } x < 0 \\ -3x^2 + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = 2 \\ f'(0^+) = 2 \end{cases}$$

Las derivadas laterales existen y son iguales, entonces $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$.

c) • Si $x \geq 2: f(x) = 7 - 2^x$ Función exponencial continua y derivable en $[2, -\infty)$.

• Si $x < 2: f(x) \quad \dfrac{x \quad 3}{2x \quad 5}$ Función racional continua y derivable en $(-\infty, 2)$.

• Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x \quad 2$:

$$f(2^+) \quad \lim_{x \to 2^+} \quad 7 \quad 2^x \quad 3 \qquad f(2^-) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x - 3}{2x - 5} = -5$$

Así, la función no es continua en $x = 2$, y por tanto, tampoco será derivable en ese punto.

Es decir, la función es continua y derivable en $\mathbb{R} \quad 2$.

d) • Si $x \geq 1: f(x) = -2x^2 - 3$ Función polinómica continua y derivable en $[1, -\infty)$.

• Si $x < 1: f(x) = -4x - 5$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty, 1)$.

• Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x \quad 1$:

$$f(1^+) = \lim_{x \to 1^+} -2x^2 - 3 = 1 \qquad f(1^-) \quad \lim_{x \to 1^-} \quad 4x \quad 5 \quad 1$$

Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x < 1 \\ -4x & \text{si } x > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(1^-) = -4 \\ f'(1^+) = -4 \end{cases}$$

Las derivadas laterales existen y son iguales, entonces $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$.

51. **Página 155**

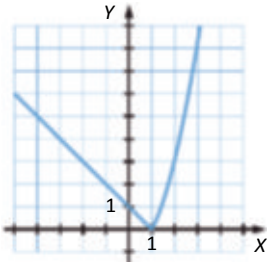
$\lim_{x\to 1^+}(x^2 \quad 1) \quad \lim_{x\to 1^-}(\quad x \quad 1) \quad 0 \quad f(1) \longrightarrow f(x)$ es continua en $x = 1$.

$$f'(1^+) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(1-h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{(1+h)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{2h-h^2}{h} = \lim_{h\to 0^+}(2-h) = 2$$

$$f'(1^-) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(1-h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{-(1-h)-1}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{-h}{h} = -1$$

Las derivadas laterales no son iguales; por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

a)



b) No existe, pues si una función es discontinua en un punto no puede ser derivable en él.

52. **Página 155**

- Si $x \;:\; 2 : f\ x \ -\ -2x\ -$ Función polinómica continua y derivable en $2,-\infty$.
- Si $x \;\lhd\; 2 : f\ x \quad \frac{x \quad 1}{x \quad 1}$ Función racional continua y derivable en $-\infty,2$, salvo en $x = 1$.
- Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x \quad 1$:

$f\ 1^+ \ -\ \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1} \ -\ +\infty$ $\qquad$ $f\ 1^- \ -\ \lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{x-1} \ -\ -\infty$

$f(x)$ no es continua en $x = 1$; por tanto, no es derivable en $x = 1$.

- Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x \quad 2$:

$f\ 2^+ \quad \lim_{x\to 2^+}(\quad 2x) \quad 4$ $\qquad$ $f\ 2^- \quad \lim_{x\to 2^-}\frac{x \quad 1}{x \quad 1} \quad 3$

$f(x)$ no es continua en $x = 2$; por tanto, no es derivable en $x = 2$.

$$f'\ x \ = \begin{cases} \dfrac{-2}{(x-1)^2} & \text{si } x \lhd 2 \\ -2 & \text{si } x \;:\; 2 \end{cases}$$

Así, la función es continua y derivable en $\mathbb{R} \ -\{1, 2\}$.

53. **Página 155**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x-3}{1-x^2} & \text{si } -2<x<1\\ 1-3\sqrt{2x-1} & \text{si } 1<x<5\end{cases}\qquad \text{Dom}\left\{\frac{x^2-2x-3}{1-x^2}\right\}=\mathbb{R}-\{-1,1\}\qquad \text{Dom}\left(1-3\sqrt{2x-1}\right)=\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$$

- Si $x\in(-2,-1)\cup(-1,1)\rightarrow f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{1-x^2}\rightarrow$ Función racional continua y derivable.

- Si $x\in(1,5)\rightarrow f(x)=1-3\sqrt{2x-1}\rightarrow$ Función radical continua y derivable.

- Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x=-1$:

$$f(-1^+)=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2-2x-3}{-x^2-1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{-x-3}{x-1}=-\infty\qquad f(-1^-)=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2-2x-3}{1-x^2}=\lim_{x\to-1^-}\frac{-x-3}{x-1}=-\infty$$

  Así, la función no es continua, y por tanto, no es derivable, en $x=-1$

- Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x=1$:

$$f(1^+)=\lim_{x\to1^+}1-3\sqrt{2x-1}=2\qquad f(1^-)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-2x-3}{1-x^2}=\lim_{x\to1^-}\frac{-x-3}{x+1}=-2\qquad f(1)=-2$$

  Así, la función es continua en $x=1$.

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{(x-1)^2} & \text{si } x\in(-2,-1)\cup(-1,1)\\ \dfrac{-3}{\sqrt{2x-1}} & \text{si } x\in(1,5)\end{cases}\qquad \begin{cases}f'(1^-)=\dfrac{1}{2}\\ f'(1^+)=-3\end{cases}\rightarrow$$ La función no es derivable en $x=1$.

54. **Página 155**

- Si $x<-4: f(x)=-1\rightarrow$ Función constante continua y derivable en $(-\infty,-4)$.

- Si $-4<x<2: f(x)=-x-2\rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(-4,2)$.

- Si $x>2: f(x)=-\dfrac{8}{x}\rightarrow$ Función racional continua y derivable en $(2,-\infty)$.

- Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x=-4$:

$$f(-4^+)=\lim_{x\to-4^+}(x+2)=-2\qquad f(-4^-)=\lim_{x\to-4^-}-1=-1$$

  $f(x)$ no es continua en $x=-4$; por tanto, no es derivable en $x=-4$.

- Estudiamos la continuidad y la derivabilidad en $x=2$:

$$f(2^+)=\lim_{x\to2^+}-\frac{8}{x}=-4\qquad f(2^-)=\lim_{x\to2^-}(x-2)=4$$

  $f(x)$ no es continua en $x=2$.

$$f'(x)=\begin{cases}0 & x<-4\\ 1 & -4<x<2\\ -\dfrac{8}{x^2} & x>2\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}f'(2^-)=1\\ f'(2^+)=-2\end{matrix}\right\}\rightarrow$$ Las derivadas laterales no son iguales; por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x=2$.

Así, la función es derivable en $\mathbb{R}-\{-4, 2\}$.

55. **Página 155**

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-5x-6 & \text{si} \quad x<-1\\ 2-\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad -1\le x<2\\ \dfrac{5}{4}-2^{-x} & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$$

- Si $x<-1 \longrightarrow f(x)=2x^2-5x-6 \longrightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty,-1)$.
- Si $-1<x<0$ y $0<x<2 \longrightarrow f(x)=2-\dfrac{1}{x} \longrightarrow$ Función continua y derivable en $(0,2)$.
- Si $x>2 \longrightarrow f(x)=\dfrac{5}{4}-2^{-x} \longrightarrow$ Función exponencial continua y derivable en $(2,+\infty)$.
- Si $x=1$:

$$f(-1^+)=\lim_{x\to -1^+}\left(2-\frac{1}{x}\right)=3 \qquad f(-1^-)=\lim_{x\to -1^-}(2x^2+5x-6)=3 \qquad f(-1)=3$$

Así, la función es continua en $x=-1$.

$$f'(x)=\begin{cases}4x-5 & \text{si } x<1\\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } -1<x<0 \text{ ó } 0<x<2\\ \dfrac{-\ln 2}{2^x} & \text{si } x>2\end{cases} \qquad \begin{cases}f'(-1^-)=1\\ f'(-1^+)=1\end{cases} \longrightarrow \text{La función es derivable en } x=-1.$$

- Si $x=0$:

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\left(2-\frac{1}{x}\right)=-\infty \qquad f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\left(2-\frac{1}{x}\right)=-\infty$$

Así, la función no es continua en $x=0$; por tanto, no es derivable en este punto.

- Si $x=2$:

$$f(2^+)=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{5}{4}-2^{-x}\right)=\frac{3}{2} \qquad f(2^-)=\lim_{x\to 2^-}\left(2-\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{2} \qquad f(2)=\frac{3}{2}$$

Así, la función es continua en $x=2$.

$$f'(x)=\begin{cases}4x-5 & \text{si } x<1\\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } -1<x<0 \text{ ó } 0<x<2\\ \dfrac{-\ln 2}{2^x} & \text{si } x>2\end{cases} \qquad \begin{cases}f'(2^-)=\dfrac{1}{4}\\ f'(2^+)=\dfrac{-\ln 2}{4}\end{cases} \longrightarrow \text{La función no es derivable en } x=2.$$

En resumen, la función es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{0,2\}$.

56. **Página 155**

$$f(x)=\begin{cases}7-2x-6 & \text{si } x>3\\ 7-2x-6 & \text{si } x<3\end{cases}=\begin{cases}13-2x & \text{si } x>3\\ 1-2x & \text{si } x<3\end{cases}$$

- Si $x<3: f(x)=13-2x \longrightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty,3)$
- Si $x>3: f(x)=1-2x \longrightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(3,-\infty)$

• Si $x = 3$:

$f(3^-) \quad \lim_{x \to 3^-} 1 \; 2x \quad 7 \qquad f(3^+) \quad \lim_{x \to 3^+} 13 \quad 2x \quad 7 \quad f(3) - 7$

Por tanto, la función es continua en $x = 3$.

$f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x > 3 \\ 2 & \text{si } x < 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(3^+) = -2 \\ f'(3^-) = 2 \end{cases}$ → Por tanto, la función no es derivable en $x = 3$.

57. Página 155

a) • Si $x > 3 : f(x) = -x^2 - 2x -$ Función polinómica continua y derivable en $(3, -\infty)$.

• Si $x < 3 : f(x) = -2x - a \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty, 3)$.

• Para que la función sea continua en $x = 3$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(3) = 3$.

$$\left.\begin{array}{l} f(3^-) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x - a) = 6 - a \\ f(3^+) = \lim\limits_{x \to 3^-} (x^2 - 2x) = 3 \end{array}\right\} \rightarrow f(3^-) = f(3^+) = f(3) \rightarrow 6 - a = 3 \rightarrow a = -3$$

b) La función solo puede ser derivable si es continua, por lo que consideramos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x > 3 \\ 2x - 3 & x < 3 \end{cases}$$

$$f'(3^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(3-h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(3-h)^2 - 2(3-h) - 3}{h} = \lim_{h \to 0^+} (4 - h) = 4$$

$$f'(3^-) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(3-h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2(3-h) - 3 - 3}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2h}{h} = 2$$

Las derivadas laterales existen, pero no son iguales; por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 3$.

58. Página 155

• Si $x < -1 : f(x) = -4x - 3 -$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty, -1)$.

• Si $-1 < x < 1 : f(x) = 2x^2 - 1 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(-1, 1)$.

• Si $x > 1 : f(x) = \frac{k-2}{x} -$ Función racional continua y derivable en $(1, -\infty)$.

• Para que la función sea continua en $x = -1$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(-1) = 1$:

$f(-1^+) = \lim_{x \to -1^+} (2x^2 - 1) = 1 \qquad f(1^-) \quad \lim_{x \to -1^-} (\; 4x \quad 3) \quad 1$

$f(x)$ es continua en $x = -1$.

• Para que la función sea continua en $x = 1$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(1) = k + 2$:

$f(1^+) - \lim_{x \to -1^+} \frac{k-2}{x} - k - 2 \qquad f(1^-) \quad \lim_{x \to -1^-} (2x^2 \quad 1) \quad 1$

$f(1^-) \quad f(1^+) \quad f(1) \cdot k \quad 2 \quad 1 \cdot k \quad 1.$

Si $k = -1$: $f'(x) = \begin{cases} -4 & x < -1 \\ 4x & -1 < x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & x > 1 \end{cases}$

$\left.\begin{matrix} f'(-1^-) = -4 \\ f'(-1^+) = -4 \end{matrix}\right|$ → Las derivadas laterales existen y son iguales; por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = -1$.

$\left.\begin{matrix} f'(1^-) = 4 \\ f'(1^+) = -1 \end{matrix}\right|$ → Las derivadas laterales no son iguales, por tanto; $f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

59. **Página 155**

a) • Si $x < 0: f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ — Función racional continua y derivable en $(-\infty, 0)$.

• Si $0 < x < 3: f(x) = ax - b$ — Función polinómica continua y derivable en $(0, 3)$.

• Si $x > 3: f(x) = x - 5$ → Función polinómica continua y derivable en $(3, -\infty)$.

• Para que la función sea continua en $x = 0$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(0) = b$:

$$f(0^+) = \lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = 1 \qquad f(0^-) = \lim_{x \to -1^-} (ax - b) = b$$

$f(x)$ es continua en $x = 0$ si $b = 1$.

Consideramos que $b = 1$, entonces para que la función sea continua en $x = 3$ los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(3) = 3a + 1$:

$f(3^+)$ $\lim_{x \to -1^+} (x$ $5)$ 2 $f(3^-) = \lim_{x \to -1^-} (ax - 1) = 3a - 1$

$f(3^-)$ $f(3^+)$ $f(3)$ $3a$ 1 2 a 1.

b) Si $a = -1$ y $b = 1$: $f'(x) = \begin{cases} \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} & x < 0 \\ -1 & 0 < x < 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$

$\left.\begin{matrix} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = -1 \end{matrix}\right|$ → Las derivadas laterales no son iguales; por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

$\left.\begin{matrix} f'(3^-) = -1 \\ f'(3^+) = 1 \end{matrix}\right|$ → Las derivadas laterales no son iguales; por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 3$.

60. **Página 155**

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 4 + x & \text{si } x > 2 \\ -2x + 4 + x & \text{si } x < 2 \end{cases} = \begin{cases} 3x - 4 & \text{si } x > 2 \\ -x - 4 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

• Si $x < 2: f(x) = -x + 4$ → Función polinómica continua y derivable en $(-\infty, 2)$.

• Si $x > 2: f(x) = 3x - 4$ → Función polinómica continua y derivable en $(2, -\infty)$.

• Si x 2:

$f(2^-)$ $\lim_{x \to 2^-}$ x 4 2 $f(2^+)$ $\lim_{x \to 2^+}$ $3x$ 4 2 $f(2) = 2$

Entonces la función es continua en $x = 2$.

$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x > 2 \\ -1 & \text{si } x < 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(2^+) = 3 \\ f'(2^-) = -1 \end{cases}$ → Las derivadas laterales existen pero son diferentes, entonces la función no es derivable en $x = 2$.

61. **Página 155**

$$f(x)=\begin{cases}x^3-x+1 & \text{si } x\geq 0\\ -x^3-x+1 & \text{si } x<0\end{cases}$$

- Si $x<0: f(x)=-x^3-x+1 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty,0)$.
- Si $x>0: f(x)=x^3-x-1 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(0,+\infty)$.
- Si $x=0$:

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}(x^3-x+1)=1 \qquad f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}(x^3-x-1)=-1 \qquad f(0)=-1$$

Entonces la función es continua en $x=0$.

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2+1 & \text{si } x>0\\ -3x^2+1 & \text{si } x<0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}f'(0^+)=1\\ f'(0^-)=1\end{cases}$$

Las derivadas laterales existen y son iguales, entonces la función es derivable en $x=0$.

- Por otra parte:

$$f(x)=|x|^3-|x|-1=\begin{cases}-x^3-x-1 & \text{si } x<0\\ x^3-x+1 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

$f(0^+)=f(0^-)=f(0)\rightarrow$ Continua en $x=0$.

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2-1 & \text{si } x>0\\ -3x^2-1 & \text{si } x<0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}f'(0^+)=1\\ f'(0^-)=-1\end{cases}$$

Las derivadas laterales existen pero son diferentes, luego la función no es derivable en $x=0$.

62. **Página 155**

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{si } x<0\\ x^2-a & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

Para que la función sea derivable, en primer lugar, debe ser continua.

La función es continua en $x=0$ si los límites laterales son iguales y coinciden con $f(0)=\cos 0=1$:

$$\left.\begin{array}{l}f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\cos x=1\\ f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}(x^2-a)=a\end{array}\right\}\rightarrow f(0^-)=f(0^+)=f(0)\rightarrow a=1$$

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{si } x<0\\ x^2-1 & \text{si } x\geq 0\end{cases}\rightarrow f'(x)=\begin{cases}-\operatorname{sen} x & \text{si } x<0\\ 2x & \text{si } x>0\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}f'(0^-)=0\\ f'(0^+)=0\end{array}\right\}\rightarrow$$ Las derivadas laterales existen y son iguales; por tanto, $f(x)$ es derivable en $x=0$ si $a=1$.

63. **Página 155**

a) • Si $x \in (-\infty, -4) \cup (-4, -3) \rightarrow f(x) = \dfrac{x}{x-4}$ → Función racional continua y derivable.

• Si $x \in (-3, -\infty) \rightarrow f(x) = x^2 + ax$ → Función polinómica continua y derivable.

• Si x 4 :

No es continua ni derivable en $x = -4$ ya que no pertenece al dominio.

• Si $x = -3$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-3^-) = \lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{x}{x-4} = -3 \\ f(-3^+) = \lim\limits_{x \to -3^+} x^2 - ax = 9 - 3a \end{array}\right\} - f(-3^-) = f(-3^+) = f(3) - 9 - 3x = -3 - a = 4$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x > -3 \\ \dfrac{4}{x-4^2} & \text{si } x < -3 \end{cases} - \begin{cases} f'(-3^+) = -2 \\ f'(-3^-) = 4 \end{cases} \rightarrow f'(3^+) \neq f'(3^-)$$

Entonces no existe ningún valor de a para el cual la función es derivable en x = –3

b) • Si $x \in (-\infty, 1) \rightarrow f(x) = 2x + e^{1-x}$ → Función exponencial continua y derivable.

• Si $x \in (1, +\infty) \rightarrow f(x) = 1 + \sqrt{x+m}$ → Función radical continua y derivable $\forall m > -x$.

• Si x 1 :

$$\left.\begin{array}{l} f(1^-) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2x + e^{1-x} = 3 \\ f(1^+) = \lim\limits_{x \to 1^+} 1 + \sqrt{x+m} = 1 - \sqrt{1+m} \end{array}\right\} - f(1^-) = f(1^+) - 3 = 1 + \sqrt{1+m} - m = 3$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - e^{1-x} & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-3}} & \text{si } x > 1 \end{cases} - \begin{cases} f'(1^+) = 1 \\ f'(1^-) = \dfrac{1}{4} \end{cases} - f'(1^+) = f'(1^-)$$

Entonces no existe ningún valor de a para el cual la función es derivable en x = 1.

64. **Página 155**

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2} & \text{si } -5 < x < 4 \\ x^2 - mx + n & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x = 4$ ha de ser continua en este punto:

$$\left.\begin{array}{l} f(4^-) = \lim\limits_{x \to 4^-} \sqrt{25 - x^2} = 3 \\ f(4^+) = \lim\limits_{x \to 4^+} x^2 - mx - n = 16 + 4m - n \end{array}\right\} - f(4^-) = f(4^+) = f(4) - 4m - n = -13$$

Para que la función sea derivable en $x = 4$ las derivadas laterales tienen que existir y ser iguales:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} & \text{si } -5 < x < 4 \\ 2x - m & \text{si } x > 4 \end{cases} \rightarrow \left.\begin{array}{l} f(4^-) = -\dfrac{4}{3} \\ f(4^+) = 8 - m \end{array}\right\} - 8 - m = -\frac{4}{3} \rightarrow m = -\frac{28}{3}$$

Así, $16 - 4 \cdot \left(-\dfrac{28}{3}\right) - n = 3 \rightarrow n = 3 + \dfrac{112}{3} - 16 \rightarrow n = \dfrac{73}{3}$.

65. **Página 155**

$$f(x)=\begin{cases}1-a\sqrt{x-1}\cdot\ln(x-1) & \text{si } x>0\\ (x-1)^2 & \text{si } x<0\end{cases}$$

a) • Si $x\in(0,-\infty)\rightarrow f(x)=1-a\sqrt{x-1}\cdot\ln(x+1)\rightarrow$ Producto de funciones continuas y derivables en $(0,-\infty)$.

• Si $x\in(-\infty,0)\rightarrow f(x)=(x-1)^2\rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty,0)$.

• Si $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l}f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}(x-1)^2=1\\ f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(1-a\sqrt{x-1}\cdot\ln(x-1)\right)=1-a\cdot0=1\ \forall a\end{array}\right\}\rightarrow f(0^-)=f(0^+)=f(0)=1\ \forall a\in\mathbb{R}$$

b) $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{a\cdot\ln(x-1)+2}{2\cdot\sqrt{x-1}} & \text{si } x>0\\ 2x-2 & \text{si } x<0\end{cases}$

Para que la función sea derivable: $f'(0^+)=f'(0^-)\rightarrow\begin{cases}f'(0^+)=\dfrac{a\cdot\ln(1)+2}{2\sqrt{1}}=\dfrac{2a}{2}\\ f'(0^-)=-2\end{cases}\rightarrow a=-2$

66. **Página 156**

a) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+}(2x-1)=1\\ \lim\limits_{x\to0^-}e^{ax}=1\end{array}\right\}\rightarrow\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$

$f(0)=e^{a\cdot0}=1$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=f(x)$ es continua en $x=0$.

b) $f'(x)=\begin{cases}ae^{ax} & x<0\\ 2 & x>0\end{cases}$

Para que la función sea derivable en $x=0$, las derivadas laterales tienen que ser iguales:

$$\left.\begin{array}{l}f'(0^-)=a\\ f'(0^+)=2\end{array}\right\}\rightarrow a=2$$

67. **Página 156**

a) Para que la función sea continua en $x=2$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(2)=3$.

$$\left.\begin{array}{l}f(2^-)=\lim\limits_{x\to2^-}(ax^2-1)=4a-1\\ f(2^+)=\lim\limits_{x\to2^+}(e^{2-x}+2)=3\end{array}\right\}\rightarrow f(2^-)=f(2^+)=f(2)\rightarrow4a-1=3\rightarrow a=\frac{1}{2}$$

b) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2-1 & x<2\\ e^{2-x}-2 & x>2\end{cases}\rightarrow f'(x)=\begin{cases}x & x<2\\ -e^{2-x} & x>2\end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l}f'(2^-)=2\\ f'(2^+)=-1\end{array}\right\}\rightarrow$$ Las derivadas laterales no son iguales; por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x=2$.

68. **Página 156**

$$f(x)=\begin{cases}\ln(e-\operatorname{sen}x) & \text{si } x\leq 0\\ x^3-ax-b & \text{si } x>0\end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x=0$ ha de ser continua en este punto:

$$\left.\begin{aligned}f(0^-)&=\lim_{x\to 0^-}\ln(e-\operatorname{sen}x)=1\\ f(0^+)&=\lim_{x\to 0^+}x^3+ax-b=b\end{aligned}\right\}\to f(0^-)=f(0^+)=f(0)\to b=1$$

Para que la función sea derivable en $x=0$ las derivadas laterales tienen que existir y ser iguales:

$$f'(x)\quad\begin{cases}\dfrac{\cos x}{e^{\operatorname{sen}x}} & \text{si } x\leq 0\\ 3x^2\quad a & \text{si } x>0\end{cases}\longrightarrow\left.\begin{aligned}f'(0^-)&=\frac{1}{e}\\ f'(0^+)&=a\end{aligned}\right\}\to a=\frac{1}{e}$$

69. **Página 156**

$$f(x)=\begin{cases}ax^2-bx-1 & \text{si}\quad x\leq 0\\ a^2-\operatorname{sen}x & \text{si}\quad x>0\end{cases}$$

- Si $x\leq 0: f(x)=ax^2-bx+1\to$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty,0)$.
- Si $x>0: f(x)=a^2-\operatorname{sen}x\to$ Función trigonométrica continua y derivable en $(0,-\infty)$.
- Si $x=0$:

$$\left.\begin{aligned}f(0^-)&=\lim_{x\to 0^-}ax^2-bx+1=1\\ f(0^+)&=\lim_{x\to 0^+}a^2-\operatorname{sen}x=a^2\end{aligned}\right\}\longrightarrow f(0^-)=f(0^+)=f(0)=1\longrightarrow a^2=1\to a=\pm 1$$

$$f'(x)=\begin{cases}2ax-b & \text{si}\quad x\leq 0\\ -\cos x & \text{si}\quad x>0\end{cases}\longrightarrow\left.\begin{aligned}f'(0^-)&=b\\ f'(0^+)&=-\cos 0=-1\end{aligned}\right\}\to b=-1$$

70. **Página 156**

a) • Si $x<\pi: f(x)=e^{a(x-\pi)}\to$ Función exponencial continua y derivable en $(-\infty,\pi)$.

- Si $x>\pi: f(x)=2a-b\cdot\operatorname{sen}(x-\pi)\to$ Función trigonométrica continua y derivable en $(\pi,-\infty)$.
- Si $x=\pi$:

$$\left.\begin{aligned}f(\pi^-)&=\lim_{x\to\pi^-}e^{a(x-\pi)}=1\\ f(\pi^+)&=\lim_{x\to\pi^+}2a-b\cdot\operatorname{sen}(x-\pi)=2a\end{aligned}\right\}\to 2a=1\to a=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{\left(\frac{x-\pi}{2}\right)} & \text{si } x<\pi\\ b\cdot\cos(x-\pi) & \text{si } x>\pi\end{cases}\longrightarrow\left.\begin{aligned}f'(\pi^-)&=\frac{1}{2}\\ f'(\pi^+)&=b\cdot\cos 0=b\end{aligned}\right\}\to b=\frac{1}{2}$$

b) • Si $x < -1: f(x) = (x-b)^2$ — Función polinómica continua y derivable en $(-\infty, -1)$.

• Si $x > -1: f(x) = \dfrac{ax}{\sqrt{x-2}}$ — Función radical continua y derivable en $(-1, -\infty)$.

• Si $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1^-) = \lim\limits_{x\to -1^-} (x+b)^2 = 1-2b-b^2 \\ f(-1^+) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{ax}{\sqrt{x-2}} = -a \end{array}\right\} \rightarrow -a = 1-2b-b^2$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-2b & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{a(x-4)}{2(x-2)^{\frac{3}{2}}} & \text{si } x > -1 \end{cases} \rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(-1^-) = -2+2b \\ f'(-1^+) = \dfrac{3a}{2} \end{array}\right\} \rightarrow -\frac{3a}{2} = -2+2b$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} -a = 1-2b-b^2 \\ 3a = -4-4b \end{cases} \rightarrow a = -\frac{16}{9} \text{ y } b = -\frac{1}{3} \quad \text{o} \quad a = 0 \text{ y } b = 1$$

71. Página 156

a) $f(x) = \begin{cases} 2e^x - x - a & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + b(x-1) & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ x^4 - 3a & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

Todas las ramas son continuas y derivables en el dominio en el que se las ha definido.

• Si $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} (2e^x - x + a) = 2+a \\ f(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2 - b(x-1)) = b \end{array}\right\} \rightarrow 2-a = b$$

• Si $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} f(2^-) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2 - b\cdot(x-1)) = 4+3b \\ f(2^+) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x^4 - 3a) = 16-3a \end{array}\right\} \rightarrow 16-3a = 4+3b$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 2-a = b \\ 16-3a = 4-3b \end{cases} \rightarrow a = 1, b = 3$$

Comprobamos la derivabilidad: $f'(x) = \begin{cases} 2e^x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x-3 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 4x^3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 3 \\ f'(0^+) = 3 \end{array}\right\} \text{ y } \left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 7 \\ f'(2^+) = 32 \end{array}\right\}$$

Entonces f es derivable en $x = 0$, pero no es derivable en $x = 2$.

b) $f(x) = \begin{cases} -x^3 - 7x - c & \text{si} \quad x \leq -2 \\ ax^2 - 3x - 11 & \text{si} \quad -2 < x < \frac{3}{2} \\ 18\sqrt{2x-1} + b & \text{si} \quad x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$

Todas las ramas son continuas y derivables en el dominio en el que se las ha definido.

• Si $x \neq 2$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-2^-) = \lim\limits_{x \to -2^-} -x^3 - 7x - c = c - 6 \\ f(-2^+) = \lim\limits_{x \to -2^+} ax^2 + 3x + 11 = 4a - 5 \end{array}\right\} \to -4a - c - 11 = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 - 7 & \text{si } x < -2 \\ 2ax + 3 & \text{si } -2 < x < \frac{3}{2} \\ \frac{18}{\sqrt{2x-1}} & \text{si } x > \frac{3}{2} \end{cases} \to \left.\begin{array}{l} f'(-2^-) = -5 \\ f'(-2^+) = 3 - 4a \end{array}\right\} \to -5 = 3 - 4a \to a = 2$$

Así, $8 + 11 = c - c = 19$

• Si $x = \frac{3}{2}$ (sustituyendo los valores de a y c):

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{3}{2}^-\right) = \lim\limits_{x \to \frac{3}{2}^-} 2x^2 - 3x - 11 = 20 \\ f\left(\frac{3}{2}^+\right) = \lim\limits_{x \to \frac{3}{2}^+} 18\sqrt{2x-1} + b = 36 - b \end{array}\right\} \to 20 = 36 - b \to b = -16$$

• Comprobamos que es derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 7 & \text{si } x < -2 \\ 4x - 3 & \text{si } -2 < x < \frac{3}{2} \\ \frac{18}{\sqrt{2x-1}} & \text{si } x > \frac{3}{2} \end{cases} \to \left.\begin{array}{l} f'\left(\frac{3}{2}^-\right) = 9 \\ f'\left(\frac{3}{2}^+\right) = 9 \end{array}\right\} \to \text{Es derivable en } x = \frac{3}{2}.$$

72. Página 156

Cada rama es continua y derivable en el dominio en el que se las ha definido. Comprobamos en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 + ax + ab = ab \\ f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} \log_2 x - 2 = 1 \end{array}\right\} \to ab = 1$$

$$f'(x) \quad \begin{cases} 2x \quad a & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x \quad 2 \quad \ln 2} = \frac{1}{x \cdot \ln 2 \quad \ln 4} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = a \\ f'(0^+) = \frac{1}{\ln 4} \end{array}\right\} \to a = \frac{1}{\ln 4} \to b = \ln 4$$

73. **Página 156**

Si $-1 < x < 1$, $f(x) = \frac{a}{x} \rightarrow$ Función racional, no continua en $x = 0$; por tanto, no es derivable en $x = 0$.

Así, no existen valores de a y b para los que la función sea derivable en todos los puntos.

74. **Página 156**

- Si $x < 0 : f(x) = 3x - 2 \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(-\infty, 0)$.
- Si $0 < x < \pi : f(x) = x^2 - 2a\cos x \rightarrow$ Función polinómica y trigonométrica continua y derivable en $(0, \pi)$.
- Si $x > \pi : f(x) = ax^2 + b \rightarrow$ Función polinómica continua y derivable en $(\pi, +\infty)$.
- Para que la función sea continua en $x = 0$, los límites laterales tienen que ser iguales y coincidir con $f(0) = 2a$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} 3x - 2 = 2 \\ f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 + 2a\cos x = 2a \end{array}\right\} \rightarrow f(0^-) = f(0^+) = f(0) = 1 \rightarrow 2a = 2 \rightarrow a = 1$$

Consideremos que $a = 1$, entonces para que la función sea continua en $x = \pi$ los límites laterales tiene que ser iguales y coincidir con $f(\pi) = \pi^2 + b$:

$$\left.\begin{array}{l} f(\pi^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 - 2\cos x = \pi^2 - 2 \\ f(\pi^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 - b = \pi^2 - b \end{array}\right\} \rightarrow f(\pi^-) = f(\pi^+) = f(\pi) \rightarrow \pi^2 - 2 = \pi^2 - b \rightarrow b = -2$$

Si $a = 1$ y $b = -2$, entonces: $f'(x) \begin{cases} 3 & x < 0 \\ 2x - 2\,sen\,x & 0 < x < \pi \\ 2x & x > \pi \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 3 \\ f'(0^+) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$ Las derivadas laterales no son iguales; por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(\pi^-) = 2\pi \\ f'(\pi^+) = 2\pi \end{array}\right\} \rightarrow$$ Las derivadas laterales existen y son iguales; por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = \pi$.

75. **Página 156**

a) $f'(x) = 2$ $\quad f''(x) = 0$ $\quad f'''(x) = 0$

b) $g'(x) = 2x$ $\quad g''(x) = 2$ $\quad g'''(x) = 0$

c) $h'(x) = 3x^2$ $\quad h''(x) = 6x$ $\quad h'''(x) = 6$

d) $i'(x) = -\text{sen}\,x$ $\quad i''(x) = -\cos x$ $\quad i'''(x) = \text{sen}\,x$

e) $j'(x) = \cos x$ $\quad j''(x) = -\text{sen}\,x$ $\quad j'''(x) = -\cos x$

f) $k'(x) = 1 + \text{tg}^2\,x$ $\quad k''(x) = 2\text{tg}\,x \cdot (1 + \text{tg}^2\,x)$ $\quad k'''(x) = 2(1 + \text{tg}^2\,x)^2 + 2\,\text{tg}\,x \cdot 2\,\text{tg}\,x \cdot (1 + \text{tg}^2\,x)$

76. **Página 156**

La función es continua en su dominio, esto es, en $(0, +\infty)$.

$h'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow h(x)$ es derivable en $(0, +\infty)$.

$h''(x) = -\frac{1}{x^2}$

77. **Página 156**

a) $f(x)$ está definida por funciones polinómicas; por tanto, son continuas y derivables en $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1 \\ f(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} 2x = 2 \end{array}\right| \longrightarrow f(1^-) \neq f(1^+) \longrightarrow f(x) \text{ no es continua en } x = 1;$$

por tanto, no es derivable en $x = 1$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} 2 & x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

Así, $f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.

b) $g(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x > 2 \\ 2 & x < 2 \end{cases}$

$g(x)$ está definida por funciones polinómicas; por tanto, son continuas y derivables en $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} g(2^-) = \lim\limits_{x\to 2^-} 2 = 2 \\ g(2^+) = \lim\limits_{x\to 2^+} (2x - 2) = 2 \end{array}\right| \longrightarrow g(2^-) = g(2^+) = g(2) \longrightarrow g(x) \text{ es continua en } x = 2.$$

$$g'(x) = \begin{cases} 2 & x > 2 \\ 0 & x < 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} g'(2^-) = 0 \\ g'(2^+) = 2 \end{array}\right| \longrightarrow \text{Las derivadas laterales existen, pero son distintas; por tanto, } g(x) \text{ no es derivable en } x = 2.$$

Así, $g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$.

$g''(x) = 0$ si $x \neq 2$

c) $h(x)$ está definida por funciones polinómicas; por tanto, son continuas y derivables en $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} h(-1^-) = \lim\limits_{x\to 2^-} (3x + 4) = 1 \\ h(-1^+) = \lim\limits_{x\to 2^+} (-2x - 1) = 1 \end{array}\right| \longrightarrow h(-1^-) = h(-1^+) = h(-1) \longrightarrow h(x) \text{ es continua en } x = -1.$$

$$h'(x) = \begin{cases} 3 & x < -1 \\ -2 & x > -1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} h'(-1^-) = 3 \\ h'(-1^+) = -2 \end{array}\right| \longrightarrow \text{Las derivadas laterales existen, pero son distintas; por tanto, } h(x) \text{ no es derivable en } x = -1.$$

Así, $h(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

$h''(x) = 0$ si $x \neq 1$

78. **Página 156**

a) $f'(x) = \dfrac{(1-x) - (1-x)(-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{2}{(1-x)^2}$ $\quad f''(x) = -\dfrac{4}{(1-x)^3}$ $\quad f'''(x) = \dfrac{12}{(1-x)^4}$ $\quad f^{(IV)}(x) = -\dfrac{48}{(1-x)^5}$

La derivada n-ésima es: $f^{n)}(x) = (-1)^{n-1} \dfrac{2 \cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$

b) $g'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$ $\quad g''(x) = 2 \cos 2x$ $\quad g'''(x) = -4 \operatorname{sen} 2x$ $\quad g^{(IV)}(x) = -8 \cos 2x$

$g^{V)}(x) = 16 \operatorname{sen} 2x$

Así, la derivada n-ésima puede calcularse según las expresiones:

$$g^{n)} = \begin{cases} g^{2k-1)}(x) = (-1)^{k+1} 2^{2k-2} \operatorname{sen} 2x \\ g^{2k)}(x) = (-1)^{k+1} 2^{2k-1} \cos 2x \end{cases} \text{ para } k = 1, 2, 3\ldots$$

c) $h'(x) = x^{-1}$ $\quad h''(x) = -x^{-2}$ $\quad h'''(x) = 2x^{-3}$ $\quad h^{IV)}(x) = -6x^{-4}$

La derivada n-ésima es: $h^{n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)!x^{-n}$

79. **Página 156**

a) $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

b) $y' = \frac{6}{x^3} - 1$

c) $y' = 3e^{-x}\ 1 - x(1 - \ln 3)$

d) $y' = e^{-x}\ x^2 - x - 1$

e) $y' = \frac{-1}{x-1\sqrt{1-x^2}}$

f) $y' = \frac{-4x-9}{x-3^4}$

80. **Página 157**

a) $y' = \frac{4x-9}{x\ x-3}$

b) $y' = \frac{x}{x^2-2}$

c) $y' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

d) $y' = \frac{15x^2}{(5x^3-1)\ \ln 2}$

81. **Página 157**

a) $y' = \frac{4}{sen\,4x}$

b) $y' = -6x \cdot tg\ x^2 - 1$

c) $\frac{20x}{(x^4-25)\cdot \ln 2}$

d) $y' = \frac{1}{2x - 2x^2}$

e) $y' = \frac{1 - sen^2 x - 2x\,sen(2x)}{2x \cdot \ln 10 \cdot (sen^2 x + 1)}$

82. **Página 157**

a) $y' = -\frac{16x}{x^2-4^{\ 2}}$

b) $y' = \frac{2x^2-2x-1}{x-1^{\ 2}x^2}$

c) $y' = \frac{7}{2\sqrt{x}} - \frac{8}{3\sqrt[3]{x^2}}$

d) $y' = e^x\ x - 1$

83. **Página 157**

a) $y' = \frac{10x}{3\sqrt[3]{5x^{2\ 2}}} = \frac{10}{3\sqrt[3]{25x}}$

b) $y' = \frac{-1}{x-3^{\ 2}}$

c) $y' = \frac{-x\ \ x+2}{x-1^{\ 2}}$

d) $y' = -15x^2 + 2x\,sen\,x - x^2 cos\,x$

e) $y' \quad \frac{1}{x\ln 2} \quad 2^x \ln 2$

84. **Página 157**

a) $y' = \dfrac{2xe^x - x^2 + 1\ e^x}{e^x{}^2} = \dfrac{-x^2 - 2x - 1}{e^x}$

b) $y' = \dfrac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln x{}^2} = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

c) $y' - \dfrac{-\sqrt{x-1}}{x-1{}^2\sqrt{x-1}}$

d) $y' = \dfrac{2\ x-2\ \ x-1 - \ x-2\ {}^2}{x-1{}^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{x-1{}^2}$

e) $y' = \dfrac{-2x^3 - 4x}{e^{x^2}}$

f) $y' = \dfrac{-4x^3 - 3x^2 - 2}{2\sqrt{\frac{2x-1}{x^3-1}}\ x^3 - 1{}^2}$

85. **Página 157**

a) $y' - 3^{x^2+4} \ln 3 \cdot 2x$

b) $y'\ \ 15x^4\ \ x^5\ \ 2^{\ 2}$

c) $y' = \dfrac{1}{3}\ x^3 - 2x\ {}^{-\frac{2}{3}} \cdot\ 3x^2 - 2\ = \dfrac{3x^2 - 2}{3\sqrt[3]{x^3 - 2x\ {}^2}}$

d) $y' - -10xe^{-x^2}$

e) $y' = \dfrac{-5x - 6}{2x^4\sqrt{x-1}}$

86. **Página 157**

a) $y' = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2 - 1}}$

b) $y' - 2xe^{x^2-7}$

c) $y'\ \ 2\,sen\,x\ \ cos\,x$

d) $y' - 2^{sen\,x} \cdot \ln 2 \cdot cos\,x$

87. **Página 157**

a) $y' = 12 \cdot \dfrac{1}{2}\ 3x^2 + x\ {}^{-\frac{1}{2}} \cdot\ 6x - 1\ = \dfrac{36x - 6}{\sqrt{3x^2 - x}}$

b) $y' = \dfrac{cos\,x^2 \cdot 2x}{sen\,x^2} = 2x\,cotg\,x^2$

c) $y' = (8x - 5)\ \ 3^x - (4x^2 - 5x - 1) \cdot 3^x \cdot \ln 3$

88. **Página 157**

a) $y' = 4tg\ \ 2x + 3\ \ \ 1 + tg^2\ \ 2x + 3$

b) $y' = \dfrac{3x^2}{1 - \ x^3 + 6\ {}^2}$

c) $y' = \dfrac{1}{2}\ \ln(3x - 5)\ {}^{-\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{3}{3x - 5} = \dfrac{3}{2(3x - 5)\sqrt{\ln(3x - 5)}}$

89. **Página 157**

a) $y' = \frac{1}{4}\ 5x^3 - 1\ ^{-\frac{3}{4}} \cdot 15x^2 = \frac{15x^2}{4\sqrt[4]{5x^3 - 1\ ^3}}$

b) $y' = 2\,arc\,sen\,x - \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $y' = \frac{2}{3}\ 5x - 2\ ^{-\frac{1}{3}} \cdot 5 = \frac{10}{3\sqrt[3]{5x-2}}$

90. **Página 157**

a) $y' = -\frac{4x}{x^4 - 4}$

b) $y' = \frac{\cos x}{2\,sen\,x}$

c) $y' = -4\ \ tg^2(\cos(2x)) + 1\ \ sen(2x) \cdot tg(\cos(2x))$

d) $y' = -\frac{2x}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{-4x^2 - 1}}$

91. **Página 157**

a) $y' - -2e^{\cos 2x} \cdot sen^2 2x - 2\cos 2x \cdot e^{\cos 2x}$

b) $y' = -10\ \ tg^2(-5x + 1) + 1 \cdot tg(-5x - 1)$

c) $y' - -6(2x - 1)^2 \cdot sen((2x - 1)^3)$

d) $y' - -6\cos^2(2x - 1) \cdot sen(2x - 1)$

92. **Página 157**

a) $y' = \frac{2x - e^x}{x^2 - e^x}$

b) $y' = \frac{4x}{x^2 - 1}$

c) $y' - 2 - \frac{1}{x}$

d) $y' - \frac{2x^2 - 9x - 3}{3x\ \ x^2 - 2x - 3}$

e) $y' = -\frac{x\,sen\,x - \cos x - 1}{x - x\cos x}$

93. **Página 157**

a) $y' = \frac{4x^2 - 2}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $y' = -\frac{\sqrt[3]{cotgx} \cdot cosec\,x \cdot sec\,x}{3}$

c) $y'\ \ \frac{1}{2} cosec\,x \cdot cotg^2 x\ \ \mathrm{I}\ cosec^2 x$

d) $y' - -2sen\ 2 - x\ \cos\ 2 - x\ \ - -sen\ 4 - 2x$

94. **Página 157**

a) $y' - \frac{-x\,sen\,x - sen\,x + x\cos x}{e^x}$

b) $y' = \frac{2^x \ln 2}{2^x - 1}$

c) $y' - -\frac{x\,sen\,x - 2\cos x}{x^3}$

d) $y' = \frac{sen\left|\frac{1}{x}\right| - \cos\left|\frac{1}{x}\right|}{x^2}$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Página 158

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Meterse en la piscina en verano para refrescarse, encender la calefacción para calentarse o el aire acondicionado, utilizar cualquier electrodoméstico o artículo electrónico que libera energía calórica, utilizar una sartén u olla, echar hielos en la bebida…

2. Página 158

El punto de equilibrio térmico es la temperatura a la que llegan cuerpo y medio simultáneamente y que hace que no haya más variación de temperatura (en el sentido de bajar una y subir la otra).

3. Página 158

Lo que ocurrirá es que tenderán a bajar una y subir otra hasta que lleguen a la misma temperatura y se equilibren.

4. Página 158

• Primera ley del movimiento: «todo cuerpo permanece en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme, salvo que actúen fuerzas sobre él que le obliguen a cambiar de estado».

• Segunda ley del movimiento: «la fuerza neta sobre un objeto es igual a la tasa de variación temporal del producto de su masa y velocidad».

• Tercera ley del movimiento: «a cada acción le corresponde una reacción igual y en sentido opuesto».

• Ley de la gravitación universal: la fuerza de atracción entre dos objetos es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.

• Teoría de las mareas: Isaac Newton realizó varios estudios del comportamiento de las mareas y calculó la altura de estas según la fecha del mes, la estación del año y la latitud. La explicación que dio, es la que se acepta actualmente.

• Teoría del color: descubrió que la luz procedente del sol (la luz blanca) se puede descomponer en colores.

Aplicaciones de la derivada

7

ACTIVIDADES

1. Página 160

a) $f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6(1+h)^2-1-7}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6h^2-12h+6-6}{h} = \lim_{h\to 0}(6h-12) = -12$

La pendiente de la recta tangente es -12.

b) $f'(1) \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(1 \quad h) \quad f(1)}{h} \quad \lim_{h\to 0} \frac{(1 \quad h)^3 \quad 1}{h} \quad \lim_{h\to 0} \frac{h^3 \quad 3h^2 \quad 3h \quad 1 \quad 1}{h} \quad \lim_{h\to 0}(h^2 \quad 3h \quad 3) \quad 3$

La pendiente de la recta tangente es 3.

2. Página 160

a) $f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1-h}-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}-1)}{h(\sqrt{1-h}+1)} = \lim_{h\to 0} \frac{1-h-1}{h(\sqrt{1-h}+1)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-h}+1} = \frac{1}{2}$

La pendiente de la recta tangente es $\frac{1}{2}$.

b) $f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{f(4-h)-f(4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4-h}-2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{4+h}-2)(\sqrt{4-h}+2)}{h(\sqrt{4-h}+2)} = \lim_{h\to 0} \frac{4-h-4}{h(\sqrt{4+h}-2)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{4-h}+2} = \frac{1}{4}$

La pendiente de la recta tangente es $\frac{1}{4}$.

3. Página 161

$f'(\quad 1) \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(\quad 1 \quad h) \quad f(\quad 1)}{h} \quad \lim_{h\to 0} \frac{(\quad 1 \quad h)^2 \; \mathrm{I} \; 3 \quad 4}{h} \quad \lim_{h\to 0} \frac{2h \quad h^2}{h} \quad \lim_{h\to 0}(\quad 2 \; \mathrm{I} \; h) \quad 2$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 4 = -2(x + 1) \rightarrow y = -2x + 2$.

La ecuación de la recta normal es: $y - 4 = \frac{1}{2}(x + 1) \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$.

4. Página 161

$f(1) = 5$

$f'(1) \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(1 \quad h) \quad f(1)}{h} \quad \lim_{h\to 0} \frac{2(1 \quad h)^3 \quad 3 \quad 5}{h} \quad \lim_{h\to 0} \frac{2h^3 \; \mathrm{I} \; 6h^2 \; \mathrm{I} \; 6h}{h} \quad \lim_{h\to 0}(2h^2 \quad 6h \quad 6) \quad 6$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 5 = 6(x - 1) \rightarrow y = 6x - 1$.

$f(-1) = 1$

$f'(\quad 1) \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(\quad 1 \; \mathrm{I} \; h) \quad f(\quad 1)}{h} \quad \lim_{h\to 0} \frac{2(\quad 1 \quad h)^3 \; \mathrm{I} \; 3 \quad 1}{h} \quad \lim_{h\to 0} \frac{2h^3 \quad 6h^2 \quad 6h}{h} \quad \lim_{h\to 0}(2h^2 \quad 6h \; \mathrm{I} \; 6) \quad 6$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 1 = 6(x - 1) \rightarrow y = 6x + 7$.

Las rectas son paralelas a la recta $y = 6x$, porque su pendiente es 6.

5. **Página 162**

a) $f(x)$ x^2 $3x$ Dom $f(x)=\mathbb{R}$

$f'(x)=-2x+3$ $f'(x)$ 0 x $\frac{3}{2}$

Damos valores a la izquierda y a la derecha de x $\frac{3}{2}$:

$f'(1)=1>0 \longrightarrow f(x)$ es creciente a la izquierda de x $\frac{3}{2}$

$f'(2)=-1<0 \longrightarrow f(x)$ es decreciente a la derecha de x $\frac{3}{2}$.

Por tanto, $f(x)$ es creciente en $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$ y decreciente en $\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$.

b) $f(x)$ $\frac{3}{x \quad 2}$ Dom $f(x)=\mathbb{R}-2$

$f'(x)$ $\frac{3}{(x \quad 2)^2}$ $f'(x)=0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$f(x)$ tiene asíntota vertical en $x=2$.

$f'(0)$ $\frac{3}{4}>0$ $f'(3)=-3<0$

Por tanto, $f(x)$ es decreciente en $(-\infty,2)\cup(2,\infty)$.

6. **Página 162**

$$f\ x \quad \begin{cases} 2 \quad x^2 & \text{si} \quad x<1 \\ x^2 \quad 6x \quad 8 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Caso $x<1$:

$f(x)=2-x^2$ $f'(x)=-2x$ $f'(x)=0 \rightarrow x=0$

Estudiamos $f'(x)$ a la izquierda y derecha del punto $x=0$:

$f'(-1)=2>0$ $f'(1)=-2<0$

Es decir, $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, 1)$.

Caso $x>1$:

$f(x)$ x^2 $6x+8$ $f'(x)=2x-6$ $f'(x)=0 \rightarrow x=3$

Estudiamos $f'(x)$ a la izquierda y derecha del punto $x=3$:

$f'(2)=-2<0$ $f'(4)=2>0$

Es decir, $f(x)$ es decreciente en $(1, 3)$ y creciente en $(3, -\infty)$.

Por tanto, $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)\cup(3, +\infty)$ y decreciente en $(0, 1)\cup(1, 3)$.

7. **Página 163**

a) $f(x) \quad x^4 \quad 2x^2 \mid 1$ $\qquad$ $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

$f'(x) \quad 4x^3 \quad 4x \quad 4x(x^2 \quad 1)$ $\qquad$ $f'(x) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = +1$

Estudiamos $f'(x)$ en torno a los puntos $x = -1$, $x = 0$ y $x = +1$.

$f'(-2) = -24 < 0$ $\qquad$ $f'\left(\frac{1}{2}\right) \quad 2\left(\frac{1}{4} \quad 1\right) \quad \frac{3}{2} > 0$ $\qquad$ $f'\left(\frac{1}{2}\right) \quad 2\left(\frac{1}{4} \quad 1\right) \quad \frac{3}{2} < 0$ $\qquad$ $f'(2) = 24 > 0$

Por tanto, $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ y creciente en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{1 - x^2}$ $\qquad$ $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

$f'(x) \quad \dfrac{4x}{(1 \quad x^2)^2}$ $\qquad$ $f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$

Estudiamos un punto a la izquierda del 0 y otro a la derecha.

$f'(\ 2) \quad \dfrac{8}{25} < 0$ $\qquad$ $f'(2) \quad \dfrac{8}{25} > 0$

Por tanto, $f(x)$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y creciente en el intervalo $(0, -\infty)$.

8. **Página 163**

$f(x) \quad \dfrac{x^3}{1 \quad x^2}$ $\qquad$ $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \ -1, 1$ $\rightarrow$ Hay asíntotas verticales en $x = 1$ y $x = -1$.

$f'(x) = \dfrac{x^2(3 - x^2)}{(1 - x^2)^2} \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = -\sqrt{3}$

$f'(\ 2) \quad \dfrac{4}{9} < 0$ $\qquad$ $f'\left(\dfrac{3}{2}\right) \quad \dfrac{27}{25} > 0$ $\qquad$ $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) \quad \dfrac{11}{9} > 0$

$f'\left(\dfrac{1}{2}\right) \quad \dfrac{11}{9} > 0$ $\qquad$ $f'\left(\dfrac{3}{2}\right) \quad \dfrac{27}{25} > 0$ $\qquad$ $f'(2) \quad \dfrac{4}{9} < 0$

En $x = -\sqrt{3}$ se alcanza el mínimo relativo y en $x = \sqrt{3}$ el máximo relativo.

Las coordenadas de los puntos en los que alcanza dichos valores son:

$$\left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \left(\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

9. **Página 164**

a) $f(x) \quad \dfrac{x^2 \quad 1}{x^3}$ $\qquad$ $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \ 0$

$f'(x) \quad \dfrac{3 \quad x^2}{x^4}$ $\qquad$ $f'(x) = 0 \rightarrow x = +\sqrt{3}$

$f''(x) \quad \dfrac{2(x^2 \quad 6)}{x^5}$ $\qquad$ $f''(\ \sqrt{3}) \quad \dfrac{2(3 \quad 6)}{(\ \sqrt{3})^5} \quad \dfrac{6}{\sqrt{3}^5} > 0$ y $f''(\sqrt{3}) \quad \dfrac{2(3 \quad 6)}{(\sqrt{3})^5} \quad \dfrac{6}{\sqrt{3}^5} < 0$

Es decir, en $x = \sqrt{3}$ se alcanza un máximo relativo y en $x = -\sqrt{3}$ un mínimo relativo.

b) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^6-2}$ $\quad$ Dom $f(x)=\mathbb{R}$

$f'(x)=-\dfrac{4x(x^6-1)}{(x^6-2)^2}$ $\quad$ $f'(x)=0 \rightarrow x=0, x=\pm 1$

$f''(x)=\dfrac{4(5x^{12}-25x^6-2)}{(x^6-2)^3}$

$f''(-1)$ $\dfrac{4(5 \quad 25 \quad 2)}{(1 \quad 2)^3}$ $\dfrac{8}{3}<0$ $\quad$ $f''(0)=1>0$ $\quad$ $f''(1)$ $\dfrac{4(5 \quad 25 \quad 2)}{(1 \quad 2)^3}$ $\dfrac{8}{3}<0$

Es decir, en $x=0$ se alcanza un mínimo relativo de $f(x)$, y en $x=-1$ y $x=1$, los máximos relativos.

10. Página 164

$f(x)$ $\dfrac{x \quad 3}{x^3 \quad x^2 \quad 6x}$ $\quad$ Dom $f(x)=\mathbb{R}-\{-3, 0, 2\}$

$f'(x)=\dfrac{-2x^3-10x^2-6x-18}{x^2(x^2-x-6)^2}=-\dfrac{2(x-1)}{(x-2)^2x^2}$ $\quad$ $f'(x)=0 \rightarrow x=1$

$f''(x)=\dfrac{2(3x^2-6x-4)}{(x-2)^3x^3} \rightarrow f''(1)=-2<0$

Es decir, $f(x)$ alcanza el máximo relativo en $x=1$.

11. Página 165

a) $f(x)=7x^3-x^2-x+2$ $\quad$ Dom $f(x)=\mathbb{R}$

$f'(x)=21x^2-2x-1$

$f''(x)=42x-2$ $\quad$ $f''(x) \quad 0 \quad x \quad \dfrac{1}{21}$

$f''(0)=-2<0$ $\quad$ $f''(1)=40>0$

Por tanto, $f(x)$ es convexa en $\left(-\infty, \dfrac{1}{21}\right)$ y cóncava en $\left(\dfrac{1}{21}, +\infty\right)$.

b) $g(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ $\quad$ Dom $f(x)=\mathbb{R}$

$g'(x)=\dfrac{x^2\cdot(x^2+3)}{(x^2-1)^2}$ $\quad$ $g''(x)=-\dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2-1)^3}$ $\quad$ $g''(x)=0 \rightarrow x=0, x=\pm\sqrt{3}$

$g''(-2)>0$ $\quad$ $g''(-1)<0$ $\quad$ $g''(1)>0$ $\quad$ $g''(2)<0$

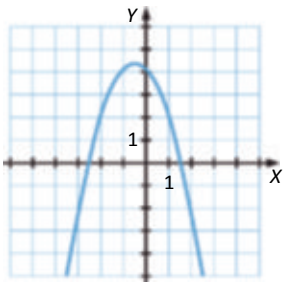
Por tanto, $g(x)$ es cóncava en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$ y convexa en $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

12. Página 165

a) $f(x)=-x^2-x+4$ $\quad$ Dom $f(x)=\mathbb{R}$

$f'(x)=-2x-1$ $\quad$ $f''(x)=-2<0$

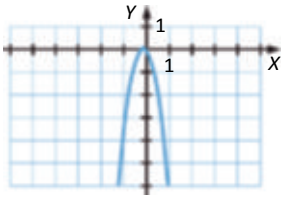
Por tanto, $f(x)$ es convexa $\forall x \in \mathbb{R}$.



b) $g(x) = -x - 5x^2$ Dom $f(x) = \mathbb{R}$

$g'(x) = -1 - 10x$ $g''(x) = -10 < 0$

Es decir, $g(x)$ es convexa $\forall x \in \mathbb{R}$.



13. **Página 166**

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$ Dom $f(x) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 + 6x$ $f''(x) = 6x - 6$ $f''(x) = 0 \rightarrow x = -1$

$f''(-2) = -6 < 0$ $f''(0) = 6 > 0$

Por tanto:

$f(x)$ es convexa en $(-\infty, -1)$ y cóncava en $(-1, +\infty)$.

$f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = -1$.

b) $g(x)$ $\frac{x \quad 1}{x^2 \quad 7x}$ Dom $g(x) = \mathbb{R} - \{-7, 0\}$

$g'(x) = \frac{-x^2 - 2x - 7}{(x-7)^2 x^2}$ $g''(x) = \frac{2(x^3 - 3x^2 - 21x - 49)}{(x-7)^3 x^3}$

$g''(x) = 0 \rightarrow x^3 - 3x^2 - 21x - 49 = 0 \rightarrow x = 7$

$g''(-8) < 0$ $g''(-6) \not< 0$ $g''(6) < 0$ $g''(8) > 0$

Por tanto:

$g(x)$ es convexa en $(-\infty, -7) \cup (0, 7)$ y cóncava en $(-7, 0) \cup (7, +\infty)$.

$g(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = 7$.

14. **Página 166**

$f(x) = x^3 + ax^2 - 3$ Dom $f(x) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax$ $f''(x) = 6x - 2a$

$f''(x) \quad 0 \quad x \quad \frac{a}{3}$

Como existe punto de inflexión en $x = 1 \rightarrow \frac{a}{3} \quad 1 \quad a \quad 3 \rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 - 3$

Estudiamos puntos a la izquierda y derecha de $x = 1$:

$f''(0) = -6 < 0$ $f''(2) = 6 > 0$

Es decir:

$f(x)$ es cóncava en $(-\infty, 1)$ y convexa en $(1, -\infty)$.

Las coordenadas del punto de inflexión son $1, f(1) - (1, 1)$.

15. **Página 167**

a) $f(x) \quad \frac{x^2 \quad 1}{2x^3}$ $\qquad$ Dom $f(x) =$ ℝ $-$ 0

$f'(x) \quad \frac{3 \quad x^2}{2x^4}$ $\qquad$ $f''(x) \quad \frac{x^2 \quad 6}{x^5}$ $\qquad$ $f'''(x) \quad \frac{30 \quad 3x^2}{x^6}$

$f''(x) - 0 \rightarrow x - \pm\sqrt{6}$

$f'''(\sqrt{6}) \quad \frac{30 \quad 18}{6^3} \cdot 0$ $\qquad$ $f'''(\sqrt{6}) \quad \frac{30 \quad 18}{6^3} \quad 0$

Es decir, $f(x)$ tiene puntos de inflexión en $x = -\sqrt{6}, x = \sqrt{6}$.

b) $g(x) \quad \frac{x}{x^2 \quad 7}$ $\qquad$ Dom $f(x) =$ ℝ $- \quad -\sqrt{7}, \sqrt{7}$

$g'(x) = \frac{x^2 - 7}{(x^2 - 7)^2}$ $\qquad$ $g''(x) = -\frac{2x(x^2 - 21)}{(x^2 - 7)^3}$ $\qquad$ $g'''(x) = \frac{6(x^4 - 42x^2 + 49)}{(x^2 - 7)^4}$

$g''(x) = 0 - x = 0$

$g'''(0) \quad \frac{6 \cdot 49}{(\quad 7)^4} \quad 0$

Por tanto, $g(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

16. **Página 167**

a) $f(x) = 2x^3$ $\qquad$ $f'(x) = 6x^2$ $\qquad$ $f''(x) = 12x$ $\qquad$ $f'''(x) = 12$

$f'(x) = 0 - x = 0 \rightarrow$ Posible máximo o mínimo.

$f''(x) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Posible punto de inflexión.

$f'''(0) = 6 \neq 0 \rightarrow$ El orden es impar $\rightarrow$ $x = 0$ es punto de inflexión.

b) $f(x) = -3x^4$

$f'(x) = -12x^3$ $\qquad$ $f''(x) = -36x^2$ $\qquad$ $f'''(x) = -72x$ $\qquad$ $f^{(IV)}(x) = -72$

$f'(x) = 0 - x = 0 \rightarrow$ Posible máximo o mínimo.

$f''(x) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Posible punto de inflexión.

$f'''(0) = 0$.

$f^{(IV)}(0) = -72 \neq 0 \rightarrow$ El orden es par y $f^{(IV)}(0) < 0 \rightarrow$ $x = 0$ es máximo relativo.

c) $f(x) = 6x^5$

$f'(x) = 30x^4$ $\qquad$ $f''(x) = 120x^3$ $\qquad$ $f'''(x) = 360x^2$ $\qquad$ $f^{(IV)}(x) = 720x$ $\qquad$ $f^{(V)}(x) = 720$

$f'(x) = 0 - x = 0 \rightarrow$ Posible máximo o mínimo.

$f''(x) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Posible punto de inflexión.

$f'''(0) = 0$ $\qquad$ $f^{(IV)}(0) = 0$

$f^{(V)}(0) = 720 \neq 0 \rightarrow$ El orden es impar $\rightarrow$ $x = 0$ es punto de inflexión.

17. **Página 168**

$B(x) = I(x) - C(x) = 60x - x^2 - (x^2 - 12x - 120) = -2x^2 - 72x - 120$

Calculamos el máximo de la función $B(x)$:

$B'(x) = -4x + 72$ $B'(x) = 0 \rightarrow x = 18$

$B''(x) = -4$ $B''(18) = -4 \rightarrow x = 18$ es máximo relativo.

El beneficio máximo se obtiene para una producción de 18 unidades, y el beneficio máximo es:

$B(18)$ $2 \cdot 18^2$ $72 \cdot 18$ 120 528 €

18. **Página 168**

Buscamos el máximo global de la función concentración $f(t) - 300t(3 - t) - 900t - 300t^2$:

$f'(t) = 900 - 600t$ $f'(t)$ 0 $\cdot t$ $\frac{3}{2}$

$f''(t) = -600$ $f''\left(\frac{3}{2}\right)$ $600 \cdot 0 \rightarrow t$ $\frac{3}{2}$ es un máximo de $f(t)$.

La máxima concentración se obtendrá en t $\frac{3}{2}$.

19. **Página 169**

Definimos dos sumandos x, y tales que $x - y = 90$.

Queremos que estos sumandos minimicen, además, la expresión $f(x, y) = x^2 - 2y^2$.

Reducimos la función a una sola variable:

$y = 90 - x \rightarrow f(x) = x^2 - 2(90 - x)^2$

$f'(x) = 6x - 360$ $f'(x) = 0 - x = 60$

$f''(x) = 6$ $f''(60) = 6 \cdot 0 \rightarrow$ En $x = 60$ hay un mínimo relativo.

Así, $x = 60$ e $y = 30$ minimizan la función $f(x)$.

20. **Página 169**

l: longitud del lado de la base en cm h: altura del prisma en cm

$P_{\text{Cara}} = 30 \rightarrow 2(l - h) = 30 \rightarrow h = 15 - l$

La función que queremos maximizar es:

$V(l, h) = l^2 h \xrightarrow{h = 15 - l} V(l) = l^2(15 - l)$

$V'(l) = 3l(10 - l)$ $V'(l) = 0 \rightarrow l = 0, l = 10$ La solución válida es $l = 10$

$V''(l) = 30 - 6l \rightarrow V''(10) = -30 \cdot 0 \rightarrow$ En $l = 10$ se alcanza el máximo.

Por tanto, las dimensiones que debe tener el prisma para cumplir las condiciones dadas son:

$l = 10$ cm $h = 5$ cm

SABER HACER

21. **Página 170**

Primero se halla la derivada de la función: $f'(x) = \ln x + 1$

Después se calcula la derivada de la función en el punto, que es la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto: $f'(e) = \ln e + 1 = 2$

Se calcula el valor de la función en el punto: $f(e) = e \cdot \ln e = e$

Así: $y - e = 2(x - e) \rightarrow y = 2x - e$

22. **Página 170**

Primero se calcula la pendiente de las rectas tangentes. Como son paralelas a la bisectriz del primer cuadrante, forman un ángulo de 45º:

$$m = tg\,45^\circ \rightarrow m = 1$$

Después se halla la derivada de la función: $f'(x) = 9x^2$.

A continuación se calcula la derivada de la función en el punto:

$$f'(a) = 9a^2 \rightarrow 9a^2 = 1 \rightarrow a = \pm\frac{1}{3}$$

Y para terminar, se hallan los puntos $(a, f(a)) = \left\{\left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{19}{9}\right)\right.$

$\left.\left(-\frac{1}{3}, f\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{17}{9}\right)\right\}$

23. **Página 171**

Primero calculamos la derivada de $f(x) = ax^3 - bx - c$:

$$f'(x) = 3ax^2 + b$$

Después planteamos y resolvemos el sistema formado con las condiciones dadas:

- La ordenada en el origen es 1 $\rightarrow$ $f(0) = 1$
- Pasa por el punto (–1, 3) $\rightarrow$ $f(-1) = 3$
- Tiene un punto extremo relativo en (–1, 3) $\rightarrow$ $f'(-1) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} c = 1 \\ -a - b + c = 3 \\ 3a - b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = 1, b = -3, c = 1$$

La expresión algebraica es $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Estudiamos si en $x = -1$ se alcanza un máximo o mínimo relativo:

$f''(x) = 6x \rightarrow f''(-1) = -6 < 0 \rightarrow$ Se trata de un máximo.

24. **Página 171**

$f(x) = ax^4 - 3x^3 + 2x^2 - x$ $\quad f'(x) = 4ax^3 - 9x^2 + 4x - 1$ $\quad f''(x) = 12ax^2 - 18x + 4$

Buscamos a tal que $f''(x)$ no tenga raíces reales:

$$f''(x) = 12ax^2 - 18x + 4 \neq 0 \rightarrow x \quad \frac{18 \quad \sqrt{18^2 \quad 4 \ 12a \cdot 4}}{24a} \rightarrow 324 - 192a < 0 \rightarrow a > \frac{27}{16}$$

$f''(0) = 4$ $\rightarrow$La función es cóncava en todos sus puntos cuando $a > \frac{27}{16}$.

25. **Página 172**

Estudiamos el signo de $f'(x)$ con la monotonía de $f(x)$:

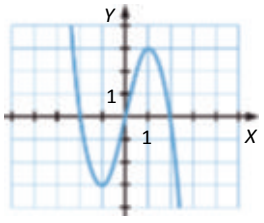
- $f(x)$ es creciente en $(-3,-2) \cup (0,2) \rightarrow f'(x) > 0$
- $f(x)$ es decreciente en $(-2,0) \cup (2,3) \rightarrow f'(x) < 0$
- $f(x)$ tiene máximos en $x = -2, x = 2 \rightarrow f'(-2) = f'(2) = 0$
- $f(x)$ tiene un mínimo en $x = 0 \rightarrow f'(0) = 0$

Estudiamos la concavidad y los puntos de inflexión:

- $f(x)$ es convexa en $(-3,-1) \cup (1,3)$ y cóncava en $(-1,1)$.
- $f(x)$ tiene puntos de inflexión en $x = -1, x = 1$.

Además, $f''(-1) = f''(1) = 0 \rightarrow f'(x)$ tiene extremos relativos en $x = -1, x = 1$.

Representamos $f'(x)$ con la información obtenida:



26. **Página 172**

Sean x e y los catetos del triángulo rectángulo. Por el teorema de Pitágoras, $5^2 = x^2 + y^2 \rightarrow y = \sqrt{25 - x^2}$.

La función que queremos maximizar es:

$$A(x,y) \quad \frac{x \cdot y}{2} \quad {}^{y=\sqrt{25-x^2}} \cdot A(x) \quad \frac{x \cdot \sqrt{25 \quad x^2}}{2}$$

$$A'(x) \quad \frac{25 \quad 2x^2}{2\sqrt{25 \quad x^2}} \qquad A'(x) = 0 \rightarrow 2x^2 = 25 \rightarrow x \quad \frac{5}{\sqrt{2}} \rightarrow \text{La solución válida es } x \quad \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

$$A''(x) = \frac{x \cdot (2x^2 - 75)}{2(25 - x^2)^{3/2}} \rightarrow A''\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\frac{5}{\sqrt{2}} \cdot (25 - 75)}{2 \cdot \left(\frac{25}{2}\right)^{3/2}} < 0 \rightarrow \text{En } x \quad \frac{5}{\sqrt{2}} \text{ se alcanza el máximo.}$$

Por tanto, los catetos del triángulo deben medir: $x \quad \frac{5}{\sqrt{2}}$ metros $\qquad y \quad \frac{5}{\sqrt{2}}$ metros

27. **Página 173**

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x-4 & \text{si } 0\le x\le 2\\ -\frac{3}{4}x^2+6x-6 & \text{si } 2\le x\le 6\\ \frac{1}{6}x-2 & \text{si } 6\le x\le 12\end{cases}\longrightarrow f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2} & \text{si } 0\le x\le 2\\ -\frac{3}{2}x-6 & \text{si } 2\le x\le 6\\ \frac{1}{6} & \text{si } 6\le x\le 12\end{cases}$$

$$f'(x)=0\longrightarrow -\frac{3}{2}x+6=0\longrightarrow x=4$$

Analizamos si $x=4$ es la abscisa de un máximo o un mínimo:

$f''(x)=-\frac{3}{2}$ si $2\le x\le 6\longrightarrow f''(4)=-\frac{3}{2}<0\longrightarrow$ Se trata de un máximo.

Calculamos el valor de $f(x)$ en los extremos de cada intervalo y también en $x=4$:

$f(0)=4,\ f(2)=3,\ f(6)=3,\ f(12)=4,\ f(4)=6$

Por tanto:

Existe un máximo, que se alcanza en el cuarto mes, con un beneficio de 6 000 €.

Hay dos mínimos que se dan en el segundo y sexto mes, con un beneficio de 3 000 € en cada uno.

28. **Página 173**

Se determina la función que se va a optimizar.

$n\longrightarrow$ n.º de unidades del artículo que se producen

$C(n)=2n^3+270n+2\,048\longrightarrow$ coste de producción de n unidades

La función que determina el coste de producción es $f(n)=\frac{2n^3+270n+2048}{n}$.

Se halla la derivada de la función que se va a optimizar:

$$f'(n)=\frac{(6n^2+270)n-(2n^3+270n+2048)}{n^2}=\frac{4n^3-2048}{n^2}$$

Se igual a cero la derivada para determinar los posibles máximos o mínimos.

$$f'(n)=0\ \cdot\ \frac{4n^3-2048}{n^2}=0\quad n=8$$

Se estudia el signo de $f'(n)$ para decidir si se trata de un máximo o un mínimo.

Si $n<8\longrightarrow f'(n)<0\longrightarrow f$ decrece

Si $n>8\longrightarrow f'(n)>0\longrightarrow f$ crece

Por lo tanto, $n=8$ es un mínimo.

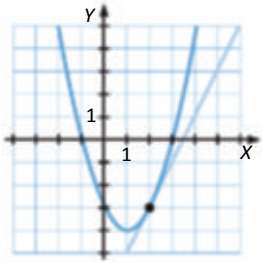
Hay que producir 8 unidades para que el coste sea mínimo.

ACTIVIDADES FINALES

29. **Página 174**

$f(2) = -3$ $f'(x) = 2x - 2 \rightarrow f'(2) = 2$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 3 = 2(x - 2) \rightarrow y = 2x - 7$



30. **Página 174**

$f(1) = 1 - a - 6 = 2 \rightarrow a = 5$

$f'(x) = 2x - 5 \rightarrow f'(1) = -3$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 2 = -3(x - 1) \rightarrow y = -3x + 5$

31. **Página 174**

a) $f(-1) = -1$ $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2} \rightarrow f'(-1) = -\dfrac{1}{2}$

La ecuación de la recta tangente es: $y = -1 = -\dfrac{1}{2}(x + 1) \cdot y = -\dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{2}$

b) $f(0) = \ln 1 = 0$ $f'(x) = \dfrac{3}{3x + 1} \cdot f'(0) = 3$

La ecuación de la recta tangente es: $y = 3x$

c) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$ $f'(x) = \cos x \cdot f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

La ecuación de la recta tangente es: $y = 2 = \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \cdot y = x - \dfrac{\pi - 4}{2}$

d) $f(-1) = 2$ $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2 - x}} \cdot f'(-1) = \dfrac{1}{2}$

La ecuación de la recta tangente es: $y = 2 = \dfrac{1}{2}(x + 1) \cdot y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{2}$

32. **Página 174**

$f(-1) = \ln 1 = 0$ $f'(x) = \dfrac{1}{2x + 3} \cdot f'(-1) = 1$

La ecuación de la recta tangente es: $y = x - 1$

La ecuación de la recta normal es: $y = -x - 1$

33. **Página 174**

$f\left(\frac{1}{2}\right) \quad e^{0} \quad 3 \quad 2$

$f'(x) \quad 4e^{4x+2} \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) \quad 4$

La ecuación de la recta tangente es: $y \quad 2 \quad 4\left(x \quad \frac{1}{2}\right) \cdot y \quad 4x$

34. **Página 174**

$\frac{x \quad 2}{x \quad 1} \quad 0 \cdot x \quad 2$ es el punto de corte de *f* con el eje de abscisas.

$f \; 2 - 0 \qquad f'(x) \quad \frac{x \quad 1 \quad x \quad 2}{x \quad 1^{2}} \quad \frac{3}{x \quad 1^{2}} \cdot f' \; 2 \quad \frac{1}{3}$

La ecuación de la recta tangente es: $y \quad \frac{1}{3} x \quad 2 \cdot y \quad \frac{x}{3} \quad \frac{2}{3}$

La ecuación de la recta normal es: $y \quad 3 \; x \quad 2 \cdot y \quad 3x \; \mathrm{I} \; 6$

35. **Página 174**

$f \; 3 = \sqrt{4} = 2$

$$f'(x) = \frac{2x \; 4 - x \; - \; x^{2} - 5}{2 \; 4 - x^{\;2} \sqrt{\frac{x^{2} - 5}{4 - x}}} = \frac{-x^{2} - 8x - 5}{2 \; 4 - x^{\;2} \sqrt{\frac{x^{2} - 5}{4 - x}}} \rightarrow f' \; 3 = \frac{10}{4}$$

La ecuación de la recta tangente es: $y \quad 2 \quad \frac{10}{4} x \quad 3 \cdot y \quad \frac{5}{2}x \quad \frac{11}{2}$

36. **Página 174**

$x^{3} - x^{2} - 6x - 1 = 1 - x^{3} + x^{2} - 6x = 0 \rightarrow x \; x^{2} - x - 6 \; = 0 - x = 0, x = 2, x = -3$

Tenemos que hallar las rectas que pasan por el punto (2, 1): $f' \; x \; - 3x^{2} + 2x - 6 - f' \; 2 \; - 10$

La ecuación de la recta tangente es: $y \quad 1 \quad 10 \; x \quad 2 \cdot y \quad 10x \quad 19$

La ecuación de la recta normal es: $y \quad 1 \quad \frac{1}{10} x \quad 2 \cdot y \quad \frac{1}{10}x \quad \frac{6}{5}$

37. **Página 174**

r pasa por A=(1, $f(1) = 4$) y B=(3, $f(3) = 8$) → Pendiente $\frac{8 \quad 4}{3 \quad 1} \quad 2$

$f' \; x \; - 2x - 2 - 2 \rightarrow x - 2 \rightarrow f \; 2 \; - 5$

La ecuación de la recta tangente a la parábola que es paralela a *r* es: $y - 5 - 2 \; x - 2 \rightarrow y - 2x + 1$

38. **Página 174**

$f'(x) = \frac{2}{x^2} \cdot \frac{2}{x^2} \quad 2 \cdot x^2 \quad 1 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix}$

$f(1) \quad 2 \qquad y \longrightarrow 2 = -2 + 4 \longrightarrow (1, 2)$ es un punto de la recta.

$f(\quad 1 \quad 2 \qquad y \longrightarrow -2 \neq (-2)\ (-1) - 4 \longrightarrow (-1, -2)$ no es un punto de la recta.

Por tanto, y puede ser tangente a la función f en el punto (1, 2).

39. **Página 174**

r pasa por $A=(2, f(2) = 0)$ y $B=(e + 1, f(e + 1) = 1) \longrightarrow$ Pendiente $\frac{1 \quad 0}{e \quad 1 \quad 2} \quad \frac{1}{e \quad 1}$

$f'(x) \quad \frac{1}{x \quad 1} \quad \frac{1}{e \quad 1} \cdot x \quad e \quad f(e) \quad \ln(e \quad 1)$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y \quad \ln e \quad 1 \quad \frac{1}{e \quad 1} x \quad e \qquad y \quad \frac{x}{e \quad 1} \quad \frac{e}{e \quad 1} \quad \ln e \quad 1$$

40. **Página 174**

a) $f'(x) \quad 2x \quad 2$

Si la recta tangente es paralela a la recta dada, entonces:

$$f'(x) = 2x - 2 = 4 \rightarrow x = 3 \qquad f(3) = 3 \longrightarrow P = (3, 3)$$

Así, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - 3 - 4\ x - 3 \ - y - 4x - 9 .$$

b) Resolvemos el sistema formado por la parábola y la recta:

$\begin{vmatrix} y & x^2 & 2x \\ y & 4x & 9 \end{vmatrix} \cdot x^2 \quad 2x \quad 4x \quad 9 \ \backslash\ x^2 \quad 6x \ \mathrm{I}\ 9 \quad 0 \cdot x \quad 3$

Es decir, únicamente se cortan en un punto.

41. **Página 174**

$f'(x) = 2x - b - f'(1) = 2 - b$

La bisectriz del primer cuadrante es la recta $y = x$.

Si la recta tangente es paralela a ella, entonces: $2 - b = 1 - b = -1$

Así, la ecuación de la función es de la forma: $y = x^2 - x + c$

Si pasa por el punto (1, 1) tenemos que: $1 = 1 - 1 - c \rightarrow c = 1$

Luego, la ecuación de la parábola es: $y = x^2 - x + 1$

42. **Página 174**

a) La recta tangente forma un ángulo de 45° con el eje de abscisas → m = *tg* 45° = 1

Buscamos los puntos que verifican que $f'(x) = 1$:

$$2x - 2 = 1 \rightarrow x = \frac{3}{2} \rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3 \cdot 2}{2} - 3 = -\frac{15}{4}$$

La ecuación de la recta tangente es: $y + \frac{15}{4} = x - \frac{3}{2} \cdot y = x - \frac{21}{4}$

b) La recta tangente es horizontal → Buscamos los puntos que verifican $f'(x) = 0$:

$f'(x) = 2x - 2 \rightarrow 2x - 2 = 0 \cdot x = 1 \cdot f(1) = -4$

La ecuación de la recta tangente es $y = -4$.

43. **Página 174**

La recta tangente es paralela a la recta $y = 2x - 123$ → Buscamos los puntos que verifican $f'(x) = 2$:

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \cdot 3x^2 - 1 = 2 \cdot x^2 - 1 = \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

- Si $x = 1 \cdot f(1) = -4$ y la ecuación de la recta tangente es: $y + 4 = 2(x - 1) \cdot y = 2x - 2$
- Si $x = -1 \cdot f(-1) = -4$ y la ecuación de la recta tangente es: $y + 4 = 2(x + 1) \cdot y = 2x + 6$

44. **Página 174**

Para que las rectas tangentes sean paralelas, debe ocurrir que $f'(1) = f'(-2)$.

$$f'(x) = 3kx^2 - 2x + 7k = \begin{cases} f'(1) = 3k - 2 + 7k \\ f'(-2) = 12k - 4 - 7k \end{cases} \rightarrow 9k = 2 \rightarrow k = \frac{2}{9}$$

Sustituyendo este valor → $\begin{cases} f'(1) = \frac{2}{9} \\ f'(-2) = \frac{2}{9} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(1) = \frac{-155}{9} \\ f(-2) = \frac{-154}{9} \end{cases}$

- Si $x = 1$, la ecuación de la recta tangente es $y + \frac{155}{9} = \frac{2}{9}(x - 1) \cdot y = \frac{2}{9}x - \frac{157}{9}$.
- Si $x = -1$, la ecuación de la recta tangente es $y + \frac{154}{9} = \frac{2}{9}(x + 2) \cdot y = \frac{2}{9}x - \frac{158}{9}$.

45. **Página 174**

$f(3) = 9a - 11 \quad f'(x) = 2ax - 5 \cdot f'(3) = 6a - 5$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 9a + 11 = (6a - 5)(x - 3) \rightarrow y = (6a - 5)x - 9a - 4$

La recta pasa por el punto (5, 0) → $6a \cdot 5 - 5 - 9a + 4 = 0 \cdot 21a = 21 \cdot a = 1$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es: $y = 2x - 3 \cdot y = x - 5$

La ecuación de la recta normal es: $y - 2 = x - 3 \rightarrow y = x - 1$

46. **Página 174**

a) $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 - m}}$

Para que sea paralela a $y = 2x - 3$ en $x = 2$ $\rightarrow f'(2) = 2$.

$$f'(2) = \frac{2}{\sqrt{4 - m}} = 2 \rightarrow 1 = 4 - m \rightarrow m = -3$$

El punto de tangencia es: $f(2) = \sqrt{4 - 3} = 1 \rightarrow (2, 1)$

b) Si la recta tangente pasa por $P(a, 5)$ y $Q(1, 1)$ $\rightarrow$ Pendiente $= \dfrac{5 - 1}{a - 1} = \dfrac{4}{a - 1}$.

Si $f(x)$ pasa por $P(a, 5)$ $\rightarrow f(a) = \sqrt{a^2 + m} = 5$.

$f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 - m}} \rightarrow f'(a) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - m}} = \dfrac{4}{a - 1}$ Sustituyendo el valor de $f(a) = 5$ en $f'(a)$:

$$\frac{a}{5} = \frac{4}{a - 1} \rightarrow a(a - 1) = 4 \cdot 5 \rightarrow a^2 - a - 20 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ a = -4 \end{cases}$$

Sustituyendo ahora en $f(a)$ los valores de a:

- Si $a = 5 \rightarrow f(5) = \sqrt{5^2 + m} = 5 \rightarrow 5^2 + m = 5^2 \rightarrow m = 0$
- Si $a = -4 \rightarrow f(-4) = \sqrt{(-4)^2 - m} = 5 \rightarrow (-4)^2 - m = 5^2 \rightarrow -m = 9$

47. **Página 174**

$$f(2) = 3 \qquad f'(x) = \frac{-2}{(x - 1)^2} \rightarrow f'(2) = -2$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 3 = -2(x - 2) \rightarrow y = -2x + 7$

Los puntos de corte de la función con los ejes son:

- Con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 7$
- Con el eje X: $y = 0 \rightarrow x = \dfrac{7}{2}$

Por tanto, el área del triángulo es: Área $= \dfrac{\frac{7}{2} \cdot 7}{2} = \dfrac{49}{4}$ u^2

48. **Página 174**

$$f(2) = \sqrt{2^2 - 5} = 3 \qquad f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}} \rightarrow f'(2) = \frac{2}{3}$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 3 = \dfrac{2}{3}(x - 2) \rightarrow y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{3}$

Los puntos de corte de la función con los ejes son:

- Con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = \dfrac{5}{3}$
- Con el eje X: $y = 0 \rightarrow x = -\dfrac{5}{2}$

Por tanto, el área del triángulo es: Área $= \dfrac{\left|0 - \left(-\frac{5}{2}\right)\right| \cdot \frac{5}{3}}{2} = \dfrac{25}{12}$ u^2

49. **Página 174**

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 + \ln\left(tg\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 3 - \ln 1 = 3$$

$$f'(x) = \left(\frac{tg\,x}{tg\,x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x \cdot tg\,x} = \frac{1}{\cos x \ sen\,x} \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{4}{2} = 2$$

La ecuación de la recta tangente es: $y \quad 3 \quad 2\left(x \quad \frac{\pi}{4}\right) \cdot y \quad 2x \quad \frac{6 \quad \pi}{2}$

Puntos de corte:

• Con el eje *Y*: $x \quad 0 \cdot y \quad \frac{6 \quad \pi}{2}$ • Con el eje *X:* $y \quad 0 \cdot x \quad \frac{\pi \quad 6}{4}$

Área $= \dfrac{\left(0 - \frac{\pi - 6}{4}\right) \cdot \left(\frac{6 - \pi}{2}\right)}{2} = \dfrac{6 - \pi^2}{16}$

50. **Página 174**

$f \quad 2 \quad 3 \qquad f\ 5 \quad 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-4}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f'(-2) = -4 \\ f'(5) = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Así, las ecuaciones de las rectas tangentes son:

$x = -2 \rightarrow y \quad 3 \quad 4\ x \quad 2 \cdot y \quad 4x \quad 5$

$x = 5 \rightarrow y \quad \frac{1}{6}\ x \quad 5 \cdot y \quad \frac{1}{6}x \quad \frac{5}{6}$

Puntos de corte:

• Entre las dos rectas: $4x \quad 5 \quad \frac{1}{6}x \quad \frac{5}{6} \quad \frac{25}{6}x \quad \frac{25}{6} \cdot \begin{matrix} x & 1 \\ y & 1 \end{matrix}$

• La primera recta con el eje *X:* $y \quad 0 \cdot x \quad \frac{5}{4}$

• La segunda recta con el eje *X:* $y = 0 \rightarrow x = 5$

Área $= \dfrac{\left(5 - \left|-\frac{5}{4}\right|\right) \cdot 0 - (-1)}{2} = \dfrac{25}{8}$

51. **Página 174**

La función corta al eje de abscisas $\rightarrow y \quad 0 \cdot f\ x \quad x \quad 1 \cdot e^x \quad 0 \cdot \begin{matrix} x & 1 & 0 \\ e^x & 0 & x \end{matrix} \cdot x \quad 1$

Así, la función corta al eje de abscisas en $P(-1, 0)$.

$f'\ x \quad e^x \ x \quad 1 \cdot e^x \quad e^x \quad 2 \quad x \cdot f'\ 1 \quad \frac{1}{e}$

La ecuación de la recta tangente es: $y \quad \frac{1}{e}\ x \quad 1$

La ecuación de la recta normal es: $y - -e \cdot x + 1 \; - \; y - -ex - e$

Corte de la recta tangente con el eje *Y*: $x \quad 0 \cdot y \quad \frac{1}{e}$

Corte de la recta normal con el eje *Y*: $x = 0 - y = -e$

Área $= \dfrac{\left|\frac{1}{e} - -e\right| \cdot 0 - -1}{2} = \dfrac{1 - e^2}{2e}$

52. **Página 174**

f(*x*) y *g*(*x*) pasan por $P(-1, 2) \rightarrow \quad f \quad 1 \quad 1 \quad a \; | \; b \quad 2 \quad g(-1) = c = 2$.

Tienen la misma recta tangente en $P \rightarrow f' \quad 1 \quad g' \quad 1$.

$f' \; x \quad 2x \quad a \; \cdot f' \quad 1 \quad 2 \; | \; a \qquad\qquad g' \; x \; = -2 \; e^{-x+1} \rightarrow g' \; -1 \; = -2$

Resolvemos el sistema formado por las tres ecuaciones obtenidas:

$$\begin{cases} -2 - a = -2 \\ 1 - a + b = 2 \rightarrow a = 0, b = 1, c = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

53. **Página 175**

$x = 3 \; - \; 9 - 16y^2 - 16 = 0 \; - \; 16y^2 = 7 \rightarrow y = \; | \; \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \rightarrow$ Se considera el punto $\left|3, \frac{\sqrt{7}}{4}\right|$.

$2x - 32yy' = 0 \; - \; 32yy' = -2x \rightarrow y' = -\dfrac{x}{16y}$

$y' \left|3, \dfrac{\sqrt{7}}{4}\right| = -\dfrac{3}{16 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}} = -\dfrac{3}{4\sqrt{7}} = -\dfrac{3\sqrt{7}}{28}$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - \frac{\sqrt{7}}{4} = -\frac{3\sqrt{7}}{28} \; x - 3 \; \rightarrow y = \frac{3\sqrt{7}}{28} x - \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

54. **Página 175**

$x = 4 \; - \; 64 - 9y^2 - 36 = 0 \rightarrow 9y^2 = 28 \rightarrow y = \quad \frac{2\sqrt{7}}{3} \quad \rightarrow$ Se considera el punto $\left|4, \frac{2\sqrt{7}}{3}\right|$.

$8x - 18yy' = 0 \rightarrow -18yy' = -8x \; - \; y' = \dfrac{4x}{9y}$

$y' \left|4, \dfrac{2\sqrt{7}}{3}\right| = \dfrac{16}{9 \cdot \frac{2\sqrt{7}}{3}} = \dfrac{8}{3\sqrt{7}} = \dfrac{8\sqrt{7}}{21}$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - \frac{2\sqrt{7}}{3} = \frac{8\sqrt{7}}{21} \; x - 4 \; - \; y = \frac{8\sqrt{7}}{21} x - \frac{6\sqrt{7}}{7}$$

55. **Página 175**

La circunferencia en cuestión tiene ecuación: $x\ \ 0^{\,2}\ \ y\ \ 0^{\,2}\ \ \sqrt{5}^{\,2}\ \ x^2\ \ y^2\ \ 5$

$y^2 = 5 - x^2 \rightarrow y = -\sqrt{5-x^2}$, donde: $\begin{cases} f\ x\ = \sqrt{5-x^2} \\ g\ x\ = -\sqrt{5-x^2} \end{cases}$

En primer lugar, para $f(x)$: $f\ 1\ \ 2 \qquad f'\ x\ = \dfrac{-2x}{2\sqrt{5-x^2}} \rightarrow f'\ 1\ = -\dfrac{1}{2}$

La ecuación de la recta tangente es: $y\ \ 2\ \ \dfrac{1}{2}\ x\ \ 1\ \cdot y\ \ \dfrac{1}{2}x\ \ \dfrac{5}{2}$

En segundo lugar, para $g(x)$: $g\ 1\ \ 2 \qquad g'\ x\ = \dfrac{x}{\sqrt{5-x^2}} \rightarrow g'\ 1\ = \dfrac{1}{2}$ ..

La ecuación de la recta tangente es: $y\ \ 2\ \ \dfrac{1}{2}\ x\ \ 1\ \cdot y\ \ \dfrac{1}{2}x\ \ \dfrac{5}{2}$

Calculamos el punto de corte de las dos rectas tangentes:

$\dfrac{1}{2}x\ \ \dfrac{5}{2}\ \ \dfrac{1}{2}x\ \ \dfrac{5}{2}\ \cdot x\ \ 5\ \cdot 5,0$

Calculamos el punto de corte de las rectas tangentes a $f(x)$ y $g(x)$ con el eje de ordenadas:

$x\ \ 0\ \cdot y\ \ 0\ \ \dfrac{5}{2}\ \ \dfrac{5}{2}\ \cdot \left(0,\dfrac{5}{2}\right) \qquad x\ \ 0\ \cdot y\ \ 0\ \ \dfrac{5}{2}\ \ \dfrac{5}{2}\ \cdot \left(0,\ \dfrac{5}{2}\right)$

$A = \dfrac{\left[\dfrac{5}{2} - \left(-\dfrac{5}{2}\right)\right]\cdot 5}{2} = \dfrac{25}{2}\ \text{u}^2$

56. **Página 175**

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - d \qquad f'(x) = 3ax^2 - 2bx - c$

- La pendiente de la recta tangente es nula $\rightarrow f'(0) = c = 0 \rightarrow c = 0$.

  La función pasa por el punto (0, 2) $\rightarrow f(0) = 2 \rightarrow d = 2$.

- La pendiente de esta recta tangente es 1 $\rightarrow f'(1) = 1 \rightarrow 3a + 2b = 1$.

  $x - y - 2 = 0 \xrightarrow{x=1} y = -1 \rightarrow$ La función pasa por el punto (1, –1) $\rightarrow f(1) = -1 \rightarrow a - b - 2 = -1 \rightarrow a - b = -3$.

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones anteriores:

$\begin{cases} 3a\ \ 2b\ \ 1 \\ a\ \ b\ \ 3 \end{cases} \cdot a\ \ 7, b\ \ 10 \rightarrow f(x) = 7x^3 - 10x^2 + 2$

57. **Página 175**

a) $y = -2x^2 + 3x \qquad \text{Dom}\, f(x) = \mathbb{R}$

$y' = -4x + 3 \qquad y'\ \ 0\ \ x\ \ \dfrac{3}{4} \qquad y'(1) = -1 \cdot 0 \qquad y'\ 0\ \ -3 \cdot 0$

La función es creciente en $\left(-\infty, \dfrac{3}{4}\right)$ y decreciente en $\left(\dfrac{3}{4}, +\infty\right)$.

Tiene un máximo relativo en $x\ \ \dfrac{3}{4}$.

b) $y = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 4$ $\quad \text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 + 6x^2 - 10x$ $\quad y' \quad 0 \quad \cdot \quad x \quad \frac{5}{2}, x \quad 0, x \quad 1$

$y'(-3) = -24 < 0$ $\quad y'(-1) = 12 > 0$ $\quad y'\left(\frac{1}{2}\right) \quad 3 < 0$ $\quad y'(2) = 36 > 0$

La función es decreciente en $\quad, \frac{5}{2}\big] \cup (0, 1)$ y creciente en $\left[\frac{5}{2}, 0\right] \cup (1, \quad)$.

Tiene mínimos relativos en $x \quad \frac{5}{2}$ y $x = 1$ y un máximo relativo en $x = 0$.

c) $y = 4x^3 - x^2 - x + 5$ $\quad \text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

$y' = 12x^2 - 2x - 1$ $\quad y' = 0 \rightarrow x = \frac{1 - \sqrt{13}}{12}, x = \frac{1 + \sqrt{13}}{12}$

$y'(-1) = 13$ $\quad y'(0) = -1$ $\quad y'(1) = 9$

La función es decreciente en $\left(\frac{1 - \sqrt{13}}{12}, \frac{1 - \sqrt{13}}{12}\right)$ y creciente en $\left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{13}}{12}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{12}, +\infty\right)$.

Tiene un mínimo relativo en $x = \frac{1 - \sqrt{13}}{12}$ y máximo relativo en $x = \frac{1 - \sqrt{13}}{12}$.

d) $y = x^5 - 5x^3$ $\quad \text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

$y' = 5x^4 - 15x^2$ $\quad y' = 0 \rightarrow 5x^2 \cdot (x^2 - 3) = 0 \rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{3}$

$y'(-2) = 20 > 0$ $\quad y'(-1) = -10 < 0$ $\quad y'(1) = -10 < 0$ $\quad y'(2) = 80 - 60 - 20 > 0$

La función es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, -\infty)$ y decreciente en $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Tiene máximos relativos en $x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$.

58. Página 175

a) $y = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases} \rightarrow y' = \begin{cases} 2x & \text{si } x \quad 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ $\qquad y'(x) = 0 \rightarrow x = 0$

$y'(-1) = -2 < 0$ $\quad y'\left(\frac{1}{2}\right) \quad 1 > 0$

$y(1^-) = y(1^+) = y(1) = 0 \rightarrow$ La función es continua en $x = 1$.

$y'(1^-) = 2 = y'(1^+) = 1 \rightarrow$ La función no es derivable en $x = 1$.

$y'(2) \quad \frac{1}{2} > 0$

La función es creciente en $(0, -\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$. Tiene el mínimo relativo en $x = 0$.

b) $y = |x^2 - 4| - 3 \rightarrow y = \begin{cases} x^2 - 7 & \text{si } x \in (-\infty, \sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, -\infty) \\ -x^2 - 1 & \text{si } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases}$

$y' = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in (-\infty, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, -\infty) \\ -2x & \text{si } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases}$ $\qquad y' = 0 \rightarrow x = 0$

$y'(-2) = -4 < 0$ $\quad y'(2) = 4 > 0$ $\quad y'(-1) = 2 > 0$ $\quad y'(1) = -2 < 0$

La función es creciente en $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$. Tiene máximo relativo en $x = 0$ y mínimos relativos en $x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}$.

59. **Página 175**

a) $f(x) = x^2(x-1)$ Dom $f(x) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x+2)$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(3x+2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{2}{3}$

$f'(-1) = 1 > 0$ $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} < 0$ $f'(1) = 5 > 0$

La función es creciente en $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (0, +\infty)$ y decreciente en $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$.

Tiene máximo relativo en $x = -\frac{2}{3}$ y mínimo relativo en $x = 0$.

b) $g(x) = 3x^3 - 7x - 2$ Dom $g(x) = \mathbb{R}$

$g'(x) = 9x^2 - 7$ $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 9x^2 = 7 \rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{7}}{3}$

$g'(-1) = 2 > 0$ $g'(0) = -7 < 0$ $g'(1) = 2 > 0$

La función es creciente en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{7}}{3}, -\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{\sqrt{7}}{3}\right)$.

Tiene máximo relativo en $x = -\frac{\sqrt{7}}{3}$ y mínimo relativo en $x = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

c) $h(x) = -x^4 + 3x^2 - 2x$ Dom $h(x) = \mathbb{R}$

$h'(x) = -4x^3 - 6x - 2$ $h'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(-4x^2 - 4x - 2) = 0 \rightarrow x = 1, x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$

$h'(-2) = 18 > 0$ $h'(0) = -2 < 0$ $h'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0$ $h'(2) = -22 < 0$

La función es creciente en $\left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ y decreciente en $\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \cup (1, -\infty)$.

Tiene máximos relativos en $x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ y $x = 1$ y mínimo relativo en $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

60. **Página 175**

a) $y = |x^2 - 2| \rightarrow y = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, -\infty) \\ -x^2 + 2 & \text{si } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases}$

$y' = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, -\infty) \\ -2x & \text{si } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases}$ $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$y'(-2) = -4 < 0$ $y'(-1) = 2 > 0$ $y'(1) = -2 < 0$ $y'(2) = 4 > 0$

La función es creciente en $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$.

Tiene mínimos relativos en $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$ y máximo relativo en $x = 0$.

b) $y = |-x^2 - 6x - 9| \rightarrow y = |-(x-3)^2| = (x-3)^2$

$y' = 2(x-3)$ $\qquad$ $y' = 0 \rightarrow x = 3$

$y'(0) = -6 < 0$ $\qquad$ $y'(4) = 2 > 0$

La función es creciente en $(3, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 3)$ y tiene un mínimo relativo en $x = 3$.

c) $y = |-x^2 - 5x - 6| \rightarrow y = \begin{cases} -x^2 - 5x - 6 & \text{si } x \in [2, 3] \\ x^2 - 5x - 6 & \text{si } x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty) \end{cases}$

$y' \quad \begin{cases} 2x \quad 5 & \text{si } x \in (2, 3) \\ 2x \quad 5 & \text{si } x \in (\quad , 2) \cup (3, \quad) \end{cases}$ $\qquad$ $y' \quad 0 \quad x \quad \frac{5}{2}$

$y'(0) = -5 < 0$ $\qquad$ $y'\left(\frac{11}{5}\right) \quad \frac{3}{5} > 0$ $\qquad$ $y'\left(\frac{13}{5}\right) \quad \frac{1}{5} < 0$ $\qquad$ $y'(4) = 3 > 0$

La función es creciente en $\left[2, \frac{5}{2}\right] \cup (3, \quad)$ y decreciente en $(\quad , 2) \cup \left[\frac{5}{2}, 3\right]$.

Tiene mínimos relativos en $x = 2$ y $x = 3$ y el máximo relativo en $x \quad \frac{5}{2}$.

61. **Página 175**

a) $f(x) \quad \frac{x^2 \quad 2x \quad 2}{x \quad 1}$ $\qquad$ Dom $f(x) = \mathbb{R} - \quad 1$

$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$ $\qquad$ $f'(x) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 2$

En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ se tiene $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $(0, 1) \cup (1, 2)$ se tiene $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

Así, $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = 0$ y un mínimo relativo en $x = 2$.

b) $g(x) \quad \frac{40 \quad 5x}{10 \quad x}$ $\qquad$ Dom $g(x) = \mathbb{R} - \quad 10$

$g'(x) \quad \frac{10}{(10 \quad x)^2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad 10 \rightarrow$ Por tanto, $g(x)$ es decreciente en todo su dominio.

c) $h(x) \quad \frac{7x^2 \quad 2}{x}$ $\qquad$ Dom $h(x) = \mathbb{R} - \quad 0$

$h'(x) \quad \frac{7x^2 \quad 2}{x^2}$ $\qquad$ $h'(x) \quad 0 \quad x \quad \sqrt{\frac{2}{7}}$

En $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{7}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{7}}, -\infty\right)$ se tiene $h'(x) > 0 \rightarrow h(x)$ es creciente.

En $\left(-\sqrt{\frac{2}{7}}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{\frac{2}{7}}\right)$ se tiene $h'(x) < 0 \rightarrow h(x)$ es decreciente.

La función tiene un máximo relativo en $x \quad \sqrt{\frac{2}{7}}$ y un mínimo relativo en $x \quad \sqrt{\frac{2}{7}}$.

d) $i(x)$ $\frac{x}{x^2 \quad 2}$ Dom $i(x) = \mathbb{R}$

$i'(x) = \frac{-x^2 - 2}{(x^2 - 2)^2}$ $i'(x) \quad 0 \cdot x \quad \pm\sqrt{2}$

En $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ se tiene $i'(x) < 0 \longrightarrow i(x)$ es decreciente.

En $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ se tiene $i'(x) > 0 \longrightarrow i(x)$ es creciente.

Así, $i(x)$ tiene un máximo relativo en $x = \sqrt{2}$ y un mínimo relativo en $x = -\sqrt{2}$.

e) $j(x)$ $\frac{1}{x \quad 2}$ Dom $j(x) = \mathbb{R} - \quad 2$

$j'(x) \quad \frac{1}{(x \quad 2)^2} < 0 \quad \forall\, x \neq 2 \longrightarrow j(x)$ es decreciente en todo su dominio.

f) $k(x)$ $\frac{x^3}{x^2 \quad 3}$ Dom $k(x) = \mathbb{R}$ $\sqrt{3}$

$k'(x) = \frac{-x^4 - 9x^2}{(x^2 - 3)^2}$ $k'(x) = 0 \rightarrow x = 0, x = -3$

En $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ se tiene $k'(x) < 0 \longrightarrow k(x)$ es decreciente en dicho intervalo.

En $(-3, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 3)$ se tiene $k'(x) > 0 \longrightarrow k(x)$ es creciente en dicho conjunto.

La función tiene un mínimo relativo en $x = -3$ y un máximo relativo en $x = 3$.

62. Página 175

a) $y = \ln x - 2$

El dominio de $y(x)$ es el intervalo $(0, -\infty)$.

$y' \quad \frac{1}{x} \longrightarrow y' > 0$ en todo el dominio de y.

Por tanto, no tiene máximos ni mínimos relativo y es creciente para $x > 0$.

b) $y = \ln(x - 2)$

El dominio de $y(x)$ es el intervalo $(2, -\infty)$.

$y' \quad \frac{1}{x \quad 2} \longrightarrow y' > 0$ en todo el dominio de y.

Por tanto, no tiene máximos ni mínimos relativos y es creciente para $x > 0$.

c) $y \quad \frac{2}{x} \quad \ln x$

El dominio de $y(x)$ es el intervalo $(0, -\infty)$.

$y' \quad \frac{2}{x^2} \quad \frac{1}{x} \quad \frac{2 \quad x}{x^2} \longrightarrow y' = 0 - x = 2$ $y'(1) = -1 < 0$ $y'(4) \quad \frac{1}{8} > 0$

La función es decreciente en (0, 2) y creciente en $(2, -\infty)$. Tiene un mínimo relativo en $x = 2$.

d) $y = \frac{\ln x}{x}$

El dominio de $y(x)$ es el intervalo $(0, +\infty)$.

$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

$y' = 0 \rightarrow 1 - \ln x = 0 \rightarrow x = e$

$y'(1) = 1 > 0$ $\qquad$ $y'(e^2) = \frac{1-2}{e^2} < 0$

Por tanto, hay un máximo relativo en $x = e$, es creciente en $(0, e)$ y decreciente en $(e, +\infty)$.

e) $y = \frac{\ln x}{x^2} \rightarrow$ El dominio de $y(x)$ es el intervalo $(0, +\infty)$.

$y' = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$ $\qquad$ $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$

$y'(1) = 1 > 0 \rightarrow y$ es creciente a la izquierda de $x = \sqrt{e}$.

$y'(2) = \frac{1 - 2\ln 2}{8} < 0$

Por tanto, y es decreciente a la derecha de $x = \sqrt{e} \rightarrow$ Es creciente en $(0, \sqrt{e})$ y decreciente en $(\sqrt{e}, +\infty)$.

Hay un máximo relativo en $x = \sqrt{e}$.

f) $y = \ln(\sqrt{x})$

El dominio de $y(x)$ es el intervalo $(0, +\infty)$.

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{1}{2x} \rightarrow y' > 0$ en todo el dominio de y.

Por tanto, no tiene máximos ni mínimos y es creciente para $x > 0$.

63. Página 175

a) $f(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow f(x) = -2\,sen(x)$ $\qquad$ $\text{Dom}\, f(x) = \mathbb{R}$

La función es continua en toda la recta real y $f'(x) = -2 \cdot \cos x$.

Es periódica de período 2π, la estudiamos en $[-\pi, \pi]$:

En $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ se tiene $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en dicho intervalo.

En $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ se tiene $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en dicho intervalo.

b) $g(x) = x - sen\, x$ $\qquad$ $\text{Dom}\, g(x) = \mathbb{R}$

$g(x)$ es continua en toda la recta real.

$g'(x) = 1 - \cos x$ $\qquad$ $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k\frac{\pi}{2}, k = 0, 1, 2, \ldots$

Pero como en el intervalo $-\pi, \pi$ $\cos x < 1$, $g'(x)$ es siempre positiva.

Así, $g(x)$ es siempre creciente y no tiene extremos relativos.

c) $h(x) = tg\ x$ Dom $h(x) = \mathbb{R}$

$h'(x)$ $\frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow h'(x) > 0$ para todo $x \rightarrow h(x)$ siempre creciente y no tiene extremos relativos.

64. Página 175

a) $y = 2x^2 \cdot e^x$ Dom $y(x) = \mathbb{R}$

$y' = 2xe^x(2 + x)$ $y' = 0 \rightarrow x = 0, x = -2$

En $(-\infty, -2)$ se tiene que $y' > 0$ y en $(-2, 0)$ se tiene que $y' < 0$.

En $(0, +\infty)$ se tiene que $y' > 0$.

Por tanto, es creciente en $(-\infty, -2) \cup (0, -\infty)$ y decreciente en $(-2, 0)$.

En $x = -2$ se alcanza el máximo relativo y en $x = 0$ el mínimo.

b) $y \quad x \quad 4 \cdot e^x$ Dom $y(x) = \mathbb{R}$

$y' = e^x(x - 3)$ $y' = 0 \rightarrow x = 3$

En $(-\infty, 3)$ se tiene que $y' < 0$. $\rightarrow$ Es decreciente en $(-\infty, 3)$.

En $(3, -\infty)$ se tiene que $y' > 0$. $\rightarrow$ Es creciente en $(3, -\infty)$.

En $x = 3$ se alcanza el mínimo relativo.

c) $y \quad e^{x^2+2x} \quad 1$ Dom $y(x) = \mathbb{R}$

$y' \quad 2(x \quad 1)e^{x^2+2x}$ $y' = 0 \rightarrow x = -1$

En $(-\infty, -1)$ se tiene que $y' < 0$. $\rightarrow$ Es decreciente en $(-\infty, -1)$.

En $(-1, +\infty)$ se tiene que $y' > 0$ $\rightarrow$ Es creciente en $(-1, +\infty)$

En $x = -1$ se alcanza el mínimo relativo.

d) $y = x \cdot 2^x$ Dom $y(x) = \mathbb{R}$

$y' = 2^x(1 + x \ln 2)$ $y' = 0 \rightarrow x \quad \frac{1}{\ln 2}$

En $\left(\quad \infty, \quad \frac{1}{\ln 2} \right)$ se tiene que $y' < 0$ $\rightarrow$ Es decreciente en $\left(\quad \infty, \quad \frac{1}{\ln 2} \right)$.

En $\left(\quad \frac{1}{\ln 2}, \ + \infty \right)$ se tiene que $y' > 0$ $\rightarrow$ Es creciente en $\left(\quad \frac{1}{\ln 2}, \ + \infty \right)$.

En $x \quad \frac{1}{\ln 2}$ se alcanza el mínimo relativo.

e) $y \quad 2^{x-x^2} \quad 3$ Dom $y(x) = \mathbb{R}$

$y' \quad (1 \quad 2x)2^{x-x^2} \ln 2$ $y' = 0 \rightarrow x \quad \frac{1}{2}$

En $\left(\quad \infty, \frac{1}{2} \right)$ se tiene que $y' > 0$. $\rightarrow$ Es creciente en $\left(\quad \infty, \frac{1}{2} \right)$.

En $\left(\frac{1}{2}, \quad \infty \right)$ se tiene que $y' < 0$. $\rightarrow$ Es decreciente en $\left(\frac{1}{2}, \quad \infty \right)$.

En $x \quad \frac{1}{2}$ se alcanza el máximo relativo.

f) $y = 2^{x^3+1}$ $\quad$ $\text{Dom } y(x) = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 \cdot 2^{x^3+1} \cdot \ln 2$ $\quad$ $y' = 0 \rightarrow x = 0$

En $(-\infty, 0)$ se tiene que $y' < 0$ y en $(0, -\infty)$ se tiene que $y' > 0$.

Por tanto, es creciente en $\mathbb{R}$ y no tiene extremos relativos.

65. Página 175

a) $y' = 3x^2 - 24$ $\quad$ $y'(x) = 0 \cdot x = \pm\sqrt{8}$ $\quad$ $y'' = 6x$

$y''(\sqrt{8}) = 6\sqrt{8} > 0 \rightarrow x = \sqrt{8}$ es un mínimo.

$y''(-\sqrt{8}) = 6\sqrt{8} < 0 \rightarrow x = -\sqrt{8}$ es un máximo.

b) $y'(x) = 8 + 12x - 4x^3$ $\quad$ $y'(x) = 0 \rightarrow x = -1, x = 2$ $\quad$ $y''(x) = 12 - 12x^2$

$y''(2) = -36 < 0 \rightarrow x = 2$ es un máximo.

$y''(-1) = 0$, $y'''(x) = -24x - y'''(-1) = 24 \neq 0 \rightarrow x = -1$ es un punto de inflexión.

c) $y'(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$ $\quad$ $y'(x) = 0 \rightarrow x = \pm 2$ $\quad$ $y''(x) = \dfrac{8}{x^3}$

$y''(2) = 1 > 0 \rightarrow$ La función alcanza un mínimo en $x = 2$.

$y''(-2) = -1 < 0 \rightarrow$ La función alcanza un máximo en $x = -2$.

d) $y' = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ $\quad$ $y' = 0 \rightarrow x = 0$ $\quad$ $y'' = \dfrac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2}$

$y''(0) = 2 \rightarrow$ La función alcanza un mínimo en $x = 0$.

66. Página 175

$y(x) = x^3 - 2x^2 - 6x - 13$

Veamos que si $y(x)$ siempre creciente, entonces $y'(x) > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$:

$y'(x) = 3x^2 - 4x - 6$ $\quad$ $y'(x) = 0 \cdot x = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (3 \cdot -6)}}{6} = \dfrac{4 \pm \sqrt{-56}}{6}$

$y'(x)$ no tiene raíces reales (es decir, nunca se anula) y es continua $\rightarrow$ El signo de *y* es constante.

Comprobamos el signo de la derivada: $y'(0) = -6 < 0$

Es decir: $y'(x) < 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$.

67. Página 175

$y(x) = x^5 - mx - 2$ $\quad$ $y'(x) = 5x^4 + m$

$5x^4 > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow m > 0 \rightarrow 5x^4 - m > 0$

Por tanto, $y'(x) > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow y(x)$ es creciente en todos los números reales y para cualquier valor del parámetro *m*.

68. **Página 175**

a) $f(x)$ no es derivable en todos sus puntos, ya que las derivadas laterales en $x = -1$ no coinciden.

b) $f'(x) < 0$ en $(-\infty, -2) \rightarrow f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2)$.

$f'(x) > 0$ en $(-2, +\infty) \rightarrow f(x)$ es creciente en $(-2, +\infty)$.

c) Existe un mínimo relativo en $x = -2$ porque es el punto donde se anula la derivada.

d) $f'(x) = 1$ si $x > -1 \rightarrow f(x) = x - k$ si $x > -1$ porque la derivada de una recta es justamente su pendiente.

Para obtener *k*, imponemos la condición dada: $f(1) = 1 \rightarrow 1 - k = 1 \rightarrow k = 0$

Así, $f(2) = 2 - 0 = 2$.

69. **Página 175**

$y(x) = ax^2 + bx - c$

La función pasa por $(1,2)$ y $(2,6) \rightarrow 2 = a + b - c$ y $6 = 4a - 2b - c$.

$y'(x) = 2ax + b$

$y'(2) = 4a + b$ equivale a la pendiente de la recta tangente.

La recta tangente en $(2,6)$ es $y = 7x - 8 \rightarrow 4a + b = 7$

Tenemos, por tanto, un conjunto de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} a - b - c = 2 \\ 4a - 2b + c = 6 \\ 4a - b = 7 \end{cases} \rightarrow a = 3, b = -5, c = 4$$

Es decir, $y(x) = 3x^2 - 5x - 4$.

A continuación estudiamos la monotonía de la función:

$y'(x) = 6x - 5 \qquad y'(x) \quad 0 \quad x \quad \frac{5}{6}$

En $\left(-\infty, \frac{5}{6}\right)$: $y'(x) < 0 \rightarrow y(x)$ es decreciente en este intervalo.

En $\left(\frac{5}{6}, \quad \right)$: $y'(x) > 0 \rightarrow y(x)$ es creciente en este intervalo.

En $x \quad \frac{5}{6}$ está el único mínimo relativo de la función.

70. **Página 176**

$y(x) = ax^2 + bx - c$

La función pasa por $(1,0)$ y $(0,-2) \rightarrow 0 = a - b + c$ y $-2 = c$.

Además, tiene un mínimo relativo en $x \quad \frac{3}{2} \rightarrow y'\left(\frac{3}{2}\right) \quad 0$.

$y'(x) = 2ax + b \rightarrow 2a\frac{3}{2} \quad b \quad 0 \rightarrow 3a + b = 0$

Tenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} a-b-c=0 \\ 3a-b=0 \\ c=-2 \end{cases} \rightarrow a=-1\ ,b=3\ ,c=-2 \rightarrow y(x)=-x^2-3x-2$$

A continuación estudiamos la monotonía de la función:

$y'(x)=-2x-3$ $y'(x)$ 0 · 2x I 3 0 · x $\frac{3}{2}$

En $\left(\ \infty, \frac{3}{2}\right)$: $y'(x)\gtrdot 0 \rightarrow y(x)$ creciente en este intervalo.

En $\left(\frac{3}{2}, -\infty\right)$: $y'(x)\lessdot 0 \rightarrow y(x)$ decreciente en este intervalo.

En x $\frac{3}{2}$ está el único máximo relativo de la función.

71. Página 176

a) $y=x^3-ax$ $y'(x)=3x^2-a$

Como existe un extremo relativo en $x-2 \rightarrow y'(2)-0$:

$3\cdot 2^2$ $a-0$ · $a-$ 12

Es decir, $y(x)=x^3-12x$.

b) $y(x)=x^3-12x$ $y'(x)=3x^2-12$ $y''(x)-6x$

$y'(x)-0$ · $a-$ I 2

$y''(2)-12\gtrdot 0$ $y''(\ 2)-\ 12\lessdot 0$

Es decir:

- $x-2$ es un mínimo relativo y $x--2$ es un máximo relativo.
- $y(x)$ es creciente en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ y decreciente en $(-2,2)$.

72. Página 176

$y(x)=ax^3-bx^2+cx+d$

$y(0)-0 \rightarrow d$ 0

$y(1)$ $\frac{5}{6} \rightarrow a$ b c d $\frac{5}{6} \rightarrow 6a+6b+6c=5$

$y'(x)=3ax^2+2bx+c$

$y(x)$ tiene máximo en $x-1 \rightarrow 3a-b+c=0$.

$y(x)$ tiene mínimo en $x-2 \rightarrow 12a+4b-c=0$.

Por tanto, tenemos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$\begin{cases} 6a-6b+6c=5 \\ 3a-b-c=0 \\ 12a-4b-c=0 \end{cases} \rightarrow a\ \ \frac{5}{12}\ , b\ \ \frac{5}{4}\ , c=0 \text{ y } d\ \ 0$$

73. **Página 176**

a) $y = \dfrac{ax^2 + x + b}{x^2 + 1}$

$y' = \dfrac{2ax + 2bx - x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$

Tiene un máximo en $x = -1 \rightarrow y'(-1) = 0 \rightarrow \dfrac{2a + 2b}{4} \rightarrow a = b$.

Pasa por $P\left(-2, \dfrac{13}{5}\right) \rightarrow y(-2) = \dfrac{13}{5} \rightarrow \dfrac{4a - 2 + b}{5} \rightarrow 4a - 2 + b = 13$.

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} a = b \\ 4a - b - 15 = 0 \end{cases} \rightarrow a = b = 3$$

Por tanto, la función es $y = \dfrac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$.

b) Estudiamos la monotonía de la función:

El dominio es toda la recta real.

$y'(x) = \dfrac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

$y'(x) = 0 \rightarrow 1 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

En $(-\infty, -1) \cup (1, -\infty)$, $y'(x) < 0 \rightarrow y(x)$ decreciente en este conjunto de intervalos.

En $(-1, 1)$, $y'(x) > 0 \rightarrow y(x)$ creciente en este intervalo.

En $x = -1$ existe el único mínimo relativo de la función y en $x = 1$, el único máximo relativo.

74. **Página 176**

$f(x) = \dfrac{a^2 x}{2x^2 + 5ax + 2a^2} \rightarrow f'(x) = \dfrac{2a^2(a^2 - x^2)}{(2x^2 + 5ax + 2a^2)^2}$

$f(x)$ tiene extremo relativo en $x = 2 \rightarrow f'(2) = 0 \rightarrow \dfrac{2a^2(a^2 - 4)}{(8 + 10a + 2a^2)^2}$.

La anterior identidad se verifica si $2a^2(a^2 - 4) = 0 \rightarrow a = 0$ y $a = \pm 2$.

Por tanto, $a = \pm 2$, ya que en el enunciado se pide descartar la solución $a = 0$.

- Si $a = -2$:

$2x^2 - 10x - 8 = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x_1 = -4, x_2 = -1$

Así, $\text{Dom } f = \mathbb{R} - (-4, -1)$.

- Si $a = 2$:

$2x^2 - 10x - 8 = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x_1 = 4, x_2 = 1$

Así, $\text{Dom } f = \mathbb{R} - [1, 4]$.

75. **Página 176**

$y \quad \frac{x^2 \quad ax \quad b}{x^2 \quad ax \quad c} \rightarrow y'(x) \quad \frac{(2x \quad a)(c \quad b)}{(x^2 \quad ax \quad c)^2}$

Tiene un extremo relativo en $P(2, \quad 1) \rightarrow y'(2) - 0 \rightarrow \frac{(4 \quad a)(c \quad b)}{(4 \quad 2a \quad c)^2} \quad 0 \rightarrow (a \quad 4)(c \quad b) - 0$.

Pasa por el punto (2, –1) $\rightarrow y(2) - \quad 1 \rightarrow \frac{4 \quad 2a \quad b}{4 \quad 2a \quad c} \quad 1 \rightarrow 4a - b + c = -8$.

Pasa por el origen $\rightarrow y(0) \quad 0 \quad \frac{b}{c} \rightarrow b = 0$ y $c \neq 0$.

Resolviendo el sistema: $\begin{cases} (4 - a)(c - b) = 0 \\ 8 - 4a - b + c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \rightarrow a = -4$, $b = 0$ y $c = 8$

76. **Página 176**

$y(x) = x \cdot e^{ax} \rightarrow y'(x) = e^{ax} - ax \cdot e^{ax} = e^{ax}(1 - ax)$

Tiene un extremo relativo en $x - 1 \rightarrow e^a(1 - a) = 0 \rightarrow a \quad 1$.

Así, $y(x) = x \cdot e^{-x}$.

77. **Página 176**

$f \; x \; - x + ax \; |x| \rightarrow f(x) \quad \begin{cases} x \quad ax^2 & \text{si } x \geq 0 \\ x \quad ax^2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{Dom } f(x) - \mathbb{R}$

$f'(x) = \begin{cases} 1 - 2ax & \text{si } x \geq 0 \\ 1 - 2ax & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Tiene un extremo relativo en $x - 1 \rightarrow f'(1) - 0 \rightarrow 1 - 2a = 0 \rightarrow a \quad \frac{1}{2}$.

Entonces:

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2}x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ x - \frac{1}{2}x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \geq 0 \\ 1 - x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En $x \quad 0$, $f(x)$ es continua por coincidir sus límites laterales y $f(x)$ es derivable por coincidir sus derivadas laterales.

Ahora ya podemos calcular la monotonía de la función y sus extremos relativos:

$f'(x) - 0 \rightarrow \begin{cases} 1 - x = 0 \\ 1 - x = 0 \end{cases} \rightarrow x - -1$

En $(-\infty, -1) \cup (1, -\infty)$ se tiene que $f'(x) < 0 \rightarrow$ La función es decreciente.

En $(-1, 0) \cup (0, 1) = (-1, 1)$ se tiene que $f'(x) > 0$. $\rightarrow$ La función es creciente.

En $x - \quad 1$ se alcanza el mínimo relativo y en $x - 1$ el máximo.

78. **Página 176**

$y(x) = x^3 + ax^2 - 3x \rightarrow y'(x) = 3x^2 - 2ax - 3 \rightarrow y''(x) - 6x \quad 2a$

$y(x)$ tiene punto de inflexión en $x - 1 \rightarrow y''(1) - 0 \rightarrow 6 \cdot 1 - 2a = 0 \rightarrow a = 3$.

79. **Página 176**

$f(x) = x^3 - ax^2 + bx - c \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2ax + b \rightarrow f''(x) - 6x \quad 2a$

$f(x)$ tiene punto de inflexión en $x \quad 3 \rightarrow f''(3) - 0 \rightarrow 6 \cdot 3 + 2a = 0 \rightarrow a = -9$.

$f(x)$ pasa por $(1,0) \rightarrow f(1) - 0 \rightarrow b - c = 8$.

$f(x)$ tiene mínimo relativo en $x - 1 \rightarrow f'(1) - 0 \rightarrow b = 15$.

Como $b - c = 8$ y $b = 15 \rightarrow c = -7 \rightarrow f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 7$.

80. **Página 176**

a) $y = x^3 + 3x^2 - 5x - 1 \rightarrow y' = 3x^2 - 6x - 5 \rightarrow y'' = 6x + 6$

$y''(x) = 0 \rightarrow x = -1$

Dom $y = \mathbb{E}$

$y''(x) > 0$ en el intervalo $(-1, +\infty) \rightarrow y$ es cóncava en dicho intervalo.

$y''(x) < 0$ en el intervalo $(-\infty, -1) \rightarrow y$ es convexa en dicho intervalo.

b) $y = x^4 - 6x^2 \rightarrow y' = 4x^3 - 12x \rightarrow y'' = 12x^2 - 12$

$y''(x) = 0 \rightarrow x = \quad 1$

Dom $y = \mathbb{E}$

$y''(x) > 0$ en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y$ es cóncava en dicho conjunto de intervalos.

$y''(x) < 0$ en el intervalo $(-1, 1) \rightarrow y$ es convexa en dicho intervalo.

c) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1} \rightarrow y' = \dfrac{-2x}{(x^2 - 1)^2} \rightarrow y'' = \dfrac{6x^2 - 2}{(x^2 - 1)^3}$ Dom $y = \mathbb{R} - \quad -1, 1$

$y''(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \quad -1, 1$

$y''(x) > 0$ en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y$ es cóncava en dicho conjunto de intervalos.

$y''(x) < 0$ en el intervalo $(-1, 1) \rightarrow y$ es convexa en dicho intervalo.

d) $y \quad \dfrac{x^3 \quad 1}{x^2} \rightarrow y' \quad \dfrac{x^3 \quad 2}{x^3} \rightarrow y'' \quad \dfrac{6}{x^2}$

$y''(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \quad 0 \rightarrow y$ es convexa en $(-\infty, 0) \cup (0, -\infty)$.

e) $y = \sqrt{x^2 - 4} \rightarrow y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} \rightarrow y'' = \dfrac{4}{(x^2 - 4)^{3/2}}$ Dom $y = \mathbb{E}$

$y''(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad y'' > 0 \quad \forall x \rightarrow y$ es cóncava en toda la recta real.

f) $y = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2} \rightarrow y' = -\dfrac{x}{2\sqrt{4-x^2}} \rightarrow y'' = -\dfrac{2}{(4-x^2)^{3/2}}$ $\quad \text{Dom } y = [-2, 2]$

$y''(x) = 0 \ \forall x \in (-2, 2)$

$y'' < 0$ en $(-2, 2) \rightarrow y$ es convexa en $(-2, 2)$.

$y'' > 0$ en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \rightarrow y$ es cóncava en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

g) $y = 1 - 2\ln x \rightarrow y' \quad \dfrac{2}{x} \rightarrow y'' \quad \dfrac{2}{x^2}$ $\quad \text{Dom } y = (0, -\infty)$

$y''(x) \neq 0 \ \forall x \in (0, +\infty)$

$y'' > 0$ para todo $x > 0 \rightarrow y$ es cóncava en todo su dominio.

h) $y = \ln(x^2 - x)$ $\quad \text{Dom } y = (-\infty, 0) \cup (1, -\infty)$

$y' \quad \dfrac{2x \quad 1}{x^2 \quad x} \rightarrow y''(x) = \dfrac{2(x^2 - x) - (2x-1)^2}{(x^2 - x)} = \dfrac{-2x^2 + 2x - 1}{x^2(x-1)^2}$

$y''(x) = 0 \ \forall x \in (-\infty, 0) \cup (1, -\infty)$

$y'' < 0$ en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \rightarrow y$ es convexa en todo su dominio.

i) $y \quad \dfrac{\ln x}{x} \rightarrow y' \quad \dfrac{1}{x^2} \quad \dfrac{\ln x}{x^2} \rightarrow y'' \quad \dfrac{3}{x^3} \mid \dfrac{2\ln x}{x^3}$ $\quad \text{Dom } y = (0, -\infty)$

$y'' = 0 \rightarrow x \quad e^{\frac{3}{2}}$

$y''(x) > 0$ en el intervalo $\left(e^{\frac{3}{2}}, -\infty\right) \rightarrow y$ es cóncava en dicho intervalo.

$y''(x) < 0$ en el intervalo $\left|0, e^{\frac{3}{2}}\right| \rightarrow y$ es convexa en dicho intervalo.

j) $y = (x-1)e^x \rightarrow y' = xe^x \rightarrow y'' = (x+1)e^x$ $\quad \text{Dom } y =$

$y'' = 0 \rightarrow x - \quad 1$

$y''(x) > 0$ en el intervalo $(-1, +\infty) \rightarrow y$ es cóncava en dicho intervalo.

$y''(x) < 0$ en el intervalo $(-\infty, -1) \rightarrow y$ es convexa en dicho intervalo.

k) $y \quad \dfrac{x}{e^x} \rightarrow y' \quad \dfrac{1 \quad x}{e^x} \rightarrow y'' \quad \dfrac{x \quad 2}{e^x}$ $\quad \text{Dom } y =$

$y'' = 0 \rightarrow x - 2$

$y''(x) > 0$ en el intervalo $(2, -\infty) \rightarrow y$ es cóncava en dicho intervalo.

$y''(x) < 0$ en el intervalo $(-\infty, 2) \rightarrow y$ es convexa en dicho intervalo.

l) $y = 1 + 2senx \rightarrow y' = 2\cos x \rightarrow y'' = -2senx$ $\quad \text{Dom } y =$

Estudiamos la función en $(-\pi, \pi)$ por ser periódica de período 2π.

$y'' = 0 \rightarrow x = 0$

$y''(x) > 0$ en el intervalo $(-\pi, 0) \rightarrow y$ es cóncava en dicho intervalo.

$y''(x) < 0$ en el intervalo $(0, \pi) \rightarrow y$ es convexa en dicho intervalo.

m) $y = \cos 2x \rightarrow y' = -2\operatorname{sen} 2x \rightarrow y'' = -4\cos 2x$ $\quad \text{Dom}\, y = \mathbb{R}$

Estudiamos la función en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ por ser periódica de período π.

$y'' = 0 \rightarrow x \quad -\frac{\pi}{4}, x \quad \frac{\pi}{4}$

$y''(x) > 0$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow y$ es cóncava en dicho conjunto de intervalos.

$y''(x) < 0$ en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow y$ es convexa en dicho intervalo.

n) $y = \operatorname{sen}^2 x \rightarrow y' = \operatorname{sen} 2x \rightarrow y'' = 2\cos 2x$ $\quad \text{Dom}\, y = \mathbb{R}$

Estudiamos la función en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ por ser periódica de período π.

$y'' = 0 \rightarrow x \quad -\frac{\pi}{4}, x \quad \frac{\pi}{4}$

$y''(x) > 0$ en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow y$ es cóncava en dicho intervalo.

$y''(x) < 0$ en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow y$ es convexa en dicho intervalo.

81. **Página 176**

$y(x) = x^4 - 3x^2 - 5x + 6 \rightarrow y'(x) = 4x^3 + 6x - 5 \rightarrow y''(x) = 12x^2 + 6$

$y''(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ ya que $12 > 0$ y $12x^2 > 0 \ \forall x \neq 0$

Es decir, $y(x)$ no tiene puntos de inflexión al no anularse nunca su segunda derivada.

82. **Página 176**

a) $y(x) = x^3 - ax^2 - ax + b \rightarrow y'(x) = 3x^2 - 2ax - a \rightarrow y''(x) = 6x - 2a$

$y(x)$ tiene punto de inflexión en $(1, 3) \rightarrow y''(1) = 0 \rightarrow 6 \cdot 1 - 2a = 0 \rightarrow a = 3$

$y(1) = 3 \rightarrow b = 2$

Es decir, $y(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

b) $y'(x) = 3x^2 - 6x - 3$ $\qquad y'(x) = 0 \rightarrow x = 1$.

$y'(0) = 3 > 0$ y $y'(2) = 3 > 0 \rightarrow x = 1$ no es extremo relativo $\rightarrow y$ es creciente en todo $\mathbb{R}$.

Ya hemos visto que $y(x)$ tiene derivada segunda nula en $x = 1$.

Estudiamos $y''(x)$ en torno a $x = 1$:

$y''(0) = -6 < 0 \rightarrow y(x)$ es convexa para $x < 1$

$y''(2) = 6 > 0 \rightarrow y(x)$ es cóncava para $x > 1$

Esto confirma que $x = 1$ es en efecto un punto de inflexión.

83. **Página 176**

$f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 7 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2ax + b \rightarrow f''(x) - 6x \quad 2a$

Punto de inflexión en $x - 1 \rightarrow f''(1) - 0 - 6 \mid 2a \rightarrow a = -3$

La recta tangente que forma 45º con el eje *OX* es la recta $y \quad x$. Así:

$$f'(1) - 1 - 3 \quad 2a \quad b \rightarrow 1 = 3 - 6 - b \rightarrow b = 4$$

84. **Página 176**

$y(x) = ax^4 - bx^2 + cx + d \rightarrow y'(x) = 4ax^3 - 2bx - c \rightarrow y''(x) = 12ax^2 + 2b$

$y(x)$ pasa por $P(0,3) \rightarrow y(0) - 3 - d$.

$y(x)$ pasa por $Q(1,0) \rightarrow y(1) - 0 - a \quad b \quad c \quad 3$.

$y(x)$ tiene extremo relativo en $Q(1,0) \rightarrow y'(1) - 0 \rightarrow 4a - 2b - c = 0$.

$y(x)$ tiene punto de inflexión en $x \quad \frac{1}{2} \rightarrow y''\left|\frac{1}{2}\right| \quad 0 \quad 12a\left|\frac{1}{2}\right|^2 \quad 2b \rightarrow 3a + 2b = 0$.

$y(x)$ viene, por tanto, dada por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a - b - c = -3 \\ 4a - 2b + c = 0 \\ 3a - 2b = 0 \end{cases} \rightarrow a = 2,\ b = -3,\ c = -2,\ d = 3$$

Así, $y(x) = 2x^4 - 3x^2 - 2x + 3$.

Estudiamos a continuación la naturaleza del extremo relativo $Q(1,0)$:

$y'(x) = 8x^2 - 6x - 2$

$y'(\ 1) \lesssim 0$ y $y'(2) \gtrsim 0 \rightarrow$ El extremo relativo es un mínimo.

85. **Página 176**

$y(x) = x^3 - ax^2 - 4x - b \rightarrow y'(x) = 3x^2 - 2ax - 4 \rightarrow y''(x) - 6x \quad 2a$

$y(x)$ tiene punto de inflexión en $x \quad \frac{2}{3} \rightarrow y''\left|\frac{2}{3}\right| = 0 \rightarrow 6 \cdot \frac{2}{3} \quad 2a \quad 0 \rightarrow a = 2$

$y(x)$ pasa por $(3,0) \rightarrow y(3) - 0 \rightarrow b = 3$.

Es decir, $y(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 3$.

86. **Página 176**

Si *x* e *y* son las dimensiones, tenemos que: $xy = 12 \rightarrow y = \frac{12}{x}$

Como la nueva habitación se añade a la casa, una de sus paredes debe coincidir, y de esa forma no necesitamos ningún ladrillo, puesto que ya está construida.

Así, debemos minimizar: $P(x, y) = 2x + y \rightarrow P(x) = 2x + \frac{12}{x}$

$P'(x) \quad 2 \quad \frac{12}{x^2} \quad \frac{2x^2 \quad 12}{x^2} \quad 0 \cdot x \qquad \sqrt{6}, x \quad \sqrt{6}$

Y como una longitud no puede ser negativa, tenemos que: $x \quad \sqrt{6} \cdot y \quad 2\sqrt{6}$

Comprobamos que en este punto se alcanza un mínimo:

$P''(x) \quad \frac{24}{x^3} \cdot P'' \sqrt{6} \therefore 0 \cdot$ Se trata de un mínimo.

Las dimensiones de la habitación son $x = \sqrt{6}$ m e $y = 2\sqrt{6}$ m.

87. **Página 176**

Llamamos x e y a las dimensiones de la parcela. Como va a estar unida a la pared de la nave, se verifica que: $2x + y = 200 \longrightarrow y = 200 - 2x$.

Se trata de maximizar la función superficie dada por:

$S(x) = xy \longrightarrow S(x) = x(200 - 2x) = 200x - 2x^2$

$S'(x) = 200 - 4x = 0 \longrightarrow x = 50$

$S''(x) = -4 < 0$ en $\mathbb{R} \longrightarrow$ En $x = 50$ alcanza un máximo.

Las dimensiones de la parcela son $x = 50$ m e $y = 100$ m.

88. **Página 176**

Llamamos x a la arista de la base e y a la altura del prisma cuadrangular.

Entonces se debe cumplir que: $x^2y = 20 \longrightarrow y = \frac{20}{x^2}$

Como un paragüero no tiene base superior, tenemos que minimizar la función superficie que viene dada por:

$S(x,y) = x^2 - 4xy \text{ —} S(x) = x^2 - 4x\frac{20}{x^2} = x^2 - \frac{80}{x}$

$S'(x) = 2x - \frac{80}{x^2} = \frac{20x^3 - 80}{x^2} = 0 \text{ —} x = \sqrt[3]{40}$

$S''(x) \quad 2 \quad \frac{160}{x^3} \cdot S'' \sqrt[3]{40} \therefore 0 \cdot$ Se alcanza un mínimo.

Las dimensiones del paragüero son:

Arista de la base: $x = \sqrt[3]{40}$ dm Altura: $y = \frac{20}{\sqrt[3]{40}^2} = \frac{20}{\sqrt[3]{1600}}$ dm

89. **Página 177**

Sean c_1, c_2 los catetos de un triángulo rectángulo cualquiera.

El área, $A(c_1, c_2)$ de dicho triángulo viene dada por la función $A(c_1, c_2) \quad \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$.

El enunciado impone la siguiente restricción: $c_1 - c_2 = 20 \longrightarrow c_2 = 20 - c_1$

$A(c_1) \quad \frac{c_1(20 \quad c_1)}{2} \quad 10c_1 \quad \frac{1}{2}c_1^2 \qquad A'(c_1) = 10 - c_1 \qquad A'(c_1) = 0 \text{ —} c_1 = 10$

Además, $A''(c_1) = -1 \therefore 0 \longrightarrow A(c_1)$ tiene un máximo en $c_1 = 10$. Y como $c_2 = 20 - c_1 \longrightarrow c_2 = 10$.

Así, el triángulo rectángulo con mayor área es aquel que tiene $c_1 = c_2 = 10$ cm.

Por tanto, su área es: $A(10) \quad \frac{10 \cdot 10}{2} \quad 50$ cm².

90. **Página 177**

h : hipotenusa de un triángulo rectángulo.

c_1, c_2 : catetos del triángulo rectángulo.

Por el teorema de Pitágoras se tiene que $8^2 - c_1^2 - c_2^2 \rightarrow c_2 = \sqrt{64 - c_1^2}$.

Así, la función área viene dada por la siguiente expresión:

$$A(c_1, c_2) \quad \frac{c_1 \ c_2}{2} \quad \frac{c_1 \sqrt{64 \quad c_1^2}}{2}$$

$$A'(c_1) = \frac{1}{2}\left|\sqrt{64 - c_1^2} - \frac{c_1^2}{\sqrt{64 - c_1^2}}\right| \qquad A'(c_1) = 0 - \sqrt{64 - c_1^2} = \frac{c_1^2}{\sqrt{64 - c_1^2}} \rightarrow c_1 = -4\sqrt{2}$$

Descartamos la solución negativa, y comprobamos que la positiva es un máximo:

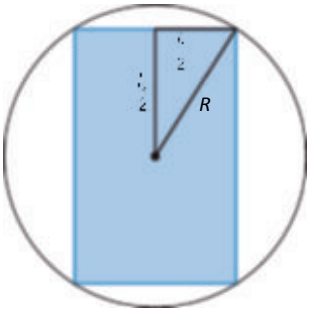
$$A'(5) \quad \frac{7\sqrt{39}}{39} > 0 \qquad A'(6) \quad \frac{2\sqrt{7}}{7} < 0$$

Por tanto, en $c_1 = c_2 = 4\sqrt{2}$ cm la función alcanza su valor máximo:

$$A(4\sqrt{2}) \quad \frac{1}{2}(4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}) \quad 16 \text{ cm}^2$$

91. **Página 177**

El área de un rectángulo es $A(l_1, l_2) = l_1 \cdot l_2$, donde l_1, l_2 son los lados del rectángulo.



Como el rectángulo está inscrito en la circunferencia, se tiene que:

$$(2R)^2 - l_1^2 - l_2^2 \rightarrow l_2 \quad \sqrt{144 \quad l_1^2}$$

Así, la función que se quiere maximizar es la siguiente:

$$A(l_1) \quad l_1\sqrt{144 \quad l_1^2}$$

$$A'(l_1) \quad \sqrt{144 \quad l_1^2} \quad \frac{l_1^2}{\sqrt{144 \quad l_1^2}} \qquad A'(l_1) = 0 \rightarrow 144 - l_1^2 = l_1^2 \rightarrow l_1 = -6\sqrt{2}$$

Descartamos el valor negativo, y comprobamos que $l_1 = 6\sqrt{2}$ es un máximo:

$$A''(l_1) = \frac{-l_1}{\sqrt{144 - l_1^2}} - \frac{2l_1\sqrt{144 - l_1^2} + \frac{l_1^3}{\sqrt{144 - l_1^2}}}{144 - l_1^2} \qquad A''(6\sqrt{2}) = -4 < 0$$

Los rectángulos con lado $l_1 = l_2 = 6\sqrt{2}$ cm son los que maximizan el área.

El rectángulo de área máxima que encaja en el círculo de radio $R = 6$ cm es un cuadrado de lado $l = 6\sqrt{2}$ cm.

92. **Página 177**

El área de un rectángulo es $A(l_1, l_2) = l_1 \cdot l_2$, donde l_1, l_2 son los lados del rectángulo.

Como el rectángulo está inscrito en la circunferencia, se tiene que:

$$(2R)^2 = l_1^2 + l_2^2 \rightarrow l_2 = \sqrt{4R^2 - l_1^2}$$

Así, la función que queremos maximizar viene dada por la siguiente expresión: $A(l_1) = l_1\sqrt{4R^2 - l_1^2}$

$$A'(l_1) = \sqrt{4R^2 - l_1^2} - \frac{l_1^2}{\sqrt{4R^2 - l_1^2}} \qquad A'(l_1) = 0 \rightarrow 2l_1(l_1^2 - 2R^2) = 0 \rightarrow l_1 = +R\sqrt{2}$$

Descartamos el valor negativo, y comprobamos que $l_1 = R\sqrt{2}$ es un máximo:

$$A''(l_1) = \frac{-l_1}{\sqrt{4R^2 - l_1^2}} - \frac{2l_1\sqrt{4R^2 - l_1^2} - \frac{l_1^3}{\sqrt{4R^2 - l_1^2}}}{4R^2 - l_1^2} \qquad A''(R\sqrt{2}) < 0$$

Por tanto, $l_1 = R\sqrt{2}$ es un máximo para la función $A(l_1, l_2) = l_1 \cdot l_2$.

El rectángulo de área máxima que encaja en el círculo de radio R es un cuadrado de lado $l = R\sqrt{2}$ cm.

93. **Página 177**

Sean *x* e *y* las dimensiones del rectángulo, y sea *d* su diagonal.

Por un lado, el área del rectángulo viene dada por $xy - 3$.

Por otro lado, por el teorema de Pitágoras se tiene que $d \cdot d = d^2 = x^2 + y^2$.

Así, la función que se quiere minimizar es: $P(x) \quad x^2 \quad \left|\frac{3}{x}\right|^2 \quad x^2 \quad \frac{9}{x^2}$.

$$P'(x) \quad 2x \quad \frac{18}{x^3} \qquad P'(x) - 0 \rightarrow 2x^4 \quad 18 - 0 \rightarrow x = +\sqrt{3}$$

La única solución válida es $x = \sqrt{3}$. Comprobamos que es un mínimo de la función: $P''(x) \quad 2 \quad \frac{54}{x^4} \rightarrow P'' \sqrt{3} > 0$

Las dimensiones del rectángulo son $x = \sqrt{3}$ e $y \quad \frac{3}{\sqrt{3}} \quad \sqrt{3}$, es decir, se tiene un cuadrado de lado $\sqrt{3}$ metros.

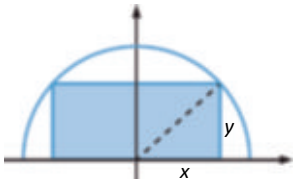
94. **Página 177**

Sean *x* la mitad de la base del rectángulo e *y* su altura. Se cumple que:

$x^2 - y^2 = 25 \rightarrow y = \sqrt{25 - x^2}$

La función que queremos maximizar es:

$A(x) = 2x\sqrt{25 - x^2} = 2\sqrt{25x^2 - x^4}$



$$A'(x) = \frac{50x - 4x^3}{\sqrt{25x^2 - x^4}} \qquad A'(x) - 0 \rightarrow 50x \quad 4x^3 - 0 \rightarrow x = 0, x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

En $\left|0, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right| \rightarrow A'(x) > 0$ y en $\left|\frac{5\sqrt{2}}{2}, 5\right| \rightarrow A'(x) < 0$. Por tanto, en $x \quad \frac{5\sqrt{2}}{2}$ alcanza un máximo.

Así, la base del rectángulo de área máxima mide $5\sqrt{2}$ cm y la altura $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm.

95. Página 177

l: longitud del lado del cuadrado r: radio del círculo

Se sabe que la suma de perímetros es 98 cm.

Además, aproximando el valor de π por 3, obtenemos: $4l + 6r = 98 \rightarrow l = \frac{49 - 3r}{2}$

La función que queremos minimizar es: $A(r, l) = l^2 + 3r^2 \rightarrow A(r) = \left(\frac{49 - 3r}{2}\right)^2 + 3r^2$

$A'(r) = \frac{21r - 147}{2}$ $A'(r) = 0 \rightarrow 21r - 147 = 0 \rightarrow r = \frac{147}{21} = 7$

Como $A''(7) > 0$, se puede afirmar que en $r = 7$ cm se alcanza el mínimo de la función. Así, el lado mide:

$$l = \frac{49 - 3r}{2}\Big|_{r=7} \rightarrow l = 14 \text{ cm}$$

Por tanto, para que la suma de áreas sea mínima, el lado del cuadrado y el radio del círculo deben medir 14 cm y 7 cm, respectivamente.

96. Página 177

l: lado de la base cuadrada del prisma h: altura del prisma

$A_{Total} = 24 \rightarrow 2l^2 + 4lh = 24 \rightarrow h = \frac{12 - l^2}{2l} = \frac{6}{l} - \frac{l}{2}$

Así, la función que queremos maximizar es: $V(l) = l^2\left(\frac{6}{l} - \frac{l}{2}\right) = 6l - \frac{l^3}{2}$

$V'(l) = 6 - \frac{3}{2}l^2 = 0 \rightarrow 6 = \frac{3}{2}l^2 \rightarrow l = -2$

La única solución válida es $l = 2$ cm. Comprobamos que donde se alcanza el máximo: $V''(l) = -3l \rightarrow V''(2) = -6 < 0$

Así, se tiene que $h = \frac{6}{2} = \frac{2}{2} = 2$ cm.

Por tanto, el prisma que maximiza el volumen es un cubo de lado 2 cm.

97. Página 177

r: radio de la base del cilindro h: altura del cilindro.

La cartulina rectangular, por las condiciones del enunciado, tendrá dimensiones h y r, por lo que se cumplirá que:

$$2h + 2r = 60 \rightarrow h = 30 - r$$

La función que vamos a optimizar es:

$$V(r, h) = \pi r^2 h \rightarrow V(r) = \pi r^2(30 - r) = 30\pi r^2 - \pi r^3$$

$V'(r) = 60\pi r - 3\pi r^2$ $V'(r) = 0 \rightarrow 60\pi r - 3\pi r^2 \rightarrow r = 0,\ r = 20$

La solución válida es $r = 20$. Comprobamos que es donde se alcanza el máximo: $V''(r) = 60\pi - 6\pi r \rightarrow V''(20) < 0$

Así, se tiene que $h = 30 - r\Big|_{r=20} \rightarrow h = 10$ cm.

Por tanto, las dimensiones de la cartulina para conseguir el volumen máximo son 20 × 10 cm.

98. **Página 177**

g: longitud de los lados iguales *r*: longitud de la mitad del lado desigual

Perímetro $= 10 \longrightarrow 2g \quad 2r - 10 \longrightarrow g - 5 \quad r$

$V_{\text{Cono}} \quad \frac{A_{\text{Base}} \ h}{3} \quad \frac{\pi r^2 h}{3}$

Por el teorema de Pitágoras, se tiene que $h^2 = g^2 - r^2$ Así, la función que queremos maximizar es:

$$V(r) = \frac{\pi r^2 \cdot \sqrt{(5-r)^2 - r^2}}{3} = \frac{\pi r^2 \sqrt{25 - 10r}}{3}$$

$V'(r) \quad \frac{2\pi r}{3}\sqrt{25 \quad 10r} \quad \frac{5\pi r^2}{3\sqrt{25 \quad 10r}}$ $V'(r) - 0 \longrightarrow 2r(25 - 10r) = 5r^2 \longrightarrow r = 0,\ r = 2$

La solución válida es $r - 2$ m .Comprobamos que es donde se alcanza el máximo:

En (0, 2) se tiene que $V'(r) \ 0$ y en $(2, -\infty)$, $V'(r) \ 0$.

Así, se tiene que $g = 5 - r \xrightarrow{r=2} g = 3$ m.

Por tanto, para que el volumen del cono generado sea máximo, los lados del triángulo deben medir 3, 3 y 4 m respectivamente.

99. **Página 177**

x: radio de la base del cilindro

y: longitud de la mitad de la altura del cilindro

R = 9 es el radio de la esfera.

Se verifica que $x^2 - y^2 = R^2 \longrightarrow x^2 - y^2 = 81 \longrightarrow y = \sqrt{81 - x^2}$.

La función que queremos maximizar es:

$V(x, y) = \pi x^2 h$, donde $h - 2y$.

$V(x, y) = 2\pi x^2 y \longrightarrow V(x) = 2\pi x^2 \sqrt{81 - x^2} = 2\pi\sqrt{81x^4 - x^6}$

$$V'(x) = \frac{2\pi(324x^3 - 6x^5)}{2\sqrt{81x^4 - x^6}} = \frac{\pi(324x^3 - 6x^5)}{\sqrt{81x^4 - x^6}} \qquad V'(x) - 0 \longrightarrow x = 0,\ x = -\sqrt{54} = -3\sqrt{6}$$

La solución válida es $x = 3\sqrt{6}$. Comprobamos que es donde se alcanza el máximo:

En $0, 3\sqrt{6} \longrightarrow V'(x) \ 0$ En $3\sqrt{6}, -\infty \longrightarrow V'(x) \ 0$

Así, la altura y el radio del cilindro de mayor volumen que puede inscribirse en una esfera de radio 9 cm son:

Radio $= 3\sqrt{6}$ cm Altura $= 2\sqrt{81 - 54} = 6\sqrt{3}$ cm.

100. **Página 177**

Llamamos *r* y *h* al radio y a la altura del cono, respectivamente.

Se cumple que:

$$r^2 - (h-9)^2 = 81 \longrightarrow r^2 = 81 - (h-9)^2 = -h^2 + 18h$$

La función que debemos optimizar es:

$$V(r, h) \quad \frac{1}{3}\pi r^2 h \longrightarrow V(h) \quad \frac{1}{3}\pi(\ h^2 + 18h)h \quad \frac{1}{3}\pi(\ h^3 \quad 18h^2)$$

$$V'(h) \quad \frac{1}{3}\pi(\ 3h^2 \quad 36h) \quad \pi(\ h^2 \quad 12h) \quad V'(h) = 0 \longrightarrow h = 0,\ h = 12$$

La solución válida es $h = 12$. Comprobamos que es donde se alcanza el máximo:

$$V''(h) = \pi(\ 2h + 12) \longrightarrow V''(12) < 0$$

Por tanto, las dimensiones del cono de mayor volumen son:

Altura = 12 cm Radio de la base = $\sqrt{-12^2 - 18 \cdot 12} = 6\sqrt{2}$ cm.

101. Página 177

x: abscisa del punto de corte de la recta con el eje *OX*

m: pendiente de la recta *n*: ordenada en el origen de la recta

Como r pasa por los puntos $(2, 1)$ y $(x, 0)$ se tiene que:

$$m \quad \frac{1 \quad 0}{2 \quad x} \quad \frac{1}{2 \quad x}$$

$$r : y = mx + n \xrightarrow{P(2,1)} 1 = 2m + n \longrightarrow n = 1 - 2m \longrightarrow n \quad 1 \quad 2\ \frac{1}{2 \quad x} \quad \frac{x}{x \quad 2}$$

Entonces, la función que se quiere minimizar es: $A(x) = \dfrac{x \cdot \dfrac{x}{x-2}}{2} = \dfrac{x^2}{2x-4}$

$$A'(x) \quad \frac{x^2 \quad 4x}{2x^2 \quad 8x + 8} \qquad A'(x) = 0 \longrightarrow x = 0,\ x = 4$$ La solución válida es $x = 4$.

$$A''(x) \quad \frac{(2x \quad 4)(2x^2 \quad 8x \quad 8) \quad (x^2 \quad 4x)(4x \quad 8)}{(2x^2 \quad 8x + 8)^2} \quad \frac{4}{(x \quad 2)^3} \longrightarrow A''(4) \quad \frac{1}{2} > 0$$

Por tanto, $m \quad \frac{1}{2 \quad 4} \quad \frac{1}{2}$ y $n = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 2$.

Y la recta buscada que minimiza el área del triángulo es $y \quad \frac{1}{2}x \quad 2$.

102. Página 177

Uno de los vértices está sobre la recta $x \quad 2y = 2$. Así, los cuatro vértices que forman el rectángulo son de la forma:

$$O(0, 0) \qquad A(x, 0) \qquad B\left(0, \frac{2-x}{2}\right) \qquad C\left(x, \frac{2-x}{2}\right)$$

La función que queremos maximizar es: $f(x) \quad x\ \frac{2 \quad x}{2} \quad \frac{2x \quad x^2}{2}$

$f'(x) = 1 \quad x \qquad f'(x) = 0 \longrightarrow x = 1$

$f''(x) = \quad 1 \longrightarrow f''(1) = \quad 1 < 0 \longrightarrow$ En $x = 1$ se alcanza el máximo.

Por tanto, los vértices del rectángulo de máxima área son:

$$O(0, 0) \qquad A(1, 0) \qquad B\left(0, \frac{1}{2}\right) \qquad C\left(1, \frac{1}{2}\right)$$

Y el área de dicho rectángulo es $f(1) \quad \frac{2 \cdot 1 \quad 1^2}{2} \quad \frac{1}{2}$ u².

103. **Página 177**

Los puntos buscados son de la forma (x, x^2).

La distancia entre estos puntos y $(0, 1)$ viene determinada por: $D(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (x^2-1)^2} = \sqrt{x^4 - x^2 - 1}$

$D'(x) \quad \frac{2x^3 \quad x}{\sqrt{x^4 \quad x^2 \quad 1}}$ $\qquad$ $D''(x) \quad \frac{2x^6 \quad 3x^4 \quad 6x^2 \quad 1}{\sqrt{(x^4 \quad x^2 \quad 1)^3}}$

$D'(x) - 0 \rightarrow x(2x^2 - 1) = 0 \rightarrow x \quad 0$, $x \quad \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ Las tres soluciones son válidas. Así:

$D''(0) \quad \frac{1}{1} \quad 1 \div 0 \rightarrow$ En $x \quad 0$ no es un mínimo.

$D''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \frac{4\sqrt{3}}{3} \div 0 \rightarrow$ En $x \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$ es un mínimo. $\qquad$ $D''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \frac{4\sqrt{3}}{3} \div 0 \rightarrow$ En $x \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$ es un mínimo.

Por tanto, los puntos de distancia mínima son: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Y dicha distancia es: $D\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ u

104. **Página 177**

El vértice (a, b) está sobre la curva $y \quad \frac{1}{x^2} \quad 4$.

Así, los cuatro vértices que forman el rectángulo son de la forma:

$$O(0, 0) \qquad A(a, 0) \qquad B\left(0, \frac{1}{a^2} - 4\right) \qquad C\left(a, \frac{1}{a^2} - 4\right)$$

La función que queremos minimizar es $f(a) = a\left(\frac{1}{a^2} - 4\right) = \frac{1}{a} + 4a$.

$f'(a) \quad \frac{1}{a^2} \pm 4 \qquad f'(a) - 0 \rightarrow 4a^2 - 1 \rightarrow a \quad \pm\frac{1}{2}$

La solución válida es $a \quad \frac{1}{2}$ porque a debe ser positivo.

$f''(a) \quad \frac{2}{a^3} \rightarrow f''\left(\frac{1}{2}\right) = 16 \div 0 \rightarrow$ En $a \quad \frac{1}{2}$ se alcanza el mínimo.

Por tanto, los vértices del rectángulo son:

$$O(0, 0) \qquad A\left(\frac{1}{2}, 0\right) \qquad B(0, 8) \qquad C\left(\frac{1}{2}, 8\right)$$

Y el área de dicho rectángulo es $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - \frac{4}{2} = 4$ u².

105. **Página 177**

La función del enunciado representa una parábola con vértice en el eje *Y*, por lo que habrá dos soluciones simétricas con respecto a este eje, una en el primer cuadrante y otra en el segundo. Sea $(a, 4 - a^2)$ un punto de la parábola del primer cuadrante.

$y' = -2x \rightarrow y'(a) = -2a \rightarrow$ La ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto $(a, 4 - a^2)$ es:
$y - (4 - a^2) = -2a(x - a) \rightarrow y = -2ax + a^2 + 4$

Los puntos de intersección de esta recta con los ejes son: $(0, a^2 + 4)$ y $\left(\frac{a^2 + 4}{2a}, 0\right)$.

El área del triángulo que se forma con estos puntos y el punto (0, 0) es: $A(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + 4}{2a}(a^2 + 4) = \frac{(a^2 + 4)^2}{4a}$, que es la función que debemos optimizar.

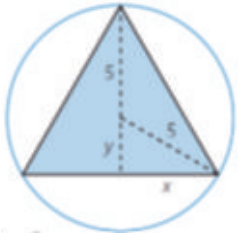
$$A'(a) = \frac{16a^2(a^2 - 4) - 4(a^2 - 4)^2}{16a^2} = \frac{3a^4 - 8a^2 - 16}{4a^2} = 0 \rightarrow a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ es la solución del primer cuadrante.

$$A''(a) = \frac{4a^2(12a^3 - 16a) - 8a(3a^4 - 8a^2 - 16)}{16a^4} = \frac{3a^4 + 16}{2a^3} \rightarrow A''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) > 0$$

En $\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}, \frac{8}{3}\right)$ la tangente forma con los ejes un triángulo de área mínima.

106. **Página 177**



Llamamos x a la mitad de la base del triángulo, $y + 5$ a la altura. Se verifica que: $x^2 - y^2 = 25 \rightarrow x = \sqrt{25 - y^2}$

La función que hay que optimizar viene dada por:

$$A(y) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{25 - y^2}(y + 5) = (y + 5)\sqrt{25 - y^2}$$

$$A'(y) = \sqrt{25 - y^2} + (y + 5) \cdot \frac{-2y}{2\sqrt{25 - y^2}} = \frac{25 - y^2 - y^2 - 5y}{\sqrt{25 - y^2}} = 0 \rightarrow -2y^2 - 5y + 25 = 0 \rightarrow y = -5, y = \frac{5}{2}$$

La solución válida es la solución positiva.

- En $\left(-5, \frac{5}{2}\right)$ $\rightarrow A'(y) > 0$ Función creciente
- En $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ $\rightarrow A'(y) < 0$ $\rightarrow$ Función decreciente

Así, en $y = \frac{5}{2}$ alcanza un máximo.

Por tanto, las dimensiones del triángulo de mayor área son:

Base: $2x = 2 \cdot \frac{\sqrt{75}}{2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ cm

Altura: $y + 5 = \frac{5}{2} + 5 = \frac{15}{2}$ cm

107. **Página 177**

a) $I(x) = 50x$

b) $B(x) = I(x) - C(x) = 50x - (10x^2 - 1\,850x + 25\,000) = -10x^2 + 1\,900x - 25\,000$

c) $B'(x) = -20x + 1\,900 = 0 \rightarrow x = \frac{1900}{20} = 95$

$B''(x) = -20 < 0 \rightarrow$ En $x = 95$ se alcanza un máximo.

$B(95) = -90\,250 + 180\,500 - 25\,000 = 62\,250$

Así, para maximizar el beneficio se deben vender los 95 juguetes, ascendiendo el beneficio a 65 250 €.

108. **Página 177**

$$B'(x) = \frac{-x^2 - 16}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4$$

$$B''(x) = \frac{-32}{x^3}$$

- $B''(-4) > 0 \rightarrow$ En $x = -4$ se alcanza un mínimo.
- $B''(4) < 0 \rightarrow$ En $x = 4$ se alcanza un máximo.

$B(4) \quad \frac{16 \quad 36 \quad 16}{4} \quad 1$

Así, para obtener el beneficio máximo se deben vender 4 artículos, siendo este beneficio de 1 000 €.

109. **Página 177**

Si r y h son el radio y la altura del cilindro: $\pi r^2 h = 10 \rightarrow h = \frac{10}{\pi r^2}$

La función que se optimiza es:

$$S(r, h) = \pi r^2 - 2\pi rh \rightarrow S(r) = \pi r^2 - 2 \cdot r \cdot \frac{10}{\pi r^2} = \pi r^2 - \frac{20}{r}$$

$$S'(r) = 2\pi r - \frac{20}{r^2} = 0 \rightarrow 2\pi r^3 - 20 = 0 \rightarrow \pi r^3 - 10 = 0 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$$

$S''(r) - 2\pi - \frac{40}{r^3} - S''\left|\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}\right| \therefore 0 \rightarrow$ En $r \quad \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$ alcanza un mínimo.

Por tanto, para utilizar la menor cantidad de material, las dimensiones de la papelera cilíndrica serán $r \quad \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$ dm y $h \quad \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$ dm.

110. **Página 177**

Llamamos x, y, z a los números que buscamos.

$$\begin{matrix} x & y & z & 100 \\ x & 2y & 3z & 200 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x & 100 & y & z \\ x & 200 & 2y & 3z \end{matrix} \cdot 100 \quad y \quad z \quad 200 \quad 2y \quad 3z \quad y \quad 100 \quad 2z$$

Por tanto, resulta: $x = 100 - (100 - 2z) - z = 2z - z = z$

$P(x,y,z) = xyz \rightarrow P(z) = z(100-2z)z = 100z^2 - 2z^3$

$P'(z) = 200z - 6z^3 = z(200-6z) = 0 \rightarrow z = 0, z = \frac{200}{6} = \frac{100}{3}$

$P''(z) \quad 200 \quad 12z \quad \cdot P''\left(\frac{100}{3}\right) \therefore 0$ En $z \quad \frac{100}{3}$ se alcanza un máximo.

Así, tenemos que: $x \quad \frac{100}{3}$, $y \quad 100 \quad \frac{200}{3} \quad \frac{100}{3}$, $z \quad \frac{100}{3}$

111. Página 178

$C(t) = (t-a)^2 - b, \ 9 \leq t \leq 14$

$C'(t) = 2(t-a)$

$C(t)$ tiene un mínimo en $t - 12 \rightarrow 2(12-a) = 0$.

$C(12) = 15 \rightarrow (12-a)^2 - b = 15$

Resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones, obtenemos los parámetros buscados:

$$\begin{cases} -2a - 24 = 0 \\ (12-a)^2 - b = 15 \end{cases} \rightarrow a = 12, \ b = 15$$

112. Página 178

a) $C(t) = 8t^3 - 84t^2 - 240t, \ 1 \leq t \leq 6$

$C'(t) = 24t^2 - 168t - 240 \qquad C'(t) = 0 \rightarrow t^2 - 7t - 10 = 0 \rightarrow t = 2, t = 5$

$C''(t) = 48t - 168 \qquad C''(2) = 96 - 168 < 0$ y $C''(5) = 240 - 168 > 0$

Es decir:

En $t - 2$ está el máximo de $C(t)$ con valor $C(2) = 208$.

En $t = 5$ está el mínimo de $C(t)$ con valor $C(5) = 100$.

b) Dado que la ecuación modela el gasto de energía en calefacción, lo natural sería que esta reflejase un mayor gasto en los meses de invierno y un menor gasto en los meses cercanos al verano, como efectivamente ocurre. De ahí que el máximo se dé en febrero y el mínimo en mayo.

$C(t)$ es creciente en $(1,2) \cup (5,6)$ y decreciente en $(2,5)$.

113. Página 178

a) $R(t) = A \cdot t \cdot (B-t), \ 0 \leq t \leq 20$

$R'(t) = A(B-t) - At$

Máximo rendimiento para $t = 10 \rightarrow A(B-10) - 10A = 0$

$R(10) = 100 \rightarrow 10A(B-10) = 100$

Los valores de A y B vendrán dados por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A(B-20) = 0 \\ 10A(B-10) = 100 \end{cases} \rightarrow A - 1, \ B = 20$$

Es decir, $R(t) = t(20-t)$.

b) $R(t) = 64 \longrightarrow 64 = 20t - t^2 \quad -t^2 - 20t - 64 = 0 \longrightarrow t = 4,\ t = 16$

Se alcanza un rendimiento del 64 % para $t = 4$ y $t = 16$.

Estos valores tienen sentido ya que se encuentran ambos a la misma distancia (6 horas) del máximo del rendimiento, que se alcanzaba para $t = 10$.

114. **Página 178**

a) Los gastos iniciales se corresponden con $G(0)$, y tienen un valor de $G(0) = 100$.

Este valor representa la inversión inicial que debe realizar la empresa para comenzar su actividad comercial.

b) $B(t) = I(t) - G(t) \longrightarrow B(t) = -2t^2 + 50t - (t^2 - 16t - 100) = -3t^2 - 66t - 100$

La función de los beneficios será: $B(t) = -3t^2 - 66t - 100$

c) $B'(t) = -6t - 66 \qquad B'(t) = 0 \longrightarrow t = 11 \qquad B''(11) = -6 < 0 \rightarrow t = 11$ es máximo.

Los beneficios son máximos para $t = 11$, el undécimo año desde su fundación.

Los beneficios totales en ese año son $B(11) = -3 \cdot 11^2 - 66 \cdot 11 - 100 = 263$ miles de euros.

115. **Página 178**

Sueldo: $1\,000 + 17x - 0{,}0025x^3$ Gasto: $200 + 5x$

Ganancia: $G(x) = 1\,000 + 17x - 0{,}0025x^3 - 200 - 5x = -0{,}0025x^3 + 12x + 800$

$G'(x) = -0{,}0075x^2 + 12 = 0 \longrightarrow x^2 \quad \frac{12}{0{,}0075} \quad 1600 \quad x \quad 40$

$G''(x) = -0{,}015x \longrightarrow G''(40) < 0 \longrightarrow$ Para que la ganancia sea máxima se deben contratar mensualmente 40 pólizas.

$G(40) = 1\,120 \longrightarrow$ La ganancia obtenida será de 1 120 €.

116. **Página 178**

En la bañera entran $10 \cdot 9{,}6 = 96$ litros de agua.

Llenar la bañera cuesta $96 \cdot 0{,}01 = 0{,}96$ €.

Si x es el número de minutos que el grifo de la ducha está abierto, la función del gasto viene dada por $G(x) = 12 \cdot 0{,}008x = 0{,}096x$.

El máximo de esta función debe ser menor que 0,96.

$G(x) \quad 0{,}0096x < 0{,}96 \quad x < \frac{0{,}96}{0{,}0096} \quad \cdot\ x < 100$

Los costes de la ducha y el baño se igualarían a los 100 minutos.

117. **Página 178**

a) $N'(t) = 80 - 20t = 0 \longrightarrow t = 4$

$N''(t) = -20 < 0 \longrightarrow$ Para $t = 4$ se alcanza un máximo.

$N(4) = 320 - 160 = 160$

Así, el número de clientes es máximo cuando pasan 4 horas desde que la discoteca se abre.

b) Como máximo hay 160 clientes.

c) La discoteca cerrará cuando no quede ningún cliente.

$N(t) = 0 \longrightarrow 80t - 10t^2 = 0 \longrightarrow t(80 - 10t) = 0 \longrightarrow t = 0,\ t = 8$

La discoteca cerrará cuando lleve 8 horas abierta, es decir, a las 6 de la mañana.

118. **Página 178**

a) En $x = 6$ la función es continua: $f(6) = f(6^-) = 0 \qquad f(6^+) = 15 - 15 = 0$

$$f(x) = \begin{cases} -10x + 40 & 0 \leq x \leq 6 \\ \dfrac{5}{2} & 6 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

● En $(0, 6) \longrightarrow f'(x) = 0 \longrightarrow -10x + 40 = 0 \longrightarrow x = 4 \longrightarrow \begin{cases} \text{En } (0, 4) \to f'(x) > 0 \to f(x) \text{ es creciente} \\ \text{En } (4, 6) \to f'(x) < 0 \to f(x) \text{ es decreciente} \end{cases}$

● En $(6, 10) \longrightarrow f'(x) > 0 \longrightarrow f(x)$ creciente

$f(0) = -60 \qquad f(4) = 20 \qquad f(6) = 0 \qquad f(10) = 10$

$-5x^2 + 40x - 60 = 0 \longrightarrow x = 2,\ x = 6$

Así, la función es negativa en (0, 2) y es positiva en (2, 6). También es positiva en (6, 10).

Por tanto, la empresa no tendrá pérdidas a partir de un gasto en publicidad de 2 000 €.

b) El gasto en publicidad que produce el máximo beneficio es 4 000 €.

c) El beneficio máximo es de 20 000 €.

119. **Página 179**

a) $R'(t) = \dfrac{1}{100} - \dfrac{2}{1000}t \qquad R'(t) = 0 \longrightarrow t = 5$

$R''(t) \quad \dfrac{2}{1000} < 0 \qquad R''(5) < 0 \longrightarrow t = 5$ es un máximo.

La rentabilidad $R(t)$ será máxima para $t = 5$ años.

b) $R(5) \quad 3 \quad \dfrac{1}{100}5 \quad \dfrac{1}{1000}5^2 \quad 3 \quad \dfrac{1}{20} \quad \dfrac{1}{40} \quad 3 \quad \dfrac{1}{40} \quad \dfrac{121}{40} \quad 3{,}025\,\%$

120. **Página 179**

x: largo del escenario $\qquad$ y: ancho del escenario

$A_{\text{Escenario}} = 100 \longrightarrow xy = 100 \longrightarrow y \quad \dfrac{100}{x}$

La función que debemos minimizar es: $P(x) = 2\left(x - \dfrac{100}{x}\right)$

$P'(x) \quad 2 \quad \dfrac{200}{x^2} \qquad P'(x) = 0 \longrightarrow 2 \quad \dfrac{200}{x^2} \longrightarrow x = \pm 10$ La solución válida es $x = 10$.

$P''(x) \quad \dfrac{400}{x^3} \longrightarrow P''(10) > 0 \longrightarrow$ En $x = 10$ se alcanza el mínimo.

Por tanto, las dimensiones que debe tener el escenario para cumplir las especificaciones dadas son:

Largo = 10 m $\qquad$ Ancho = 10 m

Es decir, el escenario debe tener forma cuadrada.

121. **Página 179**

x : longitud de los lados iguales de tela metálica.

y: longitud del lado de tela metálica que mide igual que la pared.

Como disponemos de 1 000 metros de tela metálica:

$$2x - y = 1000 \rightarrow y = 1000 - 2x$$

La función que queremos maximizar es:

$$A(x) = x(1000 - 2x) = 1000x - 2x^2$$

$A'(x) = 1000 - 4x$ $\qquad$ $A'(x) = 0 \rightarrow 1000 = 4x \rightarrow x = 250$

$A''(250) = -4 < 0 \rightarrow$ En $x = 250$ se alcanza el máximo.

Por tanto, la cerca estará construida por la pared y tres paredes metálicas de longitud 250, 250 y 500 metros, respectivamente.

Área: $250 \cdot 500 = 125\,000$ metros cuadrados.

122. **Página 179**

x: largo de la barra en metros $\qquad$ y: ancho de la barra en metros

$P = 2(x - y) = 30 \rightarrow x - y = 15 \rightarrow x = 15 - y$

$A_{\text{Interior}} = (y - 1) \cdot (x - 1) = (y - 1) \cdot (14 - y)$

$A'_{\text{Interior}} = 15 - 2y$ $\qquad$ $A'_{\text{Interior}} \quad 0 \quad 15 \quad 2y \quad 0 \quad y \quad \frac{15}{2}$

Por tanto, la barra debe ser de forma cuadrada, con sus lados de $\frac{15}{2}$ metros.

123. **Página 179**

x: número de alarmas tipo A $\qquad$ y: número de alarmas tipo B

Como se van a colocar 9 alarmas, se tiene que $x \quad y - 9 \cdot y - 9 \quad x$.

La función que se quiere maximizar es:

$$S(x, y) = \frac{xy^2}{10} \rightarrow S(x) = \frac{x(9 - x)^2}{10}$$

$S'(x) = \frac{(9 - x)^2 - 2x(9 - x)}{10} = \frac{3x^2 - 36x + 81}{10}$ $\qquad$ $S'(x) = 0 \rightarrow x = 3, x = 9$

$S''(x) \quad \frac{3x \quad 18}{5} \rightarrow S''(3) < 0 \rightarrow$ En $x = 3$ se alcanza un máximo.

$\rightarrow S''(9) > 0 \rightarrow$ En $x - 9$ se alcanza un mínimo.

Por tanto, la seguridad será máxima cuando se instalen 3 alarmas tipo A y 6 alarmas tipo B.

124. **Página 179**

Ángulo de 90º $\longrightarrow b^2 = 2c^2 \longrightarrow c \quad \frac{b\sqrt{2}}{2}$

Perímetro $= 6 \longrightarrow 2a - b - 2c = 6 \longrightarrow 2a - b(1+\sqrt{2}) - 6 \longrightarrow a = \frac{6 - b(1-\sqrt{2})}{2}$

h : altura del triángulo.

Por el teorema de la altura: $h^2 \quad \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} \longrightarrow h \quad \frac{b}{2}$

Para que haya mayor luminosidad, el área de la ventana debe ser máxima. Es decir, la función que queremos optimizar es:

$$A(a,b,h) \quad a \quad b \quad \frac{b \cdot h}{2} \longrightarrow A(b) = \frac{6 - b \cdot (1-\sqrt{2})}{2} \cdot b + \frac{b \cdot \frac{b}{2}}{2} = \frac{12b - b^2(1+2\sqrt{2})}{4}$$

$A'(b) \quad 3 \quad \frac{b}{2} \; 1 \; 2\sqrt{2} \qquad A'(b) = 0 \longrightarrow b = \frac{6}{1-2\sqrt{2}}$

$A''(b) \quad \frac{1}{2} \quad \sqrt{2} < 0 \longrightarrow b = \frac{6}{1-2\sqrt{2}}$ es el máximo.

Por tanto, las dimensiones de la ventana deben ser:

$$a \quad \frac{12 \quad 3\sqrt{2}}{7} \text{ metros} \qquad b = \frac{6}{1-2\sqrt{2}} \text{ metros} \qquad c \quad \frac{12 \quad 3\sqrt{2}}{7} \text{ metros}$$

125. **Página 179**

x: altura de la ventana $\qquad$ y: ancho de la ventana

Área $= 1 \longrightarrow xy = 1 \longrightarrow y \quad \frac{1}{x}$

La función que queremos minimizar es: $P(x) \quad 2(x \quad \frac{1}{x})$

$P'(x) = 2\left|1 - \frac{1}{x^2}\right| \qquad P'(x) = 0 \longrightarrow 1 \quad \frac{1}{x^2} \longrightarrow x = -1$ La solución válida es $x = 1$.

$P''(x) \quad \frac{4}{x^3} \longrightarrow P''(1) > 0 \longrightarrow$ En $x = 1$ se alcanza el mínimo.

Por tanto, la ventana debe ser un cuadrado de 1 metro de lado para que se minimice el coste del marco.

126. **Página 179**

r: radio de la base $\qquad$ h: altura de la lata

Volumen $= 10$ dm$^3 \longrightarrow \pi r^2 h = 10 \longrightarrow h \quad \frac{10}{\pi r^2}$

La función que queremos minimizar es: $A(r,h) = \pi r^2 - 2\pi rh \xrightarrow{h = \frac{10}{\pi r^2}} A(r) = \pi r^2 + \frac{20}{r}$

$A'(r) \quad 2\pi r \quad \frac{20}{r^2} \qquad A'(r) = 0 \longrightarrow \pi r^3 = 10 \longrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$

$A''(r) \quad 2\pi \quad \frac{40}{r^3} \longrightarrow A''\left|\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}\right| > 0 \longrightarrow$ En $r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$ se alcanza el mínimo.

$$h = \frac{10}{\pi r^2} \xrightarrow{r=\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}} h = \frac{10}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}\right)^2} \xrightarrow{\text{Racionalizando}} h = \frac{10}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}}{\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}} = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$$

Por tanto, las dimensiones de la lata deben ser:

$$r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} \text{ dm} \qquad h = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} \text{ dm}$$

127. **Página 179**

x: lado de la base h: altura del depósito

Volumen $= 20 \rightarrow x^2 h = 20 \rightarrow h = \frac{20}{x^2}$

La función que queremos minimizar es:

$$C(x,h) = 4xh + 2x^2 \xrightarrow{h=\frac{20}{x^2}} C(x) = \frac{80}{x} + 2x^2$$

$C'(x) = -\frac{80}{x^2} + 4x \qquad C'(x) = 0 \rightarrow x^3 = 20 \rightarrow x = \sqrt[3]{20}$

$C''(x) = \frac{160}{x^3} + 4 \rightarrow C''(\sqrt[3]{20}) = \frac{160}{20} + 4 = 12 > 0 \rightarrow$ En $x = \sqrt[3]{20}$ se alcanza el mínimo.

Por tanto, las dimensiones deben ser:

$$x = \sqrt[3]{20} \text{ metros} \qquad h = \frac{20}{\left(\sqrt[3]{20}\right)^2} = \sqrt[3]{20} \text{ metros}$$

Y el coste mínimo es: $C\left(\sqrt[3]{20}\right) = \frac{80}{\sqrt[3]{20}} + 2\left(\sqrt[3]{20}\right)^2 = \frac{120}{\sqrt[3]{20}} = 12\sqrt[3]{50}$ €.

128. **Página 179**

r: radio de las semiesferas y del cilindro h: altura de la zona cilíndrica

Volumen $= 10\pi \rightarrow \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3 = 10\pi \rightarrow h = \frac{10}{r^2} - \frac{4}{3}r$

La función que queremos minimizar es:

$$C(r,h) = 20 \cdot 4\pi r^2 + 10 \cdot 2\pi rh = 80\pi r^2 + 20\pi r\left(\frac{10}{r^2} - \frac{4}{3}r\right)$$

$C'(r) = \frac{320\pi r}{3} - \frac{200\pi}{r^2} \qquad C'(r) = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{15}{8}}$

$C''(r) = \frac{160 \cdot 2}{3}\pi + \frac{400\pi}{r^3} \qquad C''\left(\sqrt[3]{\frac{15}{8}}\right) > 0$

Por tanto, en $r = \sqrt[3]{\frac{15}{8}}$ metros se alcanza un mínimo.

Las dimensiones que minimizan el coste son:

$$r = \sqrt[3]{\frac{15}{8}} \text{ m} \qquad h = 2\sqrt[3]{15} \text{ m}$$

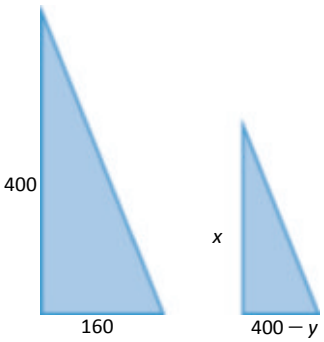
129. **Página 179**

x: altura en metros del campo para maíz

y: ancho en metros del campo para maíz

Por el teorema de Tales:

$$\frac{400}{160} = \frac{x}{400 - y} \rightarrow y = \frac{2000 - 2x}{5}$$



La función que queremos maximizar es:

$$B(x, y) = 0{,}12xy + 0{,}10 \cdot 240 \cdot (400 - x) \quad {}^{y = \frac{2000 - 2x}{5}} \quad B(x) = 24x - \frac{6}{125}x^2 + 9600$$

$$B'(x) = 24 - \frac{12}{125}x^2 \qquad B'(x) = 0 \rightarrow x = 250$$

$$B''(x) = -\frac{12}{125} \qquad B''(250) = -\frac{12}{125} < 0$$

Por tanto, en $x = 250$ metros se alcanza el máximo.

Así, el campo de maíz debe medir 250 metros de alto por 300 metros de ancho; y el campo de trigo, 150 metros de alto por 240 metros de ancho.

El beneficio máximo es:

$$B(x) = 24x - \frac{6}{125}x^2 + 9600 \quad {}^{x = 250} \quad B(250) = 12\,600 \text{ €}$$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. **Página 180**

Superficie de la lata ideal: $S_{\text{Ideal}} = 2\pi \cdot 3{,}75 \cdot 7{,}5 + 2\pi \cdot 3{,}75^2 = 265{,}07$ cm².

Superficie de la lata común: $S_{\text{Común}} = 2\pi \cdot 3{,}25 \cdot 11{,}5 + 2\pi \cdot 3{,}25^2 = 301{,}20$ cm².

$S_C - S_I = 36{,}13$ cm²

2. **Página 180**

No pueden existir otras medidas para latas cilíndricas. Las únicas dimensiones que minimizan la superficie son las obtenidas anteriormente.

3. **Página 180**

Depende de la lata. Habría que comprobarlo teniendo en cuenta los diferentes tipos de latas que se encuentran en el mercado.

4. **Página 180**

Coste por lata:

$C_{\text{Ideal}} = \frac{265{,}07 \cdot 50}{10\,000} = 1{,}325$ céntimos.

$C_{\text{Normal}} = \frac{301{,}20 \cdot 50}{10\,000} = 1{,}506$ céntimos.

Representación de funciones

8

ACTIVIDADES

1. **Página 182**

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ $\quad \text{Im } f = [0, +\infty)$ $\quad$ b) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ $\quad \text{Im } f = [-1, 1]$

2. **Página 182**

a) $x^2 - 3 \geq 0 \rightarrow (x + \sqrt{3}) \cdot (x - \sqrt{3}) \geq 0 \rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$

b) $\sqrt{x-3} - 2x = 0 \rightarrow \sqrt{x+3} = -2x \rightarrow x + 3 = 4x^2 \rightarrow 4x^2 - x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \rightarrow \sqrt{1-3} + 2 \neq 0 \\ x = -\frac{3}{4} \rightarrow \sqrt{-\frac{3}{4} - 3} - 2 \left| -\frac{3}{4} \right| = 0 \end{cases}$

$x - 3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3 \rightarrow \text{Dom } f = \left(-3, -\frac{3}{4}\right] \cup \left[-\frac{3}{4}, -\infty\right)$

3. **Página 183**

a) $9 - 4x^2 \geq 0 \rightarrow \left(\frac{3}{2} - x\right)\left(\frac{3}{2} - x\right) \geq 0 \rightarrow x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] \rightarrow \text{Dom } f = \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$

- Cortes con el eje *X*: $\sqrt{9 - 4x^2} = 0 \rightarrow 9 - 4x^2 = 0 \rightarrow (3 - 2x)(3 - 2x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \rightarrow \left(-\frac{3}{2}, 0\right) \\ x = \frac{3}{2} \rightarrow \left(\frac{3}{2}, 0\right) \end{cases}$
- Corte con el eje *Y*: $x = 0 \rightarrow f(0) = \sqrt{9 - 0} = 3 \rightarrow (0, 3)$
- La función es positiva en todo su domino, ya que la raíz cuadrada de un número mayor o igual que cero es siempre mayor o igual que cero.

b) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 6x \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje *X*:

$x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 6x = x(x^3 - 2x^2 - 5x - 6) = 0 \rightarrow x = 0$

	1	−2	−5	6
1		1	−1	6
	1	−1	−6	0

$\rightarrow x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x^2 - x - 6) = 0 \rightarrow x = 1$

$x^2 - x - 6 = 0 \cdot \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$

Los puntos de corte con el eje *X* son (−2, 0), (0, 0), (1, 0) y (3,0).

- Corte con el eje *Y*: $f(0) = 0 \rightarrow$ El punto de corte con el eje *Y* es (0, 0).
- $f(-3) = 72 \geq 0 \rightarrow$ La función es positiva en $(-\infty, -2)$. $\quad f(-1) = -8 \leq 0 \rightarrow$ La función es negativa en $(-2, 0)$.

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{25}{16} \geq 0 \rightarrow$ La función es positiva en $(0, 1)$. $\quad f(2) = -8 \leq 0 \rightarrow$ La función es negativa en $(1, 3)$.

$f(4) = 72 \geq 0 \rightarrow$ La función es positiva en $(3, +\infty)$.

4. **Página 183**

a) Por la actividad 2: $\text{Dom } f = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

- Cortes con el eje *X*: $\ln(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \rightarrow (2, 0) \\ x = -2 \rightarrow (-2, 0) \end{cases}$

- Corte con el eje *Y*:

  La función no está definida para $x = 0$; por tanto, no corta el eje *Y*.

- $f(-3) > 0$ $\quad f(-1{,}8) < 0$ $\quad f(1{,}8) < 0$ $\quad f(3) > 0$

  Entonces, la función es positiva en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y negativa en $(-2, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2)$.

b) Por la actividad 2: $\text{Dom } f = (-3, -\frac{3}{4}) \cup (-\frac{3}{4}, -\infty)$

- Cortes con el eje *X*:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x - 3} - 2x} = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \rightarrow (-1, 0) \\ x = 1 \rightarrow (1, 0) \end{cases}$$

- Corte con el eje *Y*:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

- $f(-2) < 0$, $f\left(-\frac{4}{5}\right) > 0$, $f(0) < 0$, $f(2) > 0$

  Entonces, la función es positiva en $(-1, -\frac{3}{4}) \cup (1, -\infty)$ y es negativa en $(-3, -1) \cup (-\frac{3}{4}, 1)$.

5. **Página 184**

a) $f(-x) = \ln(-x)^2 - 4 + 2 = \ln x^2 - 4 + 2 = f(x) \Rightarrow$ $f(x)$ es simétrica respecto del eje *Y*.

b) $f(-x) = -3\,sen(-x) = -3(-sen\,x) = -3\,sen\,x = -f(x) \Rightarrow$ $f(x)$ es simétrica respecto del origen de coordenadas.

c) $f(-x) = \sqrt{2(-x)^2 - 25} = \sqrt{2x^2 - 25} = f(x) \Rightarrow$ $f(x)$ es simétrica respecto del eje *Y*.

d) $f(-x) = -(-x)^2 - 27 = -x^2 - 27 = f(x) \Rightarrow$ $f(x)$ es simétrica respecto del eje *Y*.

6. **Página 184**

a) $f(x - k\pi) = 1 - 5\cos^2(x + k\pi) = 1 - 5\cos^2(x - 2k\pi) = 1 - 5(\cos 2x \cos 2k\pi - sen\,2x\,sen\,2k\pi) =$

$= 1 - 5\cos 2x \cdot 1 - sen\,2x \cdot 0 = 1 - 5\cos 2x = f(x)$

La función $f(x)$ es periódica de período π.

b) $f\left(x - k\frac{\pi}{2}\right) = tg\,2\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = tg\,(2x + k\pi) = \frac{tg\,2x - tg\,k\pi}{1 - tg\,2x \cdot tg\,k\pi} = \frac{tg\,2x + 0}{1 - tg\,2x \cdot 0} = tg\,2x$

La función $f(x)$ es periódica de período $\frac{\pi}{2}$.

7. **Página 184**

Sí, es una función periódica con período la unidad.

8. **Página 185**

a) Respuesta abierta. Por ejemplo: $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)(x-1)} = \dfrac{1}{x^2-2x-3}$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo: $f(x) = \dfrac{1}{x(x-2)} = \dfrac{1}{x^2-2x}$

c) Respuesta abierta. Por ejemplo: $f(x) \quad \dfrac{1}{x(x \quad 1)}$

9. **Página 185**

a) $x^3-4x=0 \rightarrow x(x^2-4)=0 \rightarrow x(x-2)(x-2)=0 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-1}{x^3-4x} = \dfrac{1}{0} = \infty \rightarrow$ La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x-1}{x^3-4x} = \dfrac{-1}{0} = \infty \rightarrow$ La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = -2$.

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-1}{x^3-4x} = \dfrac{1}{3} = \infty \rightarrow$ La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

b) $x^2-16 > 0 \rightarrow x^2-16=0 \rightarrow x = \pm 4 \xrightarrow{x=0} 0^2-16 < 0 \rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$

$\lim\limits_{x\to -4^-} \log(x^2-16) = -\infty \rightarrow$ La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = -4$.

$\lim\limits_{x\to -4^+} \log(x^2-16) = -\infty \rightarrow$ La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 4$.

c) $9-x^2 > 0 \rightarrow (3-x)(3-x) > 0 \rightarrow \text{Dom } f = (-3, 3)$

$\lim\limits_{x\to 3^-} 1 \quad \ln 9 \quad x^2 \quad \infty \rightarrow$ La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 3$.

$\lim\limits_{x\to -3^+} 1 \quad \ln 9 \quad x^2 \quad \infty \rightarrow$ La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = -3$.

10. **Página 186**

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^3-x^2-1}{x^3-3x} = 2 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3-x^2-1}{x^3-3x} = 2 \end{array}\right\} \rightarrow$ La función $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = 2$.

b) $\left.\begin{array}{l} \text{No existe } \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln x}{2x} \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{2x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{2} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$ La función $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

11. **Página 186**

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4-3}} = 1 \rightarrow$ Asíntota horizontal en $y = 1$.

- Si $x \to +\infty$, $\frac{x^2}{\sqrt{x^4-3}} - 1 > 0 \rightarrow f(x)$ está por debajo de la asíntota.
- Si $x \to -\infty$, $\frac{x^2}{\sqrt{x^4-3}} - 1 > 0 \rightarrow f(x)$ está por debajo de la asíntota.

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} - 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal en $y = 0$.

- Si $x \to +\infty$, $\frac{x}{x^2-1}$ $0 > 0$ $f(x)$ está por encima de la asíntota.
- Si $x \to -\infty$, $\frac{x}{x^2-1} - 0 < 0 \rightarrow f(x)$ está por debajo de la asíntota.

12. **Página 187**

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x\ x^2\ 3}$ 0 $f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas.

b) $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x\ x^2-3} = 1 \neq 0 \rightarrow m = 1 \\ \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^3}{x^2-3} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 - 3x}{x^2-3} = 0 \rightarrow n = 0 \end{array}\right\} \rightarrow f(x)$ tiene una asíntota oblicua en $y = x$.

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-1}{x\ 2x^2-x} - 0 \rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas.

13. **Página 187**

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x\ x^2-2} - 0 \rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas.

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x\to\infty} \frac{x^4-1}{x\ x^2-x} - \cdots \rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas.

c) $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4-1}}{x \cdot x} = 1 \neq 0 \rightarrow m = 1 \\ \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{\sqrt{x^4-1}}{x} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4-1} - x^2}{x} = 0 \rightarrow n = 0 \end{array}\right\} \rightarrow f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = x$.

$f(x) - mx - n = \frac{\sqrt{x^4-1}}{x} - x = \frac{\sqrt{x^4-1} - x^2}{x}$

- Si $x \to +\infty$, $\frac{\sqrt{x^4-1} - x^2}{x} > 0 \rightarrow f(x)$ está por encima de la asíntota.
- Si $x \to -\infty$, $\frac{\sqrt{x^4-1} - x^2}{x} < 0 \rightarrow f(x)$ está por debajo de la asíntota.

14. **Página 188**

a) $f(x)$ es polinómica $\longrightarrow$ $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ y no tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-x^3-4}{2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-x^3-4}{2}=+\infty\end{array}\right\}\longrightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-x^3-4}{2x}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-x^3-4}{2x}=-\infty\end{array}\right\}- \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Por tanto, la función tiene ramas parabólicas cuando $x \longrightarrow +\infty$ y $x \longrightarrow -\infty$.

b) $3x^2 - 4 \neq 0$ en todo $\mathbb{R} \longrightarrow \text{Dom } g = \mathbb{R}$ y no tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(3x^2-4)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\ln(3x^2-4)=+\infty\end{array}\right\}\longrightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(3x^2 \quad 4)}{x}$ 0 No tiene asíntotas oblicuas.

Por tanto, la función tiene una rama parabólica cuando $x \longrightarrow +\infty$ y cuando $x \longrightarrow -\infty$.

15. **Página 188**

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3\}$

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2}{x \quad 3}$ ∞ Tiene asíntota vertical en $x = 3$.

$\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{2x^2}{x \quad 3}$ ∞ $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{2x^2}{x \quad 3}$ ∞

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{x-3}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x-3}=-\infty\end{array}\right\}- \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{x\ x-3}=2\longrightarrow m=2\\ \lim\limits_{x\to\infty}f(x)-mx=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-2x^2-6x}{x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x}{x-3}=6\longrightarrow n=6\end{array}\right\}- y = 2x + 6 \text{ es asíntota oblicua de } f(x).$$

Por lo tanto, $f(x)$ no tiene ramas parabólicas.

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ — La función no tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to-\infty}1-e^x = 1 \longrightarrow y = 1$ es una asíntota horizontal de $f(x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}1-e^x = -\infty$ — No tiene asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1 \quad e^x}{x}$ ∞ · La función no tiene asíntotas oblicuas.

Por lo tanto, $f(x)$ tiene una rama parabólica cuando $x \longrightarrow +\infty$.

16. **Página 189**

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{2x\,(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \to x^2 - 2x = 0 \to x = 0;\ x = 2$$

$f'(-3) > 0$ $\quad$ $f(-1{,}5) < 0$ $\quad$ $f(-0{,}5) < 0$ $\quad$ $f(1) > 0$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ y es decreciente en el intervalo $(-2, -1) \cup (-1, 0)$.

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x\,(x^2+1) - 2x\,(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0 \to 4x = 0 \to x = 0$$

$f'(-1) < 0$ $\quad$ $f(1) > 0$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y es creciente en el intervalo $(0, +\infty)$.

17. **Página 189**

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = x\,e^x - \frac{x^2\,e^x}{2} = \frac{x\,e^x\,(2-x)}{2} = 0 \to x = 0;\ x = 2$$

$f'(-3) > 0$ $\quad$ $f'(-1) < 0$ $\quad$ $f(1) > 0$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ y es decreciente en el intervalo $(-2, 0)$.

La función crece a la izquierda del -2 y decrece a la derecha $\to x = -2$ máximo:

$f(-2) = \frac{2}{e^2} \to P\left(-2, \frac{2}{e^2}\right)$ es un máximo.

La función decrece a la izquierda del 0 y crece a la derecha $\to x = 0$ mínimo:

$f(0) = 0 \to Q(0, 0)$ es un mínimo.

b) $\text{Dom } f = (0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\ln x - x \cdot \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}\,(\ln x + 1) = 0 \to x = \frac{1}{e}$$

$f'\left(\frac{1}{3}\right) < 0$ $\qquad$ $f'(1) > 0$

La función es decreciente en el intervalo $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ y creciente en el intervalo $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

La función decrece a la izquierda del $\frac{1}{e}$ y crece a la derecha $\to x = \frac{1}{e}$ mínimo:

$f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{2e} \to P\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{2e}\right)$ es un mínimo.

18. **Página 190**

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{2x\,(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (2x+2)(x^2-2x)}{(x-1)^4} = \frac{2x-2}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3} \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$ No tiene puntos de inflexión.

$f''(-2) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa en el intervalo $(-\infty, -1)$.

$f''(0) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava en el intervalo $(-1, +\infty)$.

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x\,(x^2-1) - 2x\,(x^2-1)}{(x^2-1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{4\,(x^2-1)^2 - 4x\,(4x^3+4x)}{(x^2-1)^4} = \frac{-12x^4 - 8x^2 - 4}{(x^2+1)^4} = \frac{-12x^2 - 4\,(x^2-1)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{-12x^2+4}{(x^2-1)^3} = 0 \Leftrightarrow -12x^2 - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$f''(-1) \exists\, 0 \qquad f''(0) \ni 0 \qquad f''(1) \exists\, 0$

$f(x)$ es convexa en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\infty\right)$.

$f(x)$ es cóncava en el intervalo $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{2} \rightarrow P\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$ es punto de inflexión. $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{2} \rightarrow Q\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$ es punto de inflexión.

19. **Página 190**

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = x\,e^x - \frac{x^2\,e^x}{2} = \frac{x\,e^x\,(2-x)}{2}$$

$$f''(x) = \frac{(e^x - x\,e^x)\,2 + x\,(-x\,e^x)}{2} = \frac{2\,e^x - x\,e^x - 2x\,e^x + x^2\,e^x + xe^x}{2} = \frac{e^x\,(x^2 - 4x + 2)}{2} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 + \sqrt{2}$$

$f''(-4) > 0 \qquad f''(-1) < 0 \qquad f''(0) > 0$

La función $f(x)$ es cóncava en el intervalo $(-\infty, -2-\sqrt{2}) \cup (-2+\sqrt{2}, +\infty)$.

La función $f(x)$ es convexa en el intervalo $(-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2})$.

$f(-2-\sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2}\,e^{-2-\sqrt{2}} \rightarrow P(-2-\sqrt{2},\ 3+2\sqrt{2}\,e^{-2-\sqrt{2}})$ es punto de inflexión.

$f(-2+\sqrt{2}) = 3 - 2\sqrt{2}\,e^{-2+\sqrt{2}} \rightarrow Q(-2+\sqrt{2},\ 3-2\sqrt{2}\,e^{-2+\sqrt{2}})$ es punto de inflexión.

b) $\text{Dom } f = (0, +\infty)$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2} \cdot (\ln x + 1)$

$f''(x) = \frac{1}{2x} > 0 \ \forall x \in \text{Dom } f$ → La función no tiene puntos de inflexión.

La función $f(x)$ es cóncava o convexa en todo su dominio. $f''(e) > 0 \rightarrow$ La función es cóncava en $(0, +\infty)$.

20. Página 191

a) • $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow 2x^3 - 6x = 2x(x^2 - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$ → Corta al eje X en $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$ y $(-\sqrt{3}, 0)$.

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow$ Corta al eje Y $(0, 0)$.

- Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2x^3 - 6x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2x^3 - 6x) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = 6x^2 - 6 = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En el intervalo $(-1, 1)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

La función crece a la izquierda de $x = -1$ y decrece a la derecha → $x = -1$ es un máximo:

$f(-1) = 4 \rightarrow (-1, 4)$ es un máximo.

La función decrece a la izquierda de $x = 1$ y crece a la derecha → $x = 1$ es un mínimo:

$f(1) = -4 \rightarrow (1, -4)$ es un mínimo.

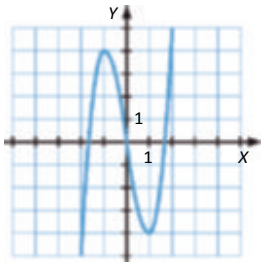
- Concavidad y convexidad:

$f''(x) = 12x = 0 \rightarrow x = 0$

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

La función es convexa a la izquierda de $x = 0$ y cóncava a la derecha → En $x = 0$ hay un punto de inflexión → $(0, 0)$ es punto de inflexión.



b) • Dom $f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow 8x^2 - x^4 = x^2(8 - x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2\sqrt{2} \end{cases} \rightarrow$ Corta al eje *X* en $(0, 0)$, $(2\sqrt{2}, 0)$ y $(-2\sqrt{2}, 0)$.

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0,0)$

- Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (8x^2 - x^4) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (8x^2 - x^4) = -\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = 16x - 4x^3 = 4x(4 - x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

En $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

La función crece a la izquierda de $x = -2$ y decrece a la derecha $\rightarrow x = -2$ es un máximo:

$f(-2) = 16 \rightarrow (-2, 16)$ es un máximo.

La función decrece a la izquierda de $x = 0$ y crece a la derecha $\rightarrow x = 0$ es un mínimo:

$f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es un mínimo.

La función crece a la izquierda de $x = 2$ y decrece a la derecha $\rightarrow x = 2$ es un máximo:

$f(2) = 16 \rightarrow (2, 16)$ es un máximo.

- Concavidad y convexidad:

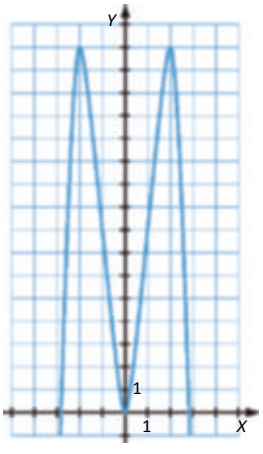
$f''(x) = -12x^2 - 16 = 4(4 - 3x^2) = 0 \rightarrow x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$

En $\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

En el intervalo $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

La función es convexa a la izquierda de $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ y cóncava a la derecha $\rightarrow$ En $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ hay punto de inflexión $\rightarrow \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{80}{9}\right)$ es punto de inflexión.

La función es cóncava a la izquierda de $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ y convexa a la derecha $\rightarrow$ En $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ hay punto de inflexión $\rightarrow \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{80}{9}\right)$ es punto de inflexión.



21. Página 191

a) • Dom $f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \cdot 6x^5 - 12x^3 - 4x - 2x - 3x^4 - 6x^2 - 2 = 0 \cdot \begin{cases} x = 0 \\ x = -1{,}51 \end{cases}$ Corta al eje *X* en $(0, 0)$, $(-1{,}51; 0)$ y $(-1{,}51; 0)$.

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow$ Corta al eje *Y* en (0, 0).

- Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 6x^5 - 12x^3 - 4x = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 6x^5 - 12x^3 - 4x = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = 30x^4 - 36x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = -1{,}14$

En $(-\infty; -1{,}14) \cup (1{,}14, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $(-1{,}14; 1{,}14)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

La función crece a la izquierda de $x = -1{,}14$ y decrece a la derecha $\rightarrow x = -1{,}14$ es un máximo:

$f(-1{,}14) = 10{,}79 \rightarrow (-1{,}14; 10{,}79)$ es un máximo.

La función decrece a la izquierda de $x = 1{,}14$ y crece a la derecha $\rightarrow x = 1{,}14$ es un mínimo:

$f(1{,}14) = -10{,}79 \rightarrow (1{,}14; -10{,}79)$ es un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

$f''(x) = 120x^3 - 72x = 24x(5x^2 - 3) = 0 \cdot \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 0{,}77 \end{cases}$

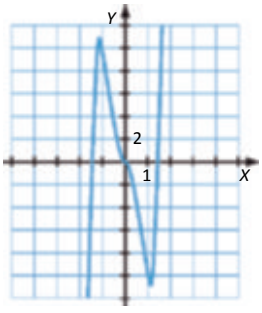
En $(-\infty; -0{,}77) \cup (0; 0{,}77)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

En $(-0{,}77; 0) \cup (0{,}77, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

La función es convexa a la izquierda de $x = -0{,}77$ y cóncava a la derecha $\rightarrow$ En $x = -0{,}77$ hay punto de inflexión $\rightarrow (-0{,}77; 6{,}93)$ es punto de inflexión.

La función es cóncava a la izquierda de $x = 0$ y convexa a la derecha $\rightarrow$ En $x = 0$ hay punto de inflexión $\rightarrow (0, 0)$ es punto de inflexión.

La función es convexa a la izquierda de $x = 0{,}77$ y cóncava a la derecha $\rightarrow$ En $x = 0{,}77$ hay punto de inflexión $\rightarrow (0{,}77; -6{,}93)$ es punto de inflexión.



b) • Dom $f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow x^3 - x^4 = x^3(1 - x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ Corta al eje *X* en $(0, 0)$ y $(-1, 0)$.

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow$ Corta al eje *Y* en (0, 0).

- Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 - x^4 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 - x^4 = -\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x^3 = x^2(3 - 4x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

En $\left(-\frac{3}{4}, 0\right) \cup (0, -\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En el intervalo $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

La función decrece a la izquierda de $x = -\frac{3}{4}$ y crece a la derecha $\rightarrow$ $x = -\frac{3}{4}$ es un mínimo:

$f\left(-\frac{3}{4}\right) = -0{,}11 \rightarrow \left(-\frac{3}{4}, -0{,}11\right)$ es un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

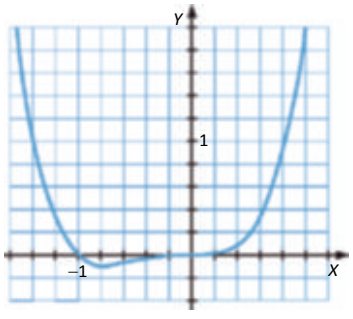
$$f''(x) = 6x - 12x^2 = 6x(1 - 2x) \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

En $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

En el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

La función es cóncava a la izquierda de $x = -\frac{1}{2}$ y convexa a la derecha $\rightarrow$ En $x = -\frac{1}{2}$ hay punto de inflexión $\rightarrow \left(-\frac{1}{2}; -0{,}06\right)$ es punto de inflexión.

La función es convexa a la izquierda de $x = 0$ y cóncava a la derecha $\rightarrow$ En $x = 0$ punto de inflexión $\rightarrow$ (0, 0) es punto de inflexión.



22. Página 192

a) • $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^2 - 5}{x} = 0 \rightarrow x^2 - 5 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{5}$ → Corta al eje X en $(-\sqrt{5}, 0)$ y $(\sqrt{5}, 0)$.

No corta al eje Y porque en $x = 0$ no está definida.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 5}{x} = \dfrac{-5}{0^-} = +\infty$ → Asíntota vertical en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 5}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 5}{x} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 5}{x^2} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to \infty} \left[\dfrac{x^2 - 5}{x} - x\right] = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-5}{x} = 0 \rightarrow n = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua en } y = x.$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

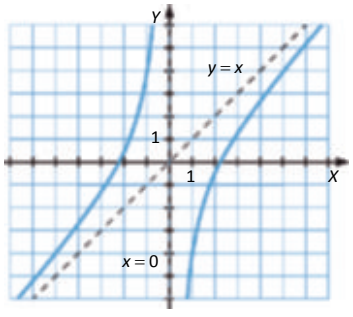
$f'(x) = \dfrac{x^2 + 5}{x^2} > 0$ → La función $f(x)$ es creciente en su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$f''(x) = -\dfrac{10}{x^3} \neq 0$ → La función $f(x)$ no presenta puntos de inflexión.

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.



b) • $x^3 - x = x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Dom } g = \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con los ejes:

$g(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^2}{x^3 - x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ No corta al eje X porque no está definida para $x = 0$.

No corta al eje Y porque la función no está definida para $x = 0$.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^3 - x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x^2 - 1} = 0 \rightarrow$$ No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x^3 - x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x^3 - x} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$ Asíntota horizontal en $y = 0$.

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$g'(x) = \frac{-x^4 - x^2}{x^3 - x^{\ 2}} = \frac{-x^2 - 1}{x^2 - 1^{\ 2}} = 0 \rightarrow x = +1$$

En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ es decreciente.

En $(-1, 0) \cup (0, 1)$, $g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ es creciente.

$x = -1 \rightarrow g(-1) = -\frac{1}{2} \rightarrow \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ es un mínimo.

$x = 1 \rightarrow g(1) = \frac{1}{2} \rightarrow \left(1, \frac{1}{2}\right)$ es un máximo.

- Concavidad y convexidad:

$$g''(x) \quad \frac{2x^3 \quad 6x}{x^2 \quad 1^{\ 3}} \quad 0 \quad 2x^3 \quad 6x \quad 0 \cdot \begin{vmatrix} x & 0 \\ x & \sqrt{3} \end{vmatrix}$$

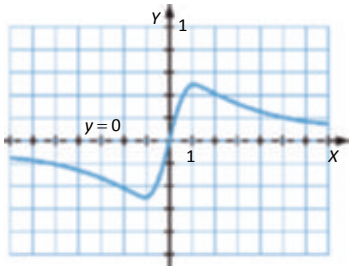
En $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$, $g''(x) < 0 \rightarrow g(x)$ es convexa.

En $(\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, $g''(x) > 0 \rightarrow g(x)$ es cóncava.

$x = -\sqrt{3} \rightarrow g(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \rightarrow \left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ es punto de inflexión.

$x = 0 \rightarrow g(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es punto de inflexión.

$x = \sqrt{3} \rightarrow g(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4} \rightarrow \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ es punto de inflexión.



23. Página 192

a) • $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x^3 - 3}{x} = 0 \Rightarrow x^3 - 3 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3}$ $\sqrt[3]{3}, 0$ corta al eje *X*.

No tiene corte con el eje *Y* porque la función no está definida para $x = 0$.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 3}{x} = \dfrac{-3}{0} = \infty$ Asíntota vertical en $x = 0$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 3}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 3}{x} = -\infty \end{array}\right\}$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - 3}{x^2} = \infty$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 3}{x} = \infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 3}{x} = \infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = \dfrac{2x^3 - 3}{x^2} = 0 \rightarrow 2x^3 - 3 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}} = 1{,}14$

En el intervalo $\left(-\infty, \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}\right)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $\left(\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}, 0\right) \cup (0, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

$x = \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$; $f\left(\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}\right) = \dfrac{3\sqrt[3]{12^2}}{4} = 3{,}93$; $\left(\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}, \dfrac{3\sqrt[3]{12^2}}{4}\right)$ es un mínimo.

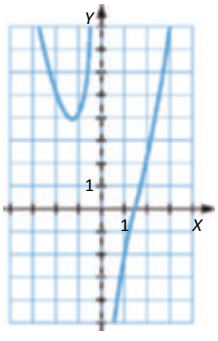
- Concavidad y convexidad:

$f''(x) = \dfrac{2x^3 - 6}{x^3} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 6 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3}$

En $(-\infty, 0) \cup (\sqrt[3]{3}, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

En el intervalo $(0, \sqrt[3]{3})$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

$x = \sqrt[3]{3} \rightarrow f(\sqrt[3]{3}) = 0 \rightarrow (\sqrt[3]{3}, 0)$ es punto de inflexión.



b) • Dom $g = \mathbb{R} - 0$

- Cortes con los ejes:

$g(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^4 - 3x}{x} = 0 \Rightarrow x^4 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 3) = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3} \Rightarrow (\sqrt[3]{3}, 0)$ corta al eje *X*.

No tiene corte con el eje *Y* porque la función no está definida para $x = 0$.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^4 - 3x}{x} = \frac{0}{0} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{4x^3 - 3}{1} = -3 \Rightarrow$ No tiene asíntotas verticales.

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 - 3x}{x} = -\infty \\ \lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - 3x}{x} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^4 - 3x}{x^2} = \infty \Rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene ramas parabólicas:

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 - 3x}{x} = \infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - 3x}{x} = \infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$g'(x) = 3x^2 - 0 \Rightarrow x = 0$

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ es creciente.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ es creciente.

No presenta máximos ni mínimos, ya que la función no está definida en $x = 0$.

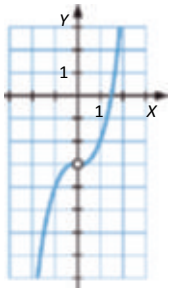
- Concavidad y convexidad:

$g''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $g''(x) < 0 \rightarrow g(x)$ es convexa.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $g''(x) > 0 \rightarrow g(x)$ es cóncava.

No presenta puntos de inflexión, ya que en $x = 0$ la función no está definida.



24. **Página 193**

a) • $2x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq -\frac{1}{2} \rightarrow \text{Dom } f = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

- Cortes con los ejes:

  $f(x)=0 \rightarrow \sqrt{2x-1}=0 \rightarrow x=-\frac{1}{2} \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ es el punto de corte con el eje *X*.

  $f(0)=\sqrt{1}=1 \rightarrow (0, 1)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales, porque en el extremo del dominio la función está definida.

  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x-1} = +\infty$ → No tiene asíntotas horizontales.

  $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x-1}}{x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

  Tiene una rama parabólica:

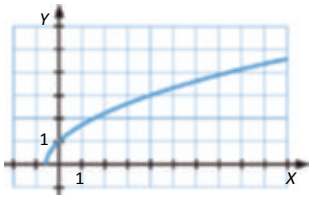
  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x-1} = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-1}} > 0 \ \forall x \in \text{Dom } f \rightarrow$ La función es siempre creciente y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x)=\frac{-1}{2x-1\sqrt{2x-1}} < 0 \ \forall x \in \text{Dom } f \rightarrow$ La función es siempre convexa y no tiene puntos de inflexión.



b) • $\text{Dom } f = [0, +\infty)$

- Cortes con los ejes:

  $f(x)=0 \rightarrow 2x-\sqrt{x}=0 \rightarrow x=0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

  $f(0)=0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales, porque en el extremo del dominio la función está definida.

  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x-\sqrt{x} = +\infty$ → No tiene asíntotas horizontales

  $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-\sqrt{x}}{x} = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

  Tiene una rama parabólica:

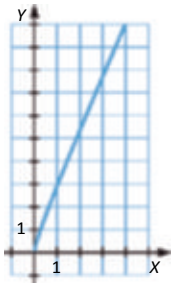
  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x-\sqrt{x} = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \ \forall x \in \text{Dom } f$ · La función es creciente en todo su dominio y no tiene máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0 \ \forall x \in \text{Dom } f$ · La función es convexa en todo el dominio y no tiene puntos de inflexión.



25. Página 193

a) • $4 - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 4 \rightarrow |x| \leq 2 \rightarrow \text{Dom } f = [-2, 2]$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \rightarrow \sqrt{4 - x^2} = 0 \rightarrow x = -2 \rightarrow (-2, 0)$ y $(2, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

  $f(0) = \sqrt{4} = 2 \rightarrow (0, 2)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales, porque en el extremo del dominio la función está definida.

  No tiene asíntotas horizontales, ni asíntotas oblicuas, ni ramas parabólicas, ya que la función no está definida cuando $x \to +\infty$ ni cuando $x \to -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \rightarrow x = 0$

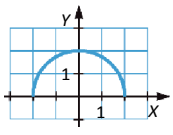
  En el intervalo $(-2, 0)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

  En el intervalo $(0, 2)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

  $x = 0 \rightarrow f(0) = 2 \rightarrow (0, 2)$ es un máximo.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = -\frac{-4}{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}} < 0 \ \forall x \in \text{Dom } f \rightarrow$ La función es convexa en todo el dominio y no tiene puntos de inflexión.



b) • $\mathrm{Dom}\, f = [0, +\infty)$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \rightarrow x - \sqrt{x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

  $f(0) = \sqrt{1} = 1 \rightarrow (0, 1)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales, porque en el extremo del dominio la función está definida.

  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \quad \lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x}) \quad \infty - \infty$ No tiene asíntotas horizontales

  $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - \sqrt{x}}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to +\infty} -\sqrt{x} = -\infty \end{array}\right\}$ No tiene asíntotas oblicuas.

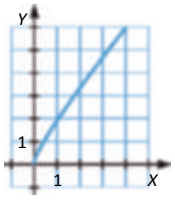
  Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \quad \lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x}) \quad +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \ \forall x \in \mathrm{Dom}\, f$ La función es siempre creciente y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = \dfrac{1}{4x\sqrt{x}} > 0 \ \forall x \in \mathrm{Dom}\, f$ La función es siempre convexa y no tiene puntos de inflexión.



26. Página 194

a) • $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \rightarrow e^{-x} - 2 = 0 \rightarrow x = -\ln 2 \rightarrow (-\ln 2, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

  $f(0) = 1 - 2 = -1 \rightarrow (0, -1)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales.

  $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-x} - 2) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (e^{-x} - 2) = -2 \end{array}\right\}$ $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y = -2$ cuando $x \to +\infty$.

  $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x} - 2}{x} = -\infty$ No tiene asíntotas oblicuas.

  Tiene una rama parabólica:

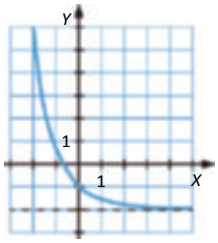
  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-x} - 2) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = -e^{-x} < 0 \ \forall x \in \text{Dom } f \rightarrow$ La función es siempre decreciente y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = e^{-x} > 0 \ \forall x \in \text{Dom } f \rightarrow$ La función es siempre cóncava y no presenta puntos de inflexión.



b) • $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \Rightarrow 3 - e^{\frac{x}{2}} = 0 \ \forall x \in \text{Dom } f \rightarrow$ La función no corta al eje *X*.

  $f(0) = 3 + e^0 = 4 \rightarrow (0, 4)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 - e^{\frac{x}{2}}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(3 + e^{\frac{x}{2}}\right) = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Tiene una asíntota horizontal en } y = 3 \text{ cuando } x \longrightarrow -\infty.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 - e^{\frac{x}{2}}}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3 - e^{\frac{x}{2}}}{x} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

  Tiene una rama parabólica:

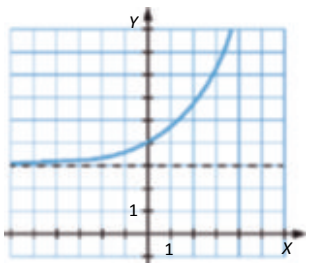
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \lim_{x \to +\infty} \left(3 - e^{\frac{x}{2}}\right) \quad -\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} > 0 \ \forall x \in \text{Dom } f \rightarrow$ La función es creciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}} > 0 \ \forall x \in \text{Dom } f \rightarrow$ La función es cóncava en todo el dominio y no tiene puntos de inflexión.



27. **Página 194**

a) • $\text{Dom } f = (0, +\infty)$

- Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{2}e^{\sqrt{x}} = 0 \;\forall\, x \in \text{Dom } f \rightarrow$ La función no corta al eje *X*.

$f(0) = \frac{1}{2}e^{0} = \frac{1}{2} \rightarrow \left(0, \frac{1}{2}\right)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales, porque en el extremo del dominio la función está definida.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}\right) = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}}{x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}\right) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}} > 0 \;\forall x \in \text{Dom } f \rightarrow$ La función es creciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

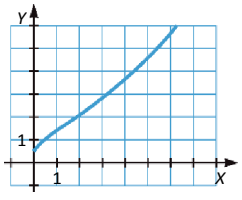
- Concavidad y convexidad:

$f''(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right)}{8x\sqrt{x}} = 0 \rightarrow x = 1$

En el intervalo (0, 1), $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

En el intervalo $(1, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

$x = 1 \rightarrow f(1) = \frac{e}{2} \rightarrow \left(1, \frac{e}{2}\right)$ es un punto de inflexión.



b) • $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}} = 0 \;\forall x \in \text{Dom } f \rightarrow$ La función no corta al eje *X*.

$f(0) = \frac{1}{2}e^{0} = \frac{1}{2} \rightarrow \left(0, \frac{1}{2}\right)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales.

  $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}} = -\infty$

  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}} = -\infty$ → No tiene asíntotas horizontales.

  $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}}}{x} = +\infty$

  $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}}}{x} = -\infty$ → No tiene asíntotas oblicuas.

  Tiene ramas parabólicas:

  $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}} = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}} = -\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = \frac{x}{2}e^{\frac{x^2}{2}} = 0 \rightarrow x = 0$

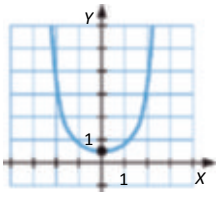
  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

  En el intervalo $(0, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente.

  $x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{1}{2} \rightarrow \left(0, \frac{1}{2}\right)$ es un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}}(1 - x^2) \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ → La función es siempre cóncava y no presenta puntos de inflexión.



28. Página 195

a) • $2x - 4 > 0 \rightarrow x > 2 \rightarrow \text{Dom } f = (2, +\infty)$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \rightarrow \ln(2x - 4) = 0 \rightarrow 2x - 4 = 1 \rightarrow x = \frac{5}{2} \rightarrow \left(\frac{5}{2}, 0\right)$ es el punto de corte con el eje *X*.

  No tiene puntos de corte con el eje *Y*, ya que la función no está definida para $x = 0$.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} \ln(2x - 4) = -\infty$ → Asíntota vertical en $x = 2$.

  $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(2x - 4) = +\infty$ → No tiene asíntotas horizontales.

  $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x - 4)}{x} = 0$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

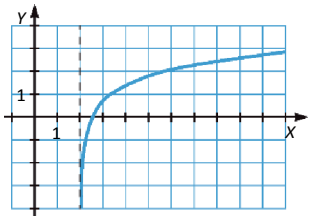
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln 2x-4 \Big| = -\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) - \frac{1}{x-2} > 0 \ \forall x \in \text{Dom } f$ — La función es siempre creciente y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$f''(x) = \frac{-1}{x-2^{\,2}} < 0 \ \forall x \in \text{Dom } f \rightarrow$ La función es siempre convexa y no presenta puntos de inflexión.



b) • $4-2x > 0 \rightarrow x < 2 \rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, 2)$

- Cortes con los ejes:

$f(x)=0 \rightarrow \ln 4-2x = 0 \rightarrow 4-2x = 1 \rightarrow x = \frac{3}{2} \rightarrow \left(\frac{3}{2}, 0\right)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$f(0) = \ln 4 \rightarrow (0, \ln 4)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \ln 4-2x \Big| = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 2$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln 4-2x = -\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln 4-2x}{x} = 0$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

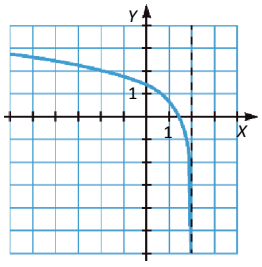
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln 4-2x \Big| = -\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) \quad \frac{1}{x \quad 2} < 0 \ \forall x \in \text{Dom } f$ La función es siempre decreciente y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$f''(x) = \frac{-1}{x-2^{\,2}} < 0 \ \forall x \in \text{Dom } f \rightarrow$ La función es siempre convexa y no presenta puntos de inflexión.



29. **Página 195**

a) • $x^2 - 3 > 0 \rightarrow x^2 > 3 \rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \rightarrow \ln(x^2 - 3) = 0 \rightarrow x^2 - 3 = 1 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow (-2, 0)$ y $(2, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

  No tiene corte con el eje *Y*, ya que la función no está definida para $x = 0$.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $\lim_{x \to -\sqrt{3}^-} f(x) \quad \lim_{x \to -\sqrt{3}^-} \ln(x^2 - 3) = -\infty$ Asíntota vertical en $x = -\sqrt{3}$.

  $\lim_{x \to \sqrt{3}^+} f(x) \quad \lim_{x \to \sqrt{3}^+} \ln(x^2 - 3) = -\infty$ Asíntota vertical en $x = \sqrt{3}$.

  $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln(x^2 - 3) = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(x^2 - 3) = -\infty \end{array}\right\}$ → No tiene asíntotas horizontales.

  $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} \dfrac{\ln(x^2 - 3)}{x} = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2 - 3)}{x} = 0 \end{array}\right\}$ → No tiene asíntotas oblicuas.

  Tiene ramas parabólicas:

  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln(x^2 - 3) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \lim_{x \to +\infty} \ln(x^2 - 3) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

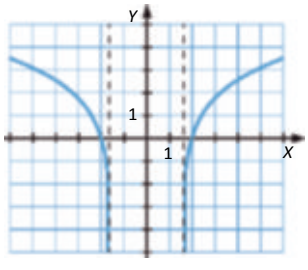
  $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 3} = 0 \ \forall x \in \text{Dom } f$ → La función no presenta máximos ni mínimos.

  En el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3})$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

  En el intervalo $(\sqrt{3}, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 6}{(x^2 - 3)^2} < 0 \ \forall x \in \text{Dom } f$ → La función es convexa en todo su dominio y no tiene puntos de inflexión.



b) • $3 - x^2 > 0 \rightarrow x^2 < 3 \rightarrow \text{Dom } f = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \rightarrow \ln(3 - x^2) = 0 \rightarrow 3 - x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \rightarrow (-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

  $f(0) = \ln 3 \rightarrow (0, \ln 3)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $\lim_{x \to -\sqrt{3}^+} f(x) \quad \lim_{x \to -\sqrt{3}^+} \ln 3 \quad x^2 \quad \cdots$ Asíntota vertical en $x = -\sqrt{3}$.

  $\lim_{x \to \sqrt{3}^-} f(x) \quad \lim_{x \to \sqrt{3}^-} \ln 3 \quad x^2 \quad \cdots$ Asíntota vertical en $x = \sqrt{3}$.

  No tiene asíntotas horizontales, ni oblicuas, ni ramas parabólicas, porque la función no está definida cuando $x \to -\infty$ ni cuando $x \to -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 3} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

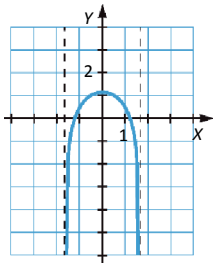
  En el intervalo $-\sqrt{3}, 0$, $f'(x) > 0 \to f(x)$ es creciente.

  En el intervalo $\sqrt{3}, 0$, $f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente.

  $x = 0 \to f(0) = -\ln 3 \to 0, \ln 3$ es un máximo.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = \frac{-2x^2 - 6}{x^2 - 3^2} < 0 \ \forall x \in \text{Dom } f$ La función es siempre convexa y no presenta puntos de inflexión.



30. Página 196

- $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

- Continuidad:

  Las funciones de cada tramo son continuas, pero la función no es continua en $x = 1$:

  $\lim_{x \to 1^-} f(x) = e^0 = 1 \neq 0 = \lim_{x \to 1^+} f(x)$ Salto de discontinuidad finito en $x = 1$.

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \ \forall x \in \text{Dom } f \to$ No corta al eje X.

  $f(0) = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \to \left\{0, \frac{1}{e^2}\right\}$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales, porque en el extremo del dominio la función está definida.

  $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{2x-2} = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x - 1^2 = -\cdots \end{array}\right\} \to$ Asíntota horizontal en $y = 0$.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1^{2}}{x}=-\infty$ → No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

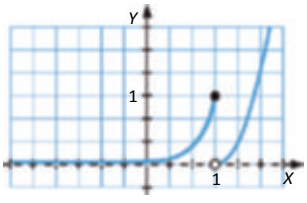
$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x-1^{2}=-\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x)=\begin{cases}2e^{2x-2} & \text{si } x<1\\ 2x-1 & \text{si } x>1\end{cases}$ — $f'(x)>0\ \forall x\in \text{Dom } f$ — Es siempre creciente y no tiene máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$f''(x)\quad\begin{cases}4e^{2x-1} & \text{si } x<1\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}$ · $f''(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ · La función es siempre cóncava y no tiene puntos de inflexión.



31. Página 196

- $\text{Dom } f=\mathbb{R}$

- Continuidad:

Las funciones de cada tramo son continuas, pero la función no es continua en $x=-2$:

$\lim_{x\to-2^{-}}f(x)=0\neq 3=\lim_{x\to-2^{+}}f(x)$ — Salto de discontinuidad finito en $x=-2$.

- Cortes con los ejes:

$f(x)\quad 0\ \cdot\begin{cases}\ln\quad 1\quad x\quad 0\ \cdot\ x\quad 2\ \cdot\quad 2,0\\ 4\quad\sqrt{x\quad 3}\quad 0\ \cdot\ x\quad 13\ \cdot\ 13,0\end{cases}$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$f(0)=4-\sqrt{3}-\quad 0,4-\sqrt{3}$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales, porque en el extremo del dominio la función está definida.

$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}f(x)&=\lim_{x\to-\infty}\ln\ -1-x\ =-\infty\\ \lim_{x\to+\infty}f(x)&=\lim_{x\to+\infty}4-\sqrt{x-3}=-\infty\end{aligned}\right\}$ — No tiene asíntotas horizontales.

$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}&=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\ -1-x}{x}=0\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-\sqrt{x-3}}{x}=0\end{aligned}\right\}$ — No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene ramas parabólicas:

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\ln\ -1-x\ =-\infty$ $\lim_{x\to+\infty}f(x)\quad\lim_{x\to+\infty}4\quad\sqrt{x\quad 3}$

- Crecimiento y decrecimiento:

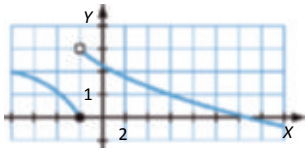
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{x-3}} & \text{si } x > -2 \end{cases} \rightarrow f'(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$$ La función es decreciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x-1)^2} & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{1}{4(x-3)\sqrt{x+3}} & \text{si } x > -2 \end{cases}$$ $\rightarrow f''(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función no tiene puntos de inflexión.

En el intervalo $(-\infty, -2)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

En el intervalo $(-2, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

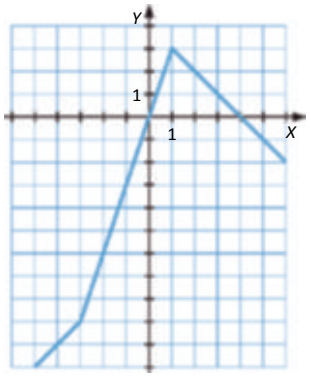


32. **Página 197**

a) $$f(x) = \begin{cases} -x-3-2x-2-1 & \text{si } x < -3 \\ x-3-2x-2-1 & \text{si } -3 < x < 1 \\ x-3-2x+2-1 & \text{si } 1 < x \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} x-6 & \text{si } x < -3 \\ 3x & \text{si } -3 < x < 1 \\ -x-4 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Se trata de representar cada una de las rectas en su correspondiente intervalo. Teniendo en cuenta la pendiente y la ordenada en el origen de cada una de ellas:

$y = x - 6 \rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = -6 \end{cases}$ $y = 3x \rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 0 \end{cases}$ $y = -x - 4 \rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = -4 \end{cases}$



b) Representaremos la función sin tener en cuenta el valor absoluto: $f(x) = x - x^3$.

- $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow x - x^3 = x(1 - x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \rightarrow (0, 0), (1, 0)$ y $(-1, 0)$ son los puntos de corte con el eje X.

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x - x^3 = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim_{x\to+\infty} x$ x^3

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = 1 - 3x^2 = 0 \to x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

  En $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\infty\right)$, $f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente.

  En el intervalo $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $f'(x) > 0 \to f(x)$ es creciente.

  $x - -\frac{\sqrt{3}}{3} \to f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - -\frac{2\sqrt{3}}{9} \to \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ es un mínimo.

  $x - \frac{\sqrt{3}}{3} \to f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \frac{2\sqrt{3}}{9} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ es un máximo.

- Concavidad y convexidad:

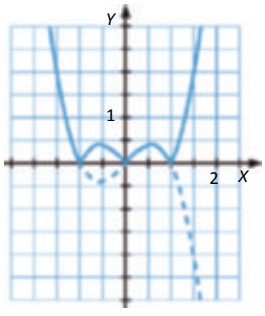
  $f''(x) = -6x = 0 - x = 0$

  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f''(x) > 0 \to f(x)$ es cóncava.

  En el intervalo $(0, +\infty)$, $f''(x) < 0 \to f(x)$ es convexa.

  $f(0) - 0 \to 0, 0$ es un punto de inflexión.

Una vez representada la función sin valor absoluto, dibujamos las partes negativas como positivas, haciendo una simetría respecto del eje X.



33. Página 197

a) $f(x)$ $\begin{cases} 1 & e^{-x} \quad \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & e^{x} \quad \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

Sean $g(x) - 1 - e^{-x}$ y $h(x) - 1 - e^{x}$.

- Dom g – Dom h –

- Cortes con los ejes:

  $g(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow (0, 0)$ es el punto de corte de $g(x)$ con el eje X.

  $h(x) = 0 \Rightarrow 1 - e^{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte de $h(x)$ con el eje X.

  $g(0) = 1 - e^{0} = 0 \Rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte de $g(x)$ con el eje Y.

  $h(0) = 1 - e^{0} = 0 \Rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte de $h(x)$ con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Ni $g(x)$ ni $h(x)$ tienen asíntotas verticales.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - e^{-x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 1 - e^{-x} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow g(x) \text{ tiene asíntota horizontal en } y = 1.$$

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - e^{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 1 - e^{x} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow h(x) \text{ tiene asíntota horizontal en } y = 1.$$

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - e^{-x}}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 - e^{-x}}{x} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow g(x) \text{ no tiene asíntotas oblicuas.}$$

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - e^{x}}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 - e^{x}}{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow h(x) \text{ no tiene asíntotas oblicuas.}$$

  $g(x)$ y $h(x)$ tienen una rama parabólica:

  $$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} 1 - e^{-x} = -\infty$$

  $$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 - e^{x} = -\infty$$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $g'(x) = e^{-x} > 0 \ \forall x \in \text{Dom } g \Rightarrow$ La función es creciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

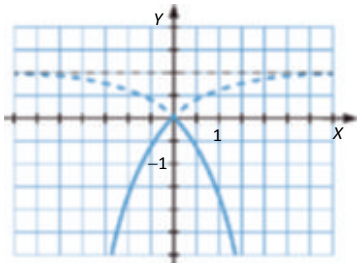
  $h'(x) = -e^{x} < 0 \ \forall x \in \text{Dom } h \Rightarrow$ La función es decreciente en todo su dominio y no tiene máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

  $g''(x) = -e^{-x} < 0 \ \forall x \in \text{Dom } g \Rightarrow$ La función es convexa en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.

  $h''(x) = -e^{x} < 0 \ \forall x \in \text{Dom } h \Rightarrow$ La función es convexa en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.

Por último, para representar $f(x)$, representamos ambas funciones en su dominio correspondiente:



b) $f(x)=\begin{cases}\ln x^2-4 & \text{si } x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)\\ \ln 4-x^2 & \text{si } x\in[-2,2]\end{cases}$

Sea $g(x)=\ln x^2-4$ y $h(x)=\ln 4-x^2$

- Dom $g=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ Dom $h=[-2,2]$
- Cortes con los ejes:

  $g(x)=0\rightarrow \ln x^2-4=0\rightarrow x^2-4=1\rightarrow x=\sqrt{5}\rightarrow -\sqrt{5},0$ y $\sqrt{5},0$ son los puntos de corte de $g(x)$ con el eje X.

  $h(x)=0\rightarrow \ln 4-x^2=0\rightarrow 4-x^2=1\rightarrow x=\sqrt{3}\rightarrow -\sqrt{3},0$ y $\sqrt{3},0$ son los puntos de corte de $h(x)$ con el eje X.

  La función $g(x)$ no tiene corte con el eje Y.

  $h(0)=\ln 4\rightarrow 0,\ln 4$ es el punto de corte de $h(x)$ con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}(\ln x^2-4)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(\ln x^2-4)=-\infty\end{array}\right\}$ $-$ $g(x)$ tiene asíntotas verticales en $x=-2$ y en $x=2$.

  $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^+} h(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}(\ln 4-x^2)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(\ln 4-x^2)=-\infty\end{array}\right\}$ $-$ $h(x)$ tiene asíntotas verticales en $x=-2$ y en $x=2$.

  $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x^2-4)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}(\ln x^2-4)=-\infty\end{array}\right\}$ $-$ $g(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

  $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x^2-4}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\ln x^2-4}{x}=0\end{array}\right\}\rightarrow$ $g(x)$ no tiene asíntotas oblicuas.

  $h(x)$ no tiene asíntotas horizontales ni oblicuas porque no está definida cuando $x\to-\infty$ ni cuando $x\to+\infty$.

  $g(x)$ tiene dos ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$ $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x^2$ $4)$ $+\infty$ $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}(\ln x^2-4)=-\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $g'(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}=0\ \forall x\in \text{Dom } g\rightarrow$ La función no presenta máximos ni mínimos.

  En el intervalo $(-\infty,-2)$, $g'(x)<0\rightarrow g(x)$ es decreciente.

  En el intervalo $(2,+\infty)$, $g'(x)>0\rightarrow g(x)$ es creciente.

  $h'(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}=0\rightarrow x=0$

  En el intervalo $(-2, 0)$, $h'(x)>0\rightarrow h(x)$ es creciente.

  En el intervalo $(0, 2)$, $h'(x)<0\rightarrow h(x)$ es decreciente.

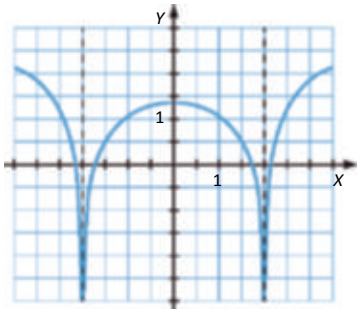
  $x=0\rightarrow h(0)=\ln 4\rightarrow 0,\ln 4$ es un máximo de $h(x)$.

- Concavidad y convexidad:

$g''(x) = \dfrac{-2\ x^2 - 4}{x^2 - 4^2} < 0\ \forall x \in \text{Dom}\ g \rightarrow$ La función es siempre convexa y no presenta puntos de inflexión.

$h''(x) = \dfrac{-2\ x^2 - 4}{x^2 - 4^2} < 0\ \forall x \in \text{Dom}\ h \rightarrow$ La función es siempre convexa y no presenta puntos de inflexión.

Por último, para representar $f(x)$, representamos ambas funciones en su dominio correspondiente:



34. **Página 198**

$x - 2 = 0 \rightarrow x = -2$ $\quad \dfrac{1}{x\ \ 2} > 0\ \cdot\ x\ \ 2 > 0\ \cdot\ x > \ \ 2$ $\quad \sqrt{\dfrac{1}{x-2}} > 0 \rightarrow x - 2 > 0 \rightarrow x > -2$

$\text{Dom}\ f = \ -2, -\infty$

35. **Página 198**

$f(-x) = \dfrac{5 \ln \sqrt{-x^{\ 2} + 1}}{-x^{\ 2} + 2} = \dfrac{5 \ln \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 2} = f(x) \rightarrow$ La función es simétrica respecto el eje de ordenadas.

36. **Página 198**

$y - \dfrac{x-1}{2} \rightarrow m - \dfrac{1}{2}, n - \dfrac{1}{2}$

$m \quad \lim_{x \to +\infty} \dfrac{f\ x}{x} \quad \lim_{x \to +\infty} \dfrac{ax^2\ \ 1}{x^2\ \ x} \quad a \quad a \quad \dfrac{1}{2}$ $\qquad n = \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to +\infty} \left\{ \dfrac{\frac{1}{2}x^2 - 1}{x - 1} - \dfrac{1}{2}x \right\} = \lim_{x \to +\infty} \left\{ \dfrac{x-2}{2x-2} \right\} = \dfrac{1}{2}$

37. **Página 199**

$f'(x) > 0$ en $-\infty, -2 \ \ 2, 6 \rightarrow f(x)$ crece. $\qquad f'(x) < 0$ en $-2, 2 \ \ 6, -\infty \rightarrow f(x)$ decrece.

$f'(x) = 0 \rightarrow x = x_1, x = x_2, x = x_3$

Mínimos: $x = x_2$ $\qquad$ Máximos: $x = x_1, x = x_3$

$f'(x)$ decrece en $-\infty, 0 \ \ 4, -\infty \rightarrow f(x)$ es convexa.

$f'(x)$ crece en $(0, 4) \rightarrow f(x)$ es cóncava.

$f''(x) = 0 \rightarrow$ Estos serán los máximos o mínimos de $f'(x)$.

$x = 0$ y $x = 4$ son puntos de inflexión.

38. **Página 199**

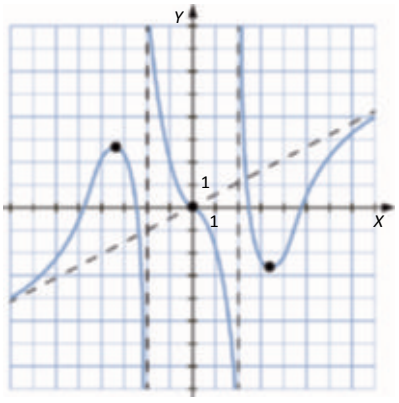
Dom $f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Punto de corte: (0, 0)

Asíntotas verticales: $x = 2$, $x = -2$ Asíntota oblicua: $y = \frac{1}{2}x$

Crece en $(-\infty, -\sqrt{12}) \cup (\sqrt{12}, +\infty)$ Máximo: $\left(\sqrt{12}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Decrece en $(-\sqrt{12}, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \sqrt{12})$ Mínimo: $\left(-\sqrt{12}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$



39. **Página 200**

- Simetría:

  $f(-x) = \frac{-x}{-x^2 - 1} = -\frac{x}{x^2 - 1} = -f(x)$

  Es simétrica respecto el origen de coordenadas, solo hay que estudiar la función en el intervalo $[0, -\infty)$.

- Dom $f = [0, -\infty) - \{1\}$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 = \frac{x}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

  $f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x^2 - 1} = \infty$ — Asíntota vertical en $x = 1$.

  $\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 - 1} \quad 0$ Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

  No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = \frac{-x^2 - 1}{x^2 - 1^2} < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ — La función $f(x)$ es siempre decreciente y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

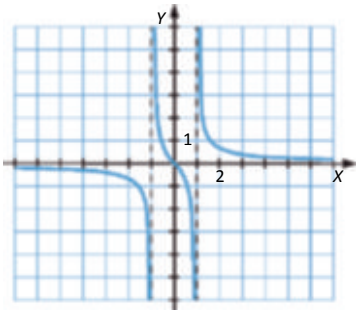
$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{x^2 - 1^3} = 0 \rightarrow x = 0$$

En el intervalo $0,1$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

En el intervalo $1,-\infty$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

$x - 0 \rightarrow f(0) - 0 - 0,0$ es punto de inflexión.

Se dibuja la gráfica teniendo en cuenta la simetría de la función:



40. Página 200

$$f(x) = \frac{|x|}{|x| - 1} = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Sean $g(x) \quad \frac{x}{x \quad 1}$ y $h(x) - \frac{x}{x-1}$.

- Dom $g - \mathbb{R} - -1$ Dom $h - \mathbb{R} - 1$

- Cortes con los ejes:

$g(x) \quad 0 \cdot \frac{x}{x \quad 1} \quad 0 \cdot x \quad 0 \cdot 0,0$ es el punto de corte de g con el eje X.

$h(x) - 0 - \frac{x}{x-1} - 0 \rightarrow x - 0 \rightarrow 0,0$ es el punto de corte de h con el eje X.

$g(0) \quad \frac{x}{x \quad 1} \quad 0 \cdot 0,0$ es el punto de corte de g con el eje Y.

$h(0) - \frac{x}{x-1} - 0 - 0,0$ es el punto de corte de h con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x}{x-1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{x}{x-1} = -\infty \end{array}\right| - g(x) \text{ tiene asíntota vertical en } x = -1.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x}{x-1} = -\infty \end{array}\right| - h(x) \text{ tiene asíntota vertical en } x = 1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1}=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x-1}=1\end{array}\right\}$$ – $g(x)$ tiene asíntota horizontal en $y=1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1}=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x-1}=1\end{array}\right\}$$ – $h(x)$ tiene asíntota horizontal en $y=1$.

Ni $g(x)$ ni $h(x)$ tienen ramas parabólicas.

- Crecimiento y decrecimiento:

$g'(x)=\dfrac{1}{x-1^{2}}\therefore 0\ \forall x\vdash \mathrm{Dom}\ g$ – La función es creciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

$h'(x)=\dfrac{-1}{x-1^{2}}\therefore 0\ \forall x\div \mathrm{Dom}\ h\rightarrow$ La función es decreciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$g''(x)=\dfrac{-2}{x-1^{3}}=0\ \forall x\div \mathrm{Dom}\ g\rightarrow$ La función no presenta puntos de inflexión.

En el intervalo $(-\infty, -1)$, $g''(x)>0\rightarrow g(x)$ es cóncava.

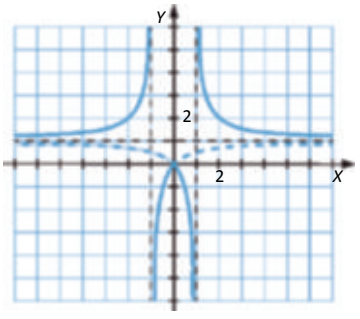
En el intervalo $(-1, +\infty)$, $g''(x)<0\rightarrow g(x)$ es convexa.

$h''(x)=\dfrac{2}{x-1^{3}}=0\ \forall x-\mathrm{Dom}\ h\rightarrow$ La función no presenta puntos de inflexión.

En el intervalo $(-\infty, 1)$, $h''(x)<0\rightarrow h(x)$ es convexa.

En el intervalo $(1, +\infty)$, $h''(x)>0\rightarrow h(x)$ es cóncava.

Por último, para representar $f(x)$, representamos ambas funciones en su dominio correspondiente:



41. **Página 201**

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + b \to f'(1) = 3a - b = 0 \\ f(1) = a + b - 1 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3a - b = 0 \\ a - b = -1 \end{array}\right\} \to a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$$

42. **Página 201**

a) $\left.\begin{array}{l} B(5) = 10 \\ \lim\limits_{x \to 5^-} (-t^2 - 7t) = 10 \\ \lim\limits_{x \to 5^+} 10 = 10 \end{array}\right\} \to B(t)$ es continua en $t = 5$.

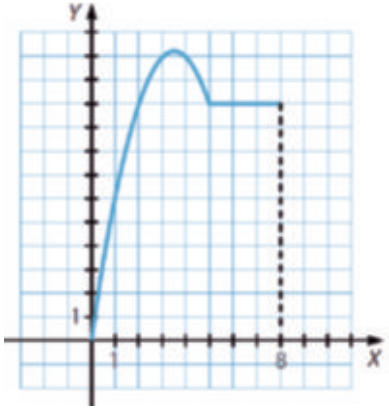
- En $[0, 5)$:

$B'(t) = -2t - 7 = 0 \to t = -\frac{7}{2}$

$B''(t) = -2 < 0 \to$ La función es siempre convexa, y en $t = \frac{7}{2}$ se alcanza un máximo, por lo que en $\left[0, \frac{7}{2}\right)$ es creciente y en $\left(\frac{7}{2}, 5\right)$ es decreciente.

$B(0) = 0$ $\qquad$ $B\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{49}{4}$

- En $[5, 8]$: $B(t) = 10$



El beneficio esperado aumenta durante los tres primeros años y medio, hasta alcanzar el valor 12,25 millones de euros. Luego disminuye hasta el quinto año, alcanzando los 10 millones de euros y, a partir de ahí, permanece constante hasta el octavo año.

b) $B(t) = 11{,}25 \Leftrightarrow t^2 + 7t = 11{,}25 \Leftrightarrow t^2 + 7t - 11{,}25 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2{,}5 \\ x = 4{,}5 \end{array}\right.$

El beneficio esperado es de 11,25 millones a los dos años y medio y a los cuatro años y medio.

ACTIVIDADES FINALES

43. **Página 202**

a) Dom $y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = 3x - 9 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow (3, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -9 \rightarrow (0, -9)$

b) Dom $y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = -2x + 6 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow (3, 0)$

Puntos de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 6 \rightarrow (0, 6)$

c) Dom $y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = -x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \rightarrow (-3, 0) \\ x = 1 \rightarrow (1, 0) \end{cases}$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 3 \rightarrow (0, 3)$

d) Dom $y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = x^3 - x^2 - 4x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \rightarrow (-2, 0) \\ x = -1 \rightarrow (-1, 0) \\ x = 2 \rightarrow (2, 0) \end{cases}$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -4 \rightarrow (0, -4)$

44. **Página 202**

a) Dom $y = \mathbb{R} - \{2\}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \frac{x - 6}{x - 2} = 0 \cdot x = 6 \rightarrow (6, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow (0, -3)$

b) Dom $y = \mathbb{R} - \{-3\}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \frac{x^2 - 4}{x - 3} = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow (-2, 0), (2, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -\frac{4}{3} \rightarrow \left(0, -\frac{4}{3}\right)$

c) Dom $y = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \frac{x - 3}{x^2 - 4} = 0 \cdot x = 3 \cdot (3, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -\frac{3}{4} \rightarrow \left(0, -\frac{3}{4}\right)$

d) Dom $y = \mathbb{R} - \{-2\}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \frac{x^3 - x}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = -1 \rightarrow (-1, 0) \\ x = 1 \rightarrow (1, 0) \end{cases}$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

45. **Página 202**

a) Dom $y = (-\infty, 4]$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \sqrt{4-x} - 3 = 0 \rightarrow x = -5 \rightarrow (-5, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow (0, -1)$

b) Dom $y = \left[-\frac{3}{4}, +\infty\right)$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \sqrt{3x-4} - 5 = 0 \rightarrow x = 7 \rightarrow (7, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow (0, -3)$

c) Dom $y = [-5, 5]$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \sqrt{25-x^2} = 0 \rightarrow x = -5 \rightarrow (-5, 0)\ ,\ (5, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 5 \rightarrow (0, 5)$

d) Dom $y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \sqrt{x^2+9} - 5 = 0 \rightarrow x = -4 \rightarrow (-4, 0)\ ,\ (4, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -2 \rightarrow (0, -2)$

46. **Página 202**

a) Dom $y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = x \cdot e^x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

b) Dom $y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = 2^x - 1 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

c) Dom $y = \mathbb{R} - \{0\}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = 2 - 2^{\frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow x = 1 \cdot (1, 0)$

No está definida la función para $x = 0$; por tanto, no tiene punto de corte con eje *Y*.

d) Dom $y = \mathbb{R} - \{0\}$

Puntos de corte con eje *X*: $y = 9 - 3^{2-\frac{1}{x}} = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ · No tiene puntos de corte.

No está definida la función para $x = 0$; por tanto, no tiene punto de corte con eje *Y*.

47. **Página 202**

a) $\text{Dom } y = (-3, +\infty)$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \log_3(3x - 9) = 0 \rightarrow x = -\frac{8}{3} \rightarrow \left(-\frac{8}{3}, 0\right)$

Punto de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -2 \rightarrow (0, -2)$

b) $\text{Dom } y = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \ln(x^2 + 2x) = 0 \rightarrow x = -1 \pm \sqrt{2} \rightarrow (-1-\sqrt{2}, 0),\ (-1+\sqrt{2}, 0)$

No está definida la función para $x = 0$; por tanto, no tiene punto de corte con eje *Y*.

c) $\text{Dom } y = (-2, 4)$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \log_2\left(\frac{2-x}{4-x}\right) = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$

Puntos de corte con eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow (0, -1)$

d) $\text{Dom } y = (1, 2) \cup (2, +\infty)$

Puntos de corte con eje *X*: $y = \frac{x}{\log_2(x-1)} = 0 \rightarrow x \notin \text{Dom } f \rightarrow$ No tiene puntos de corte.

No está definida la función para $x = 0$; por tanto, no tiene punto de corte con eje *Y*.

48. **Página 202**

a) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{0\}$

b) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{1\}$

c) $\text{Dom } y = (0, +\infty)$

d) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

49. **Página 202**

a) $(-\infty, -4) \cup \{-3, +3\}$

b) $(4, +\infty) - \{-3, +3\}$

c) $(-\infty, -4]$

d) $(-\infty, -2) \cup \{3\}$

e) $(2, +\infty) \cup \{-3\}$

f) $[4, +\infty)$

50. **Página 202**

a) Dom $y = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

b) Dom $y = (-\infty, -2) \cup [0, 1] \cup (3, +\infty)$

c) Dom $y = (-\infty, -2) \cup (-1, 0) - (2, +\infty)$

d) Dom $y = (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (-\sqrt{5}, -2) \cup (2, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$

51. **Página 202**

a) Dom $y = (-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

b) Dom $y = [3, 4) \cup (4, 7)$

c) Dom $y = (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

d) Dom $y = [-5, -1) \cup (-1, 2]$

52. **Página 202**

a) $f(-x) = -x^3 - x = -x^3 - x = -(x^3 - x) = -f(x)$ Simétrica respecto del origen.

b) $f(-x) = -x^4 - 2(-x^2) - 5 = x^4 - 2x^2 - 5 = f(x)$ Simétrica respecto del eje *Y*.

c) $f(-x) = -x^2 - (-x) - 3 = x^2 + x - 3 \rightarrow$ No es simétrica.

d) $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 9}$ $\frac{3x}{x^2 - 9}$ $\frac{3x}{x^2 - 9}$ f x Simétrica respecto del origen.

e) $f(-x) = \frac{\ln|-x|}{-x-4} = \frac{\ln|x|}{-x-4} \rightarrow$ No es simétrica.

f) $f(x)$ 2 x^2 1^2 $2x^2$ 1^2 $f(x)$ Simétrica respecto del eje *Y*.

53. **Página 202**

a) Dom $y = \mathbb{R} - 0$

Puntos de corte con el eje *X*: $y = 0$ $\frac{x-1}{x^2} = 0$ $x = 1$ $(1, 0)$

No está definida la función para $x = 0$; por tanto, no tiene punto de corte con eje *Y*.

$f(-x) = \frac{-x-1}{-x^2} = \frac{-x-1}{x^2} \rightarrow$ No es simétrica.

b) Dom $y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con el eje *X*: $y = 0$ $\frac{x^2}{e^x} = 0$ $x = 0$ $(0, 0)$

Punto de corte con el eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$f(-x) = \frac{-x^2}{e^{-x}} = x^2 e^x$ No es simétrica.

c) $25 - x^2 \geq 0 \quad 5 - x \quad 5 - x \geq 0 \rightarrow x \in [-5, 5] \rightarrow$ Dom $y = [-5, 5]$

Puntos de corte con el eje *X*: $y = 0 \rightarrow \sqrt{25 - x^2} = 0 \quad x = -5 \quad (-5, 0), (5, 0)$

Punto de corte con el eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 5 \quad (0, 5)$

$f(x)$ $\sqrt{25 \quad x^2}$ $\sqrt{25 \quad x^2}$ $f(x)$ Simétrica respecto del eje *Y*.

d) $4 - x^2 \geq 0 \rightarrow 2 - x \quad 2 - x \geq 0 \rightarrow x \in [-2, 2] \rightarrow \text{Dom } y = [-2, 2]$

Puntos de corte con el eje *X*: $y = 0 \rightarrow \sqrt{4 - x^2} = 0 \rightarrow x = -2 \rightarrow (-2, 0)\ ,\ (2, 0)$

Punto de corte con el eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow (0, 2)$

$f(-x) = \sqrt{4 - (-x)^2} = \sqrt{4 - x^2} = f(x)$ · Simétrica respecto del eje *Y*.

e) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con el eje *X*: $y = 0 \rightarrow 7 - 2x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}} \rightarrow \left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, 0\right), \left(\sqrt{\frac{7}{2}}, 0\right)$

Punto de corte con el eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = 7 \rightarrow (0, 7)$

$f(-x) = 7 - 2(-x)^2 = 7 - 2x^2 = f(x) \rightarrow$ Simétrica respecto del eje *Y*.

f) $x^2 - 2x - 7 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Dom } y = \mathbb{R}$

Puntos de corte con el eje *X*: $y = 0 \rightarrow \sqrt{x^2 - 2x - 7} \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ No tiene.

Punto de corte con el eje *Y*: $x = 0 \rightarrow y = \sqrt{7} \rightarrow (0, \sqrt{7})$

$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 2(-x) - 7} = \sqrt{x^2 + 2x - 7}$ · No es simétrica.

54. Página 202

a) $f(x - 2k\pi) = -2\,sen(x + 2k\pi) = -2\,sen\,x\,cos\,2k\pi - cos\,x\,sen\,2k\pi = -2\,sen\,x \cdot 1 - cos\,x \cdot 0 = -2\,sen\,x = f(x)$

La función es periódica de periodo 2π.

b) $f(x - k\pi) = -sen(2x - 2k\pi) = -sen\,2x\,cos\,2k\pi - cos\,2x\,sen\,2k\pi = -sen\,2x\ 1 - cos\,2x \cdot 0 = -sen\,2x = f(x)$.

La función es periódica de periodo π.

c) $f(x - 6k\pi) = 3\,sen\left(\frac{x}{3} + 2k\pi\right) = 3\,sen\,\frac{x}{3}\,cos\,2k\pi + cos\,\frac{x}{3}\,sen\,2k\pi = 3\,sen\,\frac{x}{3}\ 1 + cos\,\frac{x}{3}\ 0 = 3\,sen\,\frac{x}{3} = f(x)$

La función es periódica de periodo 6π.

d) $f(x - k\pi) = 2tg(x - k\pi) = 2\,tg(x + k\pi) = 2\,\frac{tg\,x + tg\,k\pi}{1 - tg\,x \cdot tg\,k\pi} = 2\,\frac{tg\,x + 0}{1 - tg\,x \cdot 0} = 2\,tg\,x = f(x)$

La función es periódica de periodo π.

e) $f\left(x - k\frac{\pi}{2}\right) = tg\,2\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = tg(2x - k\pi) = \frac{tg\,2x - tg\,k\pi}{1 + tg\,2x \cdot tg\,k\pi} = \frac{tg\,2x - 0}{1 + tg\,2x\ 0} = tg\,2x = f(x)$

La función es periódica de periodo $\frac{\pi}{2}$.

f) $f(x - 3k\pi) = 3\,tg\left(\frac{x}{3} - k\pi\right) = 3\,\frac{tg\,\frac{x}{3} - tg\,k\pi}{1 + tg\,\frac{x}{3} \cdot tg\,k\pi} = 3\,\frac{tg\,\frac{x}{3} + 0}{1 + tg\,\frac{x}{3} \cdot 0} = 3\,tg\,\frac{x}{3} = f(x)$

La función es periódica de periodo 3π.

55. **Página 202**

a) $f\left(x-\frac{2k\pi}{3}\right)=\cos(3x-2k\pi)=\cos 3x\cos 2k\pi-\operatorname{sen}3x\operatorname{sen}2k\pi=\cos 3x\cdot 1-\operatorname{sen}3x\cdot 0=\cos 3x=f(x)$

La función es periódica de periodo $\frac{2\pi}{3}$.

b) $f(x-k\pi)-\operatorname{sen}^2(x-k\pi)-\frac{1-\cos(2x-2k\pi)}{2}-\frac{1-(\cos 2x\cos 2k\pi-\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}2k\pi)}{2}-$

$-\frac{1-(\cos 2x\cdot 1-\operatorname{sen}2x\cdot 0)}{2}-\frac{1-\cos 2x}{2}-\operatorname{sen}^2x-f(x)$

La función es periódica de periodo π.

c) $f(x-2k\pi)-3\cos(x+2k\pi)-3\cos x\cos 2k\pi-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}2k\pi-3()\cos x\ 1-\operatorname{sen}x\cdot 0-3\cos x-f(x)$

La función es periódica de periodo 2π.

d) $f(x-2k\pi)=\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)=\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos 2k\pi-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}2k\pi=\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot 1-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot 0=$

$=\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=f(x)$

56. **Página 202**

a) Las funciones polinómicas solo tienen ramas infinitas y no tienen asíntotas.

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^3-2x-6=-\infty$ $\lim_{x\to+\infty}f(x)\ \lim_{x\to+\infty}x^3\ 2x\ 6\ \infty$

b) Las funciones polinómicas solo tienen ramas infinitas y no tienen asíntotas.

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^3-x^2=-\infty$ $\lim_{x\to+\infty}f(x)\ \lim_{x\to+\infty}x^3\ x^2\ \infty$

c) Las funciones polinómicas solo tienen ramas infinitas y no tienen asíntotas.

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^4-2x^3-2x-1=-\infty$ $\lim_{x\to+\infty}f(x)\ \lim_{x\to+\infty}x^4\ 2x^3\ 2x\ 1\ \infty$

d) Las funciones polinómicas solo tienen ramas infinitas y no tienen asíntotas.

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}-2x^4-3x^2-x-1=-\infty$ $\lim_{x\to+\infty}f(x)\ \lim_{x\to+\infty}\ 2x^4\ 3x^2\ x\ 1\ \infty$

57. **Página 202**

a) $\text{Dom } y=\mathbb{R}$ — No tiene asíntotas verticales.

$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-1}=0\\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-1}=0\end{array}\right\}$ — Asíntota horizontal en $y=0$.

No tiene ramas parabólicas porque tiene asíntotas horizontales.

b) Dom $y = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} \frac{5x}{x^2 - 9} = \infty$ → Asíntota vertical en $x = -3$.

$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{5x}{x^2 - 9} = \infty$ → Asíntota vertical en $x = 3$.

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{5x}{x^2 - 9} = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{5x}{x^2 - 9} = 0 \end{array}\right\}$ → Asíntota horizontal en $y = 0$.

No tiene ramas parabólicas porque tiene asíntotas horizontales.

c) Dom $y = \mathbb{R} - \{1\}$

$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{2x}{x - 1} = \infty$ → Asíntota vertical en $x = -1$.

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x - 1} = 2 \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x - 1} = 2 \end{array}\right\}$ → Asíntota horizontal en $y = 2$.

No tiene ramas parabólicas porque tiene asíntotas horizontales.

d) Dom $y = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} \frac{4x^2}{x^2 - 9} = \infty$ → Asíntota vertical en $x = -3$.

$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{4x^2}{x^2 - 9} = \infty$ → Asíntota vertical en $x = 3$.

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2}{x^2 - 9} = 4 \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2}{x^2 - 9} = 4 \end{array}\right\}$ → Asíntota horizontal en $y = 4$.

No tiene ramas parabólicas porque tiene asíntotas horizontales.

e) Dom $y = \mathbb{R} - \{-2\}$

$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{3x^2 - 7}{2x - 4} = \infty$ → Asíntota vertical en $x = -2$.

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2 - 7}{2x - 4} = -\infty \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 7}{2x - 4} = -\infty \end{array}\right\}$ → No tiene asíntotas horizontales.

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 7}{2x^2 - 4x} = \frac{3}{2} \to m = \frac{3}{2} \\ \lim_{x \to \infty} f(x) - mx = \lim_{x \to \infty} \left\{\frac{3x^2 - 7}{2x - 4} - \frac{3}{2}x\right\} = \lim_{x \to \infty} \left\{\frac{-6x - 7}{2x + 4}\right\} = -3 \to n = -3 \end{array}\right\}$ → Tiene una asíntota oblicua en $y = \frac{3x - 6}{2}$.

f) Dom $y = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$\lim_{x \to -1} f(x) \quad \lim_{x \to -1} \frac{2x^4}{x^2 - 1} = \infty$ · Asíntota vertical en $x = -1$.

$\lim_{x \to 1} f(x) \quad \lim_{x \to 1} \frac{2x^4}{x^2 - 1} = \infty$ · Asíntota vertical en $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x^4}{x^2 - 1} = -\infty \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^4}{x^2 - 1} = -\infty \end{array}\right\} \text{— No tiene asíntotas horizontales.}$$

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{2x^4}{x^3 - x} = \infty$ · No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene ramas parabólicas:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^4}{x^2 - 1} = \infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^4}{x^2 - 1} = \infty$

58. **Página 203**

a) $y = 1$

b) $x = -1 \quad x = 1 \quad y = 0$

c) $y = 0$

d) $x = -1 \quad y = \frac{x - 1}{2}$

e) $y = -x \quad y = x$

59. **Página 203**

a) Dom $y = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$

No tiene asíntotas verticales porque la función está definida en los extremos del dominio.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 4x} = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 4x} = +\infty \end{array}\right\} \text{— No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{x} = 1 \\ \lim_{x \to \infty} f(x) - x = \lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 - 4x} - x = -2 \end{array}\right\} \text{— Tiene asíntota oblicua en } y = x - 2.$$

b) Dom $y = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

No tiene asíntotas verticales porque la función está definida en los extremos del dominio.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - 1}}{x} = -\infty \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^4 - 1}}{x} = +\infty \end{array}\right\} \text{— No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^4 - 1}}{x^2} = 1 \\ \lim_{x \to \infty} f(x) - x = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^4 - 1}}{x} - x = 0 \end{array}\right\} \text{— Tiene asíntota oblicua en } y = x.$$

c) $\text{Dom } y = (0, +\infty)$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{0}{0} \to$ Asíntota vertical en $x = 0$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^4}{x^2 + 1} \quad 0$ · Asíntota horizontal en $y = 0$.

d) $\text{Dom } y = (0, +\infty)$

$\lim_{x \to 0} f(x) \quad \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x}} \quad 0$ · No tiene asíntotas verticales.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} \quad \infty$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x\sqrt{x}} \quad 0$ · No tiene asíntotas oblicuas.

e) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{0\}$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{-2}{0} \to$ Asíntota vertical en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2}{\sqrt[3]{x}} = -\infty \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2}{\sqrt[3]{x}} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2}{x\sqrt[3]{x}} = 0 \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

f) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{0\}$

$\lim_{x \to 0} f(x) \quad \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt[4]{|x|}} \quad 0$ · No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt[4]{|x|}} = -\infty \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt[4]{|x|}} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x\sqrt[4]{|x|}} \quad 0$ · No tiene asíntotas oblicuas.

60. Página 203

a) $\text{Dom } y = (-3, +\infty)$

$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \log_3 (3x - 9) = -\infty \to$ Asíntota vertical en $x = -3$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \log_3 (3x - 9) = +\infty \to$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\log_3 (3x - 9)}{x} \quad 0$ · No tiene asíntotas oblicuas.

b) Dom $y = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

$\lim_{x \to -2^-} f(x) \quad \lim_{x \to -2^-} \ln x^2 - 2x$ · Asíntota vertical en $x = -2$.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) \quad \lim_{x \to 0^+} \ln x^2 - 2x$ · Asíntota vertical en $x = 0$.

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln x^2 + 2x = +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln x^2 - 2x = +\infty \end{array}\right\}$ — No tiene asíntotas horizontales.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x^2 - 2x}{x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

c) Dom $y = -2, 4$

$\lim_{x \to -2+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \left[\log_2 \left(\frac{2-x}{4-x}\right)\right] = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -2$.

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} \left[\log_2 \left(\frac{2-x}{4-x}\right)\right] = +\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 4$.

No tiene asíntotas horizontales ni oblicuas porque la función no está definida cuando $x \to -\infty$ ni cuando $x \to +\infty$.

d) Dom $y = (1, 2) \cup (2, -\infty)$

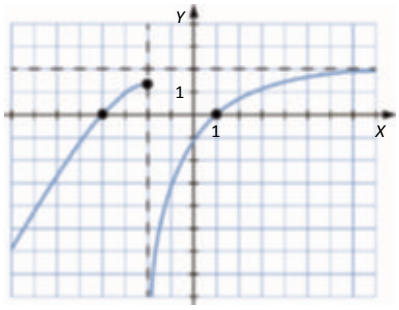
$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \left[\frac{x}{\log_2 x - 1}\right] = 0 \\ \lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \left[\frac{x}{\log_2 x - 1}\right] = \infty \end{array}\right\}$ — Asíntota vertical en $x = 2$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x}{\log_2 x - 1}\right] = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x \cdot \log_2 x - 1} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

61. Página 203

Repuesta abierta. Por ejemplo:



62. **Página 203**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ax^2-3x-2}{bx-5} = 3 \Rightarrow a = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-2}{bx-5} = \dfrac{3}{b} = 3 \to b = 1\end{array}\right\} \to f(x) = \frac{3x-2}{x-5}$$

Dom $f = \mathbb{R} - \{-5\}$

$\lim\limits_{x\to-5} f(x) = \lim\limits_{x\to-5} \dfrac{3x-2}{x-5} = \dfrac{-17}{0} = \infty$ → Asíntota vertical en $x = -5$.

63. **Página 203**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ax^2-3x-2}{bx^2-5x} = \dfrac{a}{b} = m = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{ax^2-3x-2-ax^2+5x}{ax-5}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{-2x-2}{ax-5}\right] = \dfrac{-2}{a} = n = 2 \to a = b = -1\end{array}\right\} \to f(x) = \frac{-x^2-3x-2}{-x-5}$$

$\lim\limits_{x\to5} f(x) = \lim\limits_{x\to5} \dfrac{-x^2+3x-2}{-x+5} = \dfrac{-12}{0} = \infty$ → Asíntota vertical en $x = 5$.

64. **Página 203**

a) $f(-x) = \dfrac{-x^2}{9-(-x)^2} = \dfrac{x^2}{9-x^2} = f(x)$ → La función es simétrica respecto del eje *Y*.

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

$\lim\limits_{x\to-3} f(x) = \lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x^2}{9-x^2} = \dfrac{9}{0} = \infty$ → Asíntota vertical en $x = -3$.

$\lim\limits_{x\to3} f(x) = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2}{9-x^2} = \dfrac{9}{0} = \infty$ → Asíntota vertical en $x = 3$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{9-x^2} = -1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{9-x^2} = -1\end{array}\right\} \to$$ Asíntota horizontal en $y = -1$.

65. **Página 203**

a) $f(-x) = \dfrac{-(-x)^3}{-(-x)^2-4} = \dfrac{x^3}{x^2-4} = -\dfrac{-x^3}{x^2-4} = -f(x)$ → Simetría respecto del origen.

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$\lim\limits_{x\to-2} f(x) = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^3}{x^2-4} = \dfrac{-8}{0} = \infty$ → Asíntota vertical en $x = -2$.

$\lim\limits_{x\to-2} f(x) = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^3}{x^2-4} = \dfrac{-8}{0} = \infty$ → Asíntota vertical en $x = 2$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^3}{x^2-4} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x^3}{x^2-4} = -\infty\end{array}\right\} \to$$ No tiene asíntotas horizontales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^3}{x^3-4x} = -1 = m \\ \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{-x^3-x^3-4x}{x^2-4}\right] = 0 = n\end{array}\right\} \to$$ Tiene asíntota oblicua en $y = -x$.

66. **Página 203**

a) $f(-x) = -x\ e^{-(-x)^2} = -x \cdot e^{-x^2} = -\ x \cdot e^{-x^2} = -f(x)$ → Simetría respecto del origen de coordenadas.

Dom $f = \mathbb{R}$ → No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot e^{-x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x \cdot e^{-x^2} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Tiene asíntota horizontal en } y = 0.$$

No tiene asíntotas oblicuas porque tiene asíntotas horizontales.

b) $f(-x) = \frac{1}{2}\ln|-x| = \frac{1}{2}\ln|x| = f(x)$ → Simetría respecto del eje *Y*.

Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2}\ln|x| = -\infty$ → Asíntota vertical en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{2}\ln|x|\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[\frac{1}{2}\ln|x|\right] = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{2}\ln|x|}{x} = 0$ → No tiene asíntotas oblicuas.

67. **Página 203**

a) Dom $y = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 + 12x - 15 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 1 \end{cases}$

En $(-\infty, -5) \cup (1, -\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En (−5, 1), $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $x = -5$ presenta un máximo, y en $x = 1$, un mínimo.

b) Dom $y = \mathbb{R} - \{0\}$

$y' = \frac{4x^2 - 1}{x^2} = 0 \quad x = \frac{1}{2}$

En $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $x = -\frac{1}{2}$ presenta un máximo, y en $x = \frac{1}{2}$, un mínimo.

c) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{3\}$

$y' = \dfrac{-2}{(x-3)^3} \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ No tiene máximos ni mínimos.

En $(-\infty, 3)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $(3, -\infty)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

d) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 - 72x^2 = 0 \cdot \begin{cases} x = 0 \\ x = 18 \end{cases}$

En $(18, -\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $(-\infty, 0) \cup (0, 18)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $x = 18$ presenta un mínimo.

e) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

$y' = \dfrac{3^x \ln 3 - 3^{-x} \ln 3}{2} = 0 \cdot 3^x - \dfrac{1}{3^x} = 0 \cdot 3^{x^2} - 1 = 0 \cdot 3^x - 1 = x = 0$

En $(-\infty, 0)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $(0, -\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $x = 0$ presenta un mínimo.

f) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{0\}$

$y' = \dfrac{3x^4 - 2}{x^2} = 0 \rightarrow x = -\sqrt[4]{\dfrac{2}{3}}$

En $\left(-\infty, -\sqrt[4]{\dfrac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt[4]{\dfrac{2}{3}}, +\infty\right)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $\left(-\sqrt[4]{\dfrac{2}{3}}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt[4]{\dfrac{2}{3}}\right)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $x = -\sqrt[4]{\dfrac{2}{3}}$ presenta un máximo, y en $x = \sqrt[4]{\dfrac{2}{3}}$, un mínimo.

68. Página 203

a) $x^2 - 2x \geq 0 \rightarrow x(x-2) \geq 0 \rightarrow \text{Dom } y = (-\infty, 0] \cup [2, -\infty)$

$y' = \dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} = 0 \rightarrow x = 1$, que no está en el dominio.

En $(-\infty, 0)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $(2, -\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

b) $\text{Dom } y = (0, +\infty)$

$y' = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3} = 0 \rightarrow 2\ln x = 1 \rightarrow x = \sqrt{e}$

En $(0, \sqrt{e})$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $(\sqrt{e}, -\infty)$ $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

c) Dom $y = \mathbb{R} - \{4\}$

$y' = \dfrac{-8}{(x-4)^2} < 0 \rightarrow$ La función es decreciente en su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

d) Dom $y = \mathbb{R}$

$$y' = \frac{2x - x^2 \ln 3}{3^x} = 0 \rightarrow x(2 - x\ln 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{2}{\ln 3} \end{cases}$$

En $(-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{2}{\ln 3}, +\infty\right)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $\left(0, \dfrac{2}{\ln 3}\right)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $x = 0$ presenta un mínimo y en $x = \dfrac{2}{\ln 3}$ un máximo.

69. **Página 204**

a) Dom $y = \mathbb{R}$

$y' = \dfrac{2x^2 + 4}{e^x} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

En $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, -\infty)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

b) $x = -\sqrt{2} \rightarrow f(-\sqrt{2}) = \dfrac{-4\sqrt{2} - 4}{e^{-\sqrt{2}}} \rightarrow \left(-\sqrt{2}, \dfrac{-4\sqrt{2} + 4}{e^{-\sqrt{2}}}\right)$ es un mínimo.

$x = \sqrt{2} \rightarrow f(\sqrt{2}) = \dfrac{4\sqrt{2} - 4}{e^{\sqrt{2}}} \rightarrow \left(\sqrt{2}, \dfrac{4\sqrt{2} - 4}{e^{\sqrt{2}}}\right)$ es un máximo.

70. **Página 204**

a) Dom $y = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

b) Cortes con el eje *X*: $f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0)$

Corte con el eje *Y*: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

c) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = f(x) \rightarrow$ Es simétrica respecto del eje *Y*.

d) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = \infty \Rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -1$.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = \infty \Rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = 1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y = 1.$$

$|x| > 1 \quad \dfrac{x^2}{x^2 - 1} - 1 > 0 \Rightarrow$ La gráfica está por encima de la asíntota.

Como tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$, no tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

e) $f'(x) = \frac{-2x}{x^2-1^2} = 0 \rightarrow x = 0$

En $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $(0, 1) \cup (1, -\infty)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

f) $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es máximo.

No presenta mínimos.

71. **Página 204**

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

b) Cortes con el eje *X*: $f(x) = 0 \rightarrow \frac{x-1}{x^2} = 0 \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow (1, 0)$

Corte con el eje *Y*: no tiene porque no está definida para $x = 0$.

c) $f(-x) = \frac{-x-1}{(-x)^2} = \frac{-x-1}{x^2}$ No es simétrica par ni impar.

d) $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ Asíntota vertical en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x^2} = 0 \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x-1}{x^2} = 0 \end{array}\right\} \text{ Asíntota horizontal en } y = 0.$$

Tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$. Por tanto, no tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

e) $f'(x) = \frac{-x-2}{x^3} = 0 \rightarrow x = -2$

En $(-\infty, -2) \cup (0, -\infty)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $(-2, 0)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

f) $x = -2 \rightarrow f(-2) = \frac{-1}{4} \rightarrow \left\{-2, \frac{-1}{4}\right\}$ es un mínimo.

No presenta máximos.

72. **Página 204**

a) $\text{Dom } y = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 6x + 2$

$y'' = 6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1$

En $(-\infty, 1)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $(1, -\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $x = 1$ presenta un punto de inflexión.

b) $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-2\}$

$y' = \frac{4}{(x-2)^2}$

$y'' = \frac{-8}{(x-2)^3} \neq 0$ en $\mathbb{R} \rightarrow$ No presenta puntos de inflexión.

En $(-\infty, -2)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $(-2, +\infty)$ $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

c) Dom $y = \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 - 16x$ $\qquad$ $y'' = 12x^2 - 16 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{16}{12}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

En $\left(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ presenta puntos de inflexión.

d) Dom $y = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$y' = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$ $\qquad$ $y'' = \frac{12x^2 - 4}{(x^2 - 1)^3} = 0$ en $\mathbb{R} \rightarrow$ No presenta puntos de inflexión.

En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $(-1, 1)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

73. **Página 204**

a) Dom $y = \mathbb{R}$

$y' = e^x(2x + x^2)$ $\qquad$ $y'' = \frac{12x^2 - 4}{(x^2 - 1)^3} \neq 0 \rightarrow$ No presenta puntos de inflexión.

En $(-\infty, -2 - \sqrt{2}) \cup (-2 + \sqrt{2}, -\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $(-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2})$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $x = -2 + \sqrt{2}$ presenta puntos de inflexión.

b) Dom $y = (0, +\infty) - \{1\}$

$y' = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ $\qquad$ $y'' = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3} = 0 \rightarrow \ln x = 2 \rightarrow x = e^2$

En $(0, 1) \cup (e^2, +\infty)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $(1, e^2)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $x = e^2$ presenta un punto de inflexión.

c) Dom $y = \mathbb{R}$

$y' = 1 - \cos x$ $\qquad$ $y'' = \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

En $(2k\pi, 2k\pi + \pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $(2k\pi - \pi, 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ presenta puntos de inflexión.

d) Dom $y = \mathbb{R} - [-4, 4]$

$y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 16}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 16}}$

$y'' = \frac{-16}{(x^2 - 16)\sqrt{x^2 - 16}} < 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función es siempre convexa y no presenta puntos de inflexión.

74. **Página 204**

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$f(x) = 3x^2 - 18x - 18 = 0 \rightarrow x = 3 \pm \sqrt{3}$

En $(-\infty, 3-\sqrt{3})$ y $(3+\sqrt{3}, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $(3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$, $f'(x) < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

$f''(x) = 6x - 18 = 0 \rightarrow x = 3$

En $(-\infty, 3)$, $f''(x) < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $(3, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

$x = 3 \rightarrow f(3) = 0 \rightarrow (3, 0)$ es punto de inflexión.

$f'(3) = 9 \cdot m = 9$

$y = 9x + n \cdot 0 = 9 \cdot 3 + n \cdot n = -27$

$\cdot y = 9x - 27$ es la recta tangente a $f(x)$ que pasa por el punto (3, 0).

75. **Página 204**

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$f'(x) = e^{ax} + xa\,e^{ax} = e^{ax}(1 + ax) = 0 \rightarrow 1 + ax = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{a} = -2 = a = \frac{1}{2}$

En $(-\infty, -2)$, $f'(x) < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $(-2, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow$ Función creciente.

$f''(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(1 + \frac{x}{4}\right) = 0 \rightarrow x = -4$

En $(-\infty, -4)$, $f''(x) < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $(-4, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

$f''(-2) > 0 \rightarrow \left(-2, \frac{-2}{e}\right)$ es un mínimo.

76. **Página 204**

$\text{Dom } f = (0, -\infty)$

$f'(x) = 1 - \frac{a}{x} = 0 \rightarrow x = -a = 3 \rightarrow a = -3 \rightarrow f(x) = x - 3\ln x$

En $(-\infty, 3)$, $f'(x) < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $(3, -\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow$ Función creciente.

$f''(x) = \frac{3}{x^2} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ La función es cóncava en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.

$f''(3) > 0 \rightarrow (3, 3(1 - \ln 3))$ es un mínimo.

77. **Página 204**

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 2x - a = 0 \rightarrow f'(2) = 8 - a = 0 \rightarrow a = -8 \\ f(2) = b - 12 = 0 \rightarrow b = 12 \end{array}\right\} \rightarrow f(x) = x^3 - x^2 - 8x - 12$

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow x = 2,\ x = -\frac{4}{3}$

En $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \cup (2, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$, $f'(x) < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

$f''(x) = 6x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$

En $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$, $f''(x) < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $\left(\frac{1}{3}, -\infty\right)$, $f''(x) > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

$f''(2) = 10 > 0 \rightarrow (2, 0)$ es un mínimo.

78. **Página 204**

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 2ax - b \rightarrow f''(x) = 6x + 2a = 0 \rightarrow x = \frac{-a}{3} = \frac{4}{3} \rightarrow a = -4 \\ f'(x) = 3x^2 - 2ax - b = 0 \rightarrow f'(1) = 3 - 2a - b = 0 \rightarrow b = -3 - 2a = 5 \\ f(1) = 1 - 4 + 5 + c = 2 - c = 0 \rightarrow c = -2 \end{array}\right\} \rightarrow f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5 = 0 \rightarrow x = 1,\ x = \frac{5}{3}$

En $(-\infty, 1) \cup \left(\frac{5}{3}, -\infty\right)$, $f'(x) > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $\left(1, \frac{5}{3}\right)$, $f'(x) < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

$f''(x) = 6x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{3}$

En $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$, $f''(x) < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $\left(\frac{4}{3}, -\infty\right)$, $f''(x) > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

79. Página 204

a) • $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow (4, 0), (-2, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$f(0) = -8 \rightarrow (0, -8)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

Como *f*(*x*) es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 - 2x - 8 = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 - 2x - 8 = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$

En el intervalo $(1, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

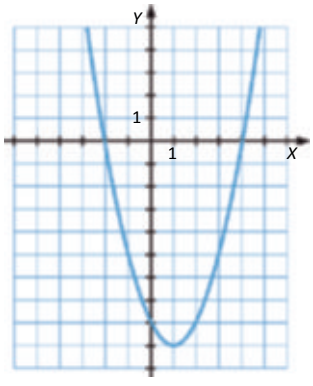
En el intervalo $(-\infty, 1)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

La función decrece a la izquierda de $x = 1$ y crece a la derecha $\rightarrow x = 1$ es un mínimo:

$f(1) = -9 \rightarrow (1, -9)$ es un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

$f''(x) = 2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función es cóncava en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.



b) • $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - x^2 - x^2 + x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow (0, 0), (1, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

Como *f*(*x*) es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 - x^2 = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 - x^2 = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 2x = x(3x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

En $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En el intervalo $\left(0, \frac{2}{3}\right)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

La función decrece a la izquierda de $x = \frac{2}{3}$ y crece a la derecha $\rightarrow$ $x = \frac{2}{3}$ es un mínimo:

$f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{27} \rightarrow \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{27}\right)$ es un mínimo.

La función crece a la izquierda de $x = 0$ y decrece a la derecha $\rightarrow$ $x = 0$ es un máximo:

$f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es un máximo.

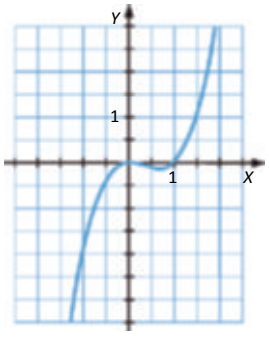
- Concavidad y convexidad:

$$f''(x) = 6x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

En el intervalo $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

En el intervalo $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

$f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{27} \rightarrow \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{27}\right)$ punto de inflexión.



c) • $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$f(x) = 0 \rightarrow 2x^3 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

Como $f(x)$ es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = 0 \rightarrow 6x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

  En $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente $\rightarrow f(x)$ no tiene máximos ni mínimos.

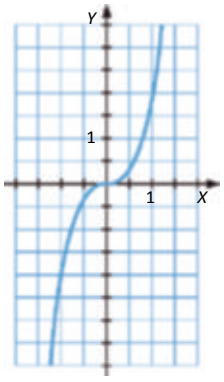
- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = 12x = 0 \rightarrow x = 0$

  En el intervalo $(0, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

  $f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ punto de inflexión.



d) • $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \cdot x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x - 2) - (x - 2) = (x - 2)(x^2 - 1) = 0 \cdot \begin{cases} x = 2 \\ x = \pm 1 \end{cases} \cdot (2, 0), (-1, 0), (1, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

  $f(0) = -2 \rightarrow (0, -2)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Como *f*(*x*) es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 - 2x^2 - x - 2 = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 - 2x^2 - x - 2 = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 4x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$

  En $\left(-\infty, \frac{2 - \sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{2 - \sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

  En el intervalo $\left(\frac{2 - \sqrt{7}}{3}, \frac{2 + \sqrt{7}}{3}\right)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

  La función crece a la izquierda de $x = \frac{2 - \sqrt{7}}{3}$ y decrece a la derecha $\rightarrow x = \frac{2 - \sqrt{7}}{3}$ es un máximo.

  La función decrece a la izquierda de $x = \frac{2 - \sqrt{7}}{3}$ y crece a la derecha $\rightarrow x = \frac{2 - \sqrt{7}}{3}$ es un mínimo.

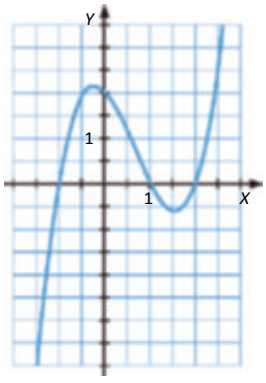
- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = 6x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{2}{3}$

  En el intervalo $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

  En el intervalo $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

  $x = \frac{2}{3}$ punto de inflexión.



e) • Dom $f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^3}{2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

  $f(0) = 0 \rightarrow (0,0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Como *f*(*x*) es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left|\frac{x^3}{2}\right| = \infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left|\frac{x^3}{2}\right| = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = 0 \rightarrow \frac{3x^2}{2} = 0 \rightarrow x = 0$

  En $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente $\rightarrow f(x)$ no tiene ni máximos ni mínimos.

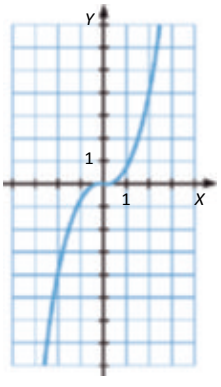
- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = 3x = 0 \rightarrow x = 0$

  En el intervalo $(0, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

  $f(0) = 0 \rightarrow (0,0)$ es punto de inflexión.



f) • $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \cdot \frac{x^2 - 3x + 2}{2} = 0 \cdot \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \cdot (1, 0), (2, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

  $f(0) = 1 \cdot (0, 1)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Como *f*(*x*) es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{2} \right) = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{2} \right) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = x - \frac{3}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$

  En el intervalo $\left(\frac{3}{2}, +\infty \right)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

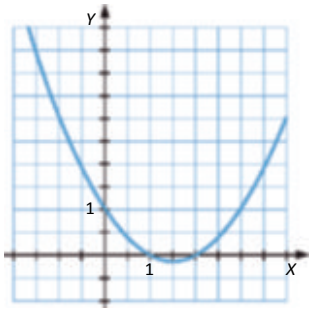
  En el intervalo $\left(-\infty, \frac{3}{2} \right)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

  La función decrece a la izquierda de $x = \frac{3}{2}$ y crece a la derecha $\rightarrow$ $x = \frac{3}{2}$ es un mínimo:

  $f\left(\frac{3}{2} \right) = -\frac{1}{8} \rightarrow \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{8} \right)$ es un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = 1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ — La función es cóncava en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.



g) • $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \rightarrow -x^2 + \frac{9}{4} = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{2} \rightarrow \left(-\frac{3}{2}, 0 \right), \left(\frac{3}{2}, 0 \right)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

  $f(0) = \frac{9}{4} \rightarrow \left(0, \frac{9}{4} \right)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Como *f*(*x*) es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(-x^2 + \frac{9}{4} \right) = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(-x^2 + \frac{9}{4} \right) = -\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = -2x = 0 \rightarrow x = 0$

  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

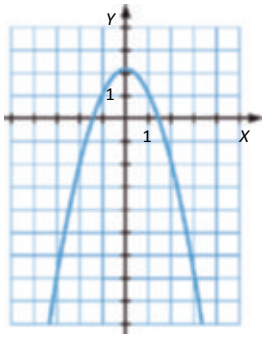
  En el intervalo $(0, +\infty)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

  La función crece a la izquierda de $x = 0$ y decrece a la derecha $\rightarrow x = 0$ es un máximo:

  $f(0) = \frac{9}{4} \rightarrow \left(0, \frac{9}{4}\right)$ es un máximo.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = -2 < 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función es convexa en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.



80. **Página 204**

a) • Dom $y = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $y = 0 \rightarrow x^3 - 4x^2 + x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -1 \end{cases} \rightarrow (4, 0), (-1, 0), (1, 0)$ son los puntos de corte con el eje X.

  $x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow (0, 4)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Como y es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

  $\lim_{x \to -\infty} x^3 - 4x^2 - x - 4 = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} x^3 - 4x^2 + x + 4 = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' = 0 \rightarrow 3x^2 - 8x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{19}}{3}$

  En $\left(-\infty, \frac{4 - \sqrt{19}}{3}\right) \cup \left(\frac{4 + \sqrt{19}}{3}, +\infty\right)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

  En el intervalo $\left(\frac{4 - \sqrt{19}}{3}, \frac{4 + \sqrt{19}}{3}\right)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

  La función crece a la izquierda de $x = \frac{4 - \sqrt{19}}{3}$ y decrece a la derecha $\rightarrow x = \frac{4 - \sqrt{19}}{3}$ es un máximo.

  La función decrece a la izquierda de $x = \frac{4 - \sqrt{19}}{3}$ y crece a la derecha $\rightarrow x = \frac{4 - \sqrt{19}}{3}$ es un mínimo.

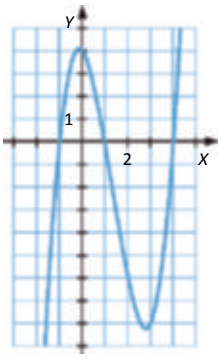
- Concavidad y convexidad:

  $y'' = 6x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{3}$

  En el intervalo $\left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Es cóncava.

  En el intervalo $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Es convexa.

  $x = \frac{4}{3}$ es punto de inflexión.



b) • Dom $y = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  No se pueden encontrar por Ruffini los puntos de corte con el eje *X*.

  $x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow (0, 4)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Como *y* es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

  $\lim_{x \to -\infty} x^3 - 6x^2 + 12x - 4 = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} x^3 - 6x^2 + 12x - 4 = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' = 0 \rightarrow 3x^2 - 12x - 12 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow y' = 3(x-2)^2 \rightarrow x \neq 0 \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función siempre creciente.

  No presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

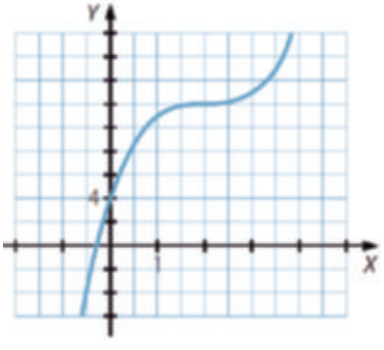
  $y'' = 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$

  En el intervalo $(2, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Es cóncava.

  En el intervalo $(-\infty; 2)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Es convexa.

  En $x = 2$ presenta un punto de inflexión.

Por último, como en $(-\infty, 2)$ la función es creciente, la imagen de 0 es positiva y $\lim_{x \to -\infty} x^3 - 6x^2 + 12x - 4 = -\infty$, hay un punto de corte en $(-\infty, 0)$.



c) • Dom $y = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $y = 0 \rightarrow x^3 + 3x = x\,(x^2 - 3) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

  $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Como *y* es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

  $\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' = 0 \rightarrow 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función es creciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

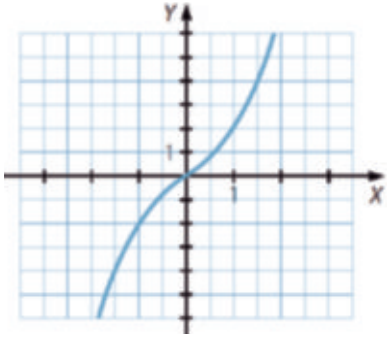
- Concavidad y convexidad:

  $y'' = 6x = 0 \rightarrow x = 0$

  En el intervalo $(0, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Es cóncava.

  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Es convexa.

  En $x = 0$ presenta un punto de inflexión.



d) • Dom $y = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $y = 0 \rightarrow x^4 - 8x^2 - 7 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{7} \\ x = -1 \end{cases} \rightarrow (-\sqrt{7}, 0),\ (\sqrt{7}, 0),\ (-1, 0),\ (1, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

  $x = 7 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 7)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Como *y* es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

  $\lim_{x \to -\infty} (x^4 - 8x^2 - 7) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to +\infty} (x^4 - 8x^2 + 7) = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' = 0 \rightarrow 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

  En $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

  En $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

  En $x = -2$ y en $x = 2$ presenta dos mínimos y en $x = 0$, un máximo.

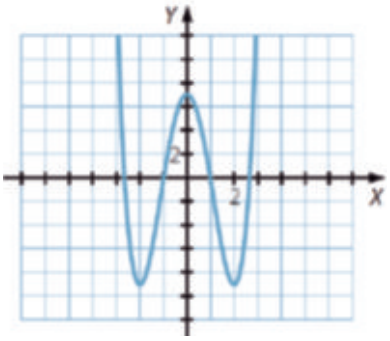
- Concavidad y convexidad:

$y'' = 12x^2 - 16 = 0 \rightarrow x = -\sqrt{\frac{4}{3}}$

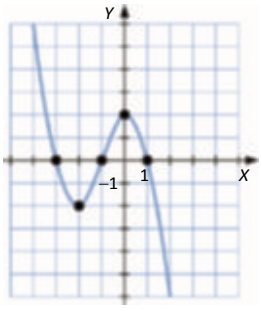
En $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{4}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{4}{3}}, +\infty\right)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Es cóncava.

En el intervalo $\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}, \sqrt{\frac{4}{3}}\right)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Es convexa.

En $x = -\sqrt{\frac{4}{3}}$ presenta puntos de inflexión.



81. **Página 204**



Como es una función polinómica, es continua en todo $\mathbb{R}$.

Como $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \rightarrow$ En el intervalo $(-\infty, -2)$ es decreciente.

Como corta al eje *X* en (–3, 0) y en (–1, 0) → En el intervalo $(-2, 0)$ es creciente.

Como vuelve a cortar al eje *X* en (1, 0) y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \rightarrow$ En el intervalo $(0, -\infty)$ es decreciente.

Por tanto, en el punto (–2, –2) tienen un mínimo, y en el punto (0, 2) tiene un máximo.

Además, en algún punto del intervalo $(-2, 0)$ debe tener un punto de inflexión donde pase de cóncava a convexa.

82. **Página 205**

a) $f'(x) = 3x^2 - a = 0 \rightarrow x = +\sqrt{\frac{-a}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow a = -4$

b) $f(x) = x^3 - 4x$

$f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow (0, 0), (2, 0), (2, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

La función es positiva en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ y negativa en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$.

c) $f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$

En $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{4}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{4}{3}}, +\infty\right)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En el intervalo $\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}, \sqrt{\frac{4}{3}}\right)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

d) En $x = -\sqrt{\frac{4}{3}}$ tiene un máximo. En $x = \sqrt{\frac{4}{3}}$ tiene un mínimo.

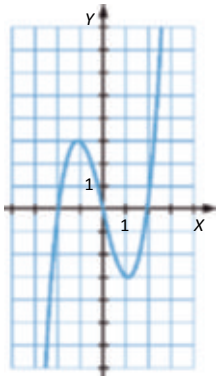
e) $f''(x) = 6x = 0 \rightarrow x = 0$

En el intervalo $(0, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

En $x = 0$ tiene un punto de inflexión.

f)



El recorrido de la función es todo $\mathbb{R}$.

83. **Página 205**

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ $\qquad$ $f''(x) = 6x - 2a$

Tiene un extremo relativo en $x = 2 \rightarrow f'(2) = 0 \rightarrow 12 - 4a + b = 0$

Tiene un punto de inflexión en $x = 0 \rightarrow f''(0) = 0 \rightarrow 2a = 0 \rightarrow a = 0 \rightarrow b = -12$

Pasa por el punto $(1, -5) \rightarrow f(1) = 1 + a - b + c = -5 \rightarrow 1 - 12 - c = -5 \rightarrow c = 6$

Por tanto, la función es: $f(x) = x^3 - 12x + 6$

Para obtener su representación gráfica, analizamos sus características:

- $\text{Dom } f = \mathbb{R}$
- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 12x + 6 = 0 \rightarrow$ Las soluciones de esta ecuación dan son los puntos de corte con el eje *X*.

  $f(0) = 6 \rightarrow (0, 6)$ es el punto de corte con el eje *Y*.
- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Como *f*(*x*) es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas:

  $\lim_{x \to -\infty} x^3 - 12x - 6 = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to +\infty} x^3 - 12x + 6 = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$

  En el intervalo $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

  En el intervalo $(-2, 2)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

  En $x = -2$ presenta un máximo y en $x = 2$ un mínimo.

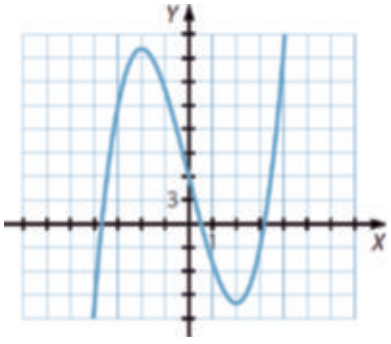
- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = 6x = 0 \rightarrow x = 0$

  En el intervalo $(0, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

  En $x = 0$ presenta un punto de inflexión.



84. **Página 205**

a) $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

b) $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{3x^2}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje X.

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

c) La función es positiva en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y negativa en el intervalo $(-1, 1)$.

d) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2}{x^2 - 1} = \dfrac{3}{0} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -1$.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2}{x^2 - 1} = \dfrac{3}{0} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2}{x^2 - 1} = 3 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{x^2 - 1} = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y = 3.$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

e) $f'(x) = \dfrac{-6x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$

En $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

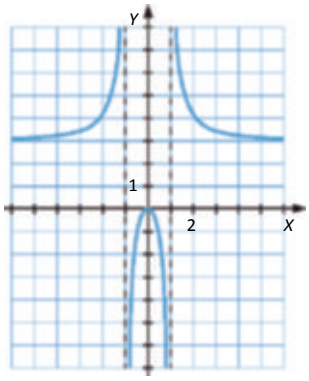
En $(0, 1) \cup (1, -\infty)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

f) En $x = 0$ presenta un máximo.

g) $f''(x) = \dfrac{6(3x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^3} = 0 \rightarrow$ No tiene puntos de inflexión

En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

En $(-1, 1)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.



85. Página 205

a) $x - 1 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\}$

b) $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{-x^2}{x - 1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje X.

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

c) La función es positiva en el intervalo $(-\infty, -1)$ y negativa en el intervalo $(-1, +\infty)$.

d) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{-x^2}{x - 1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^2}{x - 1} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2}{x - 1} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2}{x^2 - x} = -1 \rightarrow m = -1 \\ \lim\limits_{x \to \infty} f(x) - mx = \lim\limits_{x \to \infty} \left\{\dfrac{-x^2}{x - 1} - x\right\} = \lim\limits_{x \to \infty} \left\{\dfrac{x}{x - 1}\right\} = 1 \rightarrow n = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua en } y = -x + 1.$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

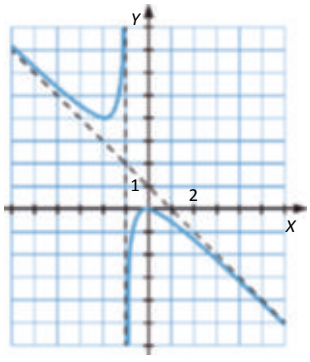
e) $f'(x) = \dfrac{-x(x - 2)}{(x - 1)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

En $(-2, -1) \cup (-1, 0)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $(-\infty, -2) \cup (0, -\infty)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $x = -2$ la función tiene un mínimo y en $x = 0$ un máximo.

f)



86. **Página 205**

a) $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^3}{x^2 - 4} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje X.

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

b) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3}{x^2 - 4} = \dfrac{-8}{0} = \infty$ · Asíntota vertical en $x = -2$.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3}{x^2 - 4} = \dfrac{8}{0} = \infty$ · Asíntota vertical en $x = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^3 - 4x} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x \to \infty} f(x) - mx = \lim\limits_{x \to \infty} \left[\dfrac{x^3}{x^2 - 4} - x\right] = \lim\limits_{x \to \infty} \left[\dfrac{4x}{x^2 - 4}\right] = 0 \rightarrow n = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua en } y = x.$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

c) $f'(x) = \dfrac{x^2 \cdot x^2 - 12}{x^2 - 4^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2\sqrt{3} \end{cases}$

En $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, -\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $(-2\sqrt{3}, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, 2\sqrt{3})$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $x = -2\sqrt{3}$ la función tiene un máximo y en $x = 2\sqrt{3}$ un mínimo.

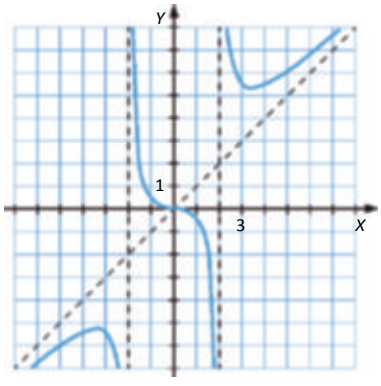
d) $f''(x) = \dfrac{8x \cdot x^2 - 12}{x^2 - 4^3} = 0 \rightarrow x = 0$

En $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

En $(-2, 0) \cup (2, -\infty)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

En $x = 0$ presenta un punto de inflexión.

e)



87. **Página 205**

a) • Dom $y = \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con los ejes:

  $y = 0 \rightarrow \dfrac{x^2 - 1}{x} = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow (-1, 0), (1, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

  No tiene punto de corte con el eje *Y* porque no está definida en $x = 0$.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 1}{x} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 0$.

  $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

  $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x \to \infty} (y - mx) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 - 1}{x} - x \right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{-1}{x} \right) = 0 \rightarrow n = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$ Asíntota oblicua en $y = x$.

  No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

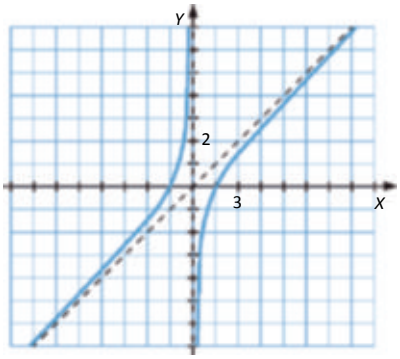
  $y' = \dfrac{x^2 - 1}{x^2} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función es creciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

  $y'' = -\dfrac{2}{x^3} \neq 0 \rightarrow$ No tiene puntos de inflexión.

  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $y'' > 0 \rightarrow$ La función es cóncava.

  En el intervalo $(0, +\infty)$, $y'' < 0 \rightarrow$ La función es convexa.



b) • Dom $y = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- Cortes con los ejes:

  $y = 0 = \dfrac{x}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

  $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $\lim_{x\to -1} \frac{x}{x^2-1} = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -1$.

  $\lim_{x\to 1} \frac{x}{x^2-1} = \pm\infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 1$.

  $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0 \\ \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$ Asíntota horizontal en $y = 0$.

  No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' = \frac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2} < 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ La función es decreciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

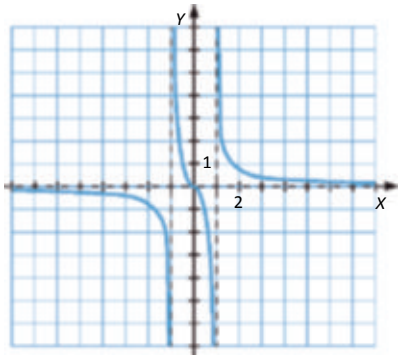
- Concavidad y convexidad:

  $y'' = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2-1)^3} = 0 \rightarrow x = 0$

  En $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$, $y'' < 0 \rightarrow$ La función es convexa.

  En $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ La función es cóncava.

  En $x = 0$ tiene un punto de inflexión.



c)
- Dom $y = \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con los ejes:

  $y = 0 \Rightarrow \frac{4-x^2}{x} = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow (-2, 0), (2, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

  $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $\lim_{x\to 0} \frac{4-x^2}{x} = \pm\infty$ Asíntota vertical en $x = 0$.

  $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -\infty} \frac{4-x^2}{x} = +\infty \\ \lim_{x\to +\infty} \frac{4-x^2}{x} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4-x^2}{x^2}=-1\to m=-1\\ \lim\limits_{x\to\infty}\ y-mx\ =\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-x^2}{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4}{x}\right)=0\to n=0\end{array}\right\}\to$$ Asíntota oblicua en $y=-x$.

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x\to+\infty$ y cuando $x\to-\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

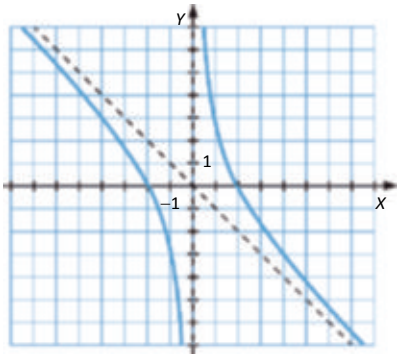
$y'=\dfrac{-x^2+4}{x^2}$ 0 $\forall x\in$ → La función es decreciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$y''-\dfrac{8}{x^3}$ 0 → No tiene puntos de inflexión.

En el intervalo $-\infty,0$, $y''<0\to$ La función es convexa.

En el intervalo $0,-\infty$, $y''>0\to$ La función es cóncava.



d) • Dom $y=\ -1,1$

- Cortes con los ejes:

$f(x)$ 0 $\dfrac{x^3}{x^2}$ 0 x 0 $0,0$ es el punto de corte con el eje X.

$x=0\to y=0\to$ $0,0$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3}{x^2}$ Asíntota vertical en $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3}{x^2}$ Asíntota vertical en $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1}=-\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1}=-\end{array}\right\}\to$$ No tiene asíntotas horizontales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^3-x}=1\to m=1\\ \lim\limits_{x\to\infty}\ y-mx\ =\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)=0-n=0\end{array}\right\}\to$$ Asíntota oblicua en $y=x$.

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x\to+\infty$ y cuando $x\to-\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{x^2 \ x^2 - 3}{x^2 - 1^{\ 2}} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

En $-\infty, -\sqrt{3} \ \cdot \ \sqrt{3}, -\infty$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $-\sqrt{3}, -1 \ \cup \ -1, 0 \ \cdot \ 0, 1 \quad 1, \sqrt{3}$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $x = -\sqrt{3}$ la función tiene un máximo y en $x = \sqrt{3}$ un mínimo.

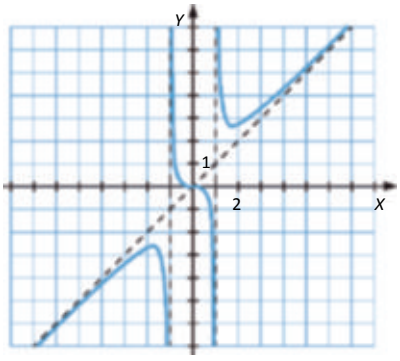
- Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^3} = 0 \rightarrow x = 0$$

En $-\infty, -1 \ \cup \ 0, 1$, $y'' < 0 \rightarrow$ La función es convexa.

En $-1, 0 \ \cup \ 1, -\infty$, $y'' > 0 \rightarrow$ La función es cóncava.

En $x = 0$ tiene un punto de inflexión.



88. **Página 205**

a) • $1 - x^2 - 0 \rightarrow x - = 1 -$ Dom $y - \mathbb{R} - \ -1, 1$

- Cortes con los ejes:

$y \quad 0 \ , \ \frac{x^2 \quad 4}{1 \quad x^2} \quad 0 \ \cdot \ x \quad 2 \ , \quad 2, 0 \ , \ 2, 0$ son los puntos de corte con el eje X.

$x - 0 \rightarrow y - -4 \rightarrow \ 0, -4$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 \quad 4}{1 \quad x^2} \quad \cdot$ Asíntota vertical en $x = -1$.

$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 \quad 4}{1 \quad x^2} \quad \cdot$ Asíntota vertical en $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 4}{1 - x^2} = -1 \\ \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 4}{1 - x^2} = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y = -1.$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas, ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{-6x}{(x^2-1)^2} = 0 \rightarrow x = 0 \quad 4 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow \text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

En $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $(0, 1) \cup (1, -\infty)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

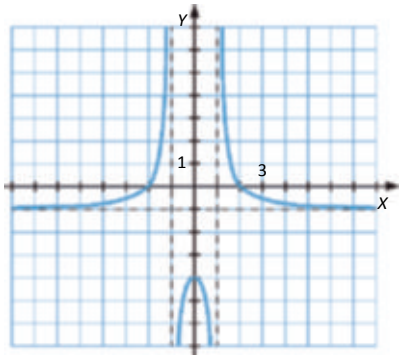
En $x = 0$ presenta un máximo.

- Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{6(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} \neq 0 \rightarrow$$ No hay puntos de inflexión.

En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En el intervalo $(-1, 1)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.



b) • $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow \text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- Cortes con los ejes:

$y = 0 \cdot \frac{1+x^2}{x^2-4} = 0 \quad x = 1 \cdot (1, 0), (1, 0)$ son los puntos de corte con el eje X.

$x = 0 \rightarrow y = -\frac{1}{4} \rightarrow \left(0, -\frac{1}{4}\right)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim_{x \to -2} \frac{1+x^2}{x^2-4} = \infty$ Asíntota vertical en $x = -2$.

$\lim_{x \to 2} \frac{1+x^2}{x^2-4} = \infty$ Asíntota vertical en $x = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} \frac{1-x^2}{x^2-4} = -1 \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{1-x^2}{x^2-4} = -1 \end{array}\right\} \rightarrow$$ Asíntota horizontal en $y = -1$.

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas, ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$y' = \frac{6x}{(x^2-4)^2} = 0 \rightarrow x = 0$

En $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $(0, 2) \cup (2, +\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

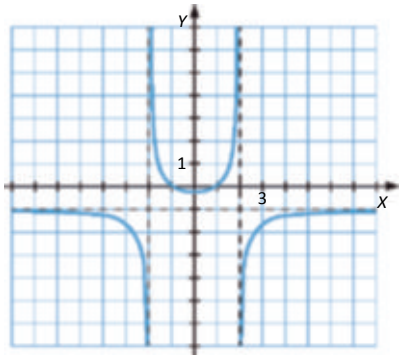
En $x = 0$ presenta un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

$y'' = \frac{-6(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} = 0 \rightarrow$ No hay puntos de inflexión.

En $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En el intervalo $(-2, 2)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.



c) • $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow \text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- Cortes con los ejes:

$y = 0 \rightarrow \frac{x^2-4}{x^2-1} = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow (-2, 0), (2, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow y = -4 \rightarrow (0, -4)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-4}{x^2-1} = \infty$ Asíntota vertical en $x = -1$.

$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-4}{x^2-1} = \infty$ Asíntota vertical en $x = 1$.

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-4}{x^2-1} = 1 \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-4}{x^2-1} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow$ Asíntota horizontal en $y = 1$.

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$y' = \frac{6x}{(x^2-1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$

En $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $(0, 1) \cup (1, +\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

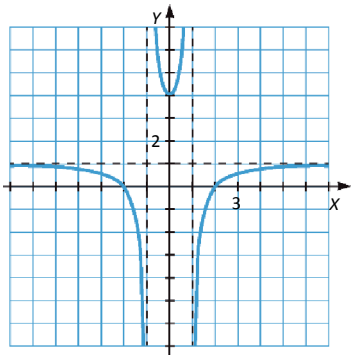
En $x = 0$ presenta un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

$y'' = \dfrac{-6\ 3x^2+1}{x^2-1^{\ 3}} \neq 0$ — No hay puntos de inflexión.

En $-\infty,-1\ -\ 1,+\infty$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $-1,1$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.



d) •

- Cortes con los ejes:

$y \quad 0 \cdot \dfrac{1 \quad x^2}{4 \quad x^2} \quad 0 \quad x \quad 1 \cdot \quad 1,0\ ,\ 1,0$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow y = \dfrac{1}{4} - \left[0, \dfrac{1}{4}\right]$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1 \quad x^2}{4 \quad x^2}$ ∞ · Asíntota vertical en $x = -2$.

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 \quad x^2}{4 \quad x^2}$ ∞ · Asíntota vertical en $x = 2$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1-x^2}{4-x^2} = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-x^2}{4-x^2} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow$ Asíntota horizontal en $y = 1$.

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$y' - \dfrac{-6x}{x^2-4^{\ 2}} - 0 \rightarrow x - 0$

En $-\infty,-2\ -\ -2,0$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $0,2\ -\ 2,-\infty$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

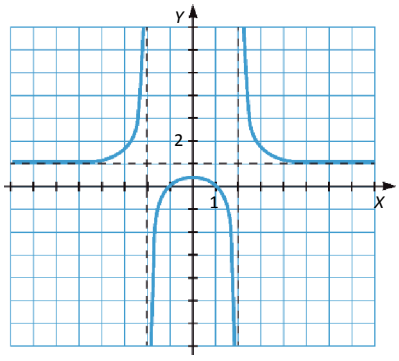
En $x = 0$ presenta un máximo.

- Concavidad y convexidad:

$y'' = \frac{6\ 3x^2 - 4}{x^2 - 4^3} \neq 0$ — No hay puntos de inflexión.

En $-\infty, -2 \cup 2, -\infty$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En el intervalo $-2, 2$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.



89. **Página 205**

a) • $\text{Dom } y - \mathbb{R} - -2$

- Cortes con los ejes:

$y \quad 0 \quad \frac{x}{x \quad 2} \quad 0 \quad x \quad 0 \quad 0,0$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x - 0 \rightarrow y - 0 \rightarrow 0,0$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim_{x \to -2} \frac{x}{x \quad 2}$ Asíntota vertical en $x = -2$.

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x-2} = 1 \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x-2} = 1 \end{array}\right|$ — Asíntota horizontal en $y = 1$.

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

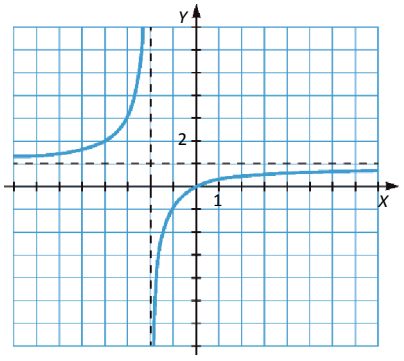
$y' = \frac{2}{x - 2^2} > 0 \ \forall x - \mathbb{R} \rightarrow$ La función es creciente en todo su dominio y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

$y'' = \frac{-4}{x - 2^3} = 0 -$ No hay puntos de inflexión.

En el intervalo $(-\infty, -2)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En el intervalo $(-2, +\infty)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.



b) • $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-2\}$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^2}{x-2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

  $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2}{x-2} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -2$.

  $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x-2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x-2} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

  $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2 - 2x} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x \to \infty} (y - mx) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2}{x-2} - x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{-2x}{x-2}\right) = -2 \rightarrow n = -2 \end{array}\right\} \rightarrow$ Asíntota oblicua en $y = x - 2$.

  No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$

  En $(-\infty, -4) \cup (0, -\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

  En $(-4, -2) \cup (-2, 0)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

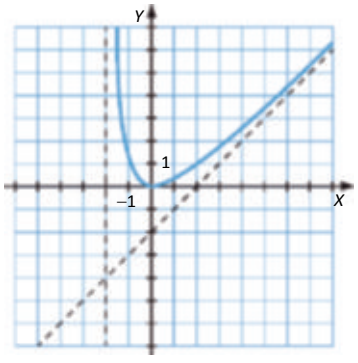
  En $x = -4$, la función tiene un máximo, y en $x = 0$, un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

  $y'' = \dfrac{8}{(x-2)^3} = 0 \rightarrow$ No hay puntos de inflexión.

  En el intervalo $(-\infty, -2)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

  En el intervalo $(-2, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.



c) • $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-2\}$

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^3}{x-2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

  $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $\lim_{x \to -2} \frac{x^3}{x-2} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -2$.

  $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x-2} = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x-2} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

  $\lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 2x} = \infty \rightarrow$ No hay asíntotas oblicuas.

  Tiene dos ramas parabólicas:

  $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x-2} = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x-2} = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' = \frac{2x^2 \cdot (x-3)}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$

  En el intervalo $(-\infty, -3)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

  En $(-3, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

  En $x = -3$, la función tiene un mínimo.

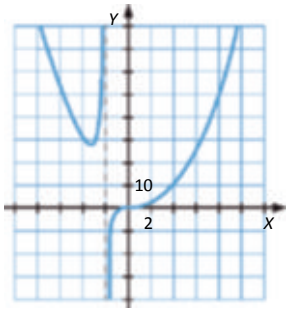
- Concavidad y convexidad:

  $y'' = \frac{2x \cdot (x^2 - 6x - 12)}{(x-2)^3} = 0 \rightarrow x = 0$

  En el intervalo $(-2, 0)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

  En $(-\infty, -2) \cup (0, -\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

  En $x = 0$, la función tiene un punto de inflexión.



d) • Dom $y = \mathbb{R} - \{-2\}$

- Cortes con los ejes:

  $y = 0 \cdot \frac{x^3}{(x+2)^2} = 0 \cdot x = 0 \to (0,0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

  $x = 0 \to y = 0 \to (0,0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $\lim_{x \to -2} \frac{x^3}{(x+2)^2} = \infty \cdot$ Asíntota vertical en $x = -2$.

  $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{(x-2)^2} = -\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{(x-2)^2} = +\infty \end{array}\right\}$ — No tiene asíntotas horizontales.

  $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x(x-2)^2} = 1 \to m = 1 \\ \lim_{x \to \infty} (y - mx) = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^3}{(x-2)^2} - x\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{-4x^2 - 4x}{(x+2)^2} = -4 \to n = -4 \end{array}\right\}$ — Asíntota oblicua en $y = x - 4$.

  No tiene ramas parabólicas porque tiene asíntotas oblicuas.

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' = \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3} = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \end{cases}$

  En $(-\infty, -6) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$, $y' > 0 \to$ Función creciente.

  En el intervalo $(-6, -2)$, $y' < 0 \to$ Función decreciente.

  En $x = -6$ la función tiene un máximo.

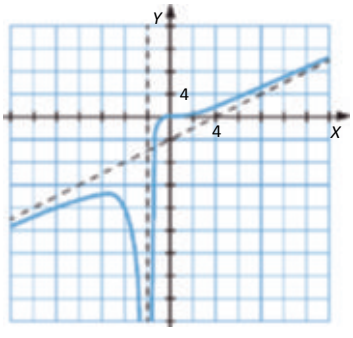
- Concavidad y convexidad:

  $y'' = \frac{24x}{(x-2)^4} = 0 \to x = 0$

  En $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$, $y'' < 0 \to$ Función convexa.

  En el intervalo $(0, +\infty)$, $y'' > 0 \to$ Función cóncava.

  En $x = 0$, la función tiene un punto de inflexión.



90. **Página 205**

a) • $x^2 - 0 - x - 0 \rightarrow \text{Dom } y - \mathbb{R} - 0$

- Cortes con los ejes:

  $y - 0 - \frac{x-1}{x^2} - 0 \rightarrow x - 1 - 1, 0$ es el punto de corte con el eje *X*.

  No tiene punto de corte con el eje *Y* porque no está definida para $x = 0$.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $\lim_{x \to 0} \frac{x-1}{x^2} - \infty -$ Asíntota vertical en $x = 0$.

  $\lim_{x \to \infty} \frac{x-1}{x^2} - 0 -$ Asíntota horizontal en $y = 0$.

  No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' - \frac{-x-2}{x^3} - 0 - x - 2$

  En $-\infty, 0 \cup 2, +\infty$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

  En el intervalo $0, 2$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

  En $x = 2$ presenta un máximo.

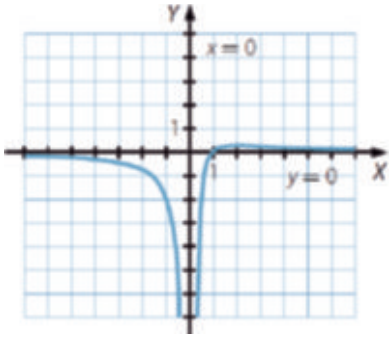
- Concavidad y convexidad:

  $y'' - \frac{2x-6}{x^4} - 0 \rightarrow x - 3$

  En $-\infty, 0 \cup 0, 3$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

  En el intervalo $3, -\infty$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

  En $x = 3$ presenta un punto de inflexión.



b) • $x - 3 - 0 \rightarrow x - 3 \rightarrow \text{Dom } y - \mathbb{R} - 3$

- Cortes con los ejes:

  $y - 0 - \frac{x-2}{x-3} - 0 \rightarrow x - 2 \rightarrow 2, 0$ es el punto de corte con el eje *X*.

  $x = 0 \rightarrow y = \frac{2}{3} - \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $\lim_{x \to 3} \frac{x-2}{x-3} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 3$.

  $\lim_{x \to \infty} \frac{x-2}{x-3} = 1 \rightarrow$ Asíntota horizontal en $y = 1$.

  No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow +\infty$ y cuando $x \longrightarrow -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

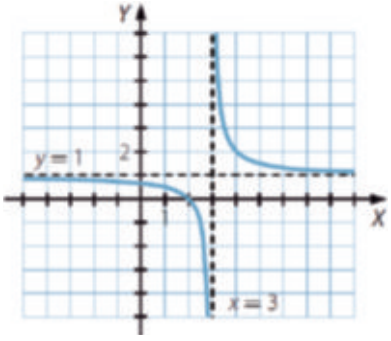
  $y' = \frac{-1}{(x-3)^2} < 0 \rightarrow$ La función es decreciente y no presenta máximos ni mínimos.

- Concavidad y convexidad:

  $y'' = \frac{2}{(x-3)^3} \neq 0 \rightarrow$ No presenta puntos de inflexión.

  En el intervalo $(-\infty, 3)$, $y'' < 0 \longrightarrow$ Función convexa.

  En el intervalo $(3, +\infty)$, $y'' > 0 \longrightarrow$ Función cóncava.



c) • $x - 1 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow \text{Dom } y = \mathbb{R} - \{-1\}$

- Cortes con los ejes:

  $y = 0 \rightarrow \frac{x^2}{x-1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje X.

  $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $\lim_{x \to -1} \frac{x^2}{x-1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -1$.

  $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x-1} = +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

  $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-x}{x-1} = -1 \rightarrow n = -1 \end{array}\right\} \rightarrow$ Asíntota oblicua en $y = x - 1$.

  No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \longrightarrow +\infty$ y cuando $x \longrightarrow -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{x^2 - 2x}{x - 1^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

En $(-\infty, -2) \cup (0, -\infty)$, $y' > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

En $(-2, -1) \cup (-1, -\infty)$, $y' < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

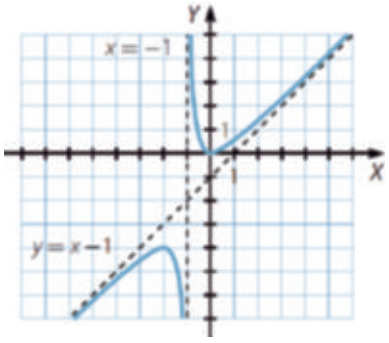
En $x = -2$ presenta un máximo y en $x = 0$ un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{2}{x - 1^3} \neq 0 \Rightarrow$$ No presenta puntos de inflexión.

En el intervalo $(-\infty, -1)$, $y'' < 0 \longrightarrow$ Función convexa.

En el intervalo $(-1, +\infty)$, $y'' > 0 \longrightarrow$ Función cóncava.



d) • Dom $y = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$y = 0 \cdot \frac{x}{x^2 \quad 1} = 0 \cdot x = 0 \cdot (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 \quad 1} \quad 0$ Asíntota horizontal en $y = 0$.

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow +\infty$ y cuando $x \longrightarrow -\infty$.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' \quad \frac{x^2 \quad 1}{x \quad 1^2} \quad 0 \cdot x \quad 1$$

En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $y' < 0 \longrightarrow$ Función decreciente.

En el intervalo $(-1, 1)$, $y' > 0 \longrightarrow$ Función creciente.

En $x = 1$ presenta un máximo y en $x = -1$ un mínimo.

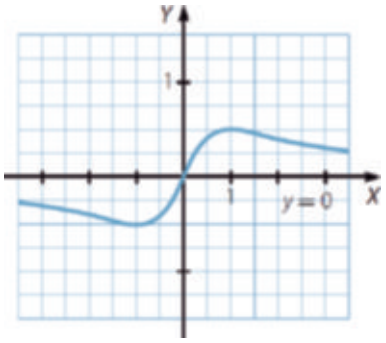
- Concavidad y convexidad:

$y'' = \frac{2x^3 - 6x}{x^2 - 1^3} = 0 \quad x\,2x^2 - 6 = 0 \cdot \begin{vmatrix} x & 0 \\ x & \sqrt{3} \end{vmatrix}$

En $-\infty, -\sqrt{3}\ \cup\ 0, \sqrt{3}$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

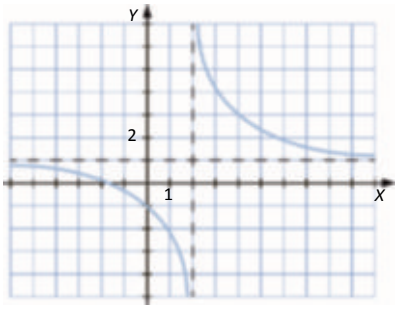
En $\sqrt{3}, 0\ \cup\ \sqrt{3}, \infty$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ y $x = \sqrt{3}$ presenta puntos de inflexión.



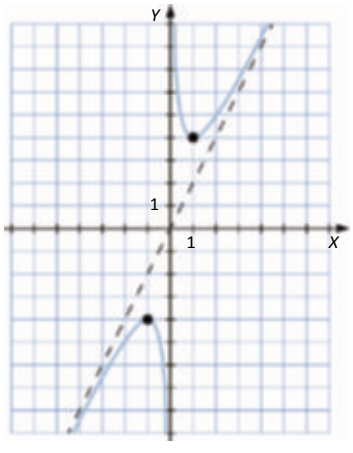
91. **Página 205**

Respuesta abierta. Por ejemplo:



92. **Página 205**

Respuesta abierta. Por ejemplo:



93. Página 206

a) • $2 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 2 \rightarrow \text{Dom } y = (-\infty, 2]$

- Cortes con los ejes:

  $y = 0 \rightarrow \sqrt{2-x} = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

  $x = 0 \rightarrow y = \sqrt{2} \rightarrow (0, \sqrt{2})$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales.

  $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{2-x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

  $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2-x}}{x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

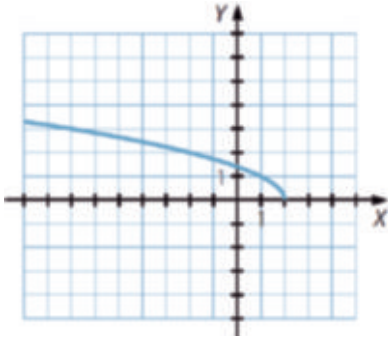
  Tiene una rama parabólica: $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{2-x} = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' = \frac{1}{2\sqrt{2-x}} > 0 \rightarrow$ Función siempre decreciente.

- Concavidad y convexidad:

  $y'' = \frac{-1}{2(2-x)\sqrt{2-x}} < 0 \rightarrow$ Función siempre convexa.



b) • $1 - \frac{x^2}{25} \geq 0 \rightarrow x \in [-5, 5]$ $\text{Dom } y = [-5, 5]$

- Cortes con los ejes:

  $\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} = 0 \rightarrow x^2 - 25 = 0 \rightarrow x = \pm 5 \rightarrow (-5, 0), (5, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

  $x = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow (0, 2)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas.

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' = \frac{-4x}{10\sqrt{25 - x^2}} = 0 \rightarrow x = 0$

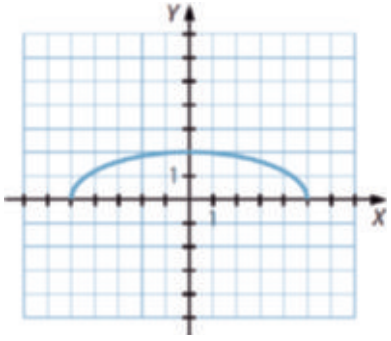
  En el intervalo $(-5, 0)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

  En el intervalo $(0, 5)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

  En $x = 0$ presenta un máximo.

- Concavidad y convexidad:

$y'' = \dfrac{-100}{10\sqrt{25-x^2}\,(25-x^2)} < 0 \rightarrow$ Función convexa.



c) • $x^2 - 9 \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty) \rightarrow \text{Dom } y = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

- Cortes con los ejes:

$\sqrt{x^2-9} = 0 \rightarrow x = -3 \rightarrow (-3, 0)$, $(3, 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

No tiene punto de corte con el eje *Y* porque no está definida en $x = 0$.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-9} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-9} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-9} - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-9-x^2}{\sqrt{x^2-9}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-9}{\sqrt{x^2-9}+x} = 0 \rightarrow n = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua } y = x.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x} = 1 \rightarrow m = -1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-9} + x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-9-x^2}{\sqrt{x^2-9}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-9}{\sqrt{x^2-9}-x} = 0 \rightarrow n = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua } y = -x.$$

- Crecimiento y decrecimiento:

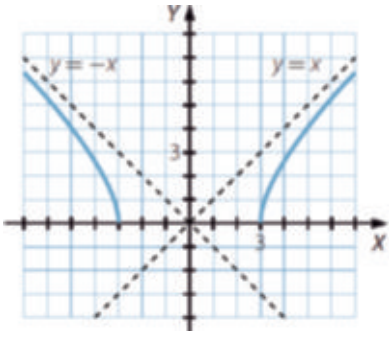
$y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}} = 0 \rightarrow x = 0$

En el intervalo $(-\infty, -3)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En el intervalo $(3, +\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

- Concavidad y convexidad:

$y'' = \dfrac{-9}{x^2 - 9\sqrt{x^2 - 9}} < 0 \rightarrow$ Función siempre convexa.



d) • $x - 3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3 \rightarrow x \in [-3, +\infty) \rightarrow \text{Dom } y = [-3, +\infty)$

- Cortes con los ejes:

$-\sqrt{x+3} = 0 \rightarrow x = -3 \rightarrow (-3, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow y = -\sqrt{3} \rightarrow (0, -\sqrt{3})$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales.

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x - 3} = +\infty$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{-\sqrt{x-3}}{x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

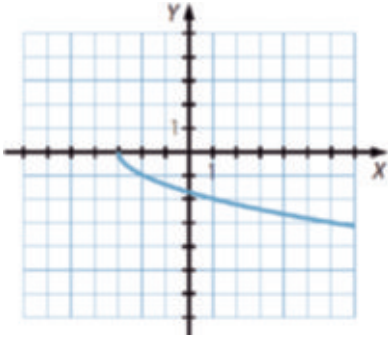
$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x - 3} = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$y' = \dfrac{-1}{2\sqrt{x-3}} < 0 \rightarrow$ Función siempre decreciente.

- Concavidad y convexidad:

$y'' = \dfrac{-1}{4(x-3)\sqrt{x-3}} > 0 \rightarrow$ Función siempre cóncava.



94. **Página 206**

a) $x^2 - 3x \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [0, +\infty) \rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, -3] \cup [0, +\infty)$

Cortes con el eje *X*: $\sqrt{x^2 - 3x} - x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

Corte con el eje *Y*: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

b) No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 3x} - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 - 3x} + x} = \dfrac{3}{2} \rightarrow$ Asíntota horizontal en $y = \dfrac{3}{2}$.

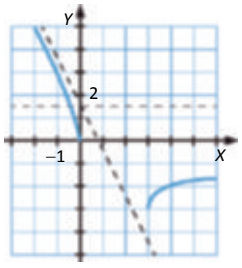
$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -2 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right| \rightarrow$ Tiene asíntota oblicua en $y = -2x - \dfrac{3}{2}$.

c) $f'(x) = \dfrac{2x - 3 - 2\sqrt{x^2 - 3x}}{2\sqrt{x^2 - 3x}} \neq 0 \ \forall x \in \text{Dom } f \rightarrow$ No tiene máximos ni mínimos.

En el intervalo $(-\infty, -3)$, $f'(x) < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow$ Función creciente.

d)



95. **Página 206**

a) $x^2 - 3x \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [0, +\infty) \rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, -3] \cup [0, +\infty)$

Cortes con el eje *X*: $\sqrt{x^2 - 3x} - 2x = 0 \cdot \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \cdot (0, 0), (1, 0)$

Corte con el eje *Y*: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

b) No tiene asíntotas verticales.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 3x} - 2x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 3x} - 2x = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x - 3x^2}{\sqrt{x^2 - 3x} + 2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x}{3} = -\infty \end{array}\right| \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x} - 2x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x - 3x^2}{x\sqrt{x^2 - 3x} + 2x} = -1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 3x} - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 - 3x} + x} = \dfrac{3}{2} \end{array}\right| \rightarrow$ Asíntota oblicua en $y = -x - \dfrac{3}{2}$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x} - 2x}{x} = -3 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - 3x = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 3x} - x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 3x - x^2}{\sqrt{x^2 - 3x} - x} = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right| \rightarrow$ Asíntota oblicua en $y = 3x - \dfrac{3}{2}$.

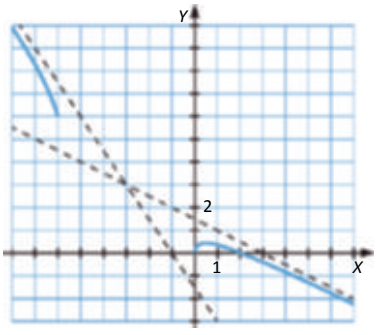
c) $f'(x) = \dfrac{2x - 3 - 4\sqrt{x^2 - 3x}}{2\sqrt{x^2 - 3x}} = 0 \rightarrow x = \sqrt{3} - \dfrac{3}{2}$

En $(-\infty, -3) \cup \left(\sqrt{3} - \dfrac{3}{2}, -\infty\right)$, $f'(x) < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En el intervalo $\left[0, \sqrt{3} - \dfrac{3}{2}\right]$, $f'(x) > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $x = \sqrt{3} - \dfrac{2}{3}$ $f(x)$ tiene un máximo.

d)



96. Página 206

a) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

b) Gráfica 3: $h(x) = \sqrt{x - 1}$

97. Página 206

a) • Dom $y = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $-4e^x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje X.

  $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales.

  $\lim\limits_{x \to +\infty} 4e^x = +\infty$ No tiene asíntota horizontal.

  $\lim\limits_{x \to -\infty} -4e^x = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal en $y = 0$.

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4e^x}{x} = +\infty$ No hay asíntotas oblicuas.

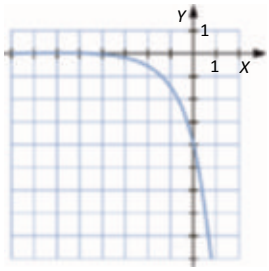
  Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x \to +\infty} 4e^x = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' = -4e^x < 0 \rightarrow$ La función es siempre decreciente.

- Concavidad y convexidad:

  $y'' = -4e^x < 0 \rightarrow$ La función es siempre convexa.



b) • Dom $y = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

  $y = 0 \Rightarrow \frac{e^{-x} - e^x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{e^x} - e^x \neq 0 \Rightarrow$ No tiene puntos de corte con el eje *X*.

  $x = 0 \rightarrow y = \frac{1-1}{2} = 1 \rightarrow (0, 1)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales.

  $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\infty \end{array}\right\}$ No tiene asíntotas horizontales.

  $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{-x} - e^x}{2x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{-x} - e^x}{2x} = -\infty \end{array}\right\}$ No hay asíntotas oblicuas.

  Tiene ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\infty$

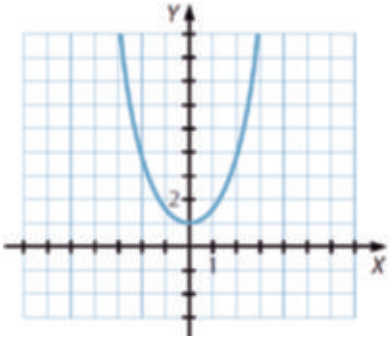
- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = 0 \Rightarrow e^{-x} - e^x = 0 \Rightarrow x = -x \Rightarrow x = 0$

  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

  En el intervalo $(0, +\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

  En $x = 0$ presenta un mínimo.



- Concavidad y convexidad:

  $y'' = \frac{e^{-x} - e^x}{2} > 0 \Rightarrow$ Función siempre cóncava.

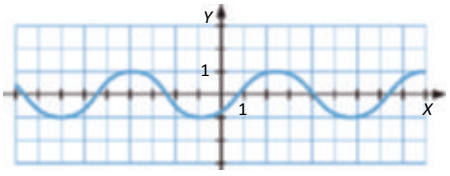
c) • Dom $y = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow \left\{\left(k\pi + \frac{\pi}{4}, 0\right) : k \in \mathbb{Z}\right\}$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

Es la función $sen\ x$ trasladada $\frac{\pi}{4}$ hacia la derecha.



d) • Dom $y = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$x^2 - sen^2 x = 0 \rightarrow x - sen\ x = x - 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales.

$\lim_{x \to \infty} x^2 - sen^2 x = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - sen^2 x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$; $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - sen^2 x}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2x - 2\ sen\ x \cos x}{1} = \infty$. No tiene asíntota oblicua.

Tiene dos ramas parabólicas:

$\lim_{x \to +\infty} x^2 - sen^2 x = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to -\infty} x^2 - sen^2 x = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$y' = -2\ sen\ x\ cos\ x + 2x = 0 \rightarrow x = 0$

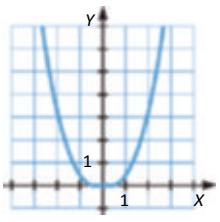
En el intervalo $(-\infty, 0)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En el intervalo $(0, +\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $x = 0$ presenta un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

$y'' = 2\ sen^2 x - 2\cos^2 x + 2 > 0 \rightarrow$ Función siempre cóncava.



98. **Página 206**

a) • Dom y –

- Cortes con los ejes:

  $\log_2 x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 1 - x = 0 - 0,0$ es el punto de corte con el eje *X*.

  $x - 0 \rightarrow y - 0 \rightarrow 0,0$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales.

  $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \log_2 x^2 - 1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \log_2 x^2 - 1 = +\infty\end{array}\right| \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

  $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_2 x^2 - 1}{x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

  Tiene ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_2 x^2 \quad 1 \quad$ I

  $\lim\limits_{x\to-\infty} \log_2 x^2 - 1 = -$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' \quad \dfrac{2x}{\ln 2 \ x^2 \quad 1} \quad 0 \quad x \quad 0$

  En el intervalo $(-\infty, 0)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

  En el intervalo $(0, +\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

  En $x = 0$ presenta un mínimo.

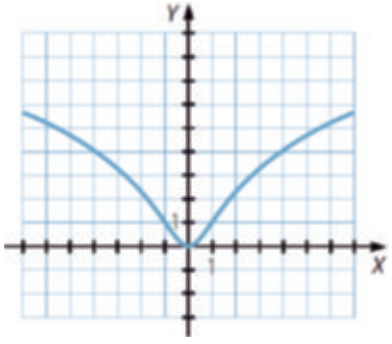
- Concavidad y convexidad:

  $y'' = \dfrac{2 - 2x^2}{\ln 2 \ x^2 - 1^{\ 2}} = 0 - x = -1$

  En $-\infty, -1 \quad 1, +\infty$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

  En $-1, 1$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

  En $x \quad 1$ presenta dos puntos de inflexión.



d) • Dom $y = (0,1) \cup (1,+\infty)$

- Cortes con los ejes:

  $\frac{1}{\ln x} = 0 \rightarrow$ No tiene puntos de corte con el eje *X*.

  No tiene punto de corte con el eje *Y* porque no está definida para $x = 0$.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntota vertical.

  $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\ln x} = -\infty \\ \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{\ln x} = +\infty \end{array}\right| \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = 1$.

  $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal en $y = 0$.

  No tiene una ramas parabólicas.

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' = -\frac{1}{x\ (\ln x)^2} < 0$ en todo el dominio. → Siempre es decreciente y no tiene máximos ni mínimos

- Concavidad y convexidad:

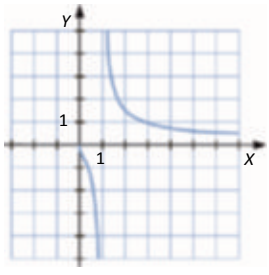
  $y'' = \frac{\ln x - 2}{x^2\ (\ln x)^3} = 0 \rightarrow \ln x = -2 \rightarrow x = e^{-2}$

  En $(0, e^{-2})$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

  En $(e^{-2}, 1)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

  En $(1, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

  En $x = e^{-2}$ presenta un punto de inflexión.



99. Página 206

a) • Dom $y = \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con los ejes:

  $e^{\frac{2}{x}} = 0 \rightarrow$ No tiene puntos de corte con el eje *X*.

  No tiene punto de corte con el eje *Y* porque no está definida en $x = 0$.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{2}{x}} = 0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{2}{x}} = +\infty\end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota vertical en } x = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{2}{x}} = 1\\ \lim\limits_{x\to -\infty} e^{\frac{2}{x}} = 1\end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y = 1.$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

- Crecimiento y decrecimiento:

$y' = -2 \cdot \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2} < 0 \rightarrow$ Función decreciente en todo su dominio.

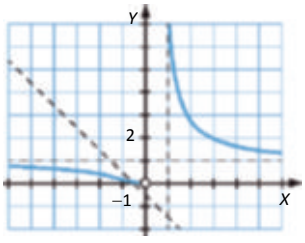
- Concavidad y convexidad:

$$y'' = \frac{4x e^{\frac{2}{x}} - 4e^{\frac{2}{x}}}{x^4} = 0 \rightarrow x = -1$$

En $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $(-\infty, -1)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $x = 1$ presenta un punto de inflexión.



b) • Dom $y = \mathbb{R}$

- Cortes con los ejes:

$2x \cdot e^x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

No hay asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} 2x \cdot e^x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to -\infty} 2x \cdot e^x = 0\end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota horizontal en } y = 0.$$

$\lim\limits_{x\to -\infty} 2e^x = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x \cdot e^x = +\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$y' = 2x e^x + 2e^x = 2e^x (x + 1) = 0 \rightarrow x = -1$

En el intervalo $(-\infty, -1)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En el intervalo $(-1, +\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

En $x = -1$ presenta un mínimo.

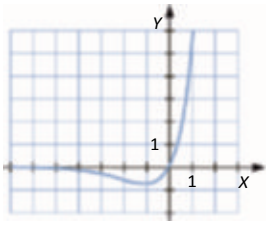
- Concavidad y convexidad:

$y' = 2x e^x + 2e^x - 2e^x - 2e^x \ x - 2 \ = 0 \rightarrow x = -2$

En $(-\infty, -2)$, $y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa.

En $(-2, +\infty)$, $y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava.

En $x = -2$ presenta un punto de inflexión.



100. **Página 206**

a) $f(0) = a \cdot 0 - 2^0 = -1 \rightarrow$ El punto (0, –1) pertenece a la gráfica de la función para todo valor del parámetro a.

b) $a < 0 \rightarrow f'(x) = a - 2^x \ln 2 < 0 \rightarrow$ La función es decreciente.

c) $f(2) = 0 = 2a - 2^2 = 2a - 4 = 0 = a = 2 \rightarrow f(x) = 2x - 2^x$

$f'(x) \quad 2 \quad 2^x \ln 2 \quad 0 \quad \cdot 2^x \quad \frac{2}{\ln 2} \quad \cdot x \quad \log_2\left|\frac{2}{\ln 2}\right|$

En $\left(-\infty, \log_2 \frac{2}{\ln 2}\right)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente. En $\left(\log_2 \frac{2}{\ln 2}, -\infty\right)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En $x \quad \log_2\left|\frac{2}{\ln 2}\right|$ presenta un máximo.

101. **Página 206**

a) $f\left(\sqrt{2}\right) - 1 \rightarrow a - \ln\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1 \ - a - \ln 1 - a \rightarrow a - 1 = f(x) = 1 - \ln x^2 - 1$

b) $x^2 - 1 > 0 \rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x \to -1^-} 1 - \ln x^2 - 1 = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} 1 - \ln x^2 - 1 = -\infty \end{matrix}\right\} \rightarrow$ Asíntota vertical en $x = -1$ y en $x = 1$.

$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \ln x^2 - 1 = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \ln x^2 - 1 = -\infty \end{matrix}\right\} \rightarrow$ No hay asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 - \ln x^2 - 1}{x} = 0 \rightarrow$ No hay asíntotas oblicuas.

Hay dos ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 \quad \ln x^2 \quad 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \ln x^2 - 1 = -\infty$

c) $f'(x) = \frac{2x}{x^2-1} = 0 \rightarrow x = 0 \notin \text{Dom } f$

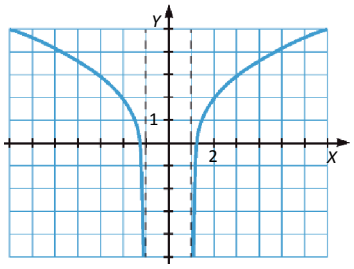
En el intervalo $(-\infty, -1)$, $y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente.

En el intervalo $(1, +\infty)$, $y' > 0 \rightarrow$ Función creciente.

No presenta máximos ni mínimos.

$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2} \neq 0 \rightarrow$ La función es convexa en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.

d)



102. **Página 206**

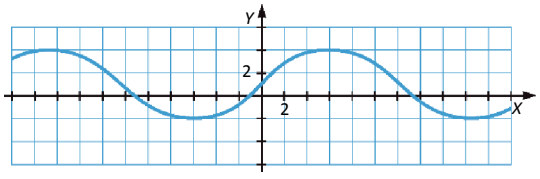
a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 = 1 - a \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 \rightarrow a = 2\sqrt{2} \rightarrow f(x) = 1 + 2\sqrt{2} \cdot sen\left(\frac{x}{4}\right)$

b) Podemos obtener la gráfica de la función a partir de la función $sen\ x$.

$sen\left(\frac{x}{2}\right)$ es una dilatación en el eje *X* de la función $sen\ x$, que recorre los mismos valores, pero el «doble de lento», es decir, tendrá periodo 4π y está acotada entre -1 y 1.

$2\sqrt{2} \cdot sen\left(\frac{x}{2}\right)$ es una dilatación en el eje *Y* de la gráfica anterior. Ahora estará acotada entre $-2\sqrt{2}$ y $2\sqrt{2}$.

Por último, la función $f(x) = 1 - 2\sqrt{2} \cdot sen\left(\frac{x}{2}\right)$ es una traslación de una unidad hacia arriba de la gráfica anterior:



c) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ $\qquad$ $\text{Im } f = [-2, 4]$

103. **Página 206**

a)
- $\text{Dom } f = \mathbb{R}$
- Continuidad:

  $\lim_{x \to 1^-} f(x) \quad \lim_{x \to 1^-} (4x - x^2) \quad 5 \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) \quad \lim_{x \to 1^+} (2x - 3) \quad f(1)$. Es continua en $x = 1$ y, por tanto, es continua en $\mathbb{R}$.
- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \rightarrow 4x - x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$. (0, 0) y (−4, 0) son los puntos de corte con el eje *X*.

  $f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Las funciones de los dos trozos son polinómicas; por lo tanto, no tienen asíntotas.

  Tiene una rama parabólica: $\lim_{x\to-\infty} 4x - x^2 = -\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) \begin{cases} 4 & 2x \quad \text{si} \quad x < 1 \\ 2 & \quad \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$ $f'(x) \quad 0 \quad x \quad 2$

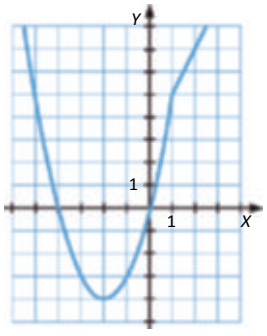
  En $(-2,1) \cup (1,+\infty)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

  En el intervalo $(-\infty, -2)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

  En $x = -2$ presenta un mínimo.

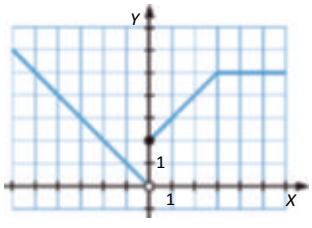
- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$ La función es cóncava en el primer tramo.



b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - 3$

Las funciones de los distintos tramos de la función son lineales. Representamos las diferentes funciones en sus respectivos dominios:



c)• $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

- Continuidad:

  $\lim_{x\to-2^-} f(x) \quad \lim_{x\to-2^-} \sqrt{2-x} \quad 2 \quad \lim_{x\to-2^+} f(x) \quad \lim_{x\to-2^+} 6 - x^2 \quad f(-2)$ La función es continua en $x = -2$ y, por lo tanto, es continua en $\mathbb{R}$.

- Cortes con los ejes:

  $f(x) = 0 \rightarrow 6 - x^2 = 0 \rightarrow x = \sqrt{6} \rightarrow \sqrt{6}, 0$ es el punto de corte con el eje *X*.

  $f(0) = 0 \rightarrow 0, 6$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  Tiene dos ramas parabólicas:

  $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{2-x}=-\infty$ $\lim_{x\to+\infty}6-x^2=-\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}} & \text{si } x<-2\\ -2x & \text{si } -2<x\end{cases}$ $f'(x)=0\rightarrow x=0$

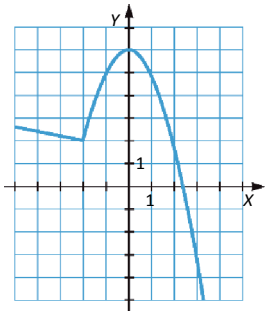
  En el intervalo $(-2, 0)$, $f'(x)>0\longrightarrow f(x)$ es creciente.

  En $(-\infty, -2)\cup(0, +\infty)$, $f'(x)<0\longrightarrow f(x)$ es decreciente.

  En $x=-2$ presenta un mínimo.

- Concavidad y convexidad:

  $f''(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{4\sqrt{2-x}\,(2-x)} & \text{si } x<-2\\ -2 & \text{si } -2<x\end{cases}$ $\rightarrow f''(x)<0\rightarrow$ La función es convexa en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.



d)• $\text{Dom } f=\mathbb{R}$

- Continuidad:

  Cada una de las tres funciones son continuas en sus respectivos dominios. Veamos si son continuas en $x=-1$ y en $x=2$:

  $\lim_{x\to-1^-}f(x)$ $\lim_{x\to-1^-}x^2+3x$ 2 $\lim_{x\to-1^+}f(x)$ $\lim_{x\to-1^+}x^3$ 1 $f(-1)$ Es continua en $x=-1$.

  $\lim_{x\to-2^-}f(x)=\lim_{x\to-2^-}x^3-1=-7=\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}\dfrac{7}{x-1}=f(2)\rightarrow$ Es continua en $x=2$.

  La función es continua en todo su dominio.

- Cortes con los ejes:

  $f(x)=0\longrightarrow\begin{cases}x^2-3x=x\,(x+3)=0\rightarrow x=-3\\ x^3-1=0\rightarrow x=1\end{cases}\longrightarrow(-3,0),\ (1,0)$ son los puntos de corte con el eje X.

  $f(0)=-1\rightarrow(0,-1)$ es el punto de corte con el eje Y.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  No tiene asíntotas verticales.

  $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{7}{x-1}=0\longrightarrow$ Asíntota horizontal en $y=0$.

  Tiene una rama parabólica: $\lim_{x\to-\infty}x^2-3x=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x)=\begin{cases}2x-3 & \text{si } x<-1\\ 3x^2 & \text{si } -1<x<2\\ \dfrac{-7}{x-1^2} & \text{si } 2<x\end{cases}\rightarrow\begin{cases}2x-3=0\rightarrow x=-\dfrac{3}{2}\\ 3x^2=0\rightarrow x=0\end{cases}$$

En $\left(-\frac{3}{2},-1\right)\cup(-1,0)\cup(0,2)$ $f'(x)>0\rightarrow f(x)$ es creciente.

En $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup(2,+\infty)$, $f'(x)<0\rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $x=-\frac{3}{2}$ presenta un mínimo.

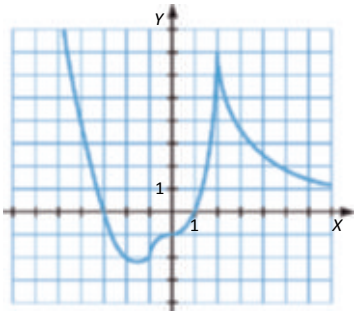
- Concavidad y convexidad:

$$f''(x)=\begin{cases}2 & \text{si } x<-1\\ 6x & \text{si } -1<x<2\\ \dfrac{14}{x-1^3} & \text{si } 2<x\end{cases}\rightarrow 6x=0\rightarrow x=0$$

En $(-\infty,-1)\cup(0,2)\cup(2,-\infty)$, $f''(x)>0\rightarrow$ Función cóncava.

En $(-1,0)$, $f''(x)<0\rightarrow$ Función convexa

En $x=0$ y en $x=-1$ presenta puntos de inflexión.



e)• $\text{Dom } f=\mathbb{R}$

- Continuidad:

Cada una de las dos funciones son continuas en sus respectivos dominios, veamos si son continuas en $x=0$:

$\lim_{x\to 0^-} f(x)$ $\lim_{x\to 0^-}$ 2 3 cos x 1 $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ $\lim_{x\to 0^+}$ 2^{-x+1} 3 1 $f(0)$ · La función es continua en su dominio.

- Cortes con los ejes:

$f(x)=0\rightarrow 2-3\cos x=0\rightarrow x=\arccos\left(\frac{2}{3}\right)\rightarrow\left(\arccos\left(\frac{2}{3}\right),0\right)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

$f(0)=-1\rightarrow(0,-1)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

No tiene asíntotas verticales.

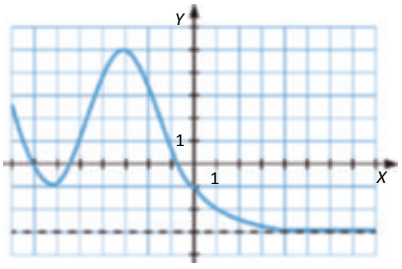
$\lim_{x\to+\infty} 2^{-x+1}-3=-3\rightarrow$ Asíntota horizontal en $y=-3$.

Podemos representar la función $-3\cos x$ como una dilatación de la función $-\cos x$, y la función $2-3\cos x$, como una traslación de la anterior.

Si consideramos $g(x)=2^{-x+1}-3$:

$g'(x)=-2^{-x+1}\ln 2<0 \rightarrow g(x)$ es siempre decreciente.

$g''(x)=2^{-x+1}\ln 2^2>0 \rightarrow g(x)$ es siempre cóncava.



104. **Página 206**

a) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} ax-3=3-a=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} bx^2-5=b-5\rightarrow b=-a-2\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} bx^2-5=b-5=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2\sqrt{x+3}+a=4-a-b=a-1\end{array}\right\} \rightarrow a=-\frac{1}{2}, b=-\frac{3}{2}$

Entonces:

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x-3 & \text{si } x<-1\\ -\frac{3}{2}x^2-5 & \text{si } -1\le x<1\\ 2\sqrt{x-3}-\frac{1}{2} & \text{si } 1\le x\end{cases}$$

b) La primera función es una recta con pendiente $m=-\frac{1}{2}$ y ordenada en el origen $n=3$.

La segunda función es una parábola hacia abajo con vértice (0, 5).

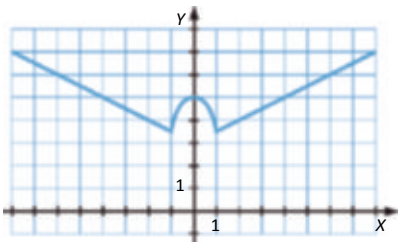
Si llamamos $g(x)=2\sqrt{x+3}+\frac{1}{2}$:

$g(x)$ tiene una rama parabólica:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{x-3}-\frac{1}{2}\right]=-\infty$$

$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x-3}}>0 \rightarrow g(x)$ es creciente y no tiene máximos ni mínimos.

$g''(x)=\frac{-1}{2\sqrt{x-3}\sqrt{x-3}}<0 \rightarrow g(x)$ es convexa en su dominio.



105. **Página 207**

$\lim_{x\to 2^-} f(x) \quad \lim_{x\to 2^-} x^2 \quad ax \quad a \quad 1 \quad 3 \quad 3a \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) \quad \lim_{x\to 2^+} \log_2(x \quad 1) \quad 0 \quad a \quad 1 \quad f(x) \quad \begin{cases} x^2 \quad x \quad 2 & \text{si} \quad x \quad 2 \\ \log_2(x \quad 1) & \text{si} \quad x \quad 2 \end{cases}$

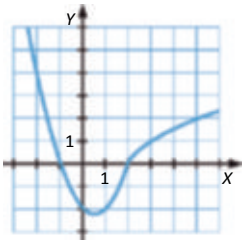
La función del primer tramo es una parábola hacia arriba con vértice en $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ que corta al eje *X* en los puntos (–1, 0) y (2, 0), y al eje *Y*, en el punto (0, –2).

Si llamamos *g*(*x*) a la función del segundo tramo:

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \log_2 \ x-1 \ = -\infty \rightarrow$ Rama parabólica.

$g'(x) = \frac{1}{x-1 \ln 2} \quad 0 \ \forall x \in \text{Dom } g -$ Función siempre creciente.

$g''(x) = \frac{-1}{x-1^{\ 2} \ln 2} \quad 0 \rightarrow$ Función convexa en todo su dominio.



La imagen o recorrido de la función será el intervalo $\left[-\frac{9}{4}, -\infty\right[$.

106. **Página 207**

a) Las funciones de cada tramo son continuas y derivables en sus respectivos dominios. Estudiamos la continuidad en $x = 0$:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) \quad \lim_{x\to 0^-} a \ \text{sen} \ x \quad b \quad b \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) \quad \lim_{x\to 0^+} x^2 \quad ax \quad 0 \quad b \quad 0$

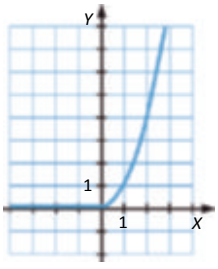
Usamos la definición de derivada para estudiar la derivabilidad en $x = 0$:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0-h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{a\cdot \text{sen}\, h - a \ \text{sen}\, 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{a\cdot \text{sen}\, h}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{a\cdot \cos h}{1} = a$$
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0-h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2 - ah - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} h - a \ = -a$$

$\Big\} - a = -a - a = 0$

$f(x) \quad \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \quad 0 \\ x^2 & \text{si} \quad 0 \quad x \end{cases}$

b)



107. **Página 207**

a) La función del primer tramo es una función irracional que no tiene asíntotas. Estudiamos las asíntotas oblicuas de la función del segundo tramo:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2-mx}=2\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2}{x-m}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2mx}{x-m}\right)=2m\end{array}\right\}\to \text{Asíntota oblicua en } y=2x-2m\to 2m=6\to m=3.$$

b) $f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{2-x} & \text{si } x<1\\ \dfrac{2x^2}{x-3} & \text{si } 1<x\end{cases}$

- Dom $f=\mathbb{R}-\{3\}$
- Continuidad:

  Estudiamos la continuidad en $x=1$:

  $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}1-\sqrt{2-x}=0\quad\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x^2}{x-3}=1$ · No es continua en $x=1$.

- Cortes con los ejes:

  $1-\sqrt{2-x}=0\to x=1\to (1,0)$ es el punto de corte con el eje *X*.

  $f(0)=1-\sqrt{2}\to (0,1-\sqrt{2})$ es el punto de corte con el eje *Y*.

- Asíntotas y ramas parabólicas:

  $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{2x^2}{x-3}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{2x^2}{x-3}=+\infty\end{array}\right\}$ Asíntota vertical en $x=3$.

  Por el apartado a), sabemos que $y=2x+6$ es una asíntota oblicua cuando $x\to+\infty$, veamos qué sucede cuando $x\to-\infty$:

  $\lim\limits_{x\to-\infty}1-\sqrt{2-x}=+\infty\to$ No hay asíntotas horizontales.

  $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\sqrt{2-x}}{x}=0\to$ No tiene asíntotas oblicuas.

  $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\sqrt{2-x}}{x}=0\to$ No tiene asíntotas oblicuas.

  Hay una rama parabólica: $\lim\limits_{x\to-\infty}1-\sqrt{2-x}=+\infty$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}} & \text{si } x<1\\ \dfrac{2x(x-6)}{(x-3)^2} & \text{si } x>1\end{cases}\to f'(0)\to x=6$

  En $(-\infty,1)\cup(6,+\infty)$, $f'(x)>0\to f(x)$ es creciente.

  En $(1,3)\cup(3,6)$, $f'(x)<0\to f(x)$ es decreciente.

  En $x=6$ hay un mínimo: $f(6)=24\to(6,24)$

- Concavidad y convexidad:

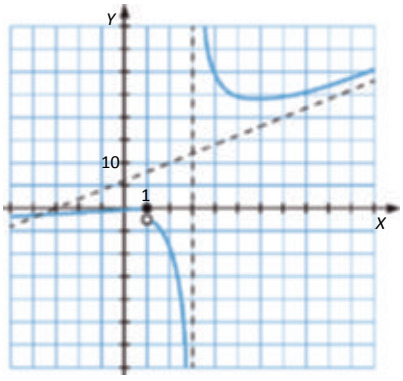
$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{2-x}\ 2-x} & \text{si } x<1\\ \dfrac{36}{x-3^{3}} & \text{si } x>1\end{cases}$$

$\rightarrow f''(0)\neq 0 \rightarrow$ No hay puntos de inflexión.

En $-\infty,1\ -\ 3,+\infty$, $f''(x)>0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

En $1,3$, $f''(x)<0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

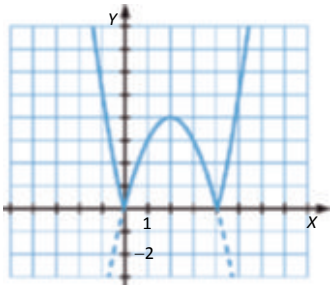
c)



$\text{Im } f = -\infty, 0\ -\ 24, -\infty$

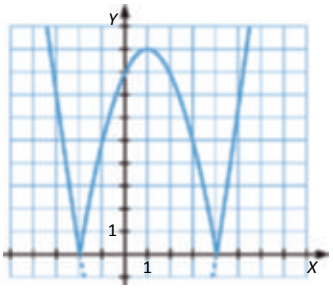
108. **Página 207**

La función de dentro del valor absoluto es una parábola hacia abajo con vértice en el punto $V\ 2,4$, que corta a los ejes en los puntos (0,0) y (4,0). Por lo tanto, debemos representar la función de dentro del valor absoluto y realizar una simetría respecto del eje *X* de los puntos que quedan por debajo del eje *X*.



109. **Página 207**

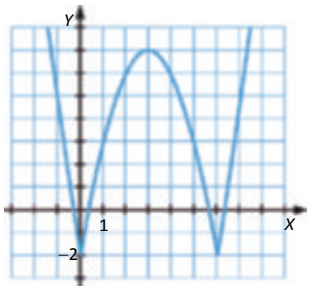
a) La función de dentro del valor absoluto es una parábola hacia arriba con vértice en el punto $V\ 1,-9$, que corta a los ejes en los puntos (−2,0), (4,0) y (0, −8). Por lo tanto, debemos representar la función de dentro del valor absoluto y realizar una simetría respecto del eje *X* de los puntos que quedan por debajo del eje *X*.



b) Podemos expresar la función $f(x)$ como una función a trozos:

$$f(x)=\begin{cases}6x-x^2-2 & \text{si } x\in[0,6]\\ x^2-6x-2 & \text{si } x\in(-\infty,0)\cup(6,+\infty)\end{cases}$$

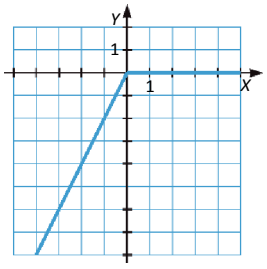
La función del primer tramo es una parábola hacia abajo con vértice en el punto $V(3,7)$, que corta a los ejes en los puntos $(3-\sqrt{7},0)$, $(3-\sqrt{7},0)$ y $(0,-2)$. La función del segundo tramo es una parábola hacia arriba con vértice en el punto $V(3,-11)$ que corta a los ejes en los puntos $(3-\sqrt{11},0)$, $(3-\sqrt{11},0)$ y $(0,-2)$. Por lo tanto, representamos cada función en su respectivo dominio.



c) Podemos expresar la función $f(x)$ como una función a trozos:

$$f(x)\begin{cases}2x & \text{si } x<0\\ 0 & \text{si } 0<x\end{cases}$$

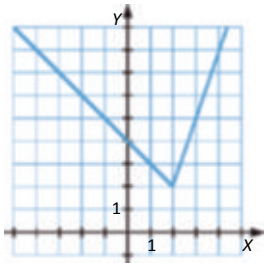
La función del primer tramo es una recta con pendiente 2 que pasa por el origen de coordenadas. La segunda es la función nula. Representamos cada función en su respectivo dominio.



d) Podemos expresar la función $f(x)$ como una función a trozos:

$$f(x)\begin{cases}4-x & \text{si } x<2\\ 3x-4 & \text{si } x>2\end{cases}$$

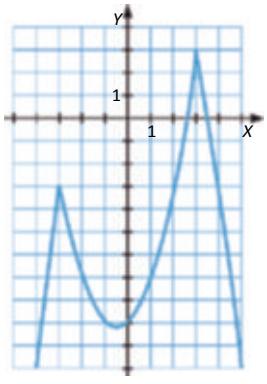
La función del primer tramo es una recta con pendiente -1 que pasa por el punto (0, 4). La segunda es una recta de pendiente 3 y que pasa por (0, -4). Representamos cada función en su respectivo dominio.



e) Podemos expresar la función $f(x)$ como una función a trozos:

$$f(x)=\begin{cases}x-9-x^2 & \text{si } x\in(-\infty,-3)\cup(3,-\infty)\\ x-9+x^2 & \text{si } x\in[-3,3]\end{cases}$$

La función del primer tramo es una parábola hacia abajo con vértice $V\left(\frac{1}{2},\frac{37}{4}\right)$ y corta los ejes en los puntos $\left(\frac{1-\sqrt{37}}{2},0\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{37}}{2},0\right)$ y $(0,9)$. La del segundo tramo es una parábola hacia arriba con vértice $V\left(\frac{-1}{2},\frac{-37}{4}\right)$ y corta a los ejes en los puntos $\left(\frac{-1+\sqrt{37}}{2},0\right)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{37}}{2},0\right)$ y $(0,-9)$. Representamos cada función en su respectivo dominio.

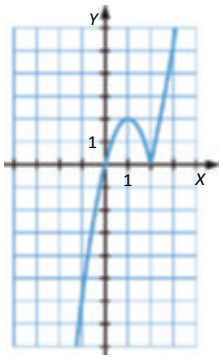


f) Podemos expresar la función $f(x)$ como una función a trozos:

$$f(x)\begin{cases} 4x - 2x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x^2 - 4x & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

La función del primer tramo es una parábola hacia abajo con vértice $V(1, 2)$ y corta los ejes en los puntos (0, 0) y (2, 0). La del segundo tramo es una parábola hacia arriba con vértice $V(1, -2)$ y corta los ejes en los puntos (0, 0) y (2, 0).

Representamos cada función en su dominio.



110. **Página 207**

a) $f(x)\begin{cases} x^2 - 5x + 6 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 5x - 6 & \text{si } 0 < x \end{cases}$

Estudiamos la derivabilidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(0-h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{h^2-5h-6-(6)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{h^2-5h}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} h-5 = 5 \\ \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(0-h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h^2-5h-6-(6)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h^2-5h}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} h-5 = -5 \end{array}\right\} \rightarrow \text{La función no es derivable en } x = 0.$$

b) $f'(x) = \begin{cases} 2x-5 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x-5 & \text{si } 0 < x \end{cases} \rightarrow f'(0) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x-5=0 \rightarrow x = \dfrac{-5}{2} \\ 2x-5=0 \rightarrow x = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

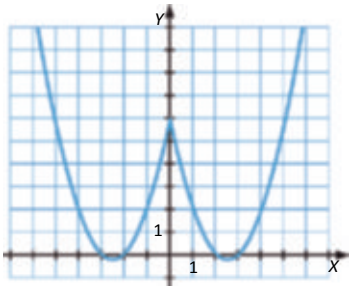
En $\left(-\infty, \frac{-5}{2}\right) \cup \left(0, \frac{5}{2}\right)$, $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

En $\left(\frac{-5}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{5}{2}, -\infty\right)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

En $x = +\frac{5}{2}$ presenta dos mínimos.

c) $f''(x)\begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2 & \text{si } 0 < x \end{cases}$, $f''(0) > 0$ · $f(x)$ es siempre cóncava → No presenta puntos de inflexión.

d)



111. **Página 207**

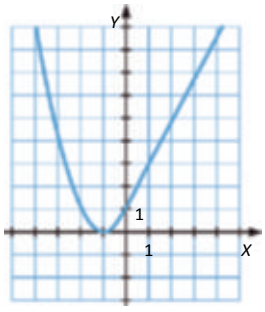
Estudiamos la derivabilidad en $x = 0$:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0-h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1-a\sqrt{h-1}\cdot \ln h+1 - 1}{h} = \lim_{h\to 0^-} a\frac{\ln h-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} a\frac{\frac{1}{h-1}}{1} = a$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0-h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h-1^{\,2}-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2-2h}{h} = \lim_{h\to 0^-} h-2 = 2$$

$\Big\}\ -a = 2$

Es decir, $f(x)$ es derivable en $x = 0$ si $a = 2$.



112. **Página 207**

a) $C(120) = 8 - 5{,}4 + 3{,}6 = 6{,}2$

Si conduce a 120 km/h, consumirá 6,2 litros cada 100 km.

b) $C'(x) = -0{,}0045 + 0{,}0005x = 0 \rightarrow x = 90$

$C''(x) = 0{,}0005 -$ En $x = 90$ se alcanza un mínimo, por lo que a 90 km/h consume menos.

A esta velocidad consumirá $C(90) = 8 - 4{,}05 - 2{,}025 = 5{,}975$ litros.

c) $10 \quad 8 \quad 0{,}045x \quad 0{,}00025x^2 \quad \cdot 0{,}00025x^2 \quad 0{,}045x \quad 2 \quad 0 \cdot \begin{cases} x & 36{,}886 \\ x & 216{,}89 \end{cases}$

Estas velocidades no están en [0, 160], por lo que no es posible consumir 10 litros de gasolina conduciendo a las velocidades de definición de la función.

113. **Página 207**

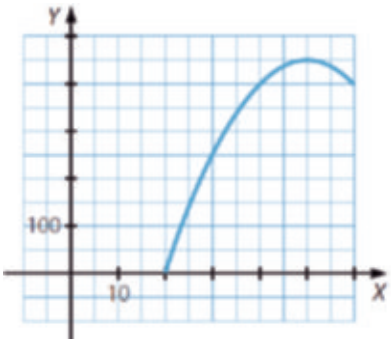
a) $B(20) = -200 + 1000 - 80 = 0 \rightarrow$ Al fabricar y vender 20 objetos no hay beneficio.

$B(60) = -1800 + 3000 - 800 = 400 \rightarrow$ Al fabricar y vender 60 objetos se obtienen 400 € de beneficios.

b) $B'(x) = -x - 50 = 0 \rightarrow x = 50$ $\qquad$ $B''(x) = -1 < 0 \rightarrow$ En $x = 50$ se alcanza un máximo.

$B(50) = -1250 - 2500 - 800 = 350$

Así, para obtener el beneficio máximo, hay que fabricar y vender 50 objetos, siendo este beneficio de 450 €.



c) Representamos la función en el intervalo (20, 60).

En el intervalo (0, 50), $B'(x) > 0 \rightarrow B(x)$ es creciente.

En el intervalo (50, 60), $B'(x) < 0 \rightarrow B(x)$ es decreciente.

Además, la función pasa por los puntos (20, 0) y (60, 400) y tiene un máximo en (50, 450).

114. **Página 207**

a) La función pasa por el punto (12, 1 200) $\rightarrow$ $N(12) = 1200 \rightarrow -5(12-12)^2 + k = 1200$.

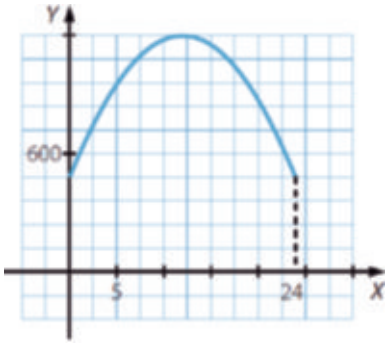
$N'(t) = 10(k - t) \rightarrow N'(12) = 10(k - 12) = 0 \rightarrow k - 12 = 0 \rightarrow k = 1200$

$N(t) = -5(12 - t)^2 + 1200$ $N(0) = -720 + 1200 = 480$ $N(24) = -720 + 1200 = 480$

El máximo se alcanza en el punto $(12, 1200)$.

La función en creciente en el intervalo (0, 12) y decreciente en el intervalo (12, 24).

b)



115. **Página 207**

- Punto de corte con el eje *Y*:

  $f(0) = 20 \rightarrow$ Corta el eje *Y* en el punto (0, 20).

- Crecimiento y decrecimiento:

  $f'(x) = 6x^2 - 41x + 60 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases}$

  Solo analizamos la función en el intervalo [0, 7].

  En $(0, 2) \cup (5, 7)$, $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente.

  En el intervalo (2, 5), $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente.

  La función tiene un máximo en $x = 2$ y un mínimo en $x = 5$.

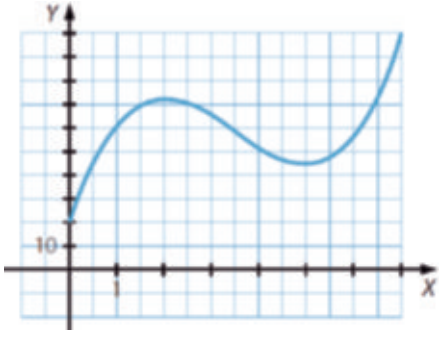
- Concavidad y convexidad:

  $f''(x) = 12x - 42 = 0 \rightarrow x = \frac{42}{12} = \frac{7}{2}$

  En el intervalo $\left(0, \frac{7}{2}\right)$, $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es convexa.

  En el intervalo $\left(\frac{7}{2}, 7\right)$, $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es cóncava.

  La función tiene un punto de inflexión en $x = \frac{7}{2}$.



A las 2 horas, la velocidad es máximo y a las 5 horas la velocidad es mínima.

A las 3 horas y media, la velocidad alcanza un punto de inflexión.

116. **Página 207**

a) $P'(x) \quad 0{,}00075x^2 \quad 0{,}09x \quad 2{,}4 \quad 0 \cdot \begin{cases} x & 40 \\ x & 80 \end{cases}$

$P''(x) = -0{,}00156x - 0{,}09$

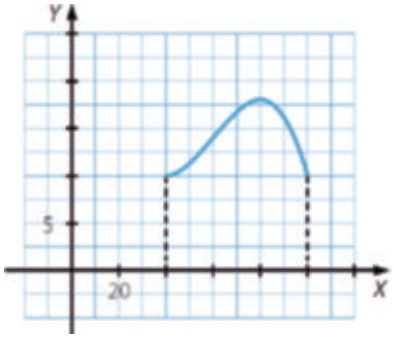
$P''(40) = 0{,}0276$ — En $x = 40$ la función presenta un mínimo.

$P''(80) = -0{,}0348$ — En $x = 80$ la función presenta un máximo.

Así, en el intervalo (40, 80), el porcentaje de votantes al partido crece, y en el intervalo (80, 100) decrece, por lo que en $x = 100$ presenta otro mínimo.

Como $P(80) = 18$, el dirigente sí podría llegar a dimitir.

b) $P(40) = 10$ $\qquad$ $P(100) = 10$



MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. **Página 208**

Respuesta abierta.

2. **Página 208**

30 puntos, ya que conocemos los dos extremos.

3. **Página 208**

No, existen infinitas funciones que pasan por dos puntos dados del plano. Por ejemplo, hay infinitas funciones polinómicas que pasan por dos puntos dados.

4. **Página 208**

La ecuación general de una función polinómica de grado n es: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

Como tenemos que hallar $n + 1$ coeficientes, necesitaremos $n + 1$ puntos.

Integrales

9

ACTIVIDADES

1. **Página 210**

$f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 2 \longrightarrow F(x) = x^5 - x^3 - 2x - 3$

$f(x) = x^4 - x^3 - 2 \longrightarrow F(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - 2x - 1$

$f(x) = 12x^2 + 6x \longrightarrow F(x) = 4x^3 + 3x^2$

2. **Página 210**

a) $2x^4 - 2x^2 - 5x$

b) $\frac{2}{5}x^4$

c) $3e^x - x$

d) $3\sqrt{x}$

3. **Página 211**

a) $\int (3x^2 - 2x - 1)dx = x^3 - x^2 - x + k$

b) $\int (2\cos x)dx = 2\operatorname{sen} x + k$

c) $\int (4x^3 - \operatorname{sen} x)dx = x^4 - \cos x + k$

d) $\int (2x - e^x)dx = x^2 - e^x + k$

e) $\int (3 - e^{-x})dx = 3x - e^{-x} + k$

f) $\int (5 - 4x - \cos x)dx = 5x - 2x^2 - \operatorname{sen} x + k$

g) $\int (5e^x - 2\cos x)dx = 5e^x + 2\operatorname{sen} x - k$

h) $\int (7\operatorname{sen} x - 4\cos x)dx = -7\cos x + 4\operatorname{sen} x + k$

4. **Página 211**

a) $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx = F(x) - G(x) + k$

b) $\int [2f(x) - g(x)]dx = 2\int f(x)dx - \int g(x)dx = 2F(x) - G(x) + k$

c) $\int \left|\frac{1}{2}f(x) - 2g(x)\right|dx = \frac{1}{2}\int f(x)dx - 2\int g(x)dx = \frac{1}{2}F(x) - 2G(x) + k$

d) $\int [-f(x) + b \cdot g(x)]dx = -\int f(x)dx + b \int g(x)dx = -F(x) - b \cdot G(x) + k$

5. **Página 212**

a) $\int (x^2 - 3x - 2)dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x - k$

b) $\int \frac{3}{x^3}dx = \int 3x^{-3}dx = -\frac{3}{2x^2} + k$

c) $\int 3\sqrt[4]{x^3}dx = \int 3x^{\frac{3}{4}}dx = \frac{12}{7}\sqrt[4]{x^7} - k = \frac{12}{7}x\sqrt[4]{x^3} - k$

6. **Página 212**

a) $\int (1-x)^2\,dx = -\int (-1)(1-x)^2\,dx = -\dfrac{(1-x)^3}{3} - k$

b) $\int (1-x^2)^2\,dx = \int (1-2x^2-x^4)\,dx = x - \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{x^5}{5} - k$

c) $\int 2x\sqrt{x^2-3}\,dx \rightarrow$ Tomamos $f(x) = x^2-3 \rightarrow f'(x) = 2x \rightarrow \int 2x\sqrt{x^2-3}\,dx = \dfrac{2}{3}\sqrt{(x^2-3)^3} - k$.

7. **Página 213**

a) $\int x(x^2-3)\,dx = \dfrac{1}{2}\int 2x(x^2+3)\,dx = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(x^2-3)^2}{2} - k = \dfrac{(x^2+3)^2}{4} - k$

b) $\int (x-2)(x^2-4x-1)^3\,dx = \dfrac{1}{2}\int (2x-4)(x^2-4x-1)^3\,dx = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(x^2-4x-1)^4}{4} + k = \dfrac{(x^2-4x+1)^4}{8} + k$

8. **Página 213**

a) $\int \sqrt{2x-1}\,dx = \dfrac{1}{2}\int 2\sqrt{2x-1}\,dx = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\sqrt{(2x-1)^3} - k = \dfrac{\sqrt{(2x-1)^3}}{3} + k$

b) $\int x\sqrt{x^2-2}dx = \dfrac{1}{2}\int 2x\sqrt{x^2-2}dx = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{2}{3}\sqrt{(x^2-2)^3} - k = \dfrac{\sqrt{(x^2-2)^3}}{3} - k$

c) $\int e^{2x}dx = \dfrac{1}{2}\int 2e^{2x}dx = \dfrac{1}{2}e^{2x} - k$

d) $\int (x-1)e^{x^2+2x-1}dx = \dfrac{1}{2}\int (2x-2)e^{x^2+2x-1}dx = \dfrac{1}{2}e^{x^2+2x-1} + k$

9. **Página 214**

a) $\int \dfrac{4x}{2x^2-1}dx = \ln\left|2x^2-1\right| - k$

b) $\int \dfrac{x^2}{x^3-3}dx = \dfrac{1}{3}\int \dfrac{3x^2}{x^3-3}dx = \dfrac{1}{3}\ln\left|x^3-3\right| - k$

c) $\int \dfrac{x-1}{x^2-2x}dx = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{2x+2}{x^2-2x}dx = \dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+2x\right| - k$

d) $\int \dfrac{5x}{1-x^2}dx = -\dfrac{5}{2}\int \dfrac{-2x}{1-x^2}dx = -\dfrac{5}{2}\ln\left|1-x^2\right| + k$

10. **Página 214**

a) $\int \dfrac{4x^3}{x^4-2}dx = \ln\left|x^4-2\right| - k$

b) $\int \dfrac{4x^3}{(x^4-2)^2}dx = \int 4x^3(x^4-2)^{-2}dx = \dfrac{-1}{x^4-2} - k$

c) $\int \dfrac{4x^3}{\sqrt[3]{x^4-2}}dx = \int 4x^3(x^4-2)^{-\frac{1}{3}}dx = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{(x^4-2)^2} + k$

d) $\int \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}dx = \dfrac{1}{2}\int (2x-2)\,(x^2-2x)^{-\frac{1}{2}}dx = \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot(x^2-2x)^{\frac{1}{2}} - k = \sqrt{x^2-2x} - k$

11. **Página 215**

a) $\int 3^{\frac{x}{2}}dx = 2\int \frac{1}{2}\cdot 3^{\frac{x}{2}}dx = 2\cdot\frac{3^{\frac{x}{2}}}{\ln 3} - k$

b) $\int e^{x+1}dx = e^{x+1} - k$

c) $\int \left(\frac{1}{2}\right)^{4x}dx = \frac{1}{4}\int 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4x}dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{4x}}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + k$

d) $\int (e^{-3x} - e^{x-2})dx = \int e^{-3x}dx - \int e^{x-2}dx = -\frac{1}{3}\int -3e^{-3x}dx - \int e^{x-2}dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} - e^{x-2} - k$

12. **Página 215**

a) $\int 7^{x^2+1}\cdot 2xdx = \frac{7^{x^2+1}}{\ln(7)} + k$

b) $\int 5e^{\frac{x}{2}+2}dx = 10\int \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}+2}dx = 10e^{\frac{x}{2}+2} + k$

c) $\int \frac{3^{5x-1}}{7}dx = \frac{1}{35}\int 5\cdot 3^{5x-1}dx = \frac{1}{35}\cdot\frac{3^{5x-1}}{\ln(3)} - k$

d) $\int \frac{x}{e^{x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int -2xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + k$

13. **Página 216**

a) $\int sen(2x)dx = \frac{1}{2}\int 2\cdot sen(2x)dx = -\frac{1}{2}cos(2x) - k$

b) $\int cos(x-1)dx = sen(x-1) - k$

c) $\int \frac{sen\frac{x}{2}}{2}dx = -cos\frac{x}{2} - k$

d) $\int sen(-x)dx = cos(-x) - k$

14. **Página 216**

a) $\int \frac{1}{cos^2(x-1)}dx = tg(x-1) - k$

b) $\int -3\,sen(2x-1)dx = -\frac{3}{2}\int 2\,sen(2x-1)dx = \frac{3}{2}cos(2x-1) - k$

c) $\int (x-1)\cdot cos(x^2-2x)dx = \frac{1}{2}\int (2x-2)\cdot cos(x^2-2x)dx = \frac{1}{2}sen(x^2+2x) - k$

d) $\int \frac{x}{cos^2(x^2-3)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{cos^2(x^2-3)}dx = \frac{1}{2}tg(x^2-3) + k$

15. **Página 217**

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}dx = \frac{1}{5}arc\,sen(5x) + k$

b) $\int \frac{1}{1-(x-3)^2}dx = arc\,tg(x-3) + k$

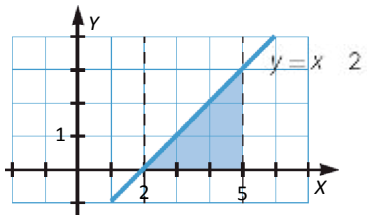
16. **Página 217**

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}dx = \frac{1}{2}arc\,sen(2x-3) - k$

b) $\int \frac{x}{1\quad 9x^4}dx \quad \frac{1}{6}\int \frac{6x}{1\quad (3x^2)^2}dx \quad \frac{1}{6}arc\,tg(3x^2) \quad k$

17. **Página 218**

a) Representamos el área que tenemos que calcular.



Área $\frac{b \cdot h}{2} \quad \frac{3 \cdot 3}{2} \quad \frac{9}{2} \quad 4{,}5$

b) Tomamos una sucesión de particiones: $P - x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n - \left\{2, \frac{3}{n} - 2, \frac{2 \cdot 3}{n} + 2, \ldots, \frac{n-1 \cdot 3}{n} + 2, \frac{3n}{n} - 2 - 5\right\}$

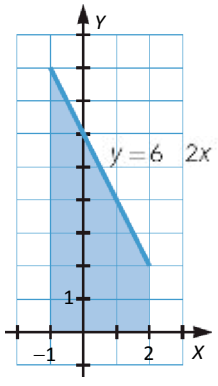
La altura de los rectángulos en cada intervalo es:

$$s_n - \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{3i-3}{n} \left[\frac{3i}{n} - 2 - \frac{3\ i-1}{n} - 2\right] - \sum_{i=1}^{n} \frac{3i-3}{n} \cdot \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (9i-9) - \frac{9(n-1)}{2n}$$

$m_i \quad f(x_{i-1}) \quad x_{i-1} \quad 2 \quad \frac{3(i\ \ 1)}{n} \quad 2 \quad 2 \quad \frac{3i\ \ 3}{n}$ $\qquad \int_2^5 f(x)\,dx \quad \lim_{n\to\infty} \left[\frac{9n\ \ 9}{2n}\right] \quad \frac{9}{2} \quad 4{,}5$

18. **Página 218**

a) Representamos el área que tenemos que calcular.



Área $\frac{3 \cdot 6}{2} \quad 3\ 2 \quad 9 \quad 6 \quad 15$

b) Tomamos una sucesión de particiones: $P \quad x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n \quad \left\{1, \frac{3}{n} \quad 1, \frac{2 \cdot 3}{n} \quad 1, \ldots, \frac{3n}{n} \quad 1 \quad 2\right.$

La altura de los rectángulos en cada intervalo es:

$$m_i \quad f(x_i) \quad 6 \quad 2x_i \quad 6 \quad 2\left[\frac{3i}{n} \quad 1\right] \quad 6 \quad 2 \quad 2 \cdot \frac{3i}{n} \quad 8 \quad \frac{6i}{n} \quad \frac{8n \quad 6i}{n}$$

$$s_n \quad \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i \quad x_{i-1}) \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{8n \quad 6i}{n} \left[\frac{3i}{n} \quad 1 \quad \frac{3(i\ \ 1)}{n} \quad 1\right] \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{8n \quad 6i}{n} \cdot \frac{3}{n} \quad \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (24n \quad 18i) \quad \frac{3(5n \quad 3)}{n}$$

$$\int_2^5 f(x)\,dx \quad \lim_{n\to\infty} \left[\frac{15n \quad 9}{n}\right] \quad 15$$

19. **Página 219**

$F(x) \int f(x)dx \int (x^2 2)dx \frac{x^3}{3} 2x k$

$F(x)_4^7 F(7) F(4) \frac{7^3}{3} 2\cdot 7 k \left| \frac{4^3}{3} 2\cdot 4 | k \right| 99$

20. **Página 219**

a) $\int_{-2}^{2} (2x^3 - 4x + 3)\,dx = \frac{x^4}{2} - 2x^2 + 3x \Big|_{-2}^{2} = 6 - 6 = 12$

b) $\int_0^e \frac{-3x}{x^2 - 1}\,dx = \frac{-3}{2}\ln|x^2 + 1|_0^e = \frac{-3}{2}\ln|e^2 - 1| - 0 = \frac{-3}{2}\ln|e^2 + 1|$

21. **Página 220**

a) Área $\frac{b\cdot h}{2} \frac{2\cdot 4}{2} 4$

b) Tomamos la sucesión de particiones: $P x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n \left\{0, \frac{2\cdot 1}{n}, \frac{2\cdot 2}{n}, \ldots, \frac{2n}{n}\right\} 2\cdot$

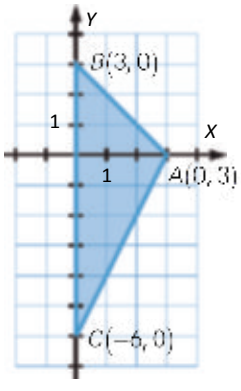
La altura de los rectángulos en cada intervalo es: $m_i f(x_i) 2x_i | 4 2\cdot\frac{2i}{n} 4 \frac{4i | 4n}{n}$

$s_n \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i x_{i-1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{4i | 4n}{n}\left|\frac{2i}{n} \frac{2(i 1)}{n}\right| \sum_{i=1}^{n} \frac{4i 4n}{n}\frac{2}{n} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} (8i | 8n) \frac{4(n 1)}{n}$

$\int_0^2 f(x)\,dx \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{4(n 1)}{n}\right\} 4$

c) $\int_0^2 (2x 4)\,dx \cdot x^2 4x\Big|_0^2 (2^2 4\cdot 2) 0 4$

22. **Página 220**



a) Área $\frac{b\ h}{2} \frac{3\cdot 9}{2} \frac{27}{2} 13{,}5$

b) Área $= \int_0^3 (3 - x)\,dx - \int_0^3 (2x - 6)\,dx = 3x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^3 - x^2 - 6x\ _0^3 = 9 - \frac{9}{2} - 9 - 18 = \frac{27}{2} = 13{,}5$

23. **Página 221**

a) $\text{Área} = \int_{-1}^{2}(4-x^2)\,dx - \int_{2}^{3}(4-x^2)\,dx = \left.4x - \frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2} - \left.4x - \frac{x^3}{3}\right|_{2}^{3} = 9 - \left|-\frac{7}{3}\right| = \frac{27}{3} - \frac{7}{3} = \frac{34}{3}$

b) $\text{Área} = -\int_{-1}^{3}(x^2-2x-8)\,dx = -\left.\frac{x^3}{3} - x^2 - 8x\right|_{-1}^{3} = -\left|9-9-24-\frac{1}{3}-1-8\right| = \frac{92}{3} = 30{,}6$

24. **Página 221**

a) $\text{Área} = \int_{-2}^{0}(3x^2-5x)\,dx - \int_{0}^{1}(3x^2-5x)\,dx = \left.x^3 - \frac{5}{2}x^2\right|_{-2}^{0} - \left|x^3 - \frac{5}{2}x^2\right|_{0}^{1} = 8-10-1+\frac{5}{2} = \frac{39}{2}$

b) Área $\int_{-2}^{-1}(2x^3 \quad x^2 \quad x)\,dx \quad \int_{-1}^{0}(2x^3 \mid x^2 \quad x)\,dx \quad \int_{0}^{\frac{1}{2}}(2x^3 \quad x^2 \quad x)\,dx \quad \int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x^3 \quad x^2 \quad x)\,dx$

$\int_{-2}^{-1}(2x^3-x^2-x)\,dx = \left.\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right|_{-2}^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \left|8 - \frac{8}{3} - 2\right| = -\frac{1}{3} - 8 + \frac{8}{3} + 2 = -\frac{11}{3}$

$\int_{-1}^{0}(2x^3-x^2-x)\,dx = \left.\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right|_{-1}^{0} = -\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{3}$

$\int_{0}^{\frac{1}{2}}(2x^3-x^2-x)\,dx = \left.\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right|_{0}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{32} - \frac{1}{24} - \frac{1}{8} = -\frac{5}{96}$

$\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x^3-x^2-x)\,dx - \left.\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right|_{\frac{1}{2}}^{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{32} - \frac{1}{24} + \frac{1}{8} - \frac{37}{96}$

Área $\frac{11}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{5}{96} \mid \frac{37}{96} \quad \frac{71}{16}$

25. **Página 222**

Calculamos los puntos de corte de las funciones:

$f(x) \quad g(x) \quad 0 \quad 5x \mid 3x^2 \quad x^2 \quad x \quad 6 \quad 0 \quad 2x^2 \quad 4x \quad 6 \quad 0 \quad \begin{cases} x & 3 \\ x & 1 \end{cases}$

$\text{Área} = \left|\int_{-3}^{1}(2x^2-4x-6)\,dx\right| = \left|\left.\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x\right|_{-3}^{1}\right| = \left|\frac{2}{3} - 2 - 6 - 18 - 18 - 18\right| = \frac{64}{3}$

26. **Página 222**

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$f(x) \quad g(x) \quad 0 \quad (6x \quad x^2) \quad (x^2 \quad 2x) \quad 0 \quad 2x^2 \quad 8x \quad 0 \quad \begin{cases} x & 0 \\ x & 4 \end{cases}$

$\text{Área} = \left|\int_{0}^{4}(8x-2x^2)\,dx\right| = \left|\left.4x^2 - \frac{2x^3}{3}\right|_{0}^{4}\right| = \frac{64}{3}$

27. **Página 223**

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$f(x)-g(x)=0-(x^3-x)-3x=0-x^3-4x=0-\begin{cases}x=0\\x=2\\x=-2\end{cases}$$

$$\text{Área}=\left|\int_{-2}^{0}(x^3-4x)\,dx\right|-\left|\int_{0}^{2}(x^3-4x)\,dx\right|=\left|\frac{1}{4}x^4-2x^2\Big|_{-2}^{0}\right|+\left|\frac{1}{4}x^4-2x^2\Big|_{0}^{2}\right|=|-4+8|-|4-8|=4-4=8$$

28. **Página 223**

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$f(x)-g(x)=0-(x^3-2x)-\ -x^2\ =0-x^3-x^2-2x=0-\begin{cases}x=0\\x=1\\x=-2\end{cases}$$

$$\text{Área}=\left|\int_{-2}^{0}(x^3-x^2-2x)\,dx\right|-\left|\int_{0}^{1}(x^3-x^2-2x)\,dx\right|=\left|\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\Big|_{-2}^{0}\right|+\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\Big|_{0}^{1}\right|=\frac{8}{3}+\left|\frac{-5}{12}\right|=\frac{37}{12}$$

SABER HACER

29. **Página 224**

$f(x)$ $\int \frac{2x}{x^2\ \ 1}dx$ $\ln|x^2\ \ 1|$ k $f(0)=1\rightarrow \ln|1|-k=1\rightarrow k=1\rightarrow f(x)=\ln|x^2-1|-1$

30. **Página 224**

$F(x)$ $\int \frac{x^2}{\sqrt{1\ \ x^3}}dx$ $\frac{2}{3}\sqrt{1\ \ x^3}$ k $F(0)$ 0 $\cdot$ $\frac{2}{3}$ k 0 $\cdot k$ $\frac{2}{3}$ $\cdot F(x)$ $\frac{2}{3}\sqrt{1\ \ x^3}$ $\frac{2}{3}$

31. **Página 224**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-(2x+1)^2}}=\int \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{4-(2x+1)^2}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left|\frac{2x-1}{2}\right|^2}}dx=\frac{1}{2}\,arc\,sen\left|\frac{2x-1}{2}\right|-k$$

32. **Página 224**

$\int \frac{x^3\ \ 2x^2\ \ 1}{x}dx$ $\int \frac{x^3}{x}dx$ $\int \frac{2x^2}{x}dx$ $\int \frac{1}{x}dx$ $\int x^2\,dx$ $\int 2x\,dx$ $\int \frac{1}{x}dx$ $\frac{x^3}{3}$ x^2 $\ln|x|$ k

33. **Página 225**

$$f(x)\ \ \begin{cases}x & \text{si}\quad x<0\\ x & \text{si}\quad 0<x\end{cases}$$

$$\int_{-2}^{1}|x|\,dx=\int_{-2}^{0}(-x)\,dx-\int_{0}^{1}x\,dx=-\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{0}-\left|\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{1}=2-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

34. **Página 225**

$$\int_0^2 (3kx^2 \quad 1)\,dx \quad kx^3 \quad x^2_0 \quad 8k \quad 2 \quad 2 \cdot k \quad \frac{1}{2}$$

35. **Página 225**

Hallamos los puntos de corte de la función con el eje *X*.

$-x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \quad 2 \rightarrow A$ debe estar en el intervalo $[-2, 2]$.

$$\text{Área} = \left|\int_a^2 (-x^2 - 4)\,dx\right| = \left|-\frac{x^3}{3} + 4x\right|_a^2 = \left|-\frac{8}{3} - 8 - \frac{a^3}{3} - 4a\right| = \left|\frac{a^3}{3} - 4a - \frac{16}{3}\right|$$

$$\text{Área} = 9 - \left|\frac{a^3}{3} - 4a - \frac{16}{3}\right| = 9 \rightarrow \begin{cases} -\frac{a^3}{3} - 4a - \frac{16}{3} = 9 - -a^3 + 12a - 43 = 0 \\ \frac{a^3}{3} - 4a - \frac{16}{3} = 9 - a^3 - 12a - 11 = 0 \end{cases}$$

La primera ecuación es en el caso de que $f(x)$ sea menor que 0, algo que, de momento, no nos interesa ya que es positiva en el intervalo $[-2, 2]$.

Resolvemos la segunda ecuación por Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -12 & -11 \\ -1 & & -1 & 1 & 11 \\ \hline & 1 & -1 & -11 & \underline{0} \end{array} \quad -a^3 - 12a - 11 = (a-1)(a^2 - a - 11) = 0 \rightarrow a = -1$$

$$a^2 - a - 11 - 0 \rightarrow a - \frac{1 = \sqrt{1^2 + 4 \cdot 11}}{2} - \frac{1 \pm 3\sqrt{5}}{2} \rightarrow \begin{cases} a \sim 3{,}85 \div 2 \\ a \sim -2{,}85 \div -2 \end{cases}$$

El valor de a buscado es -1.

36. **Página 226**

Calculamos los puntos de corte con el eje de abscisas: $4x - 12 = 0 \rightarrow x = -3$

Calculamos los puntos de corte en el intervalo de integración:

$$x^2 \quad 4x \quad 3 \quad 0 \cdot \begin{cases} x & 1 \\ x & 3 \end{cases}$$

$$\text{Área} \quad \left|\int_{-2}^{-1} (4x \quad 12)\,dx\right| \quad \left|\int_{-1}^{1} (x^2 \quad 4x \quad 3)\,dx\right| \quad \left|\int_1^3 (x^2 \quad 4x \quad 3)\,dx\right| \quad \left|\int_3^4 (x^2 \quad 4x \quad 3)\,dx\right|$$

$$= \left|2x^2 - 12x\right|_{-2}^{-1} + \left|\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right|_{-1}^{1} - \left|\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 3x\right|_1^3 + \left|\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right|_3^4 = 6 - \frac{20}{3} - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = \frac{46}{3}$$

37. **Página 226**

Calculamos los puntos de corte de la función con el eje *X*.

$$x^3 - 9x = 0 - \begin{cases} x = -3 \\ x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \qquad \int (x^3 \quad 9x)dx \quad \frac{1}{4}x^4 \quad \frac{9}{2}x^2$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-3}^{0} (x^3 - 9x)\,dx\right| - \left|\int_0^3 (x^3 - 9x)\,dx\right| = \left|\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right|_{-3}^{0} - \left|\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right|_0^3 = \frac{81}{4} + \frac{81}{4} = \frac{81}{2} = 40{,}5$$

38.Página 226

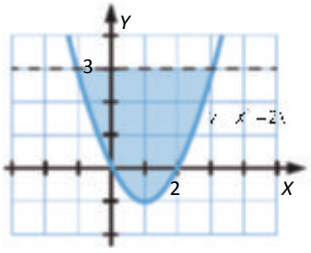
Hallamos los puntos de corte de la función con el eje *X*.

$(x-3)^2=0 \rightarrow x=3$

$$\text{Área}=\left|\int_0^3 (x-3)^2\,dx\right|=\left|\int_0^3 x^2-6x-9\,dx\right|=\left|\frac{x^3}{3}-3x^2-9x\Big|_0^3\right|=|9-27+27|=9\ \text{m}^2$$

Si para cada metro cuadrado se necesitan 12 litros de agua, en total se necesitarán $12\cdot 9=108$ litros.

39. Página 227



Calculamos los puntos de corte de la función con el eje *X*.

$x^2 \quad 2x \quad 0 \rightarrow \begin{cases} x & 0 \\ x & 2 \end{cases}$

Hallamos los puntos de corte entre las dos funciones.

$x^2 \quad 2x \quad 3 \rightarrow \begin{cases} x & 1 \\ x & 3 \end{cases}$

$$\text{Área}_1=\left|\int_{-1}^{3}(3-x^2-2x)\,dx\right|=\left|-\frac{1}{3}x^3+x^2-3x\Big|_{-1}^{3}\right|=\frac{32}{3}$$

$$\text{Área}_2=\left|\int_0^2 (x^2-2x)\,dx\right|=\left|\frac{1}{3}x^3-x^2\Big|_0^2\right|=\frac{4}{3}$$

Área $\quad$ Área$_1$ $\quad$ Área$_2$ $\quad \frac{32}{3} \quad \frac{4}{3} \quad 12$

40. Página 227

$$f(x)=\frac{|x|}{2}=\begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{si } x<0 \\ \frac{x}{2} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

Calculamos los puntos de corte entre las dos funciones.

Si $x<0$, $\quad \frac{x}{2} \quad \frac{1}{1 \quad x^2} \cdot x \quad 1$

Si $x\geq 0$, $\quad \frac{x}{2} \quad \frac{1}{1 \quad x^2} \cdot x \quad 1$

$$\text{Área}=\left|\int_{-1}^{0}\left[\frac{1}{x^2-1}-\frac{x}{2}\right]dx\right|-\left|\int_0^{1^*}\frac{1}{x^2-1}-\frac{x}{2}\right]dx\Big|=\left|arc\ tg\ x-\frac{1}{4}x^2\Big|_{-1}^{0}\right|+\left|arc\ tg\ x-\frac{1}{4}x^2\Big|_0^1\right|=$$

$$\left|arc\ tg\ 0 \quad arc\ tg \quad 1 \quad \frac{1}{4}\right| \quad \left|arc\ tg\ 1 \quad \frac{1}{4} \quad arc\ tg\ 0\right| \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{1}{2}$$

ACTIVIDADES FINALES

41. **Página 228**

a) $F(x) = 3x^5 - 2x - 1 \rightarrow F'(x) = 15x^4 - 2 \rightarrow F(x)$ es primitiva de $f(x)$.

b) $F(x) = (x^5 - 2)^3 \rightarrow F'(x) = 15x^4(x^5 - 2)^2 \rightarrow F(x)$ es primitiva de $f(x)$.

c) $F(x)$ $\frac{2}{x^3}$ x 7 $\cdot F'(x)$ $\frac{2x}{x^4}$ 6 $\cdot F(x)$ es primitiva de $f(x)$.

d) $F(x)$ $\frac{x}{x^2}$ 1 3 $F'(x)$ $\frac{x}{x^3}$ 2 $\cdot F(x)$ es primitiva de $f(x)$.

e) $F(x)$ $\ln\sqrt{x^2}$ $2x$ $\cdot F'(x)$ $\frac{x}{x^2}$ 1 $2x$ $F(x)$ es primitiva de $f(x)$.

f) $F(x)$ $5e^{-x^2}$ 11 $\cdot F'(x)$ $10xe^{-x^2}$ $\cdot F(x)$ es primitiva de $f(x)$.

g) $F(x) = arc\,tg\sqrt{x} \rightarrow F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1-x)} \rightarrow F(x)$ es primitiva de $f(x)$.

h) $F(x) - cos^2 x - 1492 \rightarrow F'(x) - 2sen\,x\cos x - -sen\,2x \rightarrow F(x)$ es primitiva de $f(x)$.

42. **Página 228**

a) $f(x) = 3x^2 \rightarrow F(x) = x^3 - k$

$F(0) = 1 \rightarrow k = 1 \rightarrow F(x) = x^3 + 1$

b) $f(x)$ $\frac{4}{5x}$ $\cdot F(x)$ $\frac{4}{5}\ln|x|$ k

$F(1)$ 4 $\cdot k$ 4 $\cdot F(x)$ $\frac{4}{5}\ln|x|$ 4

c) $f(x)$ $sen\,3x$ $F(x)$ $\frac{1}{3}\cos 3x$ k

$F(\pi)$ $\frac{1}{3}$ $\cdot k$ $\frac{2}{3}$ $\cdot F(x)$ $\frac{1}{3}\cos 3x$ $\frac{2}{3}$

d) $f(x)$ e^{2x} $\cdot F(x)$ $\frac{e^{2x}}{2}$ k

$F(0)$ $\frac{2}{3}$ k $\frac{1}{6}$ $\cdot F(x)$ $\frac{e^{2x}}{2}$ $\frac{1}{6}$

e) $f(x)$ $\frac{3}{4}(x^2$ $1)$ $\cdot F(x)$ $\frac{x^3}{4}$ $\frac{3x}{4}$ k

$F(1)$ $\frac{1}{4}$ $\cdot k$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$

43. **Página 228**

a) $F(x) = 1001x + k \rightarrow F'(x) = 1001$

b) $F(x) = x^2 - k \rightarrow F'(x) = 2x$

c) $F(x)$ $\frac{x^2}{2}$ k $\cdot F'(x)$ x

d) $F(x) = x^3 + k \rightarrow F'(x) = 3x^2$

e) $F(x)$ $\frac{x^3}{3}$ k $F'(x)$ x^2

f) $F(x) = x^4 + k \rightarrow F'(x) = 4x^3$

g) $F(x) = x^{n+1} - k \rightarrow F'(x) = (n+1)x^n$

h) $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n-1} - k \rightarrow F'(x) = x^n$

44. **Página 228**

a) $F(x)$ $\sqrt{x}$ k $\cdot F'(x)$ $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $F(x)$ $2\sqrt{x}$ k $F'(x)$ $\frac{1}{\sqrt{x}}$

c) $F(x) = 2\sqrt{x-1} + k \rightarrow F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

d) $F(x)$ $2\sqrt{x}$ 4 k $\cdot F'(x)$ $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 4

e) $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3x+10} + k \rightarrow F'(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-10}}$

f) $F(x) = arc\,sen\,x - k \rightarrow F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

45. **Página 228**

a) $F(x) \quad 19\ln|x| \quad k \cdot F'(x) \quad \frac{19}{x}$

b) $F(x) \quad \frac{\ln|x|}{19} \quad k \cdot F'(x) \quad \frac{1}{19x}$

c) $F(x) \quad \ln|19 \quad x| \quad k \cdot F'(x) \quad \frac{1}{19 \quad x}$

d) $F(x) \quad 2\ln|2x \quad 3| \quad k \cdot F'(x) \quad \frac{4}{2x \quad 3}$

e) $F(x) \quad \frac{1}{x} \quad k \cdot F'(x) \quad \frac{1}{x^2}$

f) $F(x) \quad arc\,tg\,x \quad k \quad F'(x) \quad \frac{1}{1 \quad x^2}$

46. **Página 228**

a) $F(x) = e^x - k \rightarrow F'(x) = e^x$

b) $F(x) \quad \frac{e^{2x}}{2} \quad k \quad F'(x) \quad e^{2x}$

c) $F(x) \quad \frac{e^{5x+55}}{5} \quad k \cdot F'(x) \quad e^{5x+55}$

d) $F(x) \quad \frac{2^x}{\ln 2} \quad k \cdot F'(x) \quad 2^x$

e) $F(x) \quad \frac{2^{x-7}}{\ln 2} \quad k \quad F'(x) \quad 2^{x-7}$

f) $F(x) \quad \frac{2^{9x+5}}{9\ln 2} \quad k \cdot F'(x) \quad 2^{9x+5}$

47. **Página 228**

a) $F(x) = sen\,x - k \rightarrow F'(x) = cos\,x$

b) $F(x) \quad \frac{sen\,3x}{3} \quad k \cdot F'(x) \quad cos\,3x$

c) $F(x) = sen(x-3) - k \rightarrow F'(x) = cos(x-3)$

d) $F(x) = -3cos\,x + k \rightarrow F'(x) = 3sen\,x$

e) $F(x) = -cos(x - \cdot) + k \rightarrow F'(x) = sen(x - \cdot)$

f) $F(x) = -3cos(x - \cdot) - k \rightarrow F'(x) = 3sen(x - \cdot)$

48. **Página 228**

a) Porque la derivada de una función polinómica siempre es otra función polinómica.

b) El grado de $F(x)$ es $n + 1$, considerando que $f(x)$ es un polinomio o que n sea distinto de -1.

49. **Página 228**

a) $\int (2x \quad 3)dx \quad x^2 \quad 3x \quad k$

b) $\int (3x^2 \quad 4x \quad 2)dx \quad x^3 \quad 2x^2 \quad 2x \quad k$

c) $\int \left[\frac{3}{4}x^3 \quad 3x^2 \quad 6x \quad 1\right]dx \quad \frac{3}{16}x^4 \quad x^3 \quad 3x^2 \quad x \quad k$

d) $\int (x \quad 1)^3 dx \quad \frac{(x \quad 1)^3}{4} \quad k$

e) $\int (x \quad 3)^2 dx \quad \frac{(x \quad 3)^3}{3} \quad k$

f) $\int (1 \quad 2x)^2 dx \quad \frac{1}{2}\int (\quad 2)\cdot(1 \quad 2x)^2 dx \quad \frac{1}{2}\frac{(1 \quad 2x)^3}{3} \quad k \quad \frac{1}{6}(1 \quad 2x)^3 \quad k$

g) $\int \left[\frac{x^3}{3} \quad \frac{x^2}{2} \quad x \quad 5\right]dx \quad \frac{x^4}{12} \quad \frac{x^3}{6} \quad \frac{x^2}{2} \quad 5x \quad k$

h) $\int (x \quad 3x \quad 2)dx \quad \int (\quad 2x \quad 2)dx \quad x^2 \quad 2x \quad k$

50. **Página 228**

a) $\int 2\sqrt{x}\,dx \quad \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + k$

b) $\int 2\sqrt{3x}\,dx = 2\sqrt{3}\int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{4\sqrt{3}}{3}x^{\frac{3}{2}} - k = \frac{4}{3}\sqrt{3x^3} - k$

c) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \quad x\right)dx \quad 2\sqrt{x} \quad \frac{x^2}{2} \quad k$

d) $\int \sqrt[4]{x} \quad \sqrt[3]{x}\,dx \quad \frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} \quad \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + k$

e) $\int (2 \quad \sqrt{x})dx \quad 2x \quad \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \quad k$

f) $\int (2 \quad \sqrt{3x})dx \quad 2x \quad \frac{2}{3}\sqrt{3x^3} \quad k$

g) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \quad x\right)dx \quad \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} \quad \frac{x^2}{2} \quad k$

h) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{2x}} - \frac{4}{\sqrt[4]{4x}}\right)dx = \sqrt{2}\int x^{-\frac{1}{2}}dx - 2\sqrt{2}\int x^{-\frac{1}{4}}dx = 2\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{8\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{4}} - k = 2\sqrt{2x} - \frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt[4]{x^3} + k$

51. **Página 228**

a) $\int \frac{4}{x \quad 2}\,dx \quad 4\ln|x \quad 2| \quad k$

b) $\int \left(\frac{1}{x} \quad \frac{2}{x^2} \quad \frac{3}{x^3}\right)dx \quad \ln|x| \quad \frac{2}{x} \quad \frac{3}{2x^2} \quad k$

c) $\int \left(\frac{2}{x \quad 3} \quad \frac{1}{x \quad 4}\right)dx \quad 2\ln|x \quad 3| \quad \ln|x \quad 4| \quad k$

d) $\int \frac{1}{(x \quad 4)^2}\,dx \quad \frac{1}{x \quad 4} + k$

e) $\int \left(\frac{1}{(x \quad 1)^2} \quad \frac{7}{x + 3}\right)dx \quad \frac{1}{x \quad 1} \quad 7\ln|x \quad 3| \quad k$

f) $\int \left(\frac{2}{(x \quad 3)^3} \quad \frac{5}{(x \quad 3)^2}\right)dx \quad \frac{1}{(x + 3)^2} \quad \frac{5}{(x \quad 3)} \quad k$

52. **Página 229**

a) $\int e^{x-2}\,dx \quad e^{x-2} + k$

b) $\int e^x \quad 1\,dx \quad e^x \quad x \quad k$

c) $\int e^{2x} \quad 2^x\,dx \quad \frac{1}{2}e^{2x} \quad \frac{2^x}{\ln 2} + k$

d) $\int \left(xe^{x^2} \quad \frac{4}{3}x^3\right)dx \quad \frac{1}{2}e^{x^2} \quad \frac{1}{3}x^4 \quad k$

e) $\int e^{2x+3}\,dx \quad \frac{1}{2}e^{2x+3} \quad k$

f) $\int (2e^x \quad 3x^2)dx \quad 2e^x \quad x^3 \quad k$

g) $\int \left(5e^{\frac{x}{2}} \quad 2\cdot 3^x\right)dx \quad 10e^{\frac{x}{2}} + 2\frac{3^x}{\ln 3} \quad k$

h) $\int (x2^{x^2+2x} \quad 2^{x^2+2x})dx \quad \frac{1}{2}\int (2x \quad 2)\cdot 2^{x^2+2x}\,dx \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{2^{x^2+2x}}{\ln 2} + k$

53. **Página 229**

a) $\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + k$

b) $\int 4\operatorname{sen}(x - \pi)\,dx = -4\cos(x - \pi) + k$

c) $\int 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}\right)dx = 9\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}\right) + k$

d) $\int 5\operatorname{sen}(2x - \pi)\,dx = -\frac{5}{2}\cos(2x - \pi) + k$

e) $\int 3\sec^2\left(\frac{1}{5}x\right)dx = 15\int \frac{\frac{1}{5}dx}{\cos^2\left(\frac{1}{5}x\right)} = 15\,tg\left(\frac{1}{5}x\right) + k$

f) $\int \frac{7}{\operatorname{sen}^2(3x)}dx = \frac{7}{3}\int \frac{3}{\operatorname{sen}^2(3x)}dx = -\frac{7}{3}\operatorname{cotg}(3x) + k$

g) $\int \frac{5}{\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)}dx = 15\int \frac{\frac{1}{3}}{\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)}dx = 15\,tg\left(\frac{x}{3}\right) + k$

h) $\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}dx = 3\operatorname{arc\,sen} x + k$

i) $\int \frac{3}{x^2+1}dx = 3\operatorname{arc\,tg} x + k$

j) $\int \frac{1}{(3x)^2+1}dx = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}(3x) + k$

54. **Página 229**

a) Consideramos $\int x^2\,dx$ y comprobamos que no coincide con el producto $\int x\,dx \cdot \int x\,dx$.

$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + k$

$\int x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \int x dx \cdot \int x dx = \frac{x^4}{4} + k$

Entonces la afirmación es cierta.

b) Consideramos $\int 1dx$ y comprobamos que no coincide con $\frac{\int x dx}{\int x dx}$.

$\int 1dx = \int \frac{x}{x}dx = x + k$

$\int x dx = \frac{x^2}{2} - \frac{\int x dx}{\int x dx} = \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}} - k = 1 - k$

Entonces la afirmación es cierta.

55. **Página 229**

a) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln|x^2+1|+k$

b) $\int \frac{8x+3}{4x^2+3x+1}dx = \ln|4x^2+3x+1|+k$

c) $\int \frac{6x^2-1}{2x^3-x-9}dx = \ln|2x^3-x-9|+k$

d) $\int \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}dx = \ln|\cos x|+k$

e) $\int \operatorname{cotg}x\,dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}dx = \ln|\operatorname{sen}x|+k$

f) $\int 3x^2 \operatorname{sen}x^3\,dx = \cos x^3+k$

g) $\int (2x+1)\operatorname{sen}(x^2+x+5)dx = \cos(x^2+x+5)+k$

h) $\int 6x\cos(3x^2+5)dx = \operatorname{sen}(3x^2+5)+k$

i) $\int \left|\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2}\right|dx = \operatorname{arc\,tg}x+\frac{1}{x}+k$

j) $\int 6xe^{3x^2}dx = e^{3x^2}+k$

k) $\int (3x^2+1)e^{x^3+x}dx = e^{x^3+x}+k$

l) $\int (12x^2+6x)e^{4x^3+3x^2+7}dx = e^{4x^3+3x^2+7}+k$

m) $\int xe^{7x^2}dx = \frac{e^{7x^2}}{14}+k$

n) $\int \frac{-2}{4-x^2}dx = \frac{-1}{2}\int \frac{1}{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = -\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}+k$

ñ) $\int \frac{-2}{\sqrt{3-x^2}}dx = \frac{-2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}}dx = -2\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{\sqrt{3}}+k$

o) $\int x^3e^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int te^t dt = \frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1)+k$ (con $t=x^2$ y $dt=2xdx$)

p) $\int \frac{x\ln x}{x}dx = \int dx - \int \frac{\ln x}{x}dx = x-\int \frac{\ln x}{x}dx = x-\frac{\ln^2 x}{2}+k$

q) $\int \left|\frac{1}{x^2+1}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x}\right|dx = \operatorname{arc\,tg}x+\frac{2}{x}+3\ln|x|+k$

56. **Página 229**

a) $\int \frac{x}{x^2-3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-3}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-3|+k$

b) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4-3}}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\sqrt{t}+k = \frac{1}{2}\sqrt{x^4+3}+k$

$t=x^4+3 \to dt=4x^3dx \to x^3dx=\frac{1}{4}dt$

c) $\int \frac{\operatorname{sen}x}{1-\cos x}dx = \ln|1-\cos x|+k$

d) $\int \frac{3-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$

$t=1-x^2 \to dt=-2xdx \to xdx=-\frac{1}{2}dt$

$3\operatorname{arc\,sen}x+\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt = 3\operatorname{arc\,sen}x+\sqrt{1-x^2}+k$

e) $\int \frac{2x-\sqrt{x}}{x^2}dx = \int \frac{2x}{x^2}dx - \int \frac{\sqrt{x}}{x^2}dx =$

$\int \frac{2x}{x^2}dx - \int x^{-\frac{3}{2}}dx = \ln|x^2|+\frac{2}{\sqrt{x}}+k$

f) $\int \frac{2\cos x}{3-\operatorname{sen}x}dx = 2\ln|3-\operatorname{sen}x|+k$

g) $\int \frac{x}{x^2-2^4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|x^2+2^4|+k$

$t=x^2+2^4 \to dt=2xdx$

h) $\int \frac{x}{\sqrt{1-3x^2}}dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \frac{2}{6}\sqrt{t}+k = \frac{1}{3}\sqrt{1-3x^2}+k$

$t=1-3x^2 \to dt=-6xdx \to xdx=-\frac{1}{6}dt$

i) $\int \frac{x+1}{x^2-1}dx = \int \frac{x}{x^2-1}dx + \int \frac{1}{x^2-1}dx =$

$\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\operatorname{arc\,tg}x+k$

j) $\int \frac{8}{x^2-4}dx = \int \frac{2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2-1}dx = 4\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2-1}dx =$

$4\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{2}\right)+k$

57. **Página 229**

$F(x) \int (x+1)(x^2-2x-6)dx \int (x^3+3x^2-8x+6)dx \frac{x^4}{4}+x^3-4x^2+6x-k$

$F(0)=1 \cdot k=1 \cdot F(x)=\frac{x^4}{4}-x^3-4x^2-6x-1$

58. **Página 229**

$f(x) \int \frac{a}{1-x}dx -a\ln|1-x|+k$

$f(0)=1 \rightarrow a\ln 1+k \rightarrow k=1 \qquad f(1)=1 \cdot a\ln 2=1=1 \cdot a=\frac{2}{\ln 2}$

La función es: $f(x)=\frac{2}{\ln 2}\ln|1-x|+1$

59. **Página 229**

$F(x) \int \frac{x}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1-x^2}dx=-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+k$

$F(\sqrt{2})=3 \cdot -\frac{1}{2}\ln|1-2|+k=3 \cdot k=3$

La función primitiva es: $F(x)=-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+3$

60. **Página 229**

Sabemos que *f* pasa por el origen de coordenadas, por lo que: $f(0)=0$.

Además, ese es un punto de inflexión, entonces: $f''(0)=0$.

Como la pendiente de la recta tangente en (0, 0) es 5, podemos concluir que: $f'(0)=5$.

Finalmente, tenemos:

$f'''(x)=24x-6$

$f''(x) \int (24x-6)dx=12x^2-6x+k \cdot f''(0)=k=0 \cdot f''(x)=12x^2-6x$

$f'(x) \int (12x^2-6x)dx=4x^3-3x^2+k \cdot f'(0)=5 \cdot k=5 \cdot f'(x)=4x^3-3x^2+5$

$f(x) \int (4x^3-3x^2+5)dx=x^4-x^3+5x+k \cdot f(0)=0 \cdot k=0 \cdot f(x)=x^4-x^3+5x$

61. **Página 229**

$f''(x) \int (x-1)dx=\frac{x^2}{2}-x+k \cdot f''(0)=-1=k=-1 \cdot f''(x)=\frac{x^2}{2}-x-1$

$f'(x) \int \left|\frac{x^2}{2}-x-1\right|dx=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}-x+k \cdot f'(0)=5 \cdot k=5 \cdot f'(x)=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}-x+5$

$f(x) \int \left|\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}-x+5\right|dx=\frac{x^4}{24}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+5x+k \cdot f(0)=0 \cdot k=0 \cdot f(x)=\frac{x^4}{24}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+5x$

62. **Página 229**

$$F(x)=\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{2x-2\cos x}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\ln|x-\cos x|-k$$

$F(0)$ 2 0 k 2 k 2 · $F(x)$ $\frac{1}{2}\ln|x$ ı $\cos x|$ 2

63. **Página 229**

$f'(x)$ $\int \operatorname{sen} x\,dx$ $\cos x$ ı k $f(x)$ $\int (\cos x$ ı $k)dx$ $\operatorname{sen} x$ ı kx ı

$f(0)=1 \text{—} \ı=1 \rightarrow f(x)=-\operatorname{sen} x+kx-1$ $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ π · 1 ı $\frac{\pi}{2}k$ ı 1 π · k 2 · $f(x)$ $\operatorname{sen} x$ 2x ı 1

64. **Página 229**

$f'(x)$ $\int (6x$ 2$)dx$ $3x^2$ ı 2x k

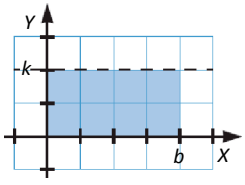
f tiene un mínimo relativo en $A(1, 3)$; por tanto, $f(1) = 3$ y $f'(1) = 0$.

$f'(1)=0 \rightarrow 3+2+k=0 \rightarrow k=-5 \text{—} f'(x)=3x^2+2x-5$

$f(x)$ $\int (3x^2$ 2x 5$)dx$ x^3 ı x^2 5x ı k · $f(1)$ 3 · 1 1 5 ı k 3 · k 6 $\rightarrow f(x)=x^3+x^2-5x-6$

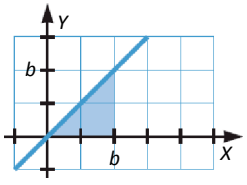
65. **Página 230**

a) Es el área de un rectángulo de base b y altura k.



Área $= b \cdot k$

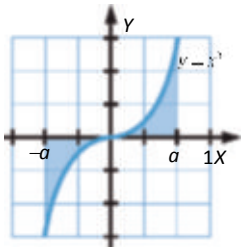
b) Es el área de un triángulo de base b y altura b.



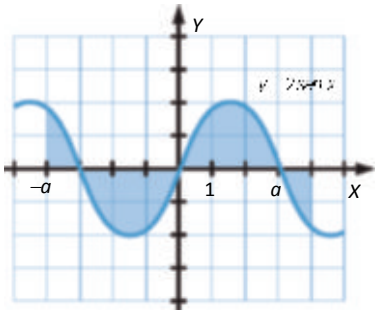
Área $\frac{b \cdot b}{2}$

66. **Página 230**

a)



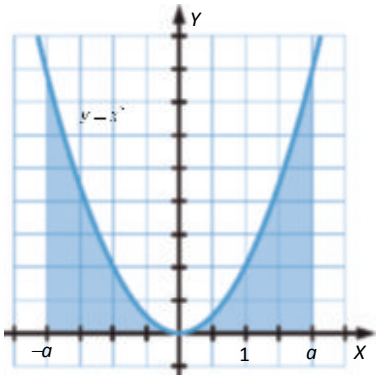
b)



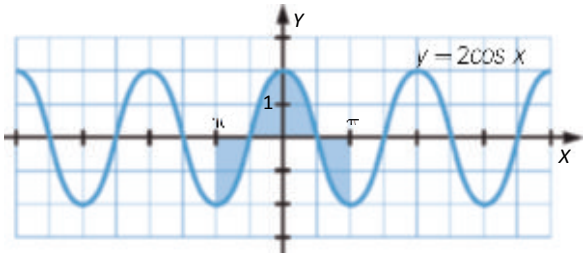
En ambos casos son funciones impares, por lo que el área de la región correspondiente al intervalo $[0, a]$ es igual que la del intervalo $[-a, 0]$ pero de signo contrario. La integral definida en un intervalo centrado en cero es nula.

67. **Página 230**

a) La integral de esta función no puede ser nula en ningún intervalo. Es una función par que toma siempre valores positivos.



b) La integral de esta función sí puede ser nula, pero no en todos los intervalos centrados en cero.



Vemos que, en el intervalo $(-\pi, \pi)$, la integral se anula porque el área comprendida entre la parte positiva de la función y el eje de abscisas es igual a la región comprendida entre este eje y la parte negativa. Así, tenemos que la integral es nula en todos los intervalos de la forma $(-k\pi, k\pi)$, con $k \in \mathbb{N}$.

68. **Página 230**

a) Geométricamente es el área de dos triángulos con misma base y altura.

Área $2 \dfrac{4 \cdot 4}{2} = 16$ $\int_{-4}^{4} f(x)\,dx = \int_{-4}^{0} x\,dx + \int_{0}^{4} x\,dx = \dfrac{16}{2} - \dfrac{16}{2} = 16$

b) Geométricamente es el área de un trapecio de bases 6 y 2, y altura 2.

Área $\dfrac{6+2}{2} \cdot 2 = 8$ $\int_{-2}^{4} g(x)\,dx = \int_{-2}^{0} (x+2)\,dx + \int_{0}^{2} 2\,dx + \int_{2}^{4} (4-x)\,dx = 2 + 4 + 2 = 8$

c) Geométricamente es la diferencia del área de dos triángulos.

Área $\dfrac{2 \cdot 2}{2} - \dfrac{3 \cdot 3}{2} = -\dfrac{5}{2}$ $\int_{-2}^{3} h(x)\,dx = \int_{-2}^{3} (x-1)\,dx - \int_{-2}^{1} (x-1)\,dx = \int_{1}^{3} (x-1)\,dx = \dfrac{2 \cdot 2}{2} - \dfrac{3 \cdot 3}{2} = -\dfrac{5}{2}$

69. **Página 230**

Buscamos la expresión algebraica de la función: $f(x) = \begin{cases} 6x - 6 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 6 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -2x - 8 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$

Calculamos la integral.

$\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (6x + 6)\,dx + \int_{0}^{1} 6\,dx + \int_{1}^{4} (-2x - 8)\,dx = \left[3x^2\right]_{-1}^{0} + \left[6x\right]_{0}^{1} - \left[x^2 + 8x\right]_{1}^{4} = -3 + 6 + 9 = 18$

70. **Página 230**

a) $\int_0^4 (2-x)\,dx = \int_0^4 2\,dx - \int_0^4 x\,dx = 2\int_0^4 dx - \int_0^4 x\,dx = 2x\Big|_0^4 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 8+8=16$

b) $\int_{-3}^2 x^2\,dx = \int_{-3}^0 x^2\,dx - \int_0^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-3}^0 + \left|\frac{x^3}{3}\Big|_0^2\right| = 9 - \frac{8}{3} = \frac{35}{3}$

c) $\int_0^2 (x^2-3x-5)\,dx = \int_0^2 x^2\,dx - 3\int_0^2 x\,dx + 5\int_0^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 - 3\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + 5\,x\Big|_0^2 = \frac{8}{3} - 3\cdot 2 - 5\cdot 2 = \frac{20}{3}$

71. **Página 230**

$\int_{-2}^4 f(x)\,dx = \int_{-2}^0 (-2x)\,dx - \int_0^4 3x\,dx = -x^2\Big|_{-2}^0 - \frac{3x^2}{2}\Big|_0^4 = 4 - 24 = 28$

72. **Página 230**

$\int_{-1}^3 f(x)\,dx = \int_{-1}^1 (-2x-5)\,dx + \int_1^3 (x^2+2)\,dx = -x^2 - 5x\Big|_{-1}^1 + \frac{x^3}{3} - 2x\Big|_1^3 = -1-5-1+5-9-6-\frac{1}{3}-2 = \frac{68}{3}$

73. **Página 230**

$f(x)$ es continua en $[0, 2]$ y $F(x) = \frac{1}{3}arc\,tg\,\frac{x}{3}$ es una primitiva de $f(x)$. Así, podemos aplicar la regla de Barrow:

$$\int_0^2 \frac{1}{9-x^2}dx = \frac{1}{3}arc\,tg\,\frac{x}{3}\Big|_0^2 = \frac{1}{3}arc\,tg\,\frac{2}{3}$$

Geométricamente es el área de la región limitada por la curva, el eje *X* y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

74. **Página 230**

$f(x)$ es continua en $[0{,}5;\ 1]$. Podemos aplicar la regla de Barrow siempre que exista una primitiva de la función.

Realizamos el cambio de variable:

$t = e^x \rightarrow dt = e^x\,dx$ $\qquad$ x 0,5; 1 、 t $\sqrt{e}, e$

$$\int_{0,5}^1 \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx = \int_{\sqrt{e}}^e \frac{1}{t^2-1}dt = |\,arc\,tg\,t\,|_{\sqrt{e}}^e = arc\,tg\,e - arc\,tg\,\sqrt{e}$$

75. **Página 230**

a) $\int_1^5 (2 \quad 4x^3)\,dx \quad 2x \quad x^4\Big|_1^5 \quad 635 \quad 3 \quad 632$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sen\,2x\,dx = -\frac{1}{2}cos\,2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

c) $\int_1^9 (\sqrt[3]{x} - \sqrt{x})\,dx = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_1^9 = \left(\frac{27}{4}\sqrt[3]{9} - 18\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) = \frac{27}{4}\sqrt[3]{9} - \frac{199}{12}$

d) $\int_0^1 2xe^{x^2}\,dx \quad e^{x^2}\Big|_0^1 \quad e \quad 1$

e) $\int_0^1 (2e^x - 4x^2)\,dx = 2e^x - \frac{4}{3}x^3\Big|_0^1 = 2e - \frac{4}{3} - 2 = 2e - \frac{10}{3}$

f) $\int_1^4 \frac{3}{\sqrt{x}}\,dx \quad 6\sqrt{x}\Big|_1^4 \quad (12 \quad 6) \quad 6$

76. **Página 230**

a) $\int_2^3 2^x - \sqrt{2x}\;dx = \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2}{3}\sqrt{2x^3}\Big|_2^3 = \left|\frac{2^3}{\ln 2} + \frac{2}{3}\sqrt{2\cdot 3^3}\right| - \left|\frac{2^2}{\ln 2} + \frac{2}{3}\sqrt{2\cdot 2^3}\right| = \frac{4}{\ln 2} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\;3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$

b) $\int_2^4 \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right| dx = \ln|x| - \frac{1}{x}\Big|_2^4 = \left|\ln 4 - \frac{1}{4}\right| - \left|\ln 2 + \frac{1}{2}\right| = \ln 2 - \frac{1}{4}$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\text{sen}\,x^2\,dx = -\frac{\cos x^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left|\cos\left(\frac{\pi^2}{4}\right) - 1\right|$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg\;x\,dx - \left|-\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right| = \left|-\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| + \ln|\cos 0|\right| = -\ln\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|$

77. **Página 230**

a) $\int_1^3 \frac{3}{x \quad 2}\,dx \quad 3\ln|x \;\; 2|\Big|_1^3 \quad 3\ln 5 \quad 3\ln 3 \quad 3\ln\frac{5}{3}$

b) $\int_0^3 \frac{2x}{x^2 \quad 1}\,dx \quad \ln|x^2 \quad 1|\Big|_0^3 \quad \ln 10 \quad \ln 1 \quad \ln 10$

c) $\int_0^1 \frac{1}{x^2 \quad 1}\,dx \quad arc\;tg\;x\Big|_0^1 \quad \frac{\pi}{4} \quad 0 \quad \frac{\pi}{4}$

d) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 \quad 2}\,dx \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\,arc\;tg\;\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_{-1}^1 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\,arc\;tg\;\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\,arc\;tg\;\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| \quad \sqrt{2}\;arc\;tg\;\frac{\sqrt{2}}{2}$

78. **Página 230**

a) Realizamos el siguiente cambio de variable:

$t - x^2 - 1 \rightarrow dt - 2x\,dx \qquad x \doteq 0, 1 \text{ — } t \doteq 1, 2$

$\int_0^1 x\sqrt{x^2 \quad 1}\,dx \quad \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{t}\,dt \quad \frac{1}{3}\sqrt{t^3}\Big|_1^2 \quad \frac{1}{3}(\sqrt{8} \quad 1)$

b) $\int_0^7 (x-1)^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}}\Big|_0^7 = \frac{3}{4}(16-1) = \frac{45}{4}$

c) $\int_0^1 \frac{3}{x^2 \quad 1}\,dx \quad 3\;arc\;tg\;x\Big|_0^1 \quad 3(arc\;tg\;1 \quad arc\;tg\;0) \quad \frac{3\pi}{4}$

d) $\int_0^{\pi} 3\,\text{sen}\,x\cos x\,dx \quad \frac{3}{2}\int_0^{\pi} \text{sen}\,2x\,dx \quad \frac{3}{4}\cos 2x\Big|_0^{\pi} \quad \frac{3}{4}(1 \quad 1) \quad 0$

79. **Página 230**

a) $\int_0^b (x - x^2)\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^b = \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} = 0 \rightarrow \frac{b^2}{6}(3+2b) = 0 \text{ — } \begin{cases} b = 0 \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$

b) $\int_{-2}^{2} (4 - bx)\,dx = \left[\frac{bx^2}{2} + 4x\right]_{-2}^{2} = 2b + 8 - 2b - 8 = 16 \neq 2$ → No hay ningún valor de *b* que lo cumpla.

80. Página 230

Como ambas funciones son continuas, tenemos que:

$\int_1^3 g(x)\,dx \quad \int_1^2 g(x)\,dx + \int_2^3 g(x)\,dx$

Hallamos el valor de cada uno de los sumandos.

$\int_1^2 2f(x)\,dx \quad 3 \cdot 2\int_1^2 f(x)\,dx \quad 3 \cdot \int_1^2 f(x)\,dx \quad \frac{3}{2}$

$\int_2^3 f(x)\,dx \quad \int_1^3 f(x)\,dx \quad \int_1^2 f(x)\,dx \quad 3 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{3}{2} \cdot \int_2^3 f(x)\,dx \quad \frac{3}{2}$

$\int_1^2 f(x) \quad g(x)\,dx \quad 3 \quad \int_1^2 f(x)\,dx + \int_1^2 g(x)\,dx \quad 3 \quad \frac{3}{2} \quad \int_1^2 g(x)\,dx \quad 3 \quad \int_1^2 g(x)\,dx \quad \frac{3}{2}$

$3\int_2^3 f(x) \quad g(x)\,dx \quad 3 \cdot 3\int_2^3 f(x)\,dx \quad 3\int_2^3 g(x)\,dx \quad 3 \quad \int_2^3 f(x)\,dx \quad \int_2^3 g(x)\,dx \quad 1 \cdot \int_2^3 g(x)\,dx \quad \frac{3}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{2}$

$\int_1^3 g(x)\,dx \quad \int_1^2 g(x)\,dx \quad \int_2^3 g(x)\,dx \quad \frac{3}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 2$

81. Página 231

a) $\int_0^2 (e^x \quad 3e^{-x})\,dx \quad \cdot e^x \quad 3e^{-x}\Big]_0^2 \quad e^2 \quad 3e^{-2} \quad 1 \quad 3 \quad \frac{e^4 \quad 2e^2 \quad 3}{e^2}$

b) Realizamos el siguiente cambio de variable:

$t \quad \sqrt{x} \cdot dt \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} x\,dx \qquad x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow t \in \left[\sqrt{\frac{\pi}{4}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - tg^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} (1 - tg^2 t)\,dt = 2\int_{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} (\sec^2 t)\,dt = 2\ tg\ t\Big]_{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = 2\ tg\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) - 2\ tg\left(\sqrt{\frac{\pi}{4}}\right)$$

c) $$\int_0^2 \frac{1}{3x^2 - 4}\,dx = \int_0^2 \frac{\frac{1}{3}}{x^2 - \frac{4}{3}}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^2 \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}\left|x^2 - \frac{4}{3}\right|}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{1}{\frac{3}{4}x^2 - 1}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{1}{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}x\right|^2 + 1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^2 \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}x\right|^2 + 1}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ arc\ tg\ \frac{\sqrt{3}}{2}x\Big]_0^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ arc\ tg\ \sqrt{3} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}\pi}{18}$$

d) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2 \quad 4x \quad 5}\,dx \quad \int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x \quad 2)^2 + 1}\,dx \quad arc\ tg\ (x + 2)\Big]_{-2}^{-1} \quad arc\ tg\ 1 \quad arc\ tg\ 0 \quad \frac{\pi}{4}$

82. Página 231

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} 2x - 1\,dx - \int_0^2 2^x\,dx - \int_2^3 \frac{-4x}{x-4}\,dx = x^2 + x\Big]_{-1}^{0} - \frac{2^x}{\ln 2}\Big]_0^2 - 4\int_2^3 \left(\frac{4}{x-4} - 1\right)dx =$$

$$= -2 - \frac{4}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} + 4\ 4\ln|x-4| - x\Big]_2^3 = -2 + \frac{3}{\ln 2} - 12 - 16\ln 2 - 8 = \frac{3}{\ln 2} - 16\ln 2 - 6$$

83. **Página 231**

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} (x^2 + 2a\cos x)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (ax^2 - b)\,dx = \frac{x^3}{3} + 2a\,\text{sen}\,x\Big]_0^{\pi} - \frac{ax^3}{3} - bx\Big]_{\pi}^{2\pi} =$$

$$\frac{\pi^3}{3} \quad \frac{8a\pi^3}{3} \quad \frac{a\pi^3}{3} \quad 2b\pi \quad b\pi \quad \frac{-\pi^3(7a \quad 1)}{3} \quad b\pi$$

84. **Página 231**

a) $\int_0^3 (3x^2 \quad 2x \quad a)\,dx \quad x^3 \; I \; x^2 \quad ax\Big]_0^3 \quad 27 \; I \; 9 \quad 3a \quad 12 \quad \cdot a \quad 8$

b) $\int_2^6 \frac{a}{x}\,dx = a\ln|x|\Big]_2^6 = a\ln 6 - a\ln 2 = a\ln 3 \rightarrow a\ln 3 = 1 - \ln 3 \rightarrow a = \frac{1}{\ln 3} - 1$

85. **Página 231**

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a \frac{e^x}{(1-e^x)^2}\,dx = \frac{-1}{1+e^x}\Big]_0^a = -\frac{1}{1+e^a} - \frac{1}{1-1} = -\frac{1}{1+e^a} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \rightarrow -\frac{1}{1-e^a} = -\frac{1}{4} - e^a = 3 - a = \ln 3$$

86. **Página 231**

Si la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 3$ es -12 $- f'(3) = -12$.

$f'(x) = 2ax \rightarrow f'(3) = 6a \rightarrow -12 = 6a \rightarrow a = -2$

Luego la función es: $f(x) = -2x^2 + b$

$$6 = \int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^6 (-2x^2 - b)\,dx = \frac{-2x^3}{3} + bx\Big]_0^6 = -144 + 6b \rightarrow b = 25 \rightarrow f(x) = -2x^2 + 25$$

87. **Página 231**

$p'(x) = 3ax^2 - 2bx + c$

$p''(x) = 6ax + 2b$

Pasa por el punto $0, 1 \; - p(0) - 1 \rightarrow d - 1$.

El punto $0, 1$ es un punto de inflexión $- p''(0) = 0 - 2b = 0 \rightarrow b = 0$.

Tiene un máximo en $x = 1 \rightarrow p'(1) = 0 \rightarrow 3a - c = 0$.

$$\frac{5}{4} = \int_0^1 p(x)\,dx = \int_0^1 (ax^3 - cx + 1)\,dx = \frac{ax^4}{4} + \frac{cx^2}{2} - x\Big]_0^1 = \frac{a}{4} - \frac{c}{2} - 1 - a + 2c = 1$$

$$\left.\begin{matrix} 3a & c & 0 \\ a & 2c & 1 \end{matrix}\right\} \quad c = -3a \quad \cdot a \quad 6a \quad 1 \quad \cdot a \quad \frac{1}{5} \quad \cdot c \quad \frac{3}{5}$$

Luego, el polinomio es: $p(x) \quad \frac{1}{5}x^3 \; I \; \frac{3}{5}x \quad 1$

88. **Página 231**

Hallamos las raíces por el método de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -4 & 8 \\ -2 & & -2 & 8 & -8 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \underline{0} \end{array} \rightarrow f(x) = (x-2)(x^2-4x+4) = (x-2)(x-2)^2$$

$f(x) \quad 0 \cdot \begin{cases} x & 2 \\ x & 2 \end{cases}$

$$\text{Área} = \left|\int_{-3}^{-2}(x^3-2x^2-4x-8)\,dx\right| - \left|\int_{-2}^{2}(x^3-2x^2-4x-8)\,dx\right| = \left|\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-2x^2+8x\right|_{-3}^{-2} - \left|\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-2x^2+8x\right|_{-2}^{2} =$$

$$\left|\frac{44}{3} \mid \frac{15}{4}\right| \mid \left|\frac{20}{3} \mid \frac{44}{3}\right| \quad \frac{131}{12} \quad \frac{64}{3} \quad \frac{387}{12} \quad \frac{129}{4}$$

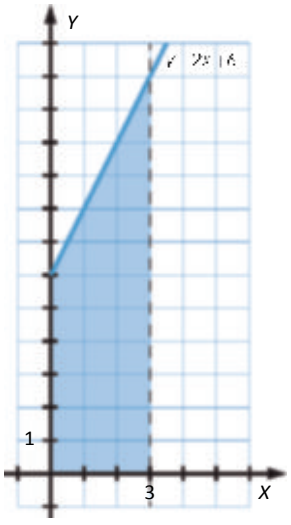
89. **Página 231**

Calculamos los puntos de intersección:

$y \quad 2x \mid 6 \Big\} \cdot y \quad 6 \qquad y \quad 2x \mid 6 \Big\} \cdot y \quad 12$
$x \quad 0 \qquad\quad\; x \quad 3$

$$\int_0^3 (2x \quad 6)\,dx \quad x^2 \quad 6x \Big|_0^3 \quad 9 \mid 18 \quad 27$$

$$\text{Área} \quad \frac{12 \quad 6 \quad 3}{2} \quad 27$$



90. **Página 231**

a) $x^2 \quad 4 \quad 0 \cdot \begin{cases} x & 2 \\ x & 2 \end{cases}$ $\qquad \text{Área} = \left|\int_{-2}^{2}(-x^2-4)\,dx\right| = \left|-\frac{x^3}{3}-4x\right|_{-2}^{2} = \left|-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}+8\right| = \frac{32}{3}$

b) $x^3-4x=0 \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=0 \\ x=2 \end{cases}$ $\qquad \text{Área} = \left|\int_{-2}^{0}(x^3-4x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{2}(x^3-4x)\,dx\right| = \left|\frac{x^4}{4}-2x^2\right|_{-2}^{0} + \left|\frac{x^4}{4}-2x^2\right|_{0}^{2} = 4-4=8$

c) $-x^3-9x=0 \rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=0 \\ x=3 \end{cases}$

$$\text{Área} = \left|\int_{-3}^{0}(-x^3-9x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{3}(-x^3-9x)\,dx\right| = \left|-\frac{x^4}{4}-\frac{9x^2}{2}\right|_{-3}^{0} - \left|-\frac{x^4}{4}+\frac{9x^2}{2}\right|_{0}^{3} = \frac{81}{4}-\frac{81}{4}=\frac{81}{2}$$

d) $x^2 \quad 9 \quad 0 \cdot \begin{cases} x & 3 \\ x & 3 \end{cases}$ $\qquad \text{Área} = \left|\int_{-3}^{3}(x^2-9)\,dx\right| = \left|\frac{x^3}{3}-9x\right|_{-3}^{3} = |9-27-9-27| = 36$

e) $x^3 \quad x^2 \quad 0 \cdot \begin{cases} x & 0 \\ x & 1 \end{cases}$ $\qquad \text{Área} = \left|\int_{0}^{1}(x^3-x^2)\,dx\right| = \left|\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right|_{0}^{1} = \left|\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{12}$

f) $-x^3 - x^2 - 2x = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{0} (-x^3 - x^2 + 2x)\,dx\right| - \left|\int_{0}^{2} (-x^3 - x^2 - 2x)\,dx\right| = \left|-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2\right|_{-1}^{0} - \left|-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2\right|_{0}^{2} =$$

$$\left|\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1\right| - \left|4 - \frac{8}{3} + 4\right| - \frac{5}{12} - \frac{8}{3} - \frac{37}{12}$$

91. **Página 231**

$f(x) = 0 \longrightarrow x = 3$

$$\text{Área} = \left|\int_{3}^{4} \sqrt{x-3}\,dx\right| = \left|\frac{2}{3}\sqrt{(x-3)^3}\right|_{3}^{4} = \left|\frac{2}{3} - 0\right| = \frac{2}{3}$$

92. **Página 231**

$f(x) = 0 \longrightarrow x = 2$ $\qquad$ $f(x) = 2 \rightarrow x = 0$

$$\text{Área} = \left|\int_{0}^{2} \sqrt{4-2x} - 2\,dx\right| = \left|-\frac{1}{3}\sqrt{(4-2x)^3} - 2x\right|_{0}^{2} = \left|-4 - \frac{8}{3}\right| = \frac{4}{3}$$

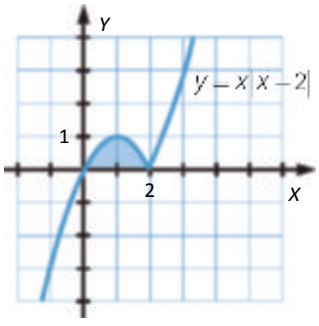
93. **Página 231**

$f(x) \quad 0 \cdot x \quad \frac{2\pi}{3}$

$$\text{Área} = \left|\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \left|\frac{1}{2} + \cos x\right| dx\right| - \left|\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \left|\frac{1}{2} - \cos x\right| dx\right| = \left|\left[\frac{1}{2}x + \operatorname{sen} x\right]_{0}^{\frac{2\pi}{3}}\right| - \left|\left[\frac{1}{2}x + \operatorname{sen} x\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\right| = \left|\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right| - \left|\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$$

94. **Página 231**

a)



b) $y \quad 0 \qquad \cdot x|x \quad 2| \quad 0 \cdot \begin{cases} x & 0 \\ x & 2 \end{cases}$

Escribimos la función definida a trozos: $f(x) = x|x-2| = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

$$\text{Área} = \int_{0}^{2} (-x^2 + 2x)\,dx = \frac{-x^3}{3} - x^2\Big|_{0}^{2} = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$$

95. **Página 231**

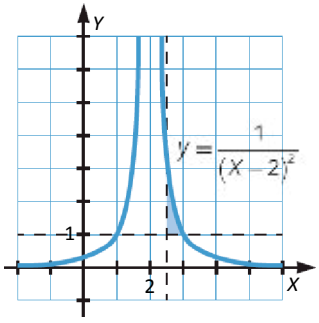
$x^2 \quad 4 \quad 0 \cdot x \quad 2 \cdot \quad 1,3$

Escribimos la función a trozos: $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^{2} (4 - x^2)\, dx \right| - \left| \int_{2}^{3} (x^2 - 4)\, dx \right| = \left| 4x - \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-1}^{2} \right| - \left| \frac{1}{3}x^3 - 4x \Big|_{2}^{3} \right| = \left| \frac{16}{3} - \frac{11}{3} \right| + \left| -3 - \frac{16}{3} \right| = \frac{27}{3} - \frac{7}{3} = \frac{34}{3}$$

96. **Página 231**

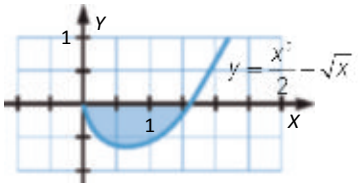
$f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $f(x) \quad 1 \cdot \begin{cases} x & 1 \\ x & 3 \end{cases}$



$$\text{Área} = \left| \int_{\frac{5}{2}}^{3} \left| \frac{1}{(x-2)^2} - 1 \right| dx \right| = \left| \frac{-1}{x-2} - x \Big|_{\frac{5}{2}}^{3} \right| = \left| -1 - 3 + 2 - \frac{5}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

97. **Página 231**

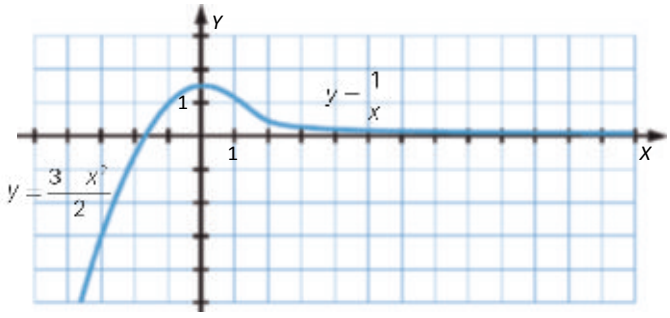
a)



b) $f(x) = 0 - \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{4} \end{cases}$ $\qquad$ $\text{Área} = \left| \int_{0}^{\sqrt[3]{4}} \left| \frac{x^2}{2} - \sqrt{x} \right| dx \right| = \left| \frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \Big|_{0}^{\sqrt[3]{4}} \right| = \left| \frac{2}{3} - \frac{4}{3} - 0 \right| = \frac{2}{3}$

98. **Página 231**

a)

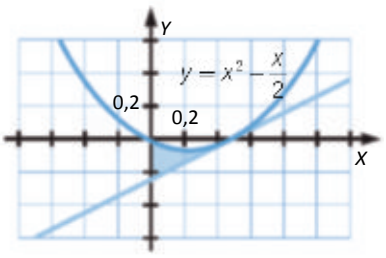


b) $f(x) = 0 \rightarrow x = -\sqrt{3}$

$$\text{Área} = \left| \int_{-\sqrt{3}}^{1} \frac{3 - x^2}{2}\, dx \right| + \left| \int_{1}^{2} \frac{1}{x}\, dx \right| = \left| \frac{3}{2}x - \frac{x^3}{6} \right|_{-\sqrt{3}}^{1} + \left| \ln x \right|_{1}^{2} = \left| \frac{3}{2} - \frac{1}{6} - \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| - \ln 2 = \frac{4}{3} - \sqrt{3} + \ln 2$$

99. **Página 231**

Calculamos la recta tangente:



$f'(x) = 2x - \frac{1}{2}$ $\quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$y = \frac{1}{2}x + n \rightarrow 0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + n \rightarrow n = -\frac{1}{4} \rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

$$\text{Área} = \left| \int_{0}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} - x^2 - \frac{x}{2} \right) dx \right| = \left| \int_{0}^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{4} - x^2 \right) dx \right| = \left| \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}x - \frac{x^3}{3} \right|_{0}^{\frac{1}{2}} = \left| -\frac{1}{24} \right| = \frac{1}{24}$$

100. **Página 232**

$f(2) = 1 \rightarrow 8a - 4b + 2c - d = 1$

$f(0) = 0 \rightarrow -d = 0$

$f'(x) = 3ax^2 - 2bx - c \rightarrow f'(2) = 12a - 4b - c = 0$

$f''(x) = 6ax + 2b \rightarrow f''(2) = 12a + 2b = 0$

Entonces: $a = \frac{1}{8}$, $b = -\frac{3}{4}$, $c = \frac{3}{2}$ y $d = 0$.

Por lo tanto: $y = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x$ $\qquad$ Segmento: $y = \frac{1}{2}x$

$$\text{Área} = \left| \int_{0}^{2} \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x \right) dx \right| = \left| \int_{0}^{2} \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - x \right) dx \right| = \left| \frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right|_{0}^{2} = \left| \frac{1}{2} - 2 - 2 \right| = \frac{1}{2}$$

101. **Página 232**

Calculamos la recta tangente:

$f'(x) = 3x^2 - 4x \rightarrow f'(-1) = 7$ $\qquad$ $f(-1) = -3$ $\qquad$ $y = 7x - n \rightarrow -3 = -7 + n \rightarrow n = 4 \rightarrow y = 7x - 4$

Hallamos los puntos de corte:

$x^3 - 2x^2 - 7x + 4 = x^3 - 2x^2 - 7x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$

$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^{4} (7x - 4 - x^3 + 2x^2)\, dx \right| = \left| -\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} - 4x \right|_{-1}^{4} = \left| -64 - \frac{128}{3} + 56 + 16 - \frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{7}{2} - 4 \right| = \frac{625}{12}$$

102. **Página 232**

La función es derivable en 0; por tanto, será continua en este punto. Así, tenemos:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \qquad \lim_{x\to 0} e^{ax} = \lim_{x\to 0} (a \quad b \operatorname{sen} x) \quad \cdot 1 = a$$

Además, por ser f derivable en 0:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) \rightarrow \lim_{x\to 0} e^x = \lim_{x\to 0} b\cos x \rightarrow 1 = b$$

Definimos la función: $f(x) - \begin{cases} e^x & \text{si } x \text{ 0} \\ 1 - \operatorname{sen} x & \text{si } 0 \text{ } x \end{cases}$

$$\text{Área} = \left|\int_{-2}^{0} e^x\,dx\right| - \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1+\operatorname{sen} x)\,dx\right| = \left|e^x \Big|_{-2}^{0}\right| - \left|x - \cos x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right| = \left|1 - e^{-2}\right| + \left|\frac{\pi}{2} - 1\right| = 2 - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{e^2}$$

103. **Página 232**

a) $x+1$ y 2^x son continuas en los intervalos en los que están definidas, por lo que basta con estudiar lo que ocurre en los extremos de los intervalos.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} x - 1 = 1 \\ f(0) = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} 2^x = 1 \end{array}\right| - f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) - f(x) \text{ es continua en } x = 0 .$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} 2^x = 4 \\ f(2) = -1 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} \dfrac{2}{x-4} = -1 \end{array}\right| \rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x) \rightarrow f(x) \text{ presenta una discontinuidad de salto finito en } x = 2 .$$

La expresión $\dfrac{2}{x \quad 4}$ no es continua cuando el denominador se anula.

$x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} \dfrac{2}{x-4} = -\infty \\ \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \dfrac{2}{x-4} = -\infty \end{array}\right| - \lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) - f(x) \text{ presenta una discontinuidad de salto infinito en } x = 4 .$$

b) $f(x) \quad \dfrac{2}{x \quad 4} \quad \forall x \quad 2 \quad \cdot f(3) \quad 2$

$f'(x) \quad \dfrac{1}{(x \quad 4)^2} \quad \forall x \quad 2 \quad \cdot f'(3) \quad 1$

$y = -x - n - -2 = -1 \cdot 3 + n \rightarrow n = 1$

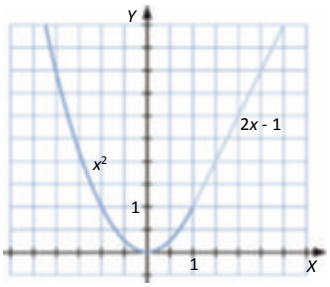
La recta tangente en $x = 3$ es $y = -x + 1$.

c) $\text{Área} = \left|\int_{-1}^{0} (x-1)\,dx\right| - \left|\int_{0}^{2} 2^x\,dx\right| - \left|\int_{2}^{3} \dfrac{2}{x-4}\,dx\right| = \left|\dfrac{x^2}{2} - x \Big|_{-1}^{0}\right| + \left|\dfrac{2^x}{\ln 2} \Big|_{0}^{2}\right| + \left|2\ln|x-4|\Big|_{2}^{3}\right| =$

$\left|\dfrac{1}{2} \; 1\right| \quad \left|\dfrac{3}{\ln 2}\right| \quad |2 \cdot 0 \quad 2\ln 2| \quad \dfrac{1}{2} \quad \dfrac{3}{\ln 2} \quad 2\ln 2$

104. **Página 232**

a) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1 \\ f(1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} (2x-1) = 1\end{array}\right\} \rightarrow$ La función es continua en cualquier intervalo.

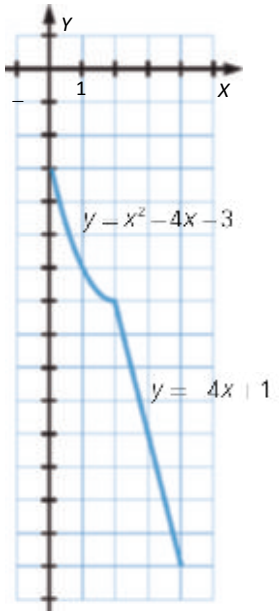


b) $x^2 = 2x - 1 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$

$$\text{Área} = \left|\int_0^1 x^2\,dx\right| + \left|\int_1^2 2x - 1\,dx\right| = \left|\frac{x^3}{3}\right|_0^1 - \left|x^2 - x\right|_1^2 = 1 + 2 = 3$$

105. **Página 232**

a)



b) $\text{Área} = \left|\int_0^2 (x^2 - 4x - 3)\,dx\right| - \left|\int_2^4 (x+1)\,dx\right| = \left|\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 3x\right|_0^2 + \left|\frac{x^2}{2} + x\right|_2^4 = \left|\frac{8}{3} - 8 - 6\right| - |8 + 4 - 2 - 2| = \frac{172}{3}$

106. **Página 232**

Área $\int_1^a (2x + 1)\,dx$ x^2 x_1^a a^2 a 2

Área 18 $a^2 + a$ 2 18 $a^2 + a$ 20 0 $\begin{cases} a & 4 \\ a & 5 \end{cases}$

Si consideramos que $1 < a$, tenemos que $a = 4$.

107. **Página 232**

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{a}(-x^2-9)\,dx\right| = \left|-\frac{x^3}{3}-9x\right|_{-1}^{a} = \left|-\frac{a^3}{3}+9a-\frac{1}{3}-9\right| = \left|-\frac{a^3}{3}-9a+\frac{26}{3}\right|$$

$$\text{Área} = 24 \to -\frac{a^3}{3}+9a-\frac{26}{3} = 24 \to \begin{cases} a = -1-2\sqrt{6} \\ a = 2 \\ a = 2\sqrt{6}-1 \end{cases}$$

Si consideramos que $-1 < a$, tenemos que $a = 2$ o $a = 2\sqrt{6}-1$.

108. **Página 232**

a) $\int \frac{2}{x-1}\,dx \quad 2\ln|x-1| \quad K$

b) $\text{Área} \to \ln|x-1||_2^k \to \ln|k-1| \to \ln 3 \to \ln\left|\frac{|k-1|}{3}\right|$

$$\text{Área} \to \ln 2 \to \ln\left|\frac{|k-1|}{3}\right| \to \ln 2 \to \frac{|k+1|}{3} \to 2 \to \begin{cases} k-1-6 \to k-5 \\ -k-1-6 \to k-6 \end{cases}$$

Como $k > 2 \to$ La solución es $k = 5$.

109. **Página 232**

Hallamos los puntos de corte:

$$x^2 \quad 2 \quad 2x \quad 2 \cdot x^2 \quad 2x \quad 0 \to \begin{cases} x & 0 \\ x & 2 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left|\int_0^2 (x^2-2-2x-2)\,dx\right| = \left|\int_0^2 (x^2-2x)\,dx\right| = \left|\frac{x^3}{3}-x^2\right|_0^2 = \left|\frac{8}{3}-4\right| = \frac{4}{3}$$

110. **Página 232**

Calculamos las rectas que determinan los lados del triángulo.

El lado que contiene los vértices $-5, 0$ y $2, 0$ está en la recta $y \quad \frac{2}{5}x \quad 2$.

El lado que contiene los vértices $5, 0$ y $0, 0$ está en la recta $y = 0$.

El lado que contiene a los vértices $0, 0$ y $2, 0$ está en la recta $x = 0$.

$$\text{Área} = \left|\int_{-5}^{0}\left|\frac{2}{5}x+2\right|dx\right| = \left|\frac{x^2}{5}-2x\right|_{-5}^{0} = 5$$

111. **Página 232**

Hallamos los puntos de corte: $2 \quad x \quad x^2 \quad x^2 \quad 3x \quad 2 \cdot 2x^2 \quad 4x \quad 0 \to \begin{cases} x & 0 \\ x & 2 \end{cases}$

$$\text{Área} = \left|\int_0^2 (2+x-x^2-x^2-3x-2)\,dx\right| = \left|\int_0^2 (-2x^2+4x)\,dx\right| = \left|-\frac{2x^3}{3}-2x^2\right|_0^2 = \left|-\frac{16}{3}+8\right| = \frac{8}{3}$$

112. **Página 232**

La ecuación de la bisectriz es $y = x$.

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^2 \quad 2 \quad x \cdot x^2 \quad x \quad 2 \quad 0 \cdot \begin{cases} x & 1 \\ x & 2 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^{2} (x^2 - 2 - x)\, dx \right| = \left| \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{x^2}{2} \right|_{-1}^{2} = \left| \frac{8}{3} - 4 - 2 + \frac{1}{3} - 2 + \frac{1}{2} \right| = \frac{9}{2}$$

113. **Página 232**

a) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^3 - 2x = -x^2 - x^3 - x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-2}^{0} (x^3 - 2x + x^2)\, dx \right| - \left| \int_{0}^{1} (x^3 - 2x + x^2)\, dx \right| = \left| \frac{x^4}{4} - x^2 + \frac{x^3}{3} \right|_{-2}^{0} + \left| \frac{x^4}{4} - x^2 - \frac{x^3}{3} \right|_{0}^{1} =$$

$$\left| \quad 4 \quad 4 \quad \frac{8}{3} \right| \; \left| \frac{1}{4} \quad 1 \quad \frac{1}{3} \right| \quad \frac{8}{3} \; \frac{5}{12} \quad \frac{37}{12}$$

b) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^3 - 2x^2 - x - 1 = -x^2 - 3x - 1 \rightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\, dx \right| + \left| \int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)\, dx \right| = \left| \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \right|_{-1}^{0} + \left| \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \right|_{0}^{2} =$$

$$\left| \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \right| \; 1 \quad \left| 4 \quad \frac{8}{3} \quad 4 \right| \quad \frac{5}{12} \quad \frac{8}{3} \quad \frac{37}{12}$$

114. **Página 232**

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$\frac{|x|}{2} = \frac{1}{1 - x^2} \rightarrow \begin{cases} -\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{1 - x^2} \rightarrow x^3 - x + 2 = 0 \rightarrow x = -1 \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{1 - x^2} \rightarrow x^3 + x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^{0} \left(\frac{1}{1 - x^2} - \frac{x}{2} \right) dx \right| - \left| \int_{0}^{1} \left(\frac{1}{1 - x^2} - \frac{x}{2} \right) dx \right| = \left| arc\ tg\ x + \frac{x^2}{4} \right|_{-1}^{0} - \left| arc\ tg\ x - \frac{x^2}{4} \right|_{0}^{1} = \left| \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \right| - \left| \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \right| = \frac{\pi - 1}{2}$$

115. **Página 232**

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

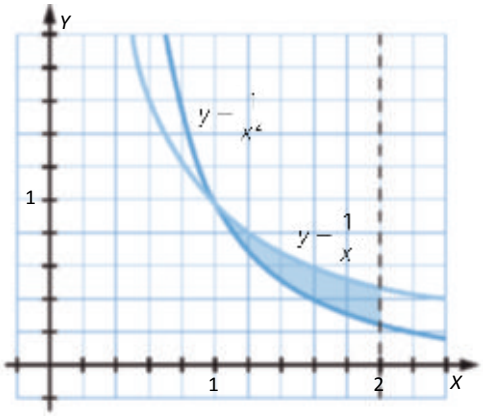
$\frac{8}{x} \quad \sqrt{x} \cdot 8 \quad x\sqrt{x} \cdot x \quad 4$

$\text{Área} = \left|\int_4^8 \left(\frac{8}{x} - \sqrt{x}\right) dx\right| = \left|8\ln x - \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_4^8\right| = \left|8\ln 8 - \frac{16}{3}\sqrt{8} - 8\ln 4 - \frac{8}{3}\sqrt{4}\right| = \left|24\ln 2 - \frac{32}{3}\sqrt{2} - 16\ln 2 - \frac{16}{3}\right| =$

$- \left|\frac{16 - 32\sqrt{2}}{3} - 8\ln 2\right|$

116. **Página 232**

a)



b) Hallamos los puntos de corte de las funciones: $\frac{1}{x} \quad \frac{1}{x^2} \cdot x \quad 1$

$\text{Área} = \left|\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx\right| = \left|\ln x - \frac{1}{x}\Big|_1^2\right| = \left|\ln 2 + \frac{1}{2} - 1\right| = \ln 2 - \frac{1}{2}$

117. **Página 232**

Hallamos los puntos de corte de las funciones: $1 \quad \frac{1}{x} \cdot x \quad 1$

$\text{Área} = \left|\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx\right| = \left|x - \ln|x|\Big|_1^2\right| = 2 - \ln 2 - 1 - \ln 1 = 1 - \ln 2$

118. **Página 232**

Hallamos los puntos de corte para $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : sen\ 2x = cos\ x \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\text{Área} = \left|\int_0^{\frac{\pi}{6}} (sen\ 2x - cos\ x)\, dx\right| - \left|\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (sen\ 2x - cos\ x)\, dx\right| = \left|-\frac{1}{2}cos\ 2x - sen\ x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}\right| - \left|-\frac{1}{2}cos\ 2x - sen\ x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right| =$

$\left|\frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\right| \quad \left|\frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2}\right| \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2}$

119. **Página 232**

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$x^2 = (x-2)^2 \rightarrow x^2 = x^2 - 4x - 4 \rightarrow 4x = 4 \rightarrow x = 1$

$x^2 = 0 \rightarrow x = 0$ $\qquad$ $(x-2)^2 = 0 \rightarrow x = 2$

$$\text{Área} = \left|\int_0^1 x^2\,dx\right| + \left|\int_1^2 (x-2)^2\,dx\right| = \left|\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right| - \left|\frac{(x-2)^3}{3}\Big|_1^2\right| = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

120. **Página 232**

Hallamos los puntos de corte de las funciones: $2 = x$

$$\text{Área} = \left|\int_0^2 (2-x)\,dx\right| = \left|2x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^2\right| = 2$$

121. **Página 232**

Hallamos los puntos de corte de las funciones: $\sqrt{x} = 4 \rightarrow x = 16$

$$\text{Área} = \left|\int_0^{16} (\sqrt{x} - 4)\,dx\right| = \left|\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - 4x\Big|_0^{16}\right| = \left|\frac{128}{3} - 64\right| = \frac{64}{3}$$

122. **Página 232**

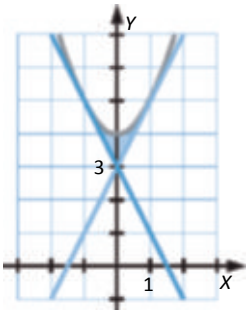
$y(-1) = 5$ $\qquad$ $y(1) = 5$

$f(x) = x^2 - 4 \rightarrow f'(x) = 2x \rightarrow \begin{cases} f'(-1) = -2 \\ f'(1) = 2 \end{cases}$

Las rectas tangentes son:

$y = -2x + n \rightarrow 5 = 2 - n \rightarrow n = 3 \rightarrow y = -2x - 3$

$y = 2x - n \rightarrow 5 = 2 + n \rightarrow n = 3 \rightarrow y = 2x - 3$



$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^0 (x^2 - 4 - 2x - 3)dx\right| - \left|\int_0^1 (x^2 - 4 - 2x - 3)dx\right| = \left|\frac{x^3}{3} + x^2 - x\Big|_{-1}^0\right| - \left|\frac{x^3}{3} - x^2 - x\Big|_0^1\right| = \left|\frac{1}{3}\right| - \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3}$$

123. **Página 232**

$x = 0 \rightarrow f(0) = e^0 = 1$

$x = 2 \rightarrow f(2) = e^2$

Recta: $m \quad \frac{e^2 \quad 1}{2} \cdot y \quad \left|\frac{e^2 \quad 1}{2}\right| x \;\; n \cdot 1 \quad n \cdot y \quad \left|\frac{e^2 \quad 1}{2}\right| x \quad 1$

$$\text{Área} = \left|\int_0^2 \left|\left|\frac{e^2 - 1}{2}\right| x - 1 - e^x\right| dx\right| = \left|\left|\frac{e^2 - 1}{4}\right| x^2 - x - e^x\Big|_0^2\right| = |e^2 - 1 + 2 - e^2 - 1| = 2$$

124. **Página 233**

a) $f(1) = 2 \rightarrow 1 - a - b = 2 \rightarrow b = 1 - a$

$g(1) = 2 \rightarrow 1 + c = 2 \rightarrow c = 1$

La función es: $g(x) = x^3 - 1$

$g'(x) = 3x^2 \rightarrow g'(1) = 3$

$f'(x) = 2x - a \rightarrow f'(1) = 3 \rightarrow 2 - a = 3 \rightarrow a = 1 \rightarrow b = 0$

La función es: $f(x) = x^2 - x$

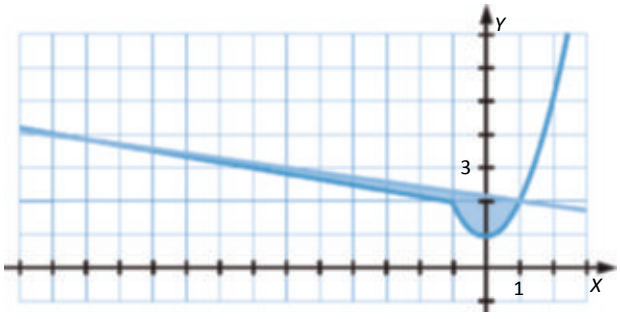
b) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$x^2 \quad x \quad x^3 \mid 1 \cdot \begin{cases} x & 1 \\ x & 1 \end{cases}$

$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^{1} (x^2 - x - x^3 - 1)\, dx \right| = \left| \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - x \right|_{-1}^{1} = \left| \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 1 \right| = \frac{4}{3}$$

125. **Página 233**

a)



b) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$\frac{15 \quad x}{7} \quad \sqrt{3 \quad x} \cdot \begin{cases} x & 13 \\ x & 6 \end{cases} \qquad \frac{15 \quad x}{7} \quad x^2 \quad 1 \cdot x \quad 1$

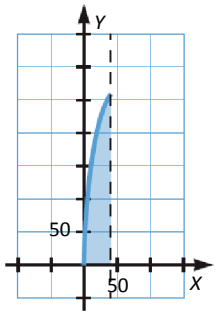
$$\text{Área} = \left| \int_{-13}^{-6} \left| \sqrt{3 - x} - \frac{15}{7} - \frac{x}{7} \right| dx \right| + \left| \int_{-6}^{-1} \left| \sqrt{3 - x} - \frac{15}{7} - \frac{x}{7} \right| dx \right| - \left| \int_{-1}^{1} \left| x^2 - 1 - \frac{15}{7} - \frac{x}{7} \right| dx \right| =$$

$$= \left| -\frac{2}{3}\sqrt{(3 - x)^3} - \frac{15}{7}x - \frac{x^2}{14} \right|_{-13}^{-6} \Bigg| - \left| -\frac{2}{3}\sqrt{(3 - x)^3} - \frac{15}{7}x + \frac{x^2}{14} \right|_{-6}^{-1} \Bigg| + \left| \frac{x^3}{3} - \frac{8}{7}x + \frac{x^2}{14} \right|_{-1}^{1} \Bigg| =$$

$$\left| 18 \quad \frac{90}{7} \quad \frac{18}{7} \mid \frac{128}{3} \quad \frac{195}{7} \quad \frac{169}{14} \right| \quad \left| \frac{16}{3} \quad \frac{15}{7} \quad \frac{1}{14} \quad 18 \quad \frac{90}{7} \quad \frac{18}{7} \right| \quad \left| \frac{1}{3} \quad \frac{8}{7} \mid \frac{1}{14} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{8}{7} \quad \frac{1}{14} \right|$$

$$\left| 18 \quad \frac{90}{7} \quad \frac{18}{7} \mid \frac{128}{3} \quad \frac{195}{7} \quad \frac{169}{14} \right| \quad \left| \frac{16}{3} \quad \frac{15}{7} \quad \frac{1}{14} \quad 18 \quad \frac{90}{7} \quad \frac{18}{7} \right| \quad \left| \frac{1}{3} \quad \frac{8}{7} \mid \frac{1}{14} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{8}{7} \quad \frac{1}{14} \right| \quad \frac{1}{6} \quad \frac{23}{42} \mid \frac{34}{21} \quad \frac{7}{3}$$

126. **Página 233**



Área $\int_0^{40} 30\sqrt{2x+1}\,dx = 10\sqrt{(2x+1)^3}\Big|_0^{40} = 7290 - 10 = 7280$

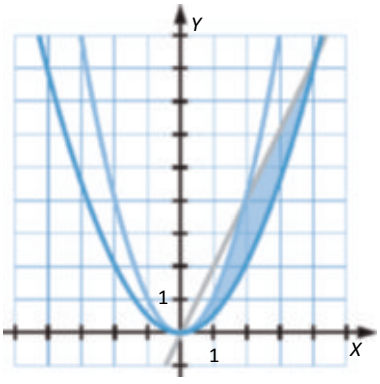
127. **Página 233**

a) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$f(x) = g(x) \rightarrow x^2 - \frac{x^2}{2} = x = 0$

$f(x) = h(x) \rightarrow x^2 - 2x = \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$g(x) = h(x) \rightarrow \frac{x^2}{2} - 2x = \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$



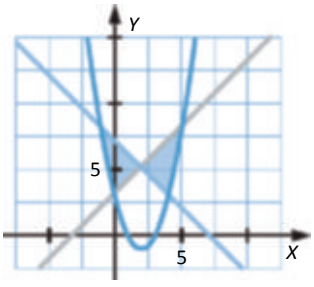
$$\text{Área} = \left|\int_0^2 \left|x^2 - \frac{x^2}{2}\right| dx\right| + \left|\int_2^4 \left|\frac{x^2}{2} - 2x\right| dx\right| = \left|\left|\frac{x^3}{6}\right|_0^2\right| + \left|\frac{x^3}{6} - x^2\Big|_2^4\right| = \left|\frac{4}{3}\right| - \left|\frac{32}{3} - 16 - \frac{4}{3} - 4\right| = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 4$$

b) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$f(x) = g(x) \rightarrow x + 3 = x^2 - 4x + 3 = \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}$

$f(x) = h(x) \rightarrow x - 3 = -x + 7 \rightarrow x = 2$

$g(x) = h(x) \rightarrow x^2 - 4x + 3 = x + 7 = \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$



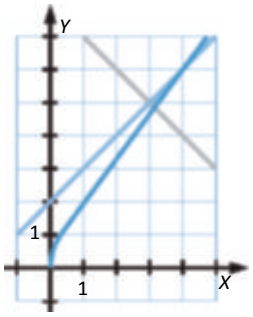
$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^0 (x+7) - (x^2 - 4x + 3)\,dx\right| + \left|\int_0^2 (x+3) - (x+7)\,dx\right| + \left|\int_2^4 (x+3) - (x+7)\,dx\right| + \left|\int_4^5 (x+3) - (x^2 - 4x + 3)\,dx\right|$$

$$\left|\int_{-1}^0 -x^2 + 3x + 4\,dx\right| + \left|\int_0^2 -4\,dx\right| + \left|\int_2^4 -4\,dx\right| + \left|\int_4^5 x^2 - 5x\,dx\right|$$

$$= \left|-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x\Big|_{-1}^0\right| - \left|x^2 - 4x\Big|_0^2\right| - \left|x^2 - 4x\Big|_2^4\right| + \left|\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2}\Big|_4^5\right| =$$

$$\left|\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4\right| + |4 - 8| + |4 - 8| + \left|\frac{125}{3} - \frac{125}{2} - \frac{64}{3} - 40\right| + \frac{13}{6} + 4 + 4 + \frac{13}{6} + \frac{37}{3}$$

c) Hallamos los puntos de corte de las funciones:



$f(x) = g(x) \rightarrow -x - 8 = x - \sqrt{x} - x = \frac{33}{8} - \frac{\sqrt{65}}{8}$ · · 3,12

$f(x) = h(x) \rightarrow -x + 8 = x + 2 - x = 3$

$g(x)$ $h(x)$ · x $\sqrt{x}$ x 2 · x 4

$$\text{Área} = \left| \int_{3}^{3,12} x - 2 - x - 8 \; dx \right| - \left| \int_{3,12}^{4} x - \sqrt{x} - x - 2 \; dx \right| = \left| x^2 - 6x \,{}_{3}^{3,12} \right| + \left| \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 2x \,{}_{3,12}^{4} \right| =$$

$\left| 3,12^{\,2} \quad 6 \cdot 3,12 \quad 9 \; \text{I} \; 18 \right| \quad \left| \frac{16}{3} \quad 8 \quad \frac{2}{3}\sqrt{3,12^{\,3}} \quad 2 \cdot 3,12 \right| \quad 0,01 \; \text{I} \; 0,1 \quad 0,11$

128. **Página 233**

$f(x)$ $\sqrt{x}$ $g(x) - -\sqrt{x}$ $h(x)$ $\frac{3 \quad x}{2}$

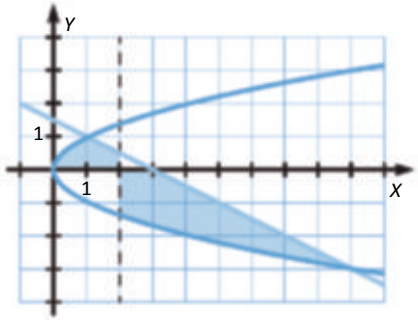
Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$f(x)$ $h(x)$ · $\sqrt{x}$ $\frac{3 \quad x}{2}$ · x 1

$g(x)$ $h(x)$ · $\sqrt{x}$ $\frac{3 \quad x}{2}$ · x 9

$f(x) = 0 - g(x) = 0 \rightarrow x = 0$

$h(x) = 0 \rightarrow x = 3$



$$\text{Área} = \left| \int_{0}^{1} \sqrt{x} \; dx \right| - \left| \int_{1}^{2} \frac{3 - x}{2} \; dx \right| - \left| \int_{2}^{3} -\sqrt{x} \; dx \right| - \left| \int_{3}^{9} \left| \sqrt{x} - \frac{3 - x}{2} \right| dx \right| =$$

$$= \left| \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \,{}_{0}^{1} \right| - \left| \frac{3}{2}x - \frac{x^2}{4} \,{}_{1}^{2} \right| + \left| -\frac{2}{3}\sqrt{x^3} \,{}_{2}^{3} \right| - \left| \left| \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{3}{2}x + \frac{x^2}{4} \,{}_{3}^{9} \right| \right| =$$

$\left| \frac{2}{3} \right| \quad \left| 3 \quad 1 \quad \frac{3}{2} \; \text{I} \; \frac{1}{4} \right| \quad \left| \quad 2\sqrt{3} \quad \frac{4}{3}\sqrt{2} \right| \quad \left| 18 \quad \frac{27}{2} \; \text{I} \; \frac{81}{4} \quad 2\sqrt{3} \quad \frac{9}{2} \quad \frac{9}{4} \right|$

$$= \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{3} - 27 - 2\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - 4\sqrt{3} - \frac{341}{12}$$

129. **Página 233**

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^2 = 2\sqrt{x} \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{4} \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_0^{\sqrt[3]{4}} 2\sqrt{x} - x^2 \, dx \right| = \left| \frac{4}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\sqrt[3]{4}} \right| = \left| \frac{8}{3} - \frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3}$$

130. **Página 233**

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^2 \quad 1 \quad ax \quad 1 \cdot x(x \quad a) \quad 0 \cdot \begin{cases} x & 0 \\ x & a \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_0^a x^2 - ax \, dx \right| = \left| \frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \Big|_0^a \right| = \left| \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2} \right| = \left| \frac{a^3}{6} \right| = 36 - \left| \frac{a^3}{6} \right| = 36 - \begin{cases} \frac{a^3}{6} = 36 \rightarrow a = 6 \\ \frac{a^3}{6} = -36 \rightarrow a = -6 \end{cases}$$

131. **Página 233**

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$-x^2 - 4 - a \rightarrow x^2 - 4 - a - \begin{cases} x - -\sqrt{4-a} \\ x - -\sqrt{4-a} \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-\sqrt{4-a}}^{\sqrt{4-a}} x^2 - 4 - a \, dx \right| = \left| \frac{x^3}{3} - 4x - ax \Big|_{-\sqrt{4-a}}^{\sqrt{4-a}} \right| =$$

$$= \left| \frac{\sqrt{4-a}^{\,3}}{3} - 4\sqrt{4-a} + a\sqrt{4-a} + \frac{\sqrt{4-a}^{\,3}}{3} - 4\sqrt{4-a} - a\sqrt{4-a} \right| =$$

$$= \left| 2 \cdot \frac{\sqrt{4-a}^{\,3}}{3} - 8\sqrt{4-a} - 2a\sqrt{4-a} \right| = \left| \sqrt{4-a} \left[\frac{2}{3}(4-a) - 8 - 2a \right] \right| = \left| -\frac{4}{3}\sqrt{4-a^{\,3}} \right|$$

$$\text{Área} = \frac{4}{3} \rightarrow \left| -\frac{4}{3}\sqrt{4-a^{\,3}} \right| = \frac{4}{3} - \begin{cases} \frac{4}{3}\sqrt{4-a^{\,3}} = \frac{4}{3} \rightarrow 4-a^{\,3} = 1 - a = 3 \\ \frac{4}{3}\sqrt{4-a^{\,3}} = -\frac{4}{3} \rightarrow 4-a^{\,3} = -1 - a = 5 \end{cases}$$

132. **Página 233**

Si $a > 1$, las funciones no determinan una región cerrada.

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$1 - x^2 - a \rightarrow x^2 - 1 - a - \begin{cases} x - -\sqrt{1-a} \\ x - -\sqrt{1-a} \end{cases}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-\sqrt{1-a}}^{\sqrt{1-a}} x^2 - 1 - a \, dx \right| = \left| \frac{x^3}{3} - x + ax \Big|_{-\sqrt{1-a}}^{\sqrt{1-a}} \right| = \left| \frac{\sqrt{1-a}^{\,3}}{3} - \sqrt{1-a} + a\sqrt{1-a} - \frac{\sqrt{1-a}^{\,3}}{3} - \sqrt{1-a} - a\sqrt{1-a} \right| =$$

$$= \left| 2 \quad \frac{\sqrt{1-a}^{\,3}}{3} - 2\sqrt{1-a} - 2a\sqrt{1-a} \right| = \left| \sqrt{1-a} \left[\frac{2}{3}(1-a) - 2 - 2a \right] \right| = \left| -\frac{4}{3}\sqrt{1-a^{\,3}} \right| = \frac{4}{3}\sqrt{1-a^{\,3}} \quad \forall a - \cdots, 1$$

133. **Página 233**

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$x^2 \quad 1 \cdot \begin{cases} x & 1 \\ x & 1 \end{cases}$

$$\text{Área total} = \int_{-1}^{1} 1 - x^2 \, dx = x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3} - 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Entonces el área de cada una de las parcelas será la mitad, es decir, $\frac{2}{3}$.

$$\text{Área} = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} a - x^2 \, dx = ax - \frac{x^3}{3}\Big|_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} = a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} + a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} = \frac{4}{3}a\sqrt{a}$$

Área $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}a\sqrt{a} \quad \frac{2}{3} \cdot a\sqrt{a} \quad \frac{1}{2} \cdot a^3 \quad \frac{1}{4} \cdot a \quad \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot a \quad \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$

134. **Página 233**

a) Para que la curva y la recta delimiten una región del plano, tienen que cortarse en dos puntos.

$x^2 \quad 2x \quad 3 \quad 2x \quad m \cdot x^2 \quad 3 \quad m \cdot x \quad \pm\sqrt{3 \mid m}$

Si $3 + m = 0 \rightarrow m = -3 \rightarrow$ La curva y la recta se cortarán solamente en un punto, en $x = 0$.

Si $3 - m \cdot 0 \rightarrow \quad m \cdot -3 \rightarrow$ La raíz no existe, por lo que las funciones no se cortan.

Si $3 - m \cdot 0 \rightarrow \quad m \cdot -3 \rightarrow$ Las dos funciones delimitan una región en el plano.

b) Las primeras coordenadas de los puntos de corte serán: $\sqrt{3 \quad m}$ y $\sqrt{3 \quad m}$. Entonces:

$$\text{Área} = \left| \int_{-\sqrt{3+m}}^{\sqrt{3+m}} x^2 + 2x - 3 - 2x - m \, dx \right| = \left| \int_{-\sqrt{3+m}}^{\sqrt{3+m}} x^2 - 3 - m \, dx \right| = \left| \frac{x^3}{3} - (3-m)x \Big|_{-\sqrt{3+m}}^{\sqrt{3+m}} \right| =$$

$$- \left| \frac{(3-m)\sqrt{3-m}}{3} - (3+m)\sqrt{3-m} - \frac{(3-m)\sqrt{3-m}}{3} - (3-m)\sqrt{3-m} \right| - \left| - \frac{4(3-m)\sqrt{3-m}}{3} \right| - \frac{4(3-m)\sqrt{3-m}}{3}$$

Como $\frac{4(3-m)\sqrt{3+m}}{3} = 36 - (3+m)\sqrt{3-m} = 27 - (3-m)^2(3-m) = 27^2 - (3+m)^3 = 3^{2\ 3} \rightarrow 3 - m = 9 - m = 6$

135. **Página 233**

a) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$x \quad 2 \quad 4 \quad x^2 \cdot x^2 \quad x \quad 2 \quad 0 \cdot \begin{cases} x & 2 \\ x & 1 \end{cases}$

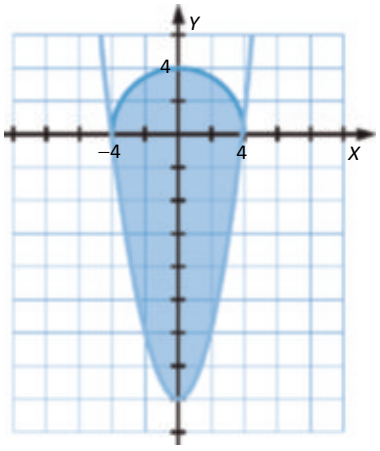
$$\text{Área} = \left| \int_{-2}^{1} x + 2 - 4 + x^2 \, dx \right| = \left| \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{1} \right| = \left| \frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{3} - 2 - 4 - \frac{8}{3} \right| = \left| -\frac{9}{2} \right| = \frac{9}{2}$$

b) Basta con tomar una recta paralela al eje *X*, $y = a$, de tal forma que:

$a \quad 2 \quad \frac{9}{2} \cdot a \quad \frac{9}{4} \cdot p(x) \quad \frac{9}{4}$

136. Página 233

a) La ecuación de una circunferencia es $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. En este caso tenemos una circunferencia de radio 4; por tanto, la función que tenemos es $y = \sqrt{16 - x^2}$.



b) Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$\sqrt{16 - x^2} = x^2 - 16 \cdot 16 - x^2 = x^4 - 32x^2 + 16^2 = x^4 - 31x^2 + 240 = 0 \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \\ x = \sqrt{15} \\ x = -\sqrt{15} \end{cases}$$

Como solo tomamos el sentido positivo de la circunferencia, las funciones se cortan en $x = -4$ y $x = 4$.

$$\text{Área} = \left| \int_{-4}^{4} \sqrt{16 - x^2} - x^2 + 16 \, dx \right| = \left| \int_{-4}^{4} \sqrt{16 - x^2} \, dx \right| + \left| -\frac{x^3}{3} - 16x \right|_{-4}^{4}$$

Realizamos el siguiente cambio de variable:

$$x = 4 \operatorname{sen} t \rightarrow dx = 4 \cos t \, dt \qquad x = -4, 4 \rightarrow t = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$$

$$\text{Área} = \left| \int_{-4}^{4} \sqrt{16 - x^2} \, dx \right| - \left| -\frac{x^3}{3} + 16x \right|_{-4}^{4} = \left| -\frac{x^3}{3} - 16x \right|_{-4}^{4} - \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 4 \cos t \sqrt{16 - 16 \operatorname{sen}^2 t} \, dt \right| =$$

$$= -\frac{64}{3} + 64 - \frac{64}{3} - 64 - \left| 16 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 t \, dx \right| = \frac{256}{3} - \left| 16 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} \, dx \right| = \frac{256}{3} - \left| 8t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t \right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{256}{3} - 8\pi$$

c) $\left| \frac{256}{3} - 8\pi \right| \cdot 3 = 331{,}40$ €

d) $\frac{256}{3} - 8\pi = 110{,}47 \text{ m}^2$

Tendría que comprar 3 paquetes de 50 m², es decir, se gastaría 300 €. Le compensa la oferta.

137. **Página 233**

Hallamos los puntos de corte de las funciones: $6kx^2 - x = 0 \rightarrow x\ 6kx - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\dfrac{1}{6k} \end{cases}$

$\left| \int_0^k 6kx^2 - x \ dx \right| = \left| 2kx^3 - \frac{x^2}{2} \right|_0^k = \left| 2k^4 - \frac{k^2}{2} \right| = 2k^4 - \frac{k^2}{2}$ porque $k > 0$.

Por tanto: $2k^4 - \frac{k^2}{2} = k^4 + k^2 - 2^2 \rightarrow 4k^4 + k^2 = 2k^4 + 2k^4 - 8k^2 - 8 \rightarrow 9k^2 - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} k = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \\ k = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$

Como buscamos el valor positivo de k $\rightarrow k = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. **Página 292**

El beneficio viene dado por: $R(x) = 2300 - (x - 50)^2$

Vendiendo 30 pares: $R(30) \quad 2300 \quad (30 \quad 50)^2 \quad 1900$

Vendiendo 25 pares: $R(25) = 2300 - (25 - 50)^2 = 1675$

2. **Página 292**

Con la venta de 50 pares de zapatillas se obtiene el beneficio máximo, por lo que si los precios no varían, los beneficios empezarían a disminuir.

Si se venden menos de 50 pares, la empresa obtiene beneficios, pero no llegan al beneficio máximo.

3. **Página 292**

Veamos para qué valores de x la función de beneficio es positiva. Para ello, buscaremos los puntos en los que dicha función se anula:

$R(x) = 0 \rightarrow 2300 - (x - 50)^2 = 0 \leftrightarrows \begin{cases} x_1 = -10(\sqrt{23} - 5) \dots 2{,}04 \\ x_2 = 10(5 + \sqrt{23}) \dots 97{,}96 \end{cases}$

La función de beneficio se anula en $x = 2{,}04$ y en $x = 97{,}96$. Comprobemos que en valores intermedios la función es positiva, tomando, por ejemplo, $x = 10$.

$R(10) = 700 \therefore 0$

Tenemos, por tanto, que la función de beneficio toma valores positivos en el intervalo $(2{,}04;\ 97{,}96)$, pero como estamos trabajando con pares de zapatos, los valores deben ser enteros, por lo que diremos que obtenemos beneficio en el intervalo $3,\ 97$.

4. **Página 292**

Como ya hemos hallado el intervalo en el que se obtiene beneficio, el mínimo beneficio se obtendrá en alguno de los extremos del intervalo. Veamos en cuál:

$R(3) = 91 = R(97)$

En ambos extremos se obtiene el mismo beneficio, que es de 91 €.

Probabilidad

10

ACTIVIDADES

1. Página 236

No es lo mismo ser primero que segundo o el tercero: importa el orden. No se pueden repetir elementos ya que un piloto no puede estar en dos posiciones.

Tenemos que calcular las variaciones de 24 elementos tomados de 3 en 3.

$$V_{24,3} = \frac{24!}{(24-3)!} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot \cancel{21!}}{\cancel{21!}} = 12144$$

2. Página 236

Importa el lugar en que elegimos cada elemento, ya que cada elemento representa un partido. Se pueden repetir elementos, puede haber dos partidos con el mismo resultado.

Tenemos que calcular las variaciones con repetición de 3 elementos tomados de 14 en 14.

$VR_{3,14} = 3^{14} = 4\,782\,969 \rightarrow$ Hay 4 782 969 formas de cubrir la quiniela.

3. Página 237

No influye el orden, las alineaciones son iguales independientemente de las posiciones de los seis jugadores de campo. No se pueden repetir elementos, no se puede repetir un jugador.

Tenemos que calcular las combinaciones de 12 elementos, los 12 posibles jugadores de campo tomados de 6 en 6.

$$C_{12,6} = \frac{12!}{6!(12-6)!} = 924$$

Las posibles alineaciones vienen dadas por todas las alineaciones de los jugadores de campo con cada uno de los porteros, es decir, $924 \cdot 2 = 1848 \rightarrow$ Hay 1 848 posibles alineaciones.

4. Página 237

No influye el orden en que elijamos los números. No se puede elegir el mismo número dos veces.

Tenemos que calcular las combinaciones de 49 elementos tomados de 6 en 6.

$$C_{49,6} = \frac{49!}{6!(49-6)!} = 13\,983\,816$$ — Hay 13 983 816 posibles combinaciones.

5. Página 237

Las distintas posibilidades dependen del orden en que se ven las películas. Las películas no se pueden repetir.

Tenemos que calcular las permutaciones de 4 elementos.

$P_4 = 4! = 24$ — Pueden visualizar las películas de 24 formas distintas.

6. **Página 238**

No importa el orden en que se reparten las cuñas de queso, ya que da igual quién reciba antes y quién después.

Tenemos que calcular las combinaciones de 20 elementos tomados de 4 en 4.

$C_{20,4} = \frac{20!}{4!(20-4)!} = 4\,845 \rightarrow$ El reparto se puede hacer de 4 845 formas.

Si nosotros obtenemos una cuña, quedan 3 cuñas para repartir entre 19 personas. Tenemos que calcular las combinaciones de 19 elementos tomados de 3 en 3.

$C_{19,3} = \frac{19!}{3!(19-3)!} = 969 \rightarrow$ El reparto se puede hacer de 969 formas.

7. **Página 238**

Influye el orden. Se pueden repetir elementos, ya que hay más de tres bolas de cada color.

a) Tenemos que calcular las variaciones con repetición de 2 elementos tomados de 3 en 3.

$VR_{2,3} = 2^3 = 8 \rightarrow$ Hay 8 formas de extraer las bolas.

b) Dado que la primera bola ya está seleccionada, tenemos que calcular las variaciones con repetición de 2 elementos tomados de 2 en 2.

$VR_{2,2} = 2^2 = 4 \rightarrow$ Hay 4 formas de extraer las bolas.

8. **Página 239**

a) El espacio muestral es:

$E =$ {Daniel y Manuel, Daniel y Óscar, Daniel y Montse, Daniel y Andrea, Daniel y Luisa, Manuel y Óscar, Manuel y Montse, Manuel y Andrea, Manuel y Luisa, Óscar y Montse, Óscar y Andrea, Óscar y Luisa, Montse y Andrea, Montse y Luisa, Andrea y Luisa}

b) Hay 9 sucesos con personas de distinto sexo y 6 sucesos formados por personas del mismo sexo.

9. **Página 239**

El espacio muestral es:

$E =$ {2 y 3, 2 y 4, 2 y 5, 2 y 6, 2 y 7, 2 y 8, 3 y 3, 3 y 4, 3 y 5, 3 y 6, 3 y 7, 3 y 8, 4 y 3, 4 y 4, 4 y 5, 4 y 6, 4 y 7, 4 y 8, 5 y 3, 5 y 4, 5 y 5, 5 y 6, 5 y 7, 5 y 8}

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Dos sucesos compatibles son $A =$ «Los dos números son iguales» y $B =$ «Los dos números son pares».

Dos sucesos incompatibles son $A =$ «Los dos números son iguales» y $B =$ «Un número es par y el otro impar».

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Un suceso seguro es $A =$ «Los dos números son mayores que 1».

Un suceso imposible es $B =$ «Los dos números son mayores que 6».

10. **Página 240**

a) $A \cup B =$ «Sacar una figura o un oro»

b) $A \cap B =$ «Sacar una figura de oros»

c) $\overline{A} =$ «No sacar una figura»

d) $\overline{B} =$ «No sacar un oro»

11. **Página 240**

a) $A \cup B = 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10$

b) $A \cap B = 6$

c) $\overline{A \cup B} = 1, 5, 7$

d) $\overline{A \cap B} = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10$

12. **Página 241**

a)

N.º de lanzamientos	100	200
N.º de caras	24	51
Frecuencias relativas	0,24	0,255

Es razonable concluir que la moneda está trucada ya que, si no lo estuviese, las frecuencias relativas se deberían aproximar a 0,5.

b) Dado que la frecuencia relativa del suceso elemental «Salir cara» se aproxima a 0,25, cabe pensar que las probabilidades de los sucesos elementales vienen dadas como sigue:

$P(\text{Salir cara}) = 0{,}25$

$P(\text{Salir cruz}) = 1 - P(\text{Salir cara}) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

13. **Página 241**

N.º de lanzamientos	140	98	122
N.º de aciertos	119	83	103
Frecuencias relativas	0,85	0,847	0,844

Las frecuencias relativas tienden a 0,85; luego le asignaremos esa probabilidad: $P(\text{Acierto}) = 0{,}85$.

14. **Página 242**

El espacio muestral es $E = \{\text{Caramelo de fresa, caramelo de naranja, caramelo de limón}\}$.

$$P(\text{Limón}) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{7}{15} = 0{,}467$$

$$P(\text{No fresa}) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{10}{15} = 0{,}667$$

15. **Página 242**

El número de casos posibles se halla mediante las combinaciones de 8 elementos tomados de 2 en 2.

$$C_{8,2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28$$

El número de casos favorables son 7, ya que vienen dados por los posibles pares del libro de Matemáticas con los otros 7 libros.

$$P(\text{Un libro de matemáticas}) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{7}{28} = 0,25$$

16. **Página 243**

El espacio muestral está formado por 36 sucesos elementales con la misma probabilidad:

$E = \{1$ y $1, 1$ y $2, 1$ y $3, 1$ y $4, 1$ y $5, 1$ y $6, 2$ y $1, 2$ y $2, 2$ y $3, 2$ y $4, 2$ y $5, 2$ y $6, 3$ y $1, 3$ y $2, 3$ y $3, 3$ y $4, 3$ y $5, 3$ y $6,$
4 y $1, 4$ y $2, 4$ y $3, 4$ y $4, 4$ y $5, 4$ y $6, 5$ y $1, 5$ y $2, 5$ y $3, 5$ y $4, 5$ y $5, 5$ y $6, 6$ y $1, 6$ y $2, 6$ y $3, 6$ y $4, 6$ y $5, 6$ y $6\}$

$A \cap B =$ 5 y 6, 6 y 5 $\rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{36} = 0,056$

17. **Página 243**

a) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cdot B}) = 1 - P(A \cdot B)$

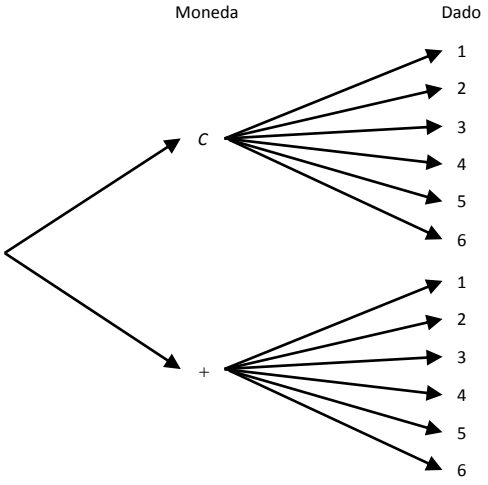
$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,26 = 0,76 \rightarrow P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0,76 = 0,24$

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A \cdot B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cdot C)$

$P(A \cdot B \cup C) = P(A \cup B) \cdot P(C) = 0,76 - 0,17 = 0,93 \rightarrow P(\overline{A} \cup \overline{B} \cap \overline{C}) = 1 - 0,93 = 0,07$

18. **Página 244**

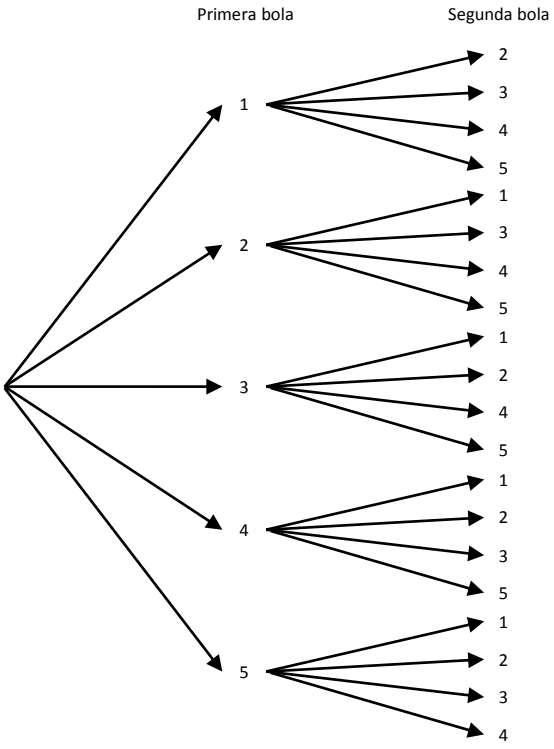
a)



El espacio muestral es:

$E = \{C1, C2, C3, C4, C5, C6, +1, +2, +3, +4, +5, +6\}$

b)



El espacio muestral es:

$E = \{1–2, 1–3, 1–4, 1–5, 2–1, 2–3, 2–4, 2–5, 3–1, 3–2, 3–4, 3–5, 4–1, 4–2, 4–3, 4–5, 5–1, 5–2, 5–3, 5–4\}$

19. **Página 244**

	Chicos	**Chicas**	**Total**
Gafas	**6**	**2**	$6 + 2 = 8$
No gafas	$14 - 6 = 8$	$8 - 2 = 6$	$6 + 8 = 14$
Total	**14**	$22 - 14 = 8$	**22**

$$P\ \text{Chica y no gafas} = \frac{6}{22} = 0{,}27$$

20. **Página 245**

N.º de personas que no van a trabajar $= 32 - 18 = 14$

N.º de hombres que no van a trabajar $= 14 - 5 = 9$

N.º total de hombres $= 10 + 9 = 19$

$$P\ \text{No va a trabajar / Hombre} = \frac{\text{N.º no van a trabajar y hombres}}{\text{N.º hombres}} = \frac{9}{19} = 0{,}47$$

21. **Página 245**

N.º de personas que saben un idioma = 25 − 20 = 5 N.º de mujeres que saben un idioma = 5 − 3 = 2

N.º total de mujeres = 12 + 2 = 14

$$P(\text{Dos idiomas / Mujer}) = \frac{\text{N.º dos idiomas y mujeres}}{\text{N.º mujeres}} = \frac{12}{14} = 0{,}86$$

22. **Página 246**

A = «Come pan blanco» B = «Come pan integral»

a) $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}2}{0{,}55} = 0{,}36$

b) $P(\overline{B}/A) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = \dfrac{0{,}3 - 0{,}2}{0{,}3} = 0{,}33$

c) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $P(A \cap B) = 0{,}55 \cdot 0{,}3 = 0{,}165$ $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - 0{,}165 = 0{,}835$

23. **Página 246**

a) $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}05}{0{,}3} = 0{,}167$

b) $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}05}{0{,}4} = 0{,}125$

c) $P(B/\overline{A}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \dfrac{0{,}4 - 0{,}05}{1 - 0{,}3} = \dfrac{0{,}35}{0{,}7} = 0{,}5$

d) $P(A/\overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{0{,}3 - 0{,}05}{1 - 0{,}4} = \dfrac{0{,}25}{0{,}6} = 0{,}42$

e) $P(\overline{B}/\overline{A}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(\overline{A \cup B})}{1 - P(A)} = \dfrac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)} = \dfrac{1 - P(A) - P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)}$

$P(\overline{B}/\overline{A}) = \dfrac{1 - 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}05}{1 - 0{,}3} = \dfrac{0{,}35}{0{,}7} = 0{,}5$

24. **Página 247**

P(2.ª roja / 1.ª roja sin devolución) $= \dfrac{4}{9} = 0{,}44$ P(2.ª roja / 1.ª roja con devolución) $= \dfrac{5}{10} = 0{,}5$

25. **Página 247**

a) P(1.ª as y 2.ª oro) = P(As) · P(Oro / As) = P(As de oros) · P(Oro / As de oros) + P(As no oros) · P(Oro / As no oros)

$P(\text{1.ª as y 2.ª oro}) = \dfrac{1}{40} \cdot \dfrac{9}{39} + \dfrac{3}{40} \cdot \dfrac{10}{39} = 0{,}025$

b) P(1.ª as y 2.ª oro) = P(As) · P(Oro) $= \dfrac{4}{40} \cdot \dfrac{10}{40} = 0{,}025$

26. **Página 248**

B = «Tornillo defectuoso»

$$P(B) = P(M_1)\cdot P(B/M_1) + P(M_2)\cdot P(B/M_2) + P(M_3)\cdot P(B/M_3)$$

$$P(B) = 0{,}4\cdot 0{,}02 + 0{,}25\cdot 0{,}05 + 0{,}35\cdot 0{,}3 = 0{,}1255$$

27. **Página 248**

a) N = «Bola negra»

$$P(N) = P(U_1)\cdot P(N/U_1) + P(U_2)\cdot P(N/U_2) = 0{,}5\cdot\frac{12}{14} + 0{,}5\ \frac{10}{13} = 0{,}81$$

b) B = «Bola blanca»

$$P(B) = P(U_1)\cdot P(B/U_1) - P(U_2)\ P(B/U_2) = 0{,}5\cdot\frac{2}{14} - 0{,}5\cdot\frac{3}{13} = 0{,}19$$

28. **Página 249**

I = «Estudiantes de ingeniería»

C = «Estudiante de ciencias»

L = «Estudiante de letras»

T = «Terminan la carrera»

$$P(I/T) = \frac{P(I)\cdot P(T/I)}{P(I)\cdot P(T/I) - P(C)\cdot P(T/C) - P(L)\cdot P(T/L)} = \frac{0{,}18\cdot 0{,}6}{0{,}18\cdot 0{,}6 - 0{,}32\cdot 0{,}72 + 0{,}5\cdot 0{,}84} = 0{,}14$$

29. **Página 249**

$8B$ = «Urna con 8 bolas»

$5B$ = «Urna con 5 bolas»

$3B$ = «Urna con 3 bolas»

a) N = «Extraer bola negra»

$$P(N) = P(8B)\cdot P(N/8B) - P(5B)\cdot P(N/5B) - P(3B)\cdot P(N/3B) = \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8} - \frac{3}{9}\cdot\frac{2}{5} - \frac{2}{9}\cdot\frac{2}{3} = \frac{121}{270} = 0{,}45$$

b) $P(8B/N) = \dfrac{P(8B)\cdot P(N/8B)}{P(N)} = \dfrac{\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}}{0{,}45} = 0{,}37$

SABER HACER

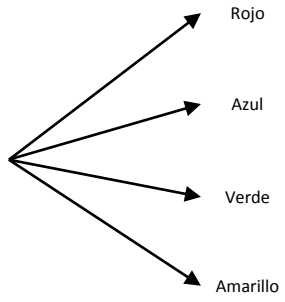
30. **Página 250**

En este caso los sucesos simples son:

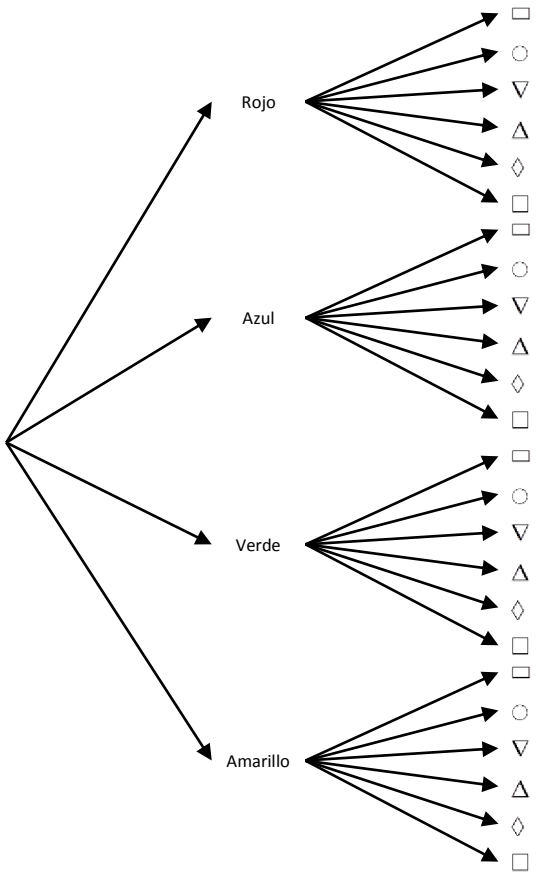
«Lanzar un dado tetraédrico equilibrado con las caras rojo, azul, verde y amarillo»

«Lanzar un dado cúbico equilibrado con las caras en el conjunto de símbolos $\neg, :, \nabla, \Delta, \Diamond, I$ »

Describimos el primer experimento:



Describimos el experimento total:



El espacio muestral está formado por las siguientes parejas de elementos:

$$E = \left\{ \begin{matrix} R,\neg \ , \ R,: \ , \ R,\nabla \ , \ R,\Delta \ , \ R,\Diamond \ , \ R, \ \ , \ Az,\neg \ , \ Az,: \ , \ Az,\nabla \ , \ Az,\Delta \ , \ Az,\Diamond \ , \ Az, \ \ , \ V,\neg \ , \\ V,: \ , \ V,\nabla \ , \ V,\Delta \ , \ V,\Diamond \ , \ V, \ \ , \ Am,\neg \ , \ Am,: \ , \ Am,\nabla \ , \ Am,\Delta \ , \ Am,\Diamond \ , \ Am, I \end{matrix} \right\}.$$

31. **Página 250**

$A = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26\}$

$B = \{11, 13, 23, 31, 41, 43, 53, 61\}$

$A \cap B = \{11, 13, 23\}$

32. **Página 250**

a) $A \cup B = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow 0{,}76 = 0{,}65 + 0{,}54 - P(A) \cdot P(B) \rightarrow P(A) \cdot P(B) = 0{,}43$

$P(A) \cdot P(B) = 0{,}65 \cdot 0{,}54 = 0{,}351 \neq P(A \cup B) = 0{,}43 \rightarrow$ Los sucesos no son independientes.

b) $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \rightarrow P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}54 - 0{,}43 = 0{,}11$

33. **Página 251**

El espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$P(1) = k$ $\qquad$ $P(6) = 3k$

$P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = \frac{1}{6}$

$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \rightarrow k + \frac{4}{6} + 3k = 1 \rightarrow k = \frac{1}{12}$

$P(6) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$P(\text{N.º primo}) = P(2) + P(3) + P(5) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

34. **Página 251**

A = «Falla la alarma 1» $\qquad$ B = «Falla la alarma 2»

$P(A) = 0{,}05$ $\qquad$ $P(B) = 0{,}01$

«Alguno de los dos funciona» $= \overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{A \cap B}$

$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - P(A) \cdot P(B) = 1 - 0{,}05 \cdot 0{,}01 = 0{,}9995$

35. **Página 251**

C = «Padecer de corazón» $\qquad$ O = «Padecer obesidad»

$P(C) = 0{,}12$ $\qquad$ $P(O) = 0{,}28$

$C \cap O$ = «Padecer ambas» $= P(C \cap O) = 0{,}05$

$P(C \cup O) = P(C) + P(O) - P(C \cap O) = 0{,}12 + 0{,}28 - 0{,}05 = 0{,}35$

36. **Página 252**

I = «Conexión a Internet» C = «Televisión por cable»

	Conexión a Internet	No conexión a Internet	
Televisión por cable	$P(I \cap C) = 0,2$	$P(\overline{I} \cap C)$	$P(C) = 0,33$
No televisión por cable	$P(I \cap \overline{C})$	$P(\overline{I} \cap \overline{C})$	$P(\overline{C})$
	$P(I) = 0,4$	$P(\overline{I})$	1

$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,33 = 0,67$

$P(\overline{I}) = 1 \quad P(I) = 1 \quad 0,4 = 0,6$

$P(\overline{I} \cap C) = P(C) - P(I \cap C) = 0,33 - 0,2 = 0,13$

$P(I \cap \overline{C}) = P(I) \quad P(I \cap C) = 0,4 \quad 0,2 = 0,2$

$P(\overline{I} \cap \overline{C}) = P(\overline{C}) - P(I \cap \overline{C}) = 0,67 - 0,2 = 0,47$

	Conexión a Internet	No conexión a Internet	
Televisión por cable	$P(I \cap C) = 0,2$	0,13	$P(C) = 0,33$
No televisión por cable	0,2	0,47	0,67
	$P(I) = 0,4$	0,6	1

P(Solo un servicio) $= P(I \cap \overline{C}) \cup P(\overline{I} \cap C) = 0,2 \quad 0,13 = 0,33$

37. **Página 252**

A_1 = «Sacar un dado normal» A_2 = «Sacar el dado trucado»

Los sucesos son independientes, si sacamos un dado normal no sacamos el trucado.

La unión de los sucesos es el total, o sacamos un dado normal o sacamos el trucado.

Calculamos la probabilidad de cada uno de los sucesos:

$P(A_1) = \frac{3}{4} = 0,75$ $P(A_2) = \frac{1}{4} = 0,25$

B = «Probabilidad de extraer 5»

Calculamos las probabilidades para A_2:

$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(6) = k$ $P(B/A_2) = 2k$

$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \quad 7k = 1 \quad k = \frac{1}{7} \rightarrow P(B/A_2) = \frac{2}{7}$

$P(B) = \sum_{i=1}^{2} P(A_i) \cdot P(B/A_i) = 0,75 \cdot \frac{1}{6} + 0,25 \cdot \frac{2}{7} = 0,196 \rightarrow$ La probabilidad de obtener 5 es 0,196.

38. **Página 253**

I = «Contratan el viaje por Internet»

T = «Pagan con tarjeta»

Los sucesos son independientes, pues si contratan por Internet, no contratan de otra forma.

Su unión da el espacio muestral: o contratan por Internet o no.

$P(I) = 0{,}2$

$P(T/I) = 0{,}7$

$P(\overline{T}) = 1 - P(I) = 0{,}8$

$P(T/\overline{T}) = 0{,}25$

$$P(I/T) = \frac{P(I)\cdot P(T/I)}{P(I)\cdot P(T/I) + P(\overline{T})\cdot P(T/\overline{T})} = \frac{0{,}2\cdot 0{,}7}{0{,}2\cdot 07 + 0{,}8\cdot 0{,}25} = 0{,}41$$

La probabilidad de que contratase sus vacaciones vía Internet es 0,41.

39. **Página 253**

A = «Fábrica A»

B = «Fábrica B»

C = «Fábrica C»

El componente no se hace en dos fábricas a la vez, son sucesos independientes.

Cada componente se elabora en una de las tres fábricas, la unión de los sucesos da el total.

$P(A) = 0{,}4$

$P(B) = 0{,}35$

$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - 0{,}4 - 0{,}35 = 0{,}25$

Err = «Componente con errores»

$P(Err/A) = 0{,}01$

$P(Err/B) = 0{,}02$

$P(Err/C) = 0{,}0005$

a) $P(Err) = P(A)\cdot P(Err/A) + P(B)\cdot P(Err/B) + P(C)\cdot P(Err/C)$

$P(Err) = 0{,}4\cdot 0{,}01 + 0{,}35\ 0{,}02 + 0{,}25\cdot 0{,}0005 = 0{,}011125$

b) $P(B/Err) = \frac{P(B)\cdot P(Err/B)}{P(Err)} = \frac{0{,}35\cdot 0{,}02}{0{,}011125} = 0{,}63$

ACTIVIDADES FINALES

40. **Página 254**

a) Calculamos el número total de números de 3 cifras impares sin repetición. Importa el orden, no se pueden repetir elementos. Tenemos que calcular las variaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3.

$$V_{5,3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \not{2}!}{\not{2}!} = 60$$

b) Calculamos el número total de números de 3 cifras impares con repetición. Importa el orden, se pueden repetir elementos. Tenemos que calcular las variaciones con repetición de 5 elementos tomados de 3 en 3.

$$VR_{5,3} = 5^3 = 125$$

a) Los números mayores de 150 son todos menos los que empiezan por 13, es decir, 3 números menores que 150. Así, los números mayores que 150 son $60 - 3 = 57$.

b) Los números mayores de 150 son todos menos los que empiezan por 11 y 13, es decir, $5 + 5 = 10$ números. Así, los números mayores que 150 son $125 - 10 = 115$.

Los números menores que 529 son los que empiezan por 1, 3 y 51.

a) Para obtener los números que empiezan por 1 o por 3, tenemos que calcular las variaciones de 4 elementos tomados de 2 en 2.

$$V_{4,2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \not{2}!}{\not{2}!} = 12$$

Además, hay 3 números que empiezan por 51. Así, los números menores que 529 son $12 + 3 = 15$.

b) Para obtener los números que empiezan por 1 o por 3, tenemos que calcular las variaciones con repetición de 4 elementos tomados de 2 en 2.

$$VR_{4,2} = 4^2 = 16$$

Hay 5 números que empiezan por 51. Así, los números menores que 529 son $16 + 5 = 21$.

41. **Página 254**

Calculamos todas las partidas posibles. No se pueden repetir elementos, un mismo jugador no puede jugar con dos colores. No importa el orden, da igual qué color le corresponda a cada jugador.

Tenemos que calcular las combinaciones de 10 elementos tomados de 4 en 4.

$$C_{10,4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = 210 \rightarrow \text{El campeonato durará } \frac{210}{10} = 21 \text{ semanas.}$$

42. **Página 254**

Tenemos 20 jugadores de campo para 10 posiciones. No importa el orden, da igual el orden en que escojamos los jugadores. No se pueden repetir elementos, un jugador no aparece dos veces.

Tenemos que calcular las combinaciones de 20 elementos tomados de 10 en 10.

$$C_{20,10} = \frac{20!}{10!(20-10)!} = 184\,756$$

Las posibles alineaciones vienen dadas por las posibles alineaciones de los jugadores de campo con cada uno de los 2 porteros: $2 \cdot 184\,756 = 369\,512 \rightarrow$ Hay 369 512 posibles alineaciones.

43. **Página 254**

El total de alineaciones viene dado por el producto de las posibles posiciones de los porteros, las de los defensas, las de los centrales y las de los delanteros. En todos los casos no se pueden repetir elementos, ya que un jugador no aparece dos veces en la alineación. No importa el orden, da igual el orden en que escojan a cada jugador dentro de su posición.

Hay 3 posibles porteros.

Para ver las posibles elecciones de defensas tenemos que calcular las combinaciones de 6 elementos tomados de 4 en 4.

$$C_{6,4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = 15$$

Para ver las posibles elecciones de centrales tenemos que calcular las combinaciones de 6 elementos tomados de 3 en 3.

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20$$

Para ver las posibles elecciones de delanteros tenemos que calcular las combinaciones de cuatro elementos tomados de 3 en 3.

$$C_{4,3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

El número total de posibles alineaciones es $3 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 4 = 3\,600$.

44. **Página 254**

No importa el orden en que coge los libros. No se pueden repetir elementos, un mismo libro no aparece dos veces.

Tenemos que calcular las combinaciones de 10 elementos tomados de 3 en 3.

$$C_{10,3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$$

Puede coger los libros de 120 formas distintas.

Si uno de los libros está fijado, tenemos que calcular las combinaciones de 9 elementos tomados de 2 en 2.

$$C_{9,2} = \frac{9!}{2!(9-2)!} = 36$$

Hay 36 combinaciones en las que aparece el libro *El señor del cero*.

45. **Página 254**

Importa el orden en que se colocan las notas musicales en la melodía. Se pueden repetir elementos, una nota puede aparecer varias veces en la melodía.

Tenemos que calcular las variaciones con repetición de 7 elementos tomados de 150 en 150.

$$VR_{7,150} = 7^{150}$$

El número de melodías posibles es 7^{150}.

46. **Página 254**

Importa el orden en el que seleccionamos cada resultado. Se pueden repetir elementos, dos partidos pueden tener el mismo resultado.

Tenemos que calcular las variaciones con repetición de 3 elementos tomados de 5 en 5.

$VR_{3,5} = 3^5 = 243$

Para estar seguros de acertar tenemos que gastar $0{,}5 \cdot 243 = 121{,}50$ €.

47. **Página 254**

Importa el orden en que escogemos cada color. Se pueden repetir elementos, se pueden elegir dos cuerdas del mismo color.

Tenemos que calcular las variaciones con repetición de 10 elementos tomados de 5 en 5.

$VR_{10,5} = 10^5 = 100\,000$

Se pueden hacer 100 000 collares.

48. **Página 254**

Importa el orden, no es lo mismo ser primero que segundo. No se pueden repetir elementos, un piloto no puede ocupar dos posiciones distintas.

Tenemos que calcular las variaciones de 12 elementos tomados de 3 en 3.

$V_{12,3} = \dfrac{12!}{(12-3)!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1\,320$

Hay 1 320 pódiums diferentes.

49. **Página 254**

Importa el orden en que aparecen los símbolos. Se pueden repetir elementos, un mismo símbolo puede aparecer más de una vez.

Las posibles series de como máximo 4 símbolos son dadas por la suma de las series de un símbolo, las series de dos símbolos, las series de 3 símbolos y las series de 4 símbolos.

Tenemos que calcular las variaciones con repetición de 2 elementos.

$VR_{2,1} - VR_{2,2} - VR_{2,3} + VR_{2,4} = 2 - 2^2 - 2^3 - 2^4 = 30$

Se pueden realizar 30 series.

50. **Página 254**

Importa el sitio del coche donde se sienta cada uno, es decir, importa el orden. No se pueden repetir elementos. Se cogen todos los elementos.

Tenemos que calcular las permutaciones de 10 elementos.

$P_{10} = 10! = 3\,628\,800$

Se pueden repartir de 3 628 800 formas diferentes en los dos coches.

Para estudiar las formas en las que Daniel y Manuel van juntos, Manuel puede sentarse en 8 asientos, dado que no puede conducir. Una vez sentado Manuel, Daniel tiene que sentarse en uno de los cuatro asientos que quedan libres en el coche en el que va Manuel. Ahora se tienen que sentar los 8 amigos, para ver las posibilidades que tienen para sentarse tenemos que calcular las permutaciones de 8 elementos.

$8 \cdot 4 \cdot P_8 = 8 \cdot 4 \cdot 8! = 1\,290\,240$

Para que Manuel y Daniel vayan juntos en el mismo coche, suponiendo que Manuel no puede conducir, hay 1 290 240 formas posibles.

51. **Página 254**

a) $\frac{3 \cdot V_{x+2,3}}{P_3} = \frac{5 \cdot V_{x+1,2}}{P_2} \rightarrow \frac{3 \cdot \frac{(x-2)(x-1)x\,(x-1)!}{(x-2-3)!}}{3!} = \frac{5 \cdot \frac{(x-1)x\,(x-1)!}{(x-1-2)!}}{2!} \rightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{5}{2} \rightarrow x - 2 = 5 \rightarrow x = 3$

b) $(C_{x,5} : C_{x,4}) \cdot C_{x,3} = 2x(x-1)(x-2) \rightarrow \frac{\frac{x!}{5!(x-5)!}}{\frac{x!}{4!(x-4)!}} \cdot \frac{x!}{3!(x-3)!} = 2x(x-1)(x-2) \rightarrow$

$\rightarrow \frac{4!(x-4)(x-5)!}{5 \cdot 4!(x-5)!} \cdot \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)!}{3!(x-3)!} = 2x(x-1)(x-2) \rightarrow \frac{x-4}{30} = 2 \rightarrow x = 64$

52. **Página 254**

a) El espacio muestral es $E = \{CC, C+, +C, ++\}$.

b) $P(\text{Una cara}) = \frac{\text{N.}^\circ\text{casos favorables}}{\text{N.}^\circ\text{casos posibles}} = \frac{2}{4} = 0{,}5$

53. **Página 254**

a) El espacio muestral es $E = \{CCC, CC+, C+C, C++, +CC, +C+, ++C, +++\}$.

b) $P(\text{Una cara}) = \frac{\text{N.}^\circ\text{casos favorables}}{\text{N.}^\circ\text{casos posibles}} = \frac{3}{8} = 0{,}375$

54. **Página 254**

a) El espacio muestral es:

$E = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36,$
$41, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66\}$

b) $P(\text{Suma menor que 6}) = \frac{\text{N.}^\circ\text{casos favorables}}{\text{N.}^\circ\text{casos posibles}} = \frac{10}{36} = 0{,}278$

55. **Página 254**

a) El espacio muestral es $E = \{11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44\}$.

b) $P(\text{Suma mayor que 6}) = \frac{\text{N.}^\circ\text{casos favorables}}{\text{N.}^\circ\text{casos posibles}} = \frac{3}{16} = 0{,}1875$

56. **Página 254**

a) El espacio muestral es:

$E = \{11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44, 51, 52, 53, 54, 61, 62, 63, 64\}$

b) $P(\text{Suma al menos 6}) = \frac{\text{N.°casos favorables}}{\text{N.°casos posibles}} = \frac{14}{24} = 0{,}583$

57. **Página 254**

a) El espacio muestral es:

$E = \{11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44, 51, 52, 53, 54, 61, 62, 63, 64, 71, 72, 73, 74,$
$81, 82, 83, 84, 91, 92, 93, 94, 10–1, 10–2, 10–3, 10–4, 11–1, 11–2, 11–3, 11–4, 12–1, 12–2, 12–3, 12–4\}$

b) $P(\text{Diferencia menor que 3}) = \frac{\text{N.°casos favorables}}{\text{N.°casos posibles}} = \frac{17}{48} = 0{,}3542$

58. **Página 254**

a) El espacio muestral es:

$E = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28,$
$31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}$

b) $P(\text{Diferencia menor que 3}) = \frac{\text{N.°casos favorables}}{\text{N.°casos posibles}} = \frac{16}{32} = 0{,}5$

59. **Página 254**

a) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ $\quad D = \{5, 10\}$

$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ $\quad F = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$C = \{3, 6, 9, 12\}$ $\quad G = \{1, 2, 3\}$

b) Son incompatibles los sucesos *A* y *B*, *C* y *D*, *D* y *G*, *F* y *G* porque tienen intersección vacía.

c) Tres sucesos son incompatibles cuando no pueden suceder de forma simultánea. En este caso, por ejemplo, los sucesos *A*, *C* y *G*, aunque dos a dos no son incompatibles, los tres no se pueden verificar a la vez. Por lo tanto, son tres sucesos incompatibles.

d) $P\ A = \frac{\text{N.°casos favorables}}{\text{N.°casos posibles}} = \frac{6}{12} = 0{,}5$

$P\ B = \frac{\text{N.°casos favorables}}{\text{N.°casos posibles}} = \frac{6}{12} = 0{,}5$

$P\ C = \frac{\text{N.°casos favorables}}{\text{N.°casos posibles}} = \frac{4}{12} = 0{,}33$

$P\ D = \frac{\text{N.°casos favorables}}{\text{N.°casos posibles}} = \frac{2}{12} = 0{,}167$

$P\ F = \frac{\text{N.°casos favorables}}{\text{N.°casos posibles}} = \frac{7}{12} = 0{,}583$

$P\ G = \frac{\text{N.°casos favorables}}{\text{N.°casos posibles}} = \frac{3}{12} = 0{,}25$

60. **Página 254**

La suma de todas las caras del dado es 21. Por tanto, el espacio muestral es $E = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$.

$$P(\text{Múltiplo de 3}) = \frac{\text{N.}^\circ\text{casos favorables}}{\text{N.}^\circ\text{casos posibles}} = \frac{2}{6} = 0{,}33$$

61. **Página 255**

El espacio muestral es:

$E = \{CCCC, CCC+, CC+C, C+CC, +CCC, CC++, C+C+, C++C, +CC+, +C+C, ++CC, C+++, +C++, ++C+, +++C, ++++\}$

a) $A \cup B = \{CCCC, CCC+, CC+C, CC++, C+CC, C+C+, C++C, C+++, +CCC, +CC+, +C+C, +C++, ++CC, ++C+, +++C\}$

$$P(A \cup B) = \frac{\text{N.}^\circ\text{casos favorables}}{\text{N.}^\circ\text{casos posibles}} = \frac{15}{16} = 0{,}9375$$

b) $A \cap B = \{+C++, ++CC, ++C+, +++C\}$

$$P(A \cap B) = \frac{\text{N.}^\circ\text{casos favorables}}{\text{N.}^\circ\text{casos posibles}} = \frac{4}{16} = 0{,}25$$

c) $A = \{CCCC, CCC+, CC+C, CC++, C+CC, C+C+, C++C, C+++, +CCC, +CC+, +C+C, +C++, ++CC, ++C+, +++C\}$

$$P(A) = \frac{\text{N.}^\circ\text{casos favorables}}{\text{N.}^\circ\text{casos posibles}} = \frac{15}{16} = 0{,}9375$$

d) $B = \{C+++, +C++, ++C+, +++C\}$

$$P(B) = \frac{\text{N.}^\circ\text{casos favorables}}{\text{N.}^\circ\text{casos posibles}} = \frac{4}{16} = 0{,}25$$

62. **Página 255**

El espacio muestral es:

$E = \{CCCCC, CCCC+, CCC+C, CC+CC, C+CCC, +CCCC,$
$CCC++, CC+C+, CC++C, C+CC+, C+C+C, C++CC, +CCC+, +CC+C, +C+CC, ++CCC,$
$CC+++, C+C++, C++C+, C+++C, +CC++, +C+C+, +C++C, ++CC+, ++C+C, +++CC,$
$C++++, +C+++, ++C++, +++C+, ++++C, +++++\}$

$C_0 = \{+++++\}$, $P(C_0) = \frac{1}{32} = 0{,}03125$

$C_1 = \{C++++, +C+++, ++C++, +++C+, ++++C\}$, $P(C_1) = \frac{5}{32} = 0{,}15625$

$C_2 = \{CC+++, C+C++, C++C+, C+++C, +CC++, +C+C+, +C++C, ++CC+, ++C+C, +++CC\}$, $P(C_2) = \frac{10}{32} = 0{,}3125$

$C_3 = \{CCC++, CC+C+, CC++C, C+CC+, C+C+C, C++CC, +CCC+, +CC+C, +C+CC, ++CCC\}$, $P(C_3) = \frac{10}{32} = 0{,}3125$

$C_4 = \{CCCC+, CCC+C, CC+CC, C+CCC, +CCCC\}$, $P(C_4) = \frac{5}{32} = 0{,}15625$

$C_5 = \{CCCCC\}$, $P(C_5) = \frac{1}{32} = 0{,}03125$

63. **Página 255**

$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = 0{,}083$ $P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = 0{,}167$ $P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = 0{,}25$

64. **Página 255**

a) $P(A) = \frac{6}{15} = 0{,}4$ $P(B) = \frac{5}{15} = 0{,}33$ $P(V) = \frac{4}{15} = 0{,}267$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}4 + 0{,}33 = 0{,}73$

c) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

d) $P(\overline{A \cup V}) = 1 - P(A \cup V) = 1 - P(A) - P(V) = 1 - (0{,}4 + 0{,}267) = 0{,}33$

65. **Página 255**

$P(A) = \frac{12}{25} \cdot \frac{11}{24} + \frac{6}{25} \cdot \frac{5}{24} + \frac{7}{25} \cdot \frac{6}{24} = 0{,}34$ $P(B) = \frac{12}{25} \cdot \frac{12}{24} + \frac{12}{25} \cdot \frac{11}{24} = 0{,}76$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}34 = 0{,}66$ $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}76 = 0{,}24$

$P(A \cap B) = \frac{12}{25} \cdot \frac{11}{24} = 0{,}22$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}34 + 0{,}76 - 0{,}22 = 0{,}88$

$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}34 - 0{,}22 = 0{,}12$

66. **Página 255**

a) Número de sucesos elementales de $A = 20$ $\rightarrow P(A) = \frac{20}{100} = 0{,}2$

Número de sucesos elementales de $B = 33$ $\rightarrow P(B) = \frac{33}{100} = 0{,}33$

Número de sucesos elementales de $C = 50$ $\rightarrow P(C) = \frac{50}{100} = 0{,}5$

Número de sucesos elementales de $D = 10$ $\rightarrow P(D) = \frac{10}{100} = 0{,}1$

Número de sucesos elementales de $F = 100$ $\rightarrow P(F) = \frac{100}{100} = 1$

Número de sucesos elementales de $G = 9$ $\rightarrow P(G) = \frac{9}{100} = 0{,}09$

b) Sí, por ejemplo, *D* y *G*.

c) Sí, por ejemplo, *A* y *B*.

d) No.

e) $A \cap B$ = «*n* es múltiplo de 15» $\rightarrow P(A \cap B) = \frac{6}{100} = 0{,}06$

$A \cup C$ = «*n* es múltiplo de 2 o de 3» $A \cap C$ = «*n* es múltiplo de 6»

$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(A \cap C) = 0{,}33 + 0{,}5 - \frac{16}{100} = 0{,}67$

67. **Página 255**

El espacio muestral es:

$E = \{00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 22, 23, 24, 25, 26, 33, 34, 35, 36, 44, 45, 46, 55, 56, 66\}$

$A = \{05, 15, 25, 35, 45, 55, 56\}$ $B = \{06, 15, 16, 24, 25, 26, 33, 34, 35, 36, 44, 45, 46, 55, 56, 66\}$

a) $P(A) = \frac{7}{28} = 0{,}25$ $P(B) = \frac{16}{28} = 0{,}57$

b) $A \cap B = \{15, 25, 35, 45, 55, 56\}$ $P(A \cap B) = \frac{6}{28} = 0{,}21$

c) $A \cup B = \{05, 06, 15, 16, 24, 25, 26, 33, 34, 35, 36, 44, 45, 46, 55, 56, 66\}$ $P(A \cup B) = \frac{17}{28} = 0{,}61$

d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}61 = 0{,}25 + 0{,}57 - 0{,}21$

68. **Página 255**

a) $P(\text{Al menos un 6 doble}) = \frac{1}{28} + \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{26} = 0{,}11$

b) $P(\text{Al menos un doble}) = 1 - P(\text{Ningún doble}) = 1 - \frac{21}{28}\frac{20}{27}\frac{19}{26} = 1 - 0{,}406 = 0{,}594$

69. **Página 255**

$P(A) = \frac{10}{40} = 0{,}25$ $P(B) = \frac{12}{40} = 0{,}3$

$P(D) = \frac{3}{40} = 0{,}075$ $P(C) = 1 - P(A) - P(B) - P(D) = 1 - 0{,}25 - 0{,}3 - 0{,}075 = 0{,}475$

70. **Página 255**

$P(\text{As y rey}) = P(\text{1.ª as y 2.ª rey}) + P(\text{1.ª rey y 2.ª as}) = \frac{4}{40}\frac{4}{39} + \frac{4}{40}\frac{4}{39} = 0{,}0205$

71. **Página 255**

Posibles ordenaciones en la elección de 3 cartas: $P_3 = 3! = 6$

$P(\text{As, siete y caballo}) = 6 \cdot \frac{4}{40}\frac{4}{39}\frac{4}{38} = 0{,}0065$

72. **Página 255**

$P(A) = P(a) + P(c) + P(d) + P(e) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = 0{,}625$

$P(B) = P(d) + P(e) + P(f) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0{,}625$

$P(A \cup B) = P(a) + P(c) + P(d) + P(e) + P(f) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0{,}875$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}625 + 0{,}625 - 0{,}875 = 0{,}375$

73. **Página 255**

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{25}}{\frac{1}{5}} = \frac{4}{5} \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) \quad P(\overline{A \cup B}) \quad 1 \quad P(A \cup B) \quad 1 \quad \frac{21}{25} \quad \frac{4}{25}$$

74. **Página 255**

$$P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 0{,}58 \quad P(A \cup B) = 1 \quad P(\overline{A \cup B}) = 1 \quad 0{,}58 = 0{,}42$$

$P(A) \cdot P(B) \quad 0{,}7 \cdot 0{,}6 \quad 0{,}42 \quad P(A \cap B)$ · Son sucesos independientes.

75. **Página 255**

$$P(A) \quad 1 \quad P(\overline{A}) \quad 1 \quad \frac{3}{5} \quad \frac{2}{5}$$

$$P(A \cdot B) = P(A) - P(B) - P(A) \; P(B) \rightarrow P(B) = \frac{P(A \cdot B) - P(A)}{1 - P(A)} = \frac{P(A \cdot B) - P(A)}{P(\overline{A})} = \frac{\frac{7}{10} - \frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}$$

$$P(\overline{A \cup B}) \quad 1 \quad P(A \cdot B) \quad 1 \quad \frac{2}{5} \; \frac{1}{2} \quad \frac{4}{5}$$

76. **Página 255**

$$P(A \cdot B) \quad 1 \quad P(\overline{A \cdot B}) \quad 1 \quad P(\overline{A} \cup \overline{B}) \quad 1 \quad \frac{47}{48} \quad \frac{1}{48}$$

$$P(A \cup B) \quad P(A) \quad P(B) \quad P(A \cap B) \cdot P(A) \quad P(B) \quad \frac{5}{16} \; \frac{1}{48} \quad \frac{1}{3}$$

$$\left.\begin{matrix} P(A) = k \\ P(B) = 3k \end{matrix}\right\} - 4k = \frac{1}{3} - k = \frac{1}{12} - P(A) = \frac{1}{12}, P(B) = \frac{3}{12}$$

77. **Página 256**

a) $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4 - P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12$

b) $P(A \cup B) - P(A) - P(B) - P(A \cap B) - 0{,}3 - 0{,}4 - 0{,}12 - 0{,}58$

c) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7 - P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0{,}7 \; 0{,}4 = 0{,}28$

78. **Página 256**

a) $P(B) = k \rightarrow P(A) = 2k - P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - k$

$$P(A) - P(\overline{B}) - 2k - 1 - k - 1{,}3 \rightarrow k - 0{,}3 - \left|\begin{matrix} P(A) - 0{,}6 \\ P(B) - 0{,}3 \end{matrix}\right.$$

$P(A \cap B) - 0{,}18 \rightarrow P(A \cup B) - P(A) + P(B) - P(A \cdot B) - 0{,}6 + 0{,}3 - 0{,}18 - 0{,}72$

b) $P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}18 = 0{,}82$

79. **Página 256**

a) $P(\text{Cazador falla}) = 1 - P(\text{Cazador acierta}) = 1 \quad \frac{1}{5} \quad \frac{4}{5}$

Los diferentes disparos son sucesos independientes:

$P(\text{Jabalí se salva}) = \left(\frac{4}{5}\right)^4 = 0{,}4096$

b) $P(\text{Jabalí abatido en el último tiro}) = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \frac{1}{5} = 0{,}1024$

80. **Página 256**

$P(\text{Mayor o igual que 4}) = P\ 4 \quad P\ 5 \quad P\ 6 \quad 2a \quad b \quad \frac{7}{15} \cdot b \quad \frac{7}{15} \quad 2a$

Por otro lado, la suma de las probabilidades de todas las caras debe ser 1, es decir:

$P\ 1 \quad P\ 2 \quad P\ 3 \quad P\ 4 \mid P\ 5 \quad P\ 6 \quad 3a \mid 3b \quad 1 \quad {}^{b=\frac{7}{15}-2a} \cdot 3a \mid \frac{7}{5} \quad 6a \quad 1 \cdot a \quad \frac{2}{15}$

$b \quad \frac{7}{15} \quad 2a \quad {}^{a=\frac{2}{15}} \cdot b \quad \frac{3}{15}$

$P\ 2 \quad P\ 4 \quad P\ 6 \quad \frac{2}{15} \qquad\qquad P\ 1 \quad P\ 3 \quad P\ 5 \quad \frac{3}{15}$

81. **Página 256**

$P(\text{Marcar al menos dos penaltis}) = P(\text{Marcar 1.º y 2.º}) + P(\text{Marcar 1.º y 3.º}) + P(\text{Marcar 2.º y 3.º}) + P(\text{Marcar los 3})$

$P(\text{marcar al menos dos penaltis}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} \mid \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{5} \mid \frac{4}{5} \quad \frac{4}{7} \quad \frac{2}{5} \quad 0{,}64$

82. **Página 256**

a) $P(\text{Ganar en la 1.ª tirada}) = P(\text{3 caras}) + P(\text{3 cruces}) = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0{,}25$

b) $P(\text{Perder}) = 1 - P(\text{Ganar}) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

$P(\text{Ganar en la 3.ª tirada}) = P(\text{Perder}) \cdot P(\text{Perder}) \cdot P(\text{Ganar}) = 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25 = 0{,}14$

83. **Página 256**

a) $P(\text{Dos primeras negras y tercera blanca}) = \frac{8}{18} \cdot \frac{7}{17} \cdot \frac{10}{16} \quad 0{,}1144$

b) $P(\text{Al menos una blanca}) = 1 - P(\text{3 negras}) = 1 \quad \frac{8}{18} \quad \frac{7}{17} \cdot \frac{6}{16} \quad 0{,}9314$

84. **Página 256**

Calculamos la probabilidad de obtener una bola blanca, *B*, en las distintas posibilidades:

- Urna 1: 1 blanca, urna 2: 1 blanca y 2 negras $P(B) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
- Urna 1: 1 negra, urna 2: 2 blancas y 1 negra $P(B) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- Urna 1: 2 blanca, urna 2: 2 negras $P(B) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}$
- Urna 1: 1 blanca y 1 negra, urna 2: 1 blanca y 1 negra $P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

La mayor probabilidad de obtener una bola blanca se obtiene metiendo en cada urna una bola blanca y una negra, o metiendo dos bolas blancas en una urna y dos bolas negras en la otra urna.

85. **Página 256**

a) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(B) = P(A \cup B) = (1 - 0{,}6) \cdot 0{,}7 = 1 - 0{,}1$

b) $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}7} = 0{,}143$

c) $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25$

d) $P(A \cup \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3$

e) $P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}7 - 0{,}1}{0{,}7} = 0{,}857$

f) $P(\bar{B}/A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = 0{,}75$

86. **Página 256**

a) $P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}85$

c) $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}25}{0{,}6} = 0{,}42$

d) $P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(A \cap \bar{B}) = 0{,}6 + 0{,}25 = 0{,}35$

e) $\left.\begin{array}{l} P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4 \\ P(\bar{A} \cup B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}25 \end{array}\right\} - P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}65$

f) $P(\bar{B}/A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = \frac{0{,}35}{0{,}6} = 0{,}58$

87. **Página 256**

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{12}$

88. **Página 256**

a) $P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = 0{,}34 \cdot 0{,}55 = 0{,}187$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}55 - 0{,}187 = 0{,}663$

c) $P(A/\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0{,}3 - 0{,}187}{1 - 0{,}55} = 0{,}251$

d) $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}663 = 0{,}337$

89. **Página 256**

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}9 = 0{,}4$

$P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42 \neq 0{,}4 = P(A \cap B)$ → No son sucesos independientes.

b) $P(A/\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0{,}7 - 0{,}4}{1 - 0{,}6} = 0{,}75$

$P(B/\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0{,}6 - 0{,}4}{1 - 0{,}7} = 0{,}667$

90. **Página 256**

Describimos los sucesos y hallamos sus probabilidades:

L = «Leen la prensa escrita» → $P(L) = \frac{350}{500} = 0{,}7$

T = «Ven las noticias en televisión» → $P(T) = \frac{300}{500} = 0{,}6$

$P(L \cap T) = 0{,}35$

a) $P(T/L) = \frac{P(L \cap T)}{P(L)} = \frac{0{,}35}{0{,}7} = 0{,}5$

b) $P(\overline{T}/L) = 1 - P(T/L) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

91. **Página 256**

Calculamos las distintas probabilidades:

P(Primero gane) $= \frac{1}{3}$

P(Segundo gane) $= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

P(Tercero gane) $= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

Los tres tienen la misma probabilidad de ganar.

92. **Página 256**

P(Vehículo sale al mercado / Defectuoso) = P(Pasa test A / Defectuoso) · P(Pasa test B / Defectuoso) =

$= (1 - 0{,}95) \cdot (1 - 0{,}85) = 0{,}0075$

93. **Página 256**

P(Primero gane) = $\frac{1}{6}$ $0{,}166$ P(Segundo gane) = $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{6}$ $0{,}278$ P(Tercero gane) = $\frac{5}{6}\ \frac{4}{6}\ \frac{3}{6}$ $0{,}278$

P(Partida termina sin ganador) = $\frac{5}{6}\ \frac{4}{6}\ \frac{3}{6}$ $0{,}278$

94. **Página 257**

Cad = «Natilla caducada»

$P\ Cad\ -P\ Cad / A \cdot P\ A\ -P\ Cad / B\ \ P\ B\ +P\ Cad / C \cdot P\ C$

$P\ Cad\ \ 0{,}02\ \frac{150}{300}\ \mathrm{I}\ 0{,}03 \cdot \frac{80}{300}\ \ 0{,}25\ \frac{70}{300}\ \ 0{,}0763$

95. **Página 257**

P(Primer equipo) = $\frac{4}{6}\ \ \frac{2}{3}$

P(Primer nadador) + P(Segundo nadador) + P(Tercer nadador) = $\frac{2}{3}$

P(Primer nadador) = $k \rightarrow P$(Segundo nadador) = $\frac{k}{2}$, P(Tercer nadador) = $\frac{k}{3}$

$k\ \ \frac{k}{2}\ \ \frac{k}{3}\ \ \frac{2}{3} \cdot k\ \ \frac{4}{11}\ \ 0{,}36$

P(Primer nadador) = 0,36

96. **Página 257**

P(Fractura vertebral) = P(Fractura / Más de 60) · P(Más de 60) + P(Fractura / Menos de 60) · P(Menos de 60)

P(Fractura vertebral) = 0,03 · 0,6 + 0,01 · (1 − 0,6) = 0,022

P(Fractura vertebral espontánea) = 0,022 · (1 − 0,9) = 0,0022

97. **Página 257**

Para que las urnas no cambien al final, tenemos que extraer una bola del mismo color en las tres urnas.

P(Las tres no cambian al final) = P(Blanca en las tres urnas) + P(Roja en las tres urnas)

P(Las tres no cambian al final) = $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6}\ \mathrm{I}\ \frac{2}{5}\ \frac{4}{6}\ \frac{5}{6}\ \ \frac{29}{90}\ \ 0{,}32$

98. **Página 257**

$P(\text{Hay ganador}) = P(\text{Hay ganador jugada 1}) + P(\text{Hay ganador jugada 2}) + P(\text{Hay ganador jugada 3})$

$P(\text{Hay ganador jugada 1}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{5}{12}$

$P(\text{No hay ganador jugada 1}) = 1 \quad \frac{5}{12} \quad \frac{7}{12}$

$P(\text{Hay ganador jugada 2}) = P(\text{No hay ganador jugada 1}) \cdot P(\text{Hay ganador jugada 1}) = \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{12} \quad \frac{35}{144}$

$P(\text{No hay ganador jugada 2}) = 1 \quad \frac{35}{144} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{49}{144}$

$P(\text{Hay ganador jugada 3}) = P(\text{No hay ganador jugada 2}) \cdot P(\text{Hay ganador jugada 1}) = \frac{49}{144} \cdot \frac{5}{12} = \frac{245}{1728}$

$P(\text{Hay ganador}) = \frac{5}{12} - \frac{49}{144} + \frac{245}{1728} = \frac{1013}{1728} = 0{,}586$

99. **Página 257**

a) $P\ C \quad \frac{1}{3}$

b) $P\ 4 \quad P\ 4/A \cdot P\ A \mid P\ 4/B \quad P\ B \quad P\ 4/C \quad P\ C \quad 0 \cdot \frac{1}{3} \mid \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \mid \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \quad \frac{5}{18}$

c) $P\ 3/A \quad \frac{1}{3}$

d) $P\ 1/\overline{C} = \frac{P\ 1/A \cdot P\ A + P\ 1/B \cdot P\ B}{1 - P\ C} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{6}$

100. **Página 257**

$P(1) = k \qquad P(6) = 3k$

$P\ 1 \quad P\ 2 \quad P\ 3 \quad P\ 4 \mid P\ 5 \mid P\ 6 \quad k \mid \frac{4}{6} \mid 3k \quad 1 \cdot k \quad \frac{1}{12}$

$P\ 1 \quad \frac{1}{12} \qquad P\ 6 \quad \frac{1}{4}$

$P(\text{Negra}) = P(\text{Primo}) \cdot P(\text{Negra / Urna 1}) + P(\text{No primo}) \cdot P(\text{Negra / Urna 2}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{8}{14} \quad \frac{3}{6} \cdot \frac{12}{16} \quad \frac{37}{56} \quad 0{,}66$

101. **Página 257**

a) $P(\text{No malformación}) = P(\text{No malformación / Europa}) \cdot P(\text{Europa}) + P(\text{No malformación / África}) \cdot P(\text{África})$

$P(\text{No malformación}) = 0{,}99 \cdot 0{,}8 - 0{,}97 \cdot 0{,}2 = 0{,}986$

b) $2\,000\,000 \cdot 0{,}986 = 1\,972\,000$ peces no tendrán la malformación.

102. **Página 257**

a) $P(O_2) = P(O_1) \cdot P(O_2/O_1) + P(C_1) \cdot P(O_2/C_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{9} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{9} = \frac{13}{45} = 0{,}289$

b) $P(C_1 \cap C_2) = P(C_1) \cdot P(C_2/C_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15} = 0{,}133$

c) $P(C_2/O_1) = \frac{2}{9} = 0{,}222$

103. **Página 258**

$$P(A/-) = \frac{P(-/A) \cdot P(A)}{P(-/A) \cdot P(A) + P(-/B) \cdot P(B)} = \frac{0{,}04 \cdot 0{,}2}{0{,}04 \cdot 0{,}2 + 0{,}06 \cdot 0{,}45} = 0{,}23$$

104. **Página 258**

G = «La película le ha gustado»

a) $P(G) = P(A/G) \cdot P(A) + P(B/G) \cdot P(B) + P(C/G) \cdot P(C)$

$P(G) = 0{,}4 \cdot \frac{240}{500} + 0{,}5 \cdot \frac{180}{500} + 0{,}9 \cdot \frac{80}{500} = 0{,}516$

b) $P(G/C) = 0{,}9$

c) $P(C/G) = \frac{P(G/C) \cdot P(C)}{P(G)} = \frac{0{,}9 \cdot \frac{80}{500}}{0{,}516} = 0{,}279$

105. **Página 258**

F = «El ladrón se ha fugado»

a) $P(F/A) = \frac{3}{7}$

b) $P(F) = P(F/A) \cdot P(A) + P(F/B) \cdot P(B) = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{19}{56} = 0{,}34$

c) $P(\overline{F}) = 1 - P(F) = 1 - 0{,}34 = 0{,}66$

106. **Página 258**

M = «Mujer» C = «Cirujano» P = «Pediatra» MF = «Médico de familia»

$P(M) = P(M/C) \cdot P(C) + P(M/P) \cdot P(P) + P(M/MF) \cdot P(MF)$

$P(M) = 1 - 0{,}65 \cdot \frac{40}{150} + 1 - 0{,}38 \cdot \frac{50}{150} + 0{,}65 \cdot \frac{60}{150} = 0{,}56$

107. **Página 258**

a) $P(R \cap R') = P(R) \cdot P(R'/R) = \frac{5}{22} \cdot \frac{10}{38} = \frac{25}{418} = 0{,}0598$

b) $P(R') = P(R) \cdot P(R'/R) + P(B) \cdot P(R'/B) + P(N) \cdot P(R'/N) = \frac{5}{22} \cdot \frac{10}{38} + \frac{10}{22} \cdot \frac{9}{38} + \frac{7}{22} \cdot \frac{9}{38} = \frac{203}{836} = 0{,}2428$

c) $P(B/R') = \dfrac{P(R'/B)\cdot P(B)}{P(R')} = \dfrac{\frac{9}{38}\cdot\frac{7}{22}}{\frac{203}{836}} = \dfrac{9}{29} = 0{,}31$

108. **Página 258**

$$P(C1/B) = \frac{P(B/C1)\cdot P(C1)}{P(B/C1)\cdot P(C1) - P(B/C2)\cdot P(2)} = \frac{\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{2} - \frac{5}{10}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{4}{9} = 0{,}44$$

109. **Página 258**

$$P(1/CO) = \frac{P(O/C1)\cdot P(C1)}{P(O/C1)\cdot P(C1) - P(P/C2)\cdot P(C2)} = \frac{\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2} - \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{4}{7} = 0{,}57$$

110. **Página 258**

S = «Habitación sencilla» D = «Habitación doble» B = «Habitación con baño»

$$P(S/B) = \frac{P(B/S)\cdot P(S)}{P(B/S)\cdot P(S) + P(B/D)\cdot P(D)} = \frac{\frac{2}{10}\cdot\frac{10}{25}}{\frac{2}{10}\cdot\frac{10}{25} + \frac{10}{15}\cdot\frac{15}{25}} = \frac{1}{6} = 0{,}167$$

111. **Página 258**

Pu = «Universidad pública» Pr = «Universidad privada» D = «Directivo»

$$P(Pu/D) = \frac{P(D/Pu)\cdot P(Pu)}{P(D/Pu)\cdot P(Pu) + P(D/Pr)\cdot P(Pr)} = \frac{0{,}25\cdot 0{,}7}{0{,}25\cdot 0{,}7 - 0{,}6\cdot 0{,}3} = 0{,}493$$

112. **Página 258**

I = «Ha habido incidente» A = «Suena la alarma»

$$P(\overline{I}/A) = \frac{P(A/\overline{I})\cdot P(\overline{I})}{P(A/\overline{I})\cdot P(\overline{I}) - P(A/I)\cdot P(I)} = \frac{0{,}02\cdot 1 - 0{,}05}{0{,}02\cdot 0{,}95 - 0{,}97\cdot 0{,}05} = 0{,}28$$

113. **Página 258**

E = «Se desarrolla la enfermedad»

$$P(C/E) = \frac{P(E/C)\cdot P(C)}{P(E/A)\cdot P(A) - P(E/B)\cdot P(B) - P(E/C)\ P(C)} = \frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{12} - \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{12} + \frac{3}{5}\ \frac{5}{12}} = \frac{6}{11} = 0{,}55$$

114. **Página 259**

D = «Ha votado a Daniel» Mo = «Ha votado a Montse»

Ma = «Ha votado a Manuel» V = «Alumno varón»

$$P(Mo/V) = \frac{P(V/Mo)\cdot P(Mo)}{P(V/D)\cdot P(D) - P(V/Ma)\cdot P(Ma) + P(V/Mo)\cdot P(Mo)}$$

$$P(Mo/V) \quad \frac{0{,}65\cdot 0{,}4}{0{,}3\cdot 0{,}25 \quad 0{,}4 \quad 0{,}35 \quad 0{,}65\cdot 0{,}4} \quad 0{,}547$$

115. **Página 259**

B = «Bronquitis» N = «Neumonía» G = «Gripe» C = «Curado completamente»

$$P(N/C) = \frac{P(C/N)\cdot P(N)}{P(C/B)\cdot P(B) - P(C/N)\cdot P(N) - P(C/G)\cdot P(G)}$$

$$P(N/C) \quad \frac{0{,}94\cdot 0{,}25}{0{,}85 \quad 0{,}6 \quad 0{,}94 \quad 0{,}25 \;\mid\; 0{,}97\cdot 0{,}15} \quad 0{,}264$$

116. **Página 259**

E = «Español» $M30$ = «Más de 30 años»

$$P(M30/E) = \frac{P(E/M30)\cdot P(M30)}{P(E/M30)\cdot P(M30) - P(E/\overline{M30})\cdot P(\overline{M30})}$$

$$P(M30/E) \quad \frac{0{,}3\cdot 0{,}7}{0{,}3 \quad 0{,}7 \;\mid\; 0{,}05 \quad 0{,}3} \quad 0{,}933$$

117. **Página 259**

$T1$ = «Fabricado por el trabajador 1» $T3$ = «Fabricado por el trabajador 3»

$T2$ = «Fabricado por el trabajador 2» D = «Defectuoso»

$$P(T1/D) = \frac{P(D/T1)\cdot P(T1)}{P(D/T1)\cdot P(T1) - P(D/T2)\cdot P(T2) - P(D/T3)\cdot P(T3)}$$

$$P(T1/D) \quad \frac{0{,}02\cdot 0{,}4}{0{,}02 \quad 0{,}4 \quad 0{,}03 \quad 0{,}3 \quad 0{,}04 \quad 0{,}3} \quad 0{,}276$$

118. **Página 259**

D = «Defectuoso» F = «Fotovoltaico» T = «Térmico» TD = «Termodinámico»

a) $P(D) \quad P(D/F)\cdot P(F) \quad P(D/T)\cdot P(T) \quad P(D/TD)\cdot P(TD)$

$$P(D) \quad 0{,}001\ \frac{150}{290} \quad 0{,}002\ \frac{80}{290} \;\mid\; 0{,}003\cdot\frac{60}{290} \quad 0{,}00169$$

b) $$P(F/\overline{D}) = \frac{P(\overline{D}/F)\cdot P(F)}{P(\overline{D})} = \frac{1 - P(D/F)\cdot P(F)}{1 - P(D)} = \frac{1 - 0{,}001\cdot\frac{150}{290}}{1 - 0{,}00169} = 0{,}5176$$

119. **Página 259**

$P(\text{No asada}) = 1 - P(\text{Asada}) = 1 - P(\text{Consumida directa}) \cdot P(\text{Asada / Consumida directa})$

$P(\text{No asada}) = 1 - 0{,}8 \cdot 0{,}25 = 0{,}8$

120. **Página 259**

$P_1 = $ «Detectado por P_1» $P_2 = $ «Detectado por P_2»

a) $P(\overline{P_1} \cap \overline{P_2}) = P(\overline{P_1}) \cdot P(\overline{P_2}) = 1 - P(P_1) \cdot 1 - P(P_2) = 1 - 0{,}92 \cdot 1 - 0{,}85 = 0{,}012$

b) Actúan de forma independiente; por tanto, la probabilidad de que el virus detectado por el programa P_1, sea detectado por el programa P_2 será 0,85.

c) Los dos antivirus actúan de forma independiente. Por tanto, la probabilidad de que haya sido detectado por el programa P_1 es de 0,85.

121. **Página 259**

$T_1 = $ «Tienda T_1» $T_2 = $ «Tienda T_2» $DS = $ «Doble suspensión»

$P(T_2) = k$ $P(T_1) = 2k$ $3k \quad 1 \cdot k \quad \frac{1}{3}$

$$P(T_1 / DS) = \frac{P(DS / T_1) \cdot P(T_1)}{P(DS / T_1) \cdot P(T_1) + P(DS / T_2) \quad P(T_2)}$$

$$P(T_1 / DS) = \frac{P(DS / T_1) \cdot P(T_1)}{P(DS / T_1) \cdot P(T_1) - 1 - P(\overline{DS} / T_1) \quad P(T_2)} = \frac{0{,}6 \cdot \frac{2}{3}}{0{,}6 \cdot \frac{2}{3} + (1 - 0{,}6) \cdot \frac{1}{3}} = 0{,}75$$

122. **Página 259**

Obtenemos las probabilidades de cada una de las caras del dado:

$P(1) - k \qquad P(2) \quad 2k \qquad P(3) \quad 3k \qquad P(4) \quad 4k \qquad P(5) \quad 5k \qquad P(6) \quad 6k$

$k \quad 2k \cup 3k \cup 4k \quad 5k \cup 6k \quad 1 \cdot k \quad \frac{1}{21}$

$P(1) \quad \frac{1}{21} \qquad P(2) \quad \frac{2}{21} \qquad P(3) \quad \frac{1}{7} \qquad P(4) \quad \frac{4}{21} \qquad P(5) \quad \frac{5}{21} \qquad P(6) \quad \frac{2}{7}$

$P(\text{Primo}) = P(2) \quad P(3) \quad P(5) \quad \frac{2}{21} \cup \frac{3}{21} \cup \frac{4}{21} \quad \frac{9}{21} \quad 0{,}43$

$P(\text{No primo}) = 1 - 0{,}43 = 0{,}57$

a) $P(\text{Verde}) = P(\text{Primo}) \cdot P(\text{Verde / Primo}) + P(\text{No primo}) \cdot P(\text{Verde / No primo})$

$P(\text{Verde}) = 0{,}43 \cdot \frac{6}{10} \quad 0{,}57 \quad \frac{4}{10} \quad 0{,}486$

b) $P(\text{Primo / Azul}) = \frac{P(\text{Primo}) \cdot P(\text{Azul / Primo})}{P(\text{Azul})} \quad \frac{P(\text{Primo}) \quad P(\text{Azul / Primo})}{1 \quad P(\text{Verde})}$

$$P(\text{Primo / Azul}) = \frac{0{,}43 \cdot \frac{4}{10}}{1 - 0{,}486} = 0{,}3346$$

123. **Página 259**

P = «Da positivo» C = «Tiene cáncer»

$$P(C/P) = \frac{P(P/C)\cdot P(C)}{P(P/C)\cdot P(C) + P(P/\overline{C})\cdot P(\overline{C})} = \frac{P(P/C)\cdot P(C)}{P(P/C)\cdot P(C) - P(P/\overline{C})\cdot (1-P(C))}$$

$$P(C/P) \quad \frac{0{,}95\cdot 0{,}07}{0{,}95 \quad 0{,}07 \; | \; 0{,}012\cdot(1 \quad 0{,}07)} \quad 0{,}8563$$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. **Página 260**

Como, al principio, no tenemos ninguna referencia de dónde está el premio, para nosotros, la probabilidad de que esté en cualquiera de las puertas es la misma.

2. **Página 260**

Porque el presentador no elige la puerta que abre al azar; él sabe que la que va a abrir no es la que tiene premio.

3. **Página 260**

$P(\text{Premio esté en la puerta elegida}) \quad \frac{1}{4}$ $P(\text{Premio esté en las otras puertas}) \quad \frac{3}{4}$

Si el presentador abre una de las puertas $\cdot P(\text{Premio esté en una de las dos puertas que quedan}) \quad \frac{3}{4}$

$P(\text{Acertar en las dos puertas que quedan}) \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \therefore \frac{1}{4}$

Por tanto, sería más probable acertar eligiendo una de las dos puertas que quedan.

4. **Página 260**

$P(\text{Puerta 2}) \quad P(\text{Puerta 3})$ $P(\text{Puerta 1}) \quad 2P(\text{Puerta 2})$

$P(\text{Puerta 1}) \quad P(\text{Puerta 2}) \; | \; P(\text{Puerta 2}) \quad 2P(\text{Puerta 2}) \; | \; P(\text{Puerta 2}) \quad P(\text{Puerta 2}) \quad 1 \cdot P(\text{Puerta 2}) \quad \frac{1}{4}$

$P(\text{Puerta 1}) \quad \frac{1}{2}$ $P(\text{Puerta 2 o Puerta 3}) \quad \frac{1}{2}$

Si el presentador abre la puerta 3 $\cdot P(\text{Puerta 3}) \quad \frac{1}{2}$, que es la misma que de que esté el premio en la puerta 1.

Distribuciones binomial y normal

11

ACTIVIDADES

1. Página 262

a) Sería mejor estudiar toda la población, ya que es una población pequeña.

b) Sería mejor estudiar una muestra de la población, ya que es imposible medir la temperatura en todos los lugares de la comunidad en todo momento.

c) Sería mejor estudiar una muestra de la población, ya que es muy costoso obtener el peso de todos los habitantes del país.

d) Sería mejor estudiar toda la población, porque es una población pequeña.

e) Sería mejor estudiar toda la población, ya que es una población pequeña.

2. Página 262

Para llegar a esta conclusión hay dos opciones:

- Se ha realizado un censo de las alturas de toda la población, donde 167 cm es la media de las alturas de la población. En este casi si se estudiaría a toda la población.
- Se ha estudiado una muestra de la población, realizando un estudio estadístico. En este caso 167 cm es la media muestral y no se habrá estudiado toda la población.

Para que sea conveniente hacer un censo, el tamaño de la población no debe ser muy grande.

3. Página 262

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Un posible estudio estadístico sería: estudiar el número medio de horas que ven la televisión los alumnos de mi instituto.

La población sería todo el alumnado del instituto. El tamaño de la población es el número de alumnos total del instituto.

Una posible muestra sería escoger al azar 40 alumnos. El tamaño muestral sería 40.

4. Página 263

a) Puede ser un muestreo aleatorio ya que, en principio, cada corredor tiene la misma probabilidad de ser escogido para el control.

b) No es un muestreo aleatorio ya que al estar en la estación de trenes la probabilidad de que se utilice el transporte público es mayor que la probabilidad de que no se utilice, es decir, no son sucesos equiprobables.

c) Las probabilidades de escoger a un hombre y a una mujer son distintas; por lo tanto, el muestreo no puede ser aleatorio.

5. **Página 263**

Tenemos que modificar los procedimientos del apartado b) y c) puesto que el apartado a) ya podía ser un muestreo aleatorio.

En el apartado b) para que el muestreo pudiese ser aleatorio se podría realizar una encuesta en varios lugares aleatorios de la ciudad.

En el apartado c) para que el muestreo fuese aleatorio se podrían elegir 45 hombres y 65 mujeres:

$P\text{ (Hombre)} = \frac{45}{450} - \frac{1}{10} - 0{,}1$ $\qquad$ $P\text{ (Mujer)} = \frac{65}{650} - \frac{1}{10} - 0{,}1$

6. **Página 263**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Dos posibles estudios donde podemos extraer una muestra aleatoria son:

- Estudiar la altura media de una población.
- Realizar una encuesta telefónica sobre el nivel de estudios de una población tomando los números de teléfono al azar.

7. **Página 263**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Dos posibles estudios donde no podemos extraer una muestra aleatoria son:

- Realizar una encuesta sobre el nivel de estudios de una población entre los visitantes de un congreso sobre ecuaciones en derivadas parciales.
- Estudiar la altura media de una población, tomando como muestra gente que acude a un congreso de jugadores de baloncesto.

8. **Página 264**

a) El número de muestras es: $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,4-2\,!} = \frac{24}{4} = 6$.

Las posibles muestras son: {1, 3}, {1, 5}, {1, 7}, {3, 5}, {3, 7}, {5, 7}.

b) El número de muestras es: $\binom{4-2-1}{2} = \frac{4-2-1\,!}{2!\,4-1\,!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{120}{12} = 10$.

Las posibles muestras son: {1, 1}, {1, 3}, {1, 5}, {1, 7}, {3, 3}, {3, 5}, {3, 7}, {5, 5}, {5, 7}, {7, 7}.

9. **Página 264**

a) La población de las medias es: {2, 3, 4, 4, 5, 6}.

La media es: $\frac{2-3-4-4-5+6}{6} - \frac{24}{6} - 4$.

b) La población de las medias es: {1, 2, 3, 4, 3, 4, 5, 5, 6, 7}.

La media es: $\frac{1-2+3+4+3+4+5-5-6-7}{10} - \frac{40}{4} - 4$

10. **Página 265**

a) $n = 25$

Asignamos de manera aleatoria un número a cada una de las 2 350 gallinas ponedoras y calculamos la constante de elevación: $h = \frac{2\,350}{25} = 94$

Elegimos al azar un número entre 1 y 94, ambos incluidos, y determinamos la gallina marcada con ese número. Si, por ejemplo, el elegido es el número 45, ese es el primer elemento de la muestra, y los siguientes elementos son las gallinas marcadas con los números:

$45 + 94,\ 45 + 94 \cdot 2,\ 45 + 94 \cdot 3,\ \ldots,\ 45 + 94 \cdot 25$

b) $n = 235$

Asignamos de manera aleatoria un número a cada una de las 2 350 gallinas ponedoras y calculamos la constante de elevación: $h = \frac{2\,350}{235} = 10$

Elegimos al azar un número entre 1 y 10, ambos incluidos, y determinamos la gallina marcada con ese número. Si, por ejemplo, el elegido es el número 5, ese es el primer elemento de la muestra, y los siguientes elementos son las gallinas marcadas con los números:

$5 + 10,\ 5 + 10 \cdot 2,\ 5 + 10 \cdot 3,\ \ldots,\ 5 + 10 \cdot 235$

c) $n = 50$

Asignamos de manera aleatoria un número a cada una de las 2 350 gallinas ponedoras y calculamos la constante de elevación: $h = \frac{2\,350}{50} = 47$.

Elegimos al azar un número entre 1 y 47, ambos incluidos, y determinamos la gallina marcada con ese número. Si, por ejemplo, el elegido es el número 21, ese es el primer elemento de la muestra, y los siguientes elementos son las gallinas marcadas con los números:

$21 + 47,\ 21 + 47 \cdot 2,\ 21 + 47 \cdot 3,\ \ldots,\ 21 + 47 \cdot 50$

d) $n = 47$

Asignamos de manera aleatoria un número a cada una de las 2 350 gallinas ponedoras y calculamos la constante de elevación: $h = \frac{2\,350}{47} = 50$

Elegimos al azar un número entre 1 y 50, ambos incluidos, y determinamos la gallina marcada con ese número. Si, por ejemplo, el elegido es el número 15, ese es el primer elemento de la muestra, y los siguientes elementos son las gallinas marcadas con los números:

$15 + 50,\ 15 + 50 \cdot 2,\ 15 + 50 \cdot 3,\ \ldots,\ 15 + 50 \cdot 47$

11. **Página 265**

La muestra es representativa de la población, ya que la elección de los coches no tiene que ver con las características de este, simplemente influye la posición en que pasa.

12. **Página 266**

$\frac{n}{N} = \frac{60}{280 - 320} = \frac{60}{600} = \frac{1}{10}$. Calculamos el número de hombres, n_1, y el de mujeres, n_2:

$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_1}{280} = \frac{1}{10} \rightarrow n_1 = \frac{280}{10} = 28$ $\qquad$ $\frac{n_2}{N_2} = \frac{n_2}{320} = \frac{1}{10} \rightarrow n_2 = \frac{320}{10} = 32$

Se deben seleccionar 28 hombres y 32 mujeres.

13. **Página 266**

$n_1 = n_2 = n_3 = \frac{n}{3} = \frac{81}{3} = 27$ Se deben seleccionar 27 yogures de cada una de las tres marcas.

14. **Página 267**

Para realizar una muestra estratificada, formamos los estratos:

Estrato 1: formado por las 4 clases de 1.º de ESO.

Estrato 2: formado por las 4 clases de 2.º de ESO.

Estrato 3: formado por las 4 clases de 3.º de ESO.

Estrato 4: formado por las 4 clases de 4.º de ESO.

Los estratos son grupos homogéneos entre sí, y diferenciados entre los distintos grupos. Una vez formados los estratos elegimos muestras aleatorias simples en cada uno de ellos.

Para realizar una muestra conglomerada, formamos los conglomerados:

Conglomerado 1: formado por las 4 clases del primer piso.

Conglomerado 2: formado por las 4 clases del segundo piso.

Conglomerado 3: formado por las 4 clases del tercer piso.

Conglomerado 4: formado por las 4 clases del cuarto piso.

Los conglomerados son grupos heterogéneos, representantes de toda la población, y muy semejantes entre los distintos grupos. Una vez formados los conglomerados elegimos muestras aleatorias simples en cada uno de ellos.

15. **Página 267**

Para realizar una muestra estratificada, formamos los estratos:

Estrato 1: estudio del reciclaje de plástico.

Estrato 2: estudio del reciclaje de papel.

Estrato 3: estudio del reciclaje de vidrio.

Los estratos son grupos homogéneos entre sí, y diferenciados entre los distintos grupos. Una vez formados los estratos elegimos muestras aleatorias simples en cada uno de ellos.

16. **Página 268**

a) La suma de puntuaciones del lanzamiento de dos dados puede tomar los siguientes valores:

{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

b) La diferencia de puntuaciones del lanzamiento de dos dados puede tomar los siguientes valores:

{0, 1, 2, 3, 4, 5}

c) El producto de las puntuaciones del lanzamiento de dos dados pueda tomar los siguientes valores:

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36}

17. **Página 268**

Estamos ante un muestreo sin reposición; por lo tanto, hay $\left\{\begin{matrix}20\\4\end{matrix}\right\} = \frac{20!}{4!\ 20-4\ !} = 4\,845$.

Hay 4 845 muestras posibles.

A continuación vemos cuatro ejemplos de variables aleatorias que podemos definir sobre las muestras.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Ejemplo 1: la función que a cada muestra le hace corresponder el número de hombres en la muestra. Los posibles valores son 0, 1, 2, 3 y 4.

Ejemplo 2: la función que a cada muestra le hace corresponder el número de idiomas distintos que hablan entre los cuatro guías. Puede tomar múltiples valores enteros.

Ejemplo 3: la función que a cada muestra le hace corresponder la media aritmética de las edades de los guías. Puede tomar infinitos valores reales.

Ejemplo 4: la función que a cada muestra le hace corresponder la media aritmética de las alturas de los guías. Puede tomar infinitos valores reales.

18. **Página 269**

Los posibles valores de la variable aleatoria, *X,* son: 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

$P[X=2]=P[1-1]=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$ $\quad$ $P[X=3]=P[1-2]+P[2-1]=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

$P[X=4]=P[1-3]+P[2-2]+P[3-1]=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$

$P[X=5]=P[1-4]+P[2-3]+P[3-2]+P[4-1]=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

$P[X=6]=P[2-4]+P[3-3]+P[4-2]=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$

$P[X=7]=P[3-4]+P[4-3]=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ $\quad$ $P[X=8]=P[4-4]=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

Calculamos los parámetros de la variable aleatoria *X*.

Media: $\mu=\sum_{i=2}^{8}p_iX_i=\frac{1}{16}\cdot2+\frac{1}{8}\cdot3+\frac{3}{16}\cdot4+\frac{1}{4}\cdot5+\frac{3}{16}\cdot6+\frac{1}{8}\cdot7+\frac{1}{16}\cdot8=5$

Varianza: $\sigma^2=\sum_{i=2}^{8}p_iX_i^2-\mu^2=\frac{1}{16}\cdot2^2+\frac{1}{8}\cdot3^2+\frac{3}{16}\cdot4^2+\frac{1}{4}\cdot5^2+\frac{3}{16}\cdot6^2+\frac{1}{8}\cdot7^2+\frac{1}{16}\cdot8^2-5^2=\frac{5}{2}=2{,}5$

Desviación típica: $\sigma=\sqrt{\sum_{i=2}^{8}p_iX_i^2-\mu^2}=\sqrt{2{,}5}=1{,}58$

19. **Página 269**

Los posibles valores de la variable aleatoria, *X,* son: 0, 1, 2, 3 y 4.

Primero hacemos los cálculos con remplazamiento:

$P[X=0]=\left[\frac{14}{30}\right]^4=\frac{2401}{50625}$ $\quad$ $P[X=1]=C_{4,1}\cdot\frac{16}{30}\cdot\left[\frac{14}{30}\right]^3=4\cdot\frac{16}{30}\cdot\left[\frac{14}{30}\right]^3=\frac{10976}{50625}$

$P[X=2]=C_{4,2}\cdot\left[\frac{16}{30}\right]^2\cdot\left[\frac{14}{30}\right]^2=6\cdot\left[\frac{16}{30}\right]^2\cdot\left[\frac{14}{30}\right]^2=\frac{6272}{16875}$ $\quad$ $P[X=3]=C_{4,3}\cdot\left[\frac{16}{30}\right]^3\cdot\frac{14}{30}=4\cdot\left[\frac{16}{30}\right]^3\cdot\frac{14}{30}=\frac{14336}{50625}$

$P[X=4]=\left[\frac{16}{30}\right]^4=\frac{4096}{50625}$

Calculamos los parámetros de la variable aleatoria *X*.

Media: $\mu = \sum_{i=0}^{4} p_i x_i = \frac{4\,096}{50\,625} \cdot 4 - \frac{14\,336}{50\,625}\ 3 + \frac{6\,272}{16\,875} \cdot 2 - \frac{10\,976}{50\,625}\ 1 - \frac{2\,401}{50\,625}\ 0 = 2{,}13$

Varianza: $\sigma^2 = \sum_{i=0}^{4} p_i x_i^2 - \mu^2 = \frac{4096}{50\,625} \cdot 4^2 + \frac{14\,336}{50\,625} \cdot 3^2 - \frac{6\,272}{16\,875} \cdot 2^2 - \frac{10\,976}{50\,625}\ 1^2 - \frac{2\,401}{50\,625} \cdot 0^2 - \left|\frac{28}{15}\right|^2 = \frac{224}{225} = 0{,}9956$

Desviación típica: $\sigma^2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{4} p_i x_i^2 - \mu^2} = \sqrt{0{,}9956} = 0{,}9978$

Hacemos, ahora, los cálculos sin remplazamiento:

$P\ X = 0\ = \frac{14}{30} \cdot \frac{13}{29} \cdot \frac{12}{28} \cdot \frac{11}{27} = \frac{143}{3\,915}$

$P\ X = 1\ = \frac{16}{30} \cdot \frac{14}{29} \cdot \frac{13}{28} \cdot \frac{12}{27} - \frac{14}{30} \cdot \frac{16}{29} \cdot \frac{13}{28} \cdot \frac{12}{27} + \frac{14}{30}\ \frac{13}{29} \cdot \frac{16}{28} \cdot \frac{12}{27} - \frac{14}{30} \cdot \frac{13}{29} \cdot \frac{12}{28} \cdot \frac{16}{27} = \frac{832}{3\,915}$

$P\ X - 2\ - \frac{16}{30} \cdot \frac{15}{29} \cdot \frac{14}{28} \cdot \frac{13}{27} - \frac{16}{30} \cdot \frac{14}{29} \cdot \frac{15}{28} \cdot \frac{13}{27} + \frac{16}{30} \cdot \frac{14}{29} \cdot \frac{13}{28}\ \frac{15}{27} - \frac{14}{30}\ \frac{16}{29}\ \frac{15}{28} \cdot \frac{13}{27} - \frac{14}{30} \cdot \frac{16}{29} \cdot \frac{13}{28} \cdot \frac{15}{27} +$

$\frac{14}{30}\ \frac{13}{29}\ \frac{16}{28}\ \frac{15}{27}\ \ \frac{104}{261}$

$P\ X - 3\ - \frac{16}{30}\ \frac{15}{29}\ \frac{14}{28}\ \frac{14}{27} - \frac{16}{30} \cdot \frac{15}{29} \cdot \frac{14}{28} \cdot \frac{14}{27} - \frac{16}{30} \cdot \frac{14}{29} \cdot \frac{15}{28} \cdot \frac{14}{27} + \frac{14}{30} \cdot \frac{16}{29} \cdot \frac{15}{28} \cdot \frac{14}{27} - \frac{224}{783}$

$P\ X\ \ 4\ \ \frac{16}{30}\ \frac{15}{29}\ \frac{14}{28}\ \frac{13}{27}\ \ \frac{52}{783}$

Calculamos los parámetros de la variable aleatoria *X*.

Media: $\mu = \sum_{i=0}^{4} p_i x_i = \frac{143}{3\,915}\ 0 + \frac{832}{3\,915} \cdot 1 - \frac{104}{261}\ 2 - \frac{224}{783} \cdot 3 - \frac{52}{783} \cdot 4 = \frac{32}{15}$

Varianza: $\sigma^2 = \sum_{i=0}^{4} p_i x_i^2 - \mu^2 = \frac{832}{3\,915} \cdot 1^2 + \frac{104}{261} \cdot 2^2 - \frac{224}{783} \cdot 3^2 - \frac{52}{783} \cdot 4^2 - \left|\frac{32}{15}\right|^2 = 0{,}89$

Desviación típica: $\sigma^2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{4} p_i x_i^2 - \mu^2} = \sqrt{0{,}89} = 0{,}94$

20. **Página 270**

a) Es una variable discreta, puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4 y 5.

Se lanza una moneda 5 veces $\rightarrow n = 5$

Identificamos el suceso: $C =$ «Sale cara» $P\ C\ - \frac{1}{2} - 0{,}5$

El hecho de que en un lanzamiento salga cara o cruz no influye en lo que salga en el otro.

La variable sigue una distribución binomial, $X = B\ 5; 0{,}5\ $.

Obtenemos los parámetros de la población:

Media: $\mu = np = 5 \cdot 0{,}5 = 0{,}5$ Varianza: $^2 - np\ 1 - p\ - 5 \cdot 0{,}5\ \ 1 - 0{,}5\ \ - 1{,}25$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{np\ 1 - p\ } = \sqrt{1{,}25} = 1{,}12$

b) $P\ X = 3\ = \left|\begin{matrix}5\\3\end{matrix}\right| \cdot 0{,}5^3 \cdot\ 1 - 0{,}5\ ^{5-3} = 0{,}3125$

21. **Página 270**

a) La variable cuenta las personas que no sufren una determinada enfermedad después de ser aplicada cierta vacuna. Es una variable discreta.

Se administra la vacuna a 10 pacientes $\rightarrow n = 10$

Identificamos el suceso: $E =$ «La vacuna tiene éxito», $P(E) = 0{,}72$

Que un paciente contraiga la enfermedad no influye en que otro lo haga o no.

Sigue una distribución binomial: $X = B(10; 0{,}72) \rightarrow P(X = 10) = \binom{10}{10} \cdot 0{,}72^{10} \cdot (1 - 0{,}72)^{10-10} = 0{,}03744$

b) $P(X \geq 8) = P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{10}{9} 0{,}72^{9} \cdot (1 - 0{,}72)^{10-9} + 0{,}03744 = 0{,}18304$

22. **Página 271**

$X =$ «Número de personas que han leído la novela»

Elegimos a 5 miembros del club de lectura $\rightarrow n = 5$.

Probabilidad de que, elegido un miembro del club de lectura al azar, haya leído la novela $\rightarrow p = 0{,}8$

a) $X < 3 \rightarrow P(X < 3) = \sum_{i=0}^{2} \binom{5}{i} \cdot 0{,}8^{i} \cdot (1 - 0{,}8)^{5-i} = 0{,}05792$

b) $X \geq 1 \rightarrow P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} \cdot 0{,}8^{0} \cdot (1 - 0{,}8)^{5} = 0{,}99968$

23. **Página 271**

$X =$ «Número de bolas blancas que se extraen»

Sacamos tres bolas de la urna $\rightarrow n = 3$

Probabilidad de que, al sacar una bola al azar de la urna, sea blanca $\rightarrow p = \frac{2}{5} = 0{,}4$

$X = 2 \rightarrow P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot 0{,}4^{2} \cdot (1 - 0{,}4)^{3-2} = 0{,}288$

24. **Página 272**

a) $x_1 = 3 \rightarrow \frac{3 - 2}{3} = \frac{1}{3} = 0{,}33$

b) x_2 $4{,}5$ $\cdot \frac{4{,}5}{3}$ 2 $\frac{2{,}5}{3}$ $0{,}833$

c) $x_3 = -0{,}5 - \frac{-0{,}5 - 2}{3} = \frac{-2{,}5}{3} = -0{,}833$

d) x_4 1 $\frac{1}{3}$ 2 $\frac{3}{3}$ 1

25. **Página 272**

Tipificamos las cantidades para poder compararlas:

$x_1 = 1 \rightarrow \frac{1 - 1}{2} = 0$ $\qquad$ $x_2 = 2 - \frac{2 - 2}{1} = 0$ $\qquad$ $x_3 = 1{,}5 \rightarrow \frac{1{,}5 - 1{,}5}{1{,}5} = 0$

La probabilidad de las tres cantidades es la misma, ya que al tipificarlas son iguales.

26. **Página 273**

X = «Minutos de retraso del autobús»

a) $P(X \geq 4) = P\left(Z \geq \frac{4-5}{2,5}\right) = P(Z \geq -0,4) = P(Z \leq 0,4) = 0,6554$

b) $P(X \leq 1,5) = P\left(Z \leq \frac{1,5-5}{2,5}\right) = P(Z \leq -1,4) = 1 - P(Z \leq 1,4) = 1 - 0,9192 = 0,0808$

27. **Página 273**

X = «kWh consumidos en un mes»

$$P(380 \leq X \leq 425) = P\left(\frac{380-390}{92} \leq Z \leq \frac{425-390}{92}\right) = P(-0,11 \leq Z \leq 0,38) =$$

$$= P(Z \leq 0,38) - P(Z \leq -0,11) = P(Z \leq 0,38) - [1 - P(Z \leq 0,11)] = 0,648 - (1 - 0,5438) = 0,1918$$

28. **Página 274**

X = «Peso del pomelo (g)»

a) $P(150 \leq X \leq 180) = P\left(\frac{150-190}{35} \leq Z \leq \frac{180-190}{35}\right) = P(-1,14 \leq Z \leq -0,29)$

$$= P(Z \leq 1,14) - P(Z \leq 0,29) = 0,8729 - 0,6141 = 0,2588 = 25,88\ \%$$

Un 25,88 % de los pomelos pesan entre 150 y 180 gramos.

b) El intervalo es de la forma $(190 - k, 190 + k)$, donde $k = \sigma \cdot z_{\frac{\alpha}{2}} = 35 z_{0,025}$.

$$P(Z \leq 1,96) = 0,975 \rightarrow z_{0,025} = 1,96 \rightarrow k = 68,6$$

El intervalo es $(190 - 68,6; 190 - 68,6) = (121,4; 258,6)$.

29. **Página 274**

X = «Salario de los trabajadores (€)»

a) La media es el punto medio del intervalo $\mu = \frac{850 + 1330}{2} = 1090$

El intervalo es $(1090 - k, 1090 - k)$, donde $k = 1090 - 850 = 240 = \sigma \cdot z_{\frac{\alpha}{2}} = \sigma \cdot z_{0,005} \rightarrow \sigma = \frac{240}{z_{0,005}}$.

$$\left.\begin{array}{l} P(Z \leq 2,57) = 0,9949 \\ P(Z \leq 2,58) = 0,9951 \end{array}\right\} \rightarrow z_{0,005} = 2,575 \rightarrow \sigma = 93,2$$

b) $P(X \geq 1000) = P\left(Z \geq \frac{1000-1090}{93,2}\right) = P(Z \geq -0,97) = P(Z \leq 0,97) = 0,834 = 83,4\ \%$

El 83,4 % de los trabajadores cobran más de 1 000 €.

30. **Página 275**

$X = B(420; 0,92) \rightarrow n = 420 \geq 8 \qquad np = 420 \cdot 0,92 = 386,4 \geq 5 \qquad n(1-p) = 420 \cdot 0,08 = 33,6 \geq 5$

$$\left.\begin{array}{l} \mu = np = 420 \cdot 0,92 = 386,4 \\ \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 5,56 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(420; 0,92) \approx N(386,4; 5,56)$$

$$P(380 \leq X \leq 400) = P\left(\frac{380 - 386,4}{5,56} \leq Z \leq \frac{400 - 386,4}{5,56}\right) = P(-1,15 \leq Z \leq 2,44) = P(Z \leq 2,44) - (1 - P(Z \leq 1,15)) =$$

$$= 0,9929 - (1 - 0,8749) = 0,8678$$

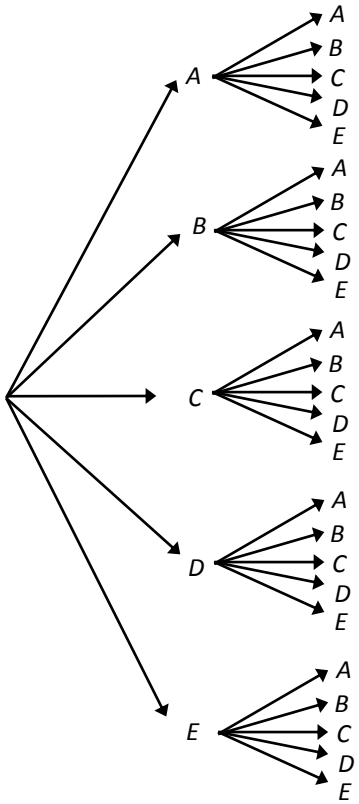
31. **Página 275**

$X = B(150; 0,4) \rightarrow n = 150 \geq 8 \qquad np = 150 \cdot 0,4 = 60 \geq 5 \qquad n(1-p) = 150(0,6) = 90 \geq 5$

$$\left.\begin{array}{l} \mu = np = 150 \cdot 0,4 = 60 \\ \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 6 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(150; 0,4) \approx N(60, 6) \qquad P(X \leq 80) = P\left(Z \leq \frac{80 - 60}{6}\right) = P(Z \leq 3,33) = 0,9996$$

SABER HACER

32. **Página 276**



Con remplazamiento, no importa el orden en que se escojan los elementos:

{*A*, *A*}, {*A*, *B*}, {*A*, *C*}, {*A*, *D*}, {*A*, *E*}, {*B*, *B*}, {*B*, *C*}, {*B*, *D*}, {*B*, *E*}, {*C*, *C*}, {*C*, *D*}, {*C*, *E*}, {*D*, *D*}, {*D*, *E*}, {*E*, *E*}

Con reemplazamiento, no se pueden repetir elementos:

{*A*, *B*}, {*A*, *C*}, {*A*, *D*}, {*A*, *E*}, {*B*, *C*}, {*B*, *D*}, {*B*, *E*}, {*C*, *D*}, {*C*, *E*}, {*D*, *E*}.

33. **Página 276**

La población sigue una distribución binomial de parámetros $n = 300$ y $p = 0{,}05$.

Como $np = 300 \cdot 0{,}05 = 15 > 5$ y $n(1-p) = 300 \cdot 0{,}95 = 285 > 5$, se puede aproximar la distribución normal:

$$\left.\begin{array}{l} \mu = np = 300 \cdot 0{,}05 = 15 \\ \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 3{,}775 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(300; 0{,}05) \approx N(15; 3{,}775)$$

a) $P(-0{,}5 < X < 0{,}5) = P\left(\dfrac{-0{,}5-15}{3{,}775} < Z < \dfrac{0{,}5-15}{3{,}775}\right) = P(-4{,}11 < Z < -3{,}84) = 0$

b) $P(12 < X < 15) = P\left(\dfrac{12-15}{3{,}775} < Z < \dfrac{15-15}{3{,}775}\right) = P(-0{,}79 < Z < 0) = P(Z < 0{,}79) - P(Z < 0) = 0{,}7852 - 0{,}5 = 0{,}2852$

34. **Página 277**

Peso de sandía de tipo *A*: $X_A = N(6; 0{,}5)$.

Peso de sandía de tipo *B*: $X_B = N(5, 2)$.

Sandía *A*: $P(X_A > 6{,}5) = P\left(Z > \dfrac{6{,}5-6}{0{,}5}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

Sandía *B*: $P(X_B > 6{,}5) = P\left(Z > \dfrac{6{,}5-5}{2}\right) = P(Z > 0{,}75) = 1 - P(Z < 0{,}75) = 1 - 0{,}7734 = 0{,}2266$

Tipo *A*: $0{,}1587 \cdot 400 = 63{,}48$ Tipo *B*: $0{,}2266 \cdot 500 = 113{,}3$

Se adquieren más sandías del tipo *B* que del tipo *A*.

35. **Página 277**

X = «Puntuación del examen» $X = N(66, 19)$

$$P(Z < k_1) = 0{,}2 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} P(Z < -k_1) = 0{,}8 \\ P(Z < 0{,}84) = 0{,}7995 \end{array}\right. \rightarrow k_1 = -0{,}84$$

La siguiente puntuación contendría el 20 % + 65 % = 85 % de los exámenes.

$$\left.\begin{array}{l} P(Z < k_2) = 0{,}85 \\ P(Z < 1{,}04) = 0{,}8508 \end{array}\right\} \rightarrow k_2 = 1{,}04$$

Hallamos el valor correspondiente a estos valores tipificados:

$0{,}84 \quad \dfrac{a-66}{19} \quad a = 50{,}04$ $\qquad$ $1{,}04 \quad \dfrac{b-66}{19} \quad b = 85{,}76$

Las puntuaciones que separan un grupo de otro son 50,04 y 85,76. Es decir, 50 y 86.

36. **Página 278**

$X = N(42, 18)$

a) $P(X > 65) = P\left(Z > \dfrac{65-42}{18}\right) = P(Z > 1{,}28) = 1 - P(Z < 1{,}28) = 1 - 0{,}8997 = 0{,}1003$

$0{,}1003 \cdot 250 = 25{,}075 \rightarrow$ Se espera que haya 25 personas de más de 65 años.

b) $P\ 18 \leq X \leq 35\ = P\left\{\frac{18-42}{18} \leq Z \leq \frac{35-42}{18}\right\} = P\ -1{,}33 \leq Z \leq -0{,}39\ =$

$-P\ Z \leq 1{,}33\ - P\ Z \leq 0{,}39\ - 0{,}9082 - 0{,}6517 - 0{,}2565$

$0{,}2565 \cdot 250 = 64{,}125 \rightarrow$ Se espera que haya 64 personas que puedan conseguir la tarjeta joven.

37. **Página 278**

$X = N\ 92, 5$

$$P\ X \geq P_{97,5}\ = 0{,}975 \rightarrow P\left\{Z \geq \frac{P_{97,5}-92}{5}\right\} = 0{,}975 \rightarrow \begin{cases} P\left\{Z \leq -\frac{P_{97,5}-92}{5}\right\} = 0{,}975 \\ P\ Z \leq 1{,}96\ = 0{,}975 \end{cases} \rightarrow -\frac{P_{97,5}-92}{5} = 1{,}96 \rightarrow P_{97,5} = 82{,}2$$

El 97,5 % de la población supera los 82,2 años.

38. **Página 279**

$X = N\ \ ,$

$$P\ X \leq 42\quad 0{,}6 \quad \begin{cases} P\left\{Z \leq \frac{42\ \ }{\ \ }\right\}\ \ 0{,}6 \\ P\ Z \leq 0{,}25\quad 0{,}5987 \end{cases} \quad \frac{42\ \ }{\ \ }\quad 0{,}25$$

$$P\ X \geq 54\ = 0{,}06 \rightarrow 1 - P\ X \leq 54\ = 0{,}06 \rightarrow P\left\{Z \leq \frac{54-\ \ }{\ \ }\right\} = 0{,}94 \rightarrow \begin{cases} P\ Z \leq 1{,}55\ = 0{,}9394 \\ P\ Z \leq 1{,}56\ = 0{,}9406 \end{cases} \rightarrow \frac{54-\ \ }{\ \ } = 1{,}555$$

$$\left.\begin{array}{l} 42-\ \ = 0{,}25\ \ \\ 54-\ \ = 1{,}555\ \ \end{array}\right| \rightarrow -12 = 1{,}305\ \ \rightarrow \ \ = 15{,}66$$

$42 - \ \ = 0{,}25 \cdot 15{,}66 = 3{,}915 \rightarrow \ \ = 38{,}085$

Por lo tanto, $X = N\ 38{,}085; 15{,}66\ .$

39. **Página 279**

$X = N\ 30, 8$

a) $p - 0{,}99 \rightarrow \ \ - 1 - p - 0{,}01 \rightarrow \frac{\ \ }{2} - 0{,}005$

$$0{,}01 - 1 - P\ -z_{0{,}005} \leq Z \leq z_{0{,}005}\ - P\ Z \leq z_{0{,}005}\ - 1 - P\ Z \leq z_{0{,}005}\ - 0{,}99 - P\ Z \leq z_{0{,}005}\ - \frac{1{,}99}{2} - 0{,}995$$

$$\left.\begin{array}{l} P\ Z \leq 2{,}57\ = 0{,}9949 \\ P\ Z \leq 2{,}58\ = 0{,}9951 \end{array}\right| \rightarrow z_{0{,}005} = 2{,}575$$

$$0{,}99\quad P\ k_1 \leq X \leq k_2\quad P\left\{\frac{k_1\ \ 30}{8} \leq Z \leq \frac{k_2\ \ 30}{8}\right\} \cdot \begin{cases} \frac{k_1\ \ 30}{8}\quad 2{,}575 \\ \frac{k_2\ \ 30}{8}\quad 2{,}575 \end{cases} \cdot \begin{cases} k_1\quad 9{,}4 \\ k_2\quad 50{,}6 \end{cases}$$

El intervalo característico para una probabilidad del 99 % es (9,4; 50,6).

b) $p = 0,95 \Rightarrow \alpha = 1 - p = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$

$0,05 = 1 - P(-z_{0,025} < Z < z_{0,025}) = P(Z > z_{0,025}) = 1 - P(Z < z_{0,025}) = 0,95 = P(Z < z_{0,025}) = \frac{1,95}{2} = 0,975$

$P(Z < 1,96) = 0,975 \Rightarrow z_{0,025} = 1,96$

$$0,95 = P(k_1 < X < k_2) = P\left(\frac{k_1 - 30}{8} < Z < \frac{k_2 - 30}{8}\right) = \begin{cases} \frac{k_1 - 30}{8} = -1,96 \\ \frac{k_2 - 30}{8} = 1,96 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 14,32 \\ k_2 = 45,68 \end{cases}$$

El intervalo característico para una probabilidad del 95 % es (14,32; 45,68).

c) $p = 0,9 \Rightarrow \alpha = 1 - p = 0,1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,05$

$0,1 = 1 - P(-z_{0,05} < Z < z_{0,05}) = P(Z < z_{0,05}) = 1 - P(Z \geq z_{0,05}) = 0,9 = P(Z < z_{0,05}) = \frac{1,9}{2} = 0,95$

$$\left.\begin{matrix} P(Z < 1,64) = 0,9495 \\ P(Z < 1,65) = 0,9505 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z_{0,05} = 1,645$$

$$0,9 = P(k_1 < X < k_2) = P\left(\frac{k_1 - 30}{8} < Z < \frac{k_2 - 30}{8}\right) = \begin{cases} \frac{k_1 - 30}{8} = -1,645 \\ \frac{k_2 - 30}{8} = 1,645 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} k_1 = 16,84 \\ k_2 = 43,16 \end{matrix}$$

El intervalo característico para una probabilidad del 90 % es (16,84; 43,16).

ACTIVIDADES FINALES

40. Página 280

a) Numeramos los 5 000 ordenadores. Elegimos 250 ordenadores al azar de entre los 5 000 posibles.

b) Numeramos los 5 000 ordenadores. Hallamos la constante de elevación: $h = \frac{5\,000}{250} = 20$.

Elegimos al azar un elemento entre los 20 primeros, por ejemplo 13. La muestra está formada por los elementos: {13, 13 + 20, 13 + 2 · 20, …, 13 + 249 · 13}.

41. Página 280

a) $\mu = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 2,5$

$\sigma^2 = \frac{1}{4} \cdot 1^2 + \frac{1}{4} \cdot 2^2 + \frac{1}{4} \cdot 3^2 + \frac{1}{4} \cdot 4^2 - 2,5^2 = 1,25 \Rightarrow \sigma = \sqrt{1,25} = 1,118$

b) Las posibles muestras de dos elementos con repetición son:

{1, 1}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 2}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 3}, {3, 4}, {4, 4}

c) Las posibles muestras de tres elementos con repetición son:

{1, 1, 1}, {1, 1, 2}, {1, 1, 3}, {1, 1, 4}, {1, 2, 2}, {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 3}, {1, 3, 4}, {1, 4, 4}, {2, 2, 2}, {2, 2, 3}, {2, 2, 4}, {2, 3, 3}, {2, 3, 4}, {2, 4, 4}, {3, 3, 3}, {3, 3, 4}, {3, 4, 4}, {4, 4, 4}

d) Medias de las muestras de dos elementos: {1; 1,5; 2; 2,5; 2; 2,5; 3; 3; 3,5; 4}

$$\mu = 1\cdot\frac{1}{10} + 1{,}5\cdot\frac{1}{10} + 2\cdot\frac{2}{10} + 2{,}5\cdot\frac{2}{10} + 3\cdot\frac{2}{10} + 3{,}5\cdot\frac{1}{10} + 4\cdot\frac{1}{10} = 2{,}5$$

$$\sigma^2 = 1^2\cdot\frac{1}{10} + 1{,}5^2\cdot\frac{1}{10} + 2^2\cdot\frac{2}{10} + 2{,}5^2\cdot\frac{2}{10} + 3^2\cdot\frac{2}{10} + 3{,}5^2\cdot\frac{1}{10} + 4^2\cdot\frac{1}{10} - 2{,}5^2 = 0{,}75 \rightarrow \sigma = 0{,}866$$

Medias de las muestras de tres elementos: $\left\{1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 3, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}, 3, \frac{10}{3}, 3, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}, 4\right\}$

$$\mu = 1\cdot\frac{1}{20} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{20} + \frac{5}{3}\cdot\frac{2}{20} + 2\cdot\frac{3}{20} + \frac{7}{3}\cdot\frac{3}{20} + \frac{8}{3}\cdot\frac{3}{20} + 3\cdot\frac{3}{20} + \frac{10}{3}\cdot\frac{2}{20} + \frac{11}{3}\cdot\frac{1}{20} + 4\cdot\frac{1}{20} + \frac{5}{2} = 2{,}5$$

$$\sigma^2 = 1^2\cdot\frac{1}{20} + \left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{20} + \left(\frac{5}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{20} + 2^2\cdot\frac{3}{20} + \left(\frac{7}{3}\right)^2\cdot\frac{3}{20} + \left(\frac{8}{3}\right)^2\cdot\frac{3}{20} + 3^2\cdot\frac{3}{20} + \left(\frac{10}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{20} + \left(\frac{11}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{20} +$$

$$+ 4^2\cdot\frac{1}{20} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{7}{12} = 0{,}58 \rightarrow \sigma = 0{,}76$$

42. **Página 280**

a) Las posibles muestras de dos elementos con repetición son:

{10, 10}, {10, 11}, {10, 12}, {10, 13}, {10, 14}, {11, 11}, {11, 12}, {11, 13}, {11, 14}, {12, 12}, {12, 13}, {12, 14}, {13, 13}, {13, 14}, {14, 14}

Las posibles muestras de dos elementos sin repetición son:

{10, 11}, {10, 12}, {10, 13}, {10, 14}, {11, 12}, {11, 13}, {11, 14}, {12, 13}, {12, 14}, {13, 14}

b) $\mu = 10\cdot\frac{1}{5} + 11\cdot\frac{1}{5} + 12\cdot\frac{1}{5} + 13\cdot\frac{1}{5} + 14\cdot\frac{1}{5} = 12$

$$\sigma^2 = \frac{1}{5}\cdot 10^2 + \frac{1}{5}\cdot 11^2 + \frac{1}{5}\cdot 12^2 + \frac{1}{5}\cdot 13^2 + \frac{1}{5}\cdot 14^2 - 12^2 = 2$$

c) Medias con repetición: {10; 10,5; 11; 11,5; 12; 11; 11,5; 12; 12,5; 12; 12,5; 13; 13; 13,5; 14}

$$\mu = 10\cdot\frac{1}{15} + 10{,}5\cdot\frac{1}{15} + 11\cdot\frac{2}{15} + 11{,}5\cdot\frac{2}{15} + 12\cdot\frac{3}{15} + 12{,}5\cdot\frac{2}{15} + 13\cdot\frac{2}{15} + 13{,}5\cdot\frac{1}{15} + 14\cdot\frac{1}{15} = 12$$

$$\sigma^2 = 10^2\cdot\frac{1}{15} + 10{,}5^2\cdot\frac{1}{15} + 11^2\cdot\frac{2}{15} + 11{,}5^2\cdot\frac{2}{15} + 12^2\cdot\frac{3}{15} + 12{,}5^2\cdot\frac{2}{15} + 13^2\cdot\frac{2}{15} + 13{,}5^2\cdot\frac{1}{15} + 14^2\cdot\frac{1}{15} - 12^2 = 1{,}167$$

Medias de las muestras sin repetición: {10,5; 11; 11,5; 12; 11,5; 12; 12,5; 12,5; 13; 13,5}

$$\mu = 10{,}5\cdot\frac{1}{10} + 11\cdot\frac{1}{10} + 11{,}5\cdot\frac{2}{10} + 12\cdot\frac{2}{10} + 12{,}5\cdot\frac{2}{10} + 13\cdot\frac{1}{10} + 13{,}5\cdot\frac{1}{10} = 12$$

$$\sigma^2 = 10{,}5^2\cdot\frac{1}{10} + 11^2\cdot\frac{1}{10} + 11{,}5^2\cdot\frac{2}{10} + 12^2\cdot\frac{2}{10} + 12{,}5^2\cdot\frac{2}{10} + 13^2\cdot\frac{1}{10} + 13{,}5^2\cdot\frac{1}{10} - 12^2 = 0{,}75$$

43. **Página 280**

$\frac{n}{N} = \frac{150}{3\,000} = \frac{1}{20}$. Calculamos el número de manzanas de tipo *A*, n_1; de tipo *B*, n_2; de tipo *C*, n_3; de tipo *D*, n_4.

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_1}{1\,224} = \frac{1}{20} \rightarrow n_1 = \frac{1\,224}{20} = 61{,}2 \qquad \frac{n_2}{N_2} = \frac{n_2}{857} = \frac{1}{20} \rightarrow n_2 = \frac{857}{20} = 42{,}85$$

$$\frac{n_3}{N_3} = \frac{n_3}{495} = \frac{1}{20} \rightarrow n_3 = \frac{495}{20} = 24{,}75 \qquad \frac{n_4}{N_4} = \frac{n_4}{424} = \frac{1}{20} \rightarrow n_4 = \frac{424}{20} = 21{,}2$$

Dado que no nos da resultados exactos aproximamos a la unidad más cercana, tomamos 61 manzanas de tipo *A*, 43 de tipo *B*, 25 de tipo *C* y 21 de tipo *D*.

44. **Página 280**

$$\frac{n}{N} = \frac{100}{3500 - 2700} = \frac{100}{6200} = \frac{1}{62}$$

Calculamos el número de hombres, n_1; y de mujeres, n_2.

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_1}{3500} = \frac{1}{62} \rightarrow n_1 = \frac{3500}{62} = 56,45 \qquad \frac{n_2}{N_2} = \frac{n_2}{2700} = \frac{1}{62} \rightarrow n_2 = \frac{2700}{62} = 43,55$$

Dado que no nos da resultados exactos aproximamos a la unidad más cercana, tomamos 56 hombres y 44 mujeres.

45. **Página 280**

Hacer un reparto con afijación igual, $n_1 \quad n_2 \quad \frac{n}{k} \quad \frac{100}{2} \quad 50$. Tomamos 50 hombres y 50 mujeres.

Para que la muestra fuese más representativa de la población sería mejor hacer un muestreo con afijación proporcional, ya que así la muestra sigue la misma proporción de estratos que la población total.

46. **Página 280**

$$\frac{n}{N} = \frac{39}{600 - 800 - 160} = \frac{39}{1560} = \frac{1}{40}$$

Calculamos el número de hombres, n_1; de mujeres, n_2; y de niños C, n_3.

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_1}{600} = \frac{1}{40} \rightarrow n_1 = \frac{600}{40} = 15 \qquad \frac{n_2}{N_2} = \frac{n_2}{800} = \frac{1}{40} \rightarrow n_2 = \frac{800}{40} = 20 \qquad \frac{n_3}{N_3} = \frac{n_3}{160} = \frac{1}{40} \rightarrow n_3 = \frac{160}{40} = 4$$

Tomamos 15 hombres, 20 mujeres y 4 niños.

47. **Página 280**

$\frac{n}{N} - \frac{30}{1\,000} - \frac{3}{100}$. Calculamos el número de diestros, n_1; y de zurdos, n_2.

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_1}{700} = \frac{3}{100} \rightarrow n_1 = \frac{3 \cdot 700}{100} = 21 \qquad \frac{n_2}{N_2} = \frac{n_2}{300} = \frac{3}{100} \rightarrow n_2 = \frac{3 \cdot 300}{100} = 9$$

Tomamos 21 diestros y 9 zurdos.

48. **Página 280**

a) $N \quad 500 \quad 860 \quad 1200 \quad 700 \quad 740 \quad 4000$

10 % de 4 000 – $\frac{10}{100} \cdot 4000 - 400 - n$

Calculamos el número de juegos clásicos, n_1; de estrategia, n_2; deportivos, n_3; de ciencia ficción, n_4; e históricos, n_5.

$n_1 - n_2 - n_3 - n_4 - n_5 - \frac{n}{k} - \frac{400}{5} - 80 \rightarrow$ Se toman 80 juegos de cada tipo.

b) Con afijación proporcional, la muestra estará formada por el 10 % de elementos de cada estrato.

Calculamos el número de juegos clásicos, n_1; de estrategia, n_2; deportivos, n_3; de ciencia ficción, n_4; e históricos, n_5.

$10\,\%\text{ de }500 = \frac{10}{100}\cdot 500 = 50 = n_1$

$10\,\%\text{ de }860 = \frac{10}{100}\cdot 860 = 86 = n_2$

$10\,\%\text{ de }1\,200 = \frac{10}{100}\cdot 1\,200 = 120 = n_3$

$10\,\%\text{ de }700 = \frac{10}{100}\cdot 700 = 70 = n_4$

$10\,\%\text{ de }740 = \frac{10}{100}\cdot 740 = 74 = n_5$

Se toman 50 juegos clásicos, 86 juegos de estrategia, 120 juegos deportivos, 70 juegos de ciencia ficción y 74 juegos históricos.

49. Página 280

$$\frac{n}{N} = \frac{100}{5000} = \frac{1}{50}$$

Calculamos el número de personas que viven en chalet con jardín, n_1; en adosados de dos plantas, n_2; y en bloques de apartamentos de 4 alturas, n_3.

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_1}{1000} = \frac{1}{50} \to n_1 = \frac{1000}{50} = 200$$

$$\frac{n_2}{N_2} = \frac{n_2}{1500} = \frac{1}{50} \to n_2 = \frac{1500}{50} = 300$$

$$\frac{n_3}{N_3} = \frac{n_3}{2500} = \frac{1}{50} \to n_3 = \frac{2500}{50} = 500$$

Se toman 200 personas que viven en chalet con jardín, 300 que viven en adosados de dos plantas y 500 que viven en apartamentos de 4 alturas.

50. Página 280

a) Se debería tomar una muestra estratificada, donde aparecen elementos de todos los estratos.

b) Para atender a un criterio de proporcionalidad, debemos tomar afijación proporcional.

$$\frac{n}{N} = \frac{160}{200 - 450 - 100 - 40 + 10} = \frac{160}{800} = \frac{1}{5}$$

Calculamos el número de personas del departamento de producción, n_1; del de ventas, n_2; del de I+D+i, n_3; del de recursos humanos, n_4; y del de administración, n_5.

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_1}{200} = \frac{1}{5} \to n_1 = \frac{200}{5} = 40 \qquad \frac{n_2}{N_2} = \frac{n_2}{450} = \frac{1}{5} \to n_2 = \frac{450}{5} = 90 \qquad \frac{n_3}{N_3} = \frac{n_3}{100} = \frac{1}{5} \to n_3 = \frac{100}{5} = 20\,,$$

$$\frac{n_4}{N_4} = \frac{n_4}{40} = \frac{1}{5} \to n_4 = \frac{40}{5} = 8 \qquad \frac{n_5}{N_5} = \frac{n_5}{10} = \frac{1}{5} \to n_5 = \frac{10}{5} = 2$$

Se toman 40 personas del departamento de producción, 90 del de ventas, 20 del de I+D+i, 8 del de recursos humanos y 2 del de administración.

51. **Página 280**

$$\frac{n}{N} = \frac{28 - 32 - 20}{2000} = \frac{80}{2000} = \frac{1}{25}$$

Calculamos el número total de alumnos de inglés, n_1; de francés, n_2; y de alemán, n_3:

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{28}{N_1} = \frac{1}{25} \rightarrow N_1 = 28 \cdot 25 = 700$$

$$\frac{n_2}{N_2} = \frac{32}{N_2} = \frac{1}{25} \rightarrow N_2 = 32 \cdot 25 = 800$$

$$\frac{n_3}{N_3} = \frac{20}{N_3} = \frac{1}{25} \rightarrow N_3 = 20 \cdot 25 = 500$$

Hay 700 alumnos de inglés, 800 de francés y 500 de alemán.

52. **Página 281**

X = «Número de hermanos». La variable toma los posibles valores 0, 1, 2, 3, 4 y 5.

Media: $\mu = \frac{9}{30} \cdot 0 + \frac{10}{30} \cdot 1 + \frac{6}{30} \cdot 2 + \frac{3}{30} \cdot 3 + \frac{1}{30} \cdot 4 + \frac{1}{30} \cdot 5 = \frac{4}{3} = 1{,}33$

Varianza: $\sigma^2 = \frac{9}{30} \cdot 0^2 + \frac{10}{30} \cdot 1^2 + \frac{6}{30} \cdot 2^2 + \frac{3}{30} \cdot 3^2 + \frac{1}{30} \cdot 4^2 + \frac{1}{30} \cdot 5^2 - \left|\frac{4}{3}\right|^2 = 1{,}62$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{1{,}62} = 1{,}27$

53. **Página 281**

X = «Personas que viven en una casa». La variable toma los posibles valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

Media: $\mu = \frac{3}{40} \cdot 0 + \frac{4}{40} \cdot 1 + \frac{5}{40} \cdot 2 + \frac{8}{40} \cdot 3 + \frac{7}{40} \cdot 4 + \frac{4}{40} \cdot 5 + \frac{5}{40} \cdot 6 + \frac{1}{40} \cdot 7 + \frac{3}{40} \cdot 8 = \frac{147}{40} = 3{,}675$

Varianza: $\sigma^2 = \frac{3}{40} \cdot 0^2 + \frac{4}{40} \cdot 1^2 + \frac{5}{40} \cdot 2^2 + \frac{8}{40} \cdot 3^2 + \frac{7}{40} \cdot 4^2 + \frac{4}{40} \cdot 5^2 + \frac{5}{40} \cdot 6^2 + \frac{1}{40} \cdot 7^2 + \frac{3}{40} \cdot 8^2 - 3{,}675^2 = 4{,}72$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{4{,}72} = 2{,}17$

54. **Página 281**

X = «Horas de duración de una pila». La variable toma los posibles valores 9, 10, 11, 12, 13 y 14.

Media: $\mu = \frac{2}{24} \cdot 9 + \frac{6}{24} \cdot 10 + \frac{6}{24} \cdot 11 + \frac{4}{24} \cdot 12 + \frac{5}{24} \cdot 13 + \frac{1}{24} \cdot 14 = \frac{271}{24} = 11{,}29$

Varianza: $\sigma^2 = \frac{2}{24} \cdot 9^2 + \frac{6}{24} \cdot 10^2 + \frac{6}{24} \cdot 11^2 + \frac{4}{24} \cdot 12^2 + \frac{5}{24} \cdot 13^2 + \frac{1}{24} \cdot 14^2 - 11{,}29^2 = 1{,}87$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{1{,}87} = 1{,}37$

55. Página 281

X = «Número de chicos en la muestra». La variable toma los posibles valores 0, 1, 2 y 3.

$$P[X=0]=\frac{C_{6,3}}{C_{10,3}}=\frac{\frac{6!}{3!\,6-3!}}{\frac{10!}{3!\,10-3!}}=\frac{1}{6}$$

$$P[X=1]=\frac{C_{6,2}\cdot C_{4,1}}{C_{10,3}}=\frac{\frac{6!}{2!\,6-2!}\cdot 4}{\frac{10!}{3!\,10-3!}}=\frac{1}{2}$$

$$P[X=2]=\frac{C_{6,1}\cdot C_{4,2}}{C_{10,3}}=\frac{6\cdot\frac{4!}{2!\,4-2!}}{\frac{10!}{3!\,10-3!}}=\frac{3}{10}$$

$$P[X=3]=\frac{C_{4,3}}{C_{10,3}}=\frac{4}{\frac{10!}{3!\,10-3!}}=\frac{1}{30}$$

Media: $\mu=\frac{1}{6}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{3}{10}\cdot 2+\frac{1}{30}\cdot 3=\frac{6}{5}=1{,}2$

Varianza: $\sigma^2=\frac{1}{6}\cdot 0^2+\frac{1}{2}\cdot 1^2+\frac{3}{10}\cdot 2^2+\frac{1}{30}\cdot 3^2-1{,}2^2=0{,}56$

Desviación típica: $\sigma=\sqrt{0{,}56}=0{,}75$

56. Página 281

X = «Número de cruces en la muestra». La variable toma los posibles valores 0, 1, 2 y 3.

P (cruz) $=k$

P (cara) $=2k$

$k+2k+3k+1=k=\frac{1}{3}$

$$P[X=0]=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$$

$$P[X=1]=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

$$P[X=2]=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$$

$$P[X=3]=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$$

Media: $\mu=\frac{8}{27}\cdot 0+\frac{4}{9}\cdot 1+\frac{2}{9}\cdot 2+\frac{1}{27}\cdot 3=1$

Varianza: $\sigma^2=\frac{8}{27}\,0^2+\frac{4}{9}\cdot 1^2+\frac{2}{9}\cdot 2^2+\frac{1}{27}\,3^2-1^2=0{,}67$

Desviación típica: $\sigma=\sqrt{0{,}67}=0{,}82$

57. Página 281

X = «Número de veces que la cara oculta es 1». La variable toma los posibles valores 0, 1, 2, 3, 4 y 5.

$$P[X=0]=\left(\frac{4}{5}\right)^5=0{,}3277$$

$$P[X=1]=C_{5,1}\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^4=5\cdot\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^4=0{,}4096$$

$$P[X=2]=C_{5,2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^3=10\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3=0{,}2048$$

$$P[X=3]=C_{5,3}\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^2=10\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2=0{,}0512$$

$$P[X=4]=C_{5,4}\left(\frac{1}{5}\right)^4\frac{4}{5}=5\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^4\cdot\frac{4}{5}=0{,}0064$$

$$P[X=5]=\left(\frac{1}{5}\right)^5=0{,}0003$$

Media: $\mu=0{,}3277\cdot 0+0{,}4096\cdot 1+0{,}2048\cdot 2+0{,}0512\cdot 3+0{,}0064\cdot 4+0{,}0003\cdot 5=0{,}9999$

Varianza: $\sigma^2=0{,}3277\cdot 0^2+0{,}4096\,1^2+0{,}2048\cdot 2^2+0{,}0512\,3^2+0{,}0064\cdot 4^2+0{,}0003\,5^2-0{,}9999^2=0{,}7997$

Desviación típica: $\sigma=\sqrt{0{,}7997}=0{,}894$

58. **Página 281**

X = «Número de refrescos de naranja en la muestra». La variable toma los posibles valores 0, 1, 2 y 3.

$P[X = 0] = \frac{12}{22} \cdot \frac{11}{21} \cdot \frac{10}{20} = \frac{1}{7}$

$P[X = 1] = \frac{12}{22} \cdot \frac{11}{21} \cdot \frac{10}{20} + \frac{12}{22} \cdot \frac{10}{21} \cdot \frac{11}{20} + \frac{10}{22} \cdot \frac{12}{21} \cdot \frac{11}{20} = \frac{3}{7}$

$P[X = 2] = \frac{12}{22} \cdot \frac{10}{21} \cdot \frac{9}{20} + \frac{10}{22} \cdot \frac{12}{21} \cdot \frac{9}{20} + \frac{10}{22} \cdot \frac{9}{21} \cdot \frac{12}{20} = \frac{27}{77}$

$P[X = 3] = \frac{10}{22} \cdot \frac{9}{21} \cdot \frac{8}{20} = \frac{6}{77}$

Media: $\mu = \frac{1}{7} \cdot 0 + \frac{3}{7} \cdot 1 + \frac{27}{77} \cdot 2 + \frac{6}{77} \cdot 3 = \frac{15}{11}$

Varianza: $\sigma^2 = \frac{1}{7} \cdot 0^2 + \frac{3}{7} \cdot 1^2 + \frac{27}{77} \cdot 2^2 + \frac{6}{77} \cdot 3^2 - \left(\frac{15}{11}\right)^2 = 0{,}673$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{0{,}673} = 0{,}82$

59. **Página 281**

X = «Número de trabajadores en la industria». La variable toma los posibles valores 0, 1, 2 y 3.

$N = 2\,920\,000 + 925\,000 + 3\,584\,000 + 7\,420\,000 = 14\,849\,000$

Número de trabajadores en un sector que no sea la industria: $14\,849\,000 - 3\,584\,000 = 11\,265\,000$

$P[X = 0] = \frac{11\,265\,000}{14\,849\,000} \cdot \frac{11\,264\,999}{14\,848\,999} \cdot \frac{11\,264\,998}{14\,848\,998} = 0{,}4366$

$P[X = 1] = \frac{11\,265\,000}{14\,849\,000} \cdot \frac{11\,264\,999}{14\,848\,999} \cdot \frac{3\,584\,000}{14\,848\,998} + \frac{11\,265\,000}{14\,849\,000} \cdot \frac{3\,584\,000}{14\,848\,999} \cdot \frac{11\,264\,999}{14\,848\,998} +$

$+ \frac{3\,584\,000}{14\,849\,000} \cdot \frac{11\,265\,000}{14\,848\,999} \cdot \frac{11\,264\,999}{14\,848\,998} = 0{,}4167$

$P[X = 2] = \frac{11\,265\,000}{14\,849\,000} \cdot \frac{3\,584\,000}{14\,848\,999} \cdot \frac{3\,583\,999}{14\,848\,998} + \frac{3\,584\,000}{14\,849\,000} \cdot \frac{11\,265\,000}{14\,848\,999} \cdot \frac{3\,584\,999}{14\,848\,998} +$

$+ \frac{3\,584\,00}{14\,849\,000} \cdot \frac{3\,583\,999}{14\,848\,999} \cdot \frac{11\,265\,000}{14\,848\,998} = 0{,}1326$

$P[X = 3] = \frac{3\,584\,000}{14\,849\,000} \cdot \frac{3\,583\,999}{14\,848\,999} \cdot \frac{3\,583\,998}{14\,848\,998} = 0{,}0141$

Media: $\mu = 0{,}4366 \cdot 0 + 0{,}4167 \cdot 1 + 0{,}1326 \cdot 2 + 0{,}0141 \cdot 3 = 0{,}7242$

Varianza: $\sigma^2 = 0{,}4366 \cdot 0^2 + 0{,}4167 \cdot 1^2 + 0{,}1326 \cdot 2^2 + 0{,}0141 \cdot 3^2 - 0{,}7242^2 = 0{,}5495$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{0{,}5495} = 0{,}7413$

60. **Página 281**

a) La variable, *X*, cuenta las preguntas acertadas en el examen. Es una variable discreta.

El examen tiene 10 preguntas → $n = 10$

Identificamos el suceso: *A* = «Acierta la pregunta» $P(A) = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$

Acertar una pregunta es independiente de acertar otra.

La variable sigue una distribución binomial, $X = B(10; 0{,}33)$.

$$P(X = 7) = \binom{10}{7} \cdot 0{,}33^7 \cdot (1 - 0{,}33)^{10-7} = 0{,}0154$$

b) $P(X \geq 7) = P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = 0{,}0154 + \binom{10}{8} \cdot 0{,}33^8 \cdot (1 - 0{,}33)^{10-8} + \binom{10}{9} \cdot 0{,}33^9 \cdot (1 - 0{,}33)^{10-9}$

$$+ \binom{10}{10} \cdot 0{,}33^{10} \cdot (1 - 0{,}33)^{10-10} = 0{,}01855$$

61. **Página 281**

a) La variable, *X*, cuenta los Blu-Ray que funcionan después de un año. Es una variable discreta.

Analizamos una muestra de 10 Blu-Ray → $n = 10$

Identificamos el suceso: *F* = «Funciona después de un año» $P(F) = 0{,}9$

Que un Blu-Ray falle es independiente de que falle el otro.

La variable sigue una distribución binomial, $X = B(10; 0{,}9)$.

$$P(X \leq 8) = 1 - P(X \geq 8) = 1 - P(X = 9) - P(X = 10) = 1 - \binom{10}{9} \cdot 0{,}9^9 \cdot (1 - 0{,}9)^{10-9} - \binom{10}{10} 0{,}9^{10} \cdot (1 - 0{,}9)^{10-10} = 0{,}264$$

b) $P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) =$

$$= \binom{10}{8} \cdot 0{,}9^8 \cdot (1 - 0{,}9)^{10-8} + \binom{10}{9} \cdot 0{,}9^9 \cdot (1 - 0{,}9)^{10-9} + \binom{10}{10} \cdot 0{,}9^{10} \cdot (1 - 0{,}9)^{10-10} = 0{,}9298$$

62. **Página 281**

La variable, *X*, cuenta los teléfonos que comunican. Es una variable discreta.

Analizamos una muestra de 8 llamadas → $n = 8$.

Identificamos el suceso: *C* = «El teléfono comunica» $P(C) = \frac{1}{5} = 0{,}2$

Que un teléfono comunique es independiente de que lo haga otro.

La variable sigue una distribución binomial, $X = B(8; 0{,}2)$.

$$P(X = 2) = \binom{8}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot (1 - 0{,}2)^{8-2} = 0{,}2936$$

63. **Página 281**

a) La variable, *X*, cuenta los elevalunas defectuosos de la muestra. Es una variable discreta.

Identificamos el suceso: *D* = «El elevalunas está defectuoso» $\rightarrow P(D) = 0{,}3$

Que un elevalunas sea defectuoso es independiente de que lo sea el otro.

La variable sigue una distribución binomial, $X = B(n; 0{,}3)$.

La varianza y la desviación típica dependen del tamaño de la población estudiada y son:

Varianza: $\sigma^2 = np(1-p) = n \cdot 0{,}3 \cdot (1-0{,}3) = 0{,}21n$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{0{,}21n} = 0{,}458\sqrt{n}$

b) Analizamos una muestra de 5 elevalunas $\rightarrow n = 5 \rightarrow X = B(5; 0{,}3)$.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} \cdot 0{,}3^0 \cdot (1-0{,}3)^5 = 0{,}83193$$

c) El número de elevalunas esperado es la media, es decir, $n \cdot p = 2\,000 \cdot 0{,}3 = 600$.

64. **Página 281**

a) La variable, *X*, cuenta las personas que han visto la película entre los seguidores de esta. Es discreta.

Analizamos una muestra de 4 amigos $\rightarrow n = 4$

Identificamos el suceso: *P* = «Han visto la película» $\rightarrow P(P) = 0{,}75$

Que un seguidor haya visto la película es independiente que otro la haya visto.

La variable sigue una distribución binomial, $X = B(4; 0{,}75)$.

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot 0{,}75^2 \cdot (1-0{,}75)^{4-2} = 0{,}211$$

b) $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}211 + \binom{4}{3} \cdot 0{,}75^3 \cdot (1-0{,}75)^{4-3} + \binom{4}{4} \cdot 0{,}75^4 \cdot (1-0{,}75)^{4-4} = 0{,}949$

65. **Página 281**

a) La variable *X* cuenta las personas que han dado positivo en el control de alcoholemia. Es discreta.

Analizamos una muestra de 5 conductores $\rightarrow n = 5$

Identificamos el suceso: *P* = «Han dado positivo en el control de alcoholemia» $\rightarrow P(P) = 0{,}04$

Que un conductor haya dado positivo es independiente de que otro haya dado positivo.

La variable sigue una distribución binomial, $X = B(5; 0{,}04)$.

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}04^3 \cdot (1-0{,}04)^{5-3} = 0{,}00059$$

b) La variable *Y* cuenta las personas que no llevaban puesto el cinturón de seguridad. Es discreta.

Identificamos el suceso: *C* = «No llevaban puesto el cinturón de seguridad» $\rightarrow P(C) = 0{,}09$

Que un conductor no lleve puesto el cinturón es independiente de que otro lo lleve.

La variable sigue una distribución binomial, $Y = B(5; 0{,}09)$.

$$P(Y = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}09^3 \cdot (1-0{,}09)^{5-3} = 0{,}00604$$

c) La variable *Z* cuenta las personas que no llevaban puesto el cinturón de seguridad y han dado positivo en el control de alcoholemia. Es una variable discreta.

Los sucesos son independientes: $P(P' \cap C) = P(P) \cdot P(C) = 0{,}04 \cdot 0{,}09 = 0{,}0036$

La variable sigue una distribución binomial, $Z = B(5; 0{,}0036)$.

$$P(Z = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}0036^3 \cdot (1 - 0{,}0036)^{5-3} = 0{,}000000463$$

d) La variable *W* cuenta las personas que no llevaban puesto el cinturón de seguridad o han dado positivo en el control de alcoholemia. Es una variable discreta.

$$P(P \cup C) = P(P) + P(C) - P(P \cap C) = 0{,}04 + 0{,}09 - 0{,}0036 = 0{,}1264$$

La variable sigue una distribución binomial, $W = B(5; 0{,}1264)$.

$$P(W = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}1264^3 \cdot (1 - 0{,}1264)^{5-3} = 0{,}01541$$

e) $P(W \geq 1) = 1 - P(W = 0) = 1 - \binom{5}{0} \cdot 0{,}1264^0 \cdot (1 - 0{,}1264)^5 = 0{,}49118$

66. **Página 282**

a) La variable, *X*, cuenta los pacientes que tienen efectos secundarios al medicamento. Es discreta.

Analizamos una muestra de 4 pacientes $\rightarrow n = 4$

Identificamos el suceso: *E* = «El paciente tiene efectos secundarios» $\rightarrow P(E) = \frac{4}{100} = 0{,}04$

Que un paciente sufra efectos secundarios es independiente de que los sufra otro.

La variable sigue una distribución binomial, $X = B(4; 0{,}04)$.

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} \cdot 0{,}04^0 \cdot (1 - 0{,}04)^4 = 0{,}8493$$

b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0{,}8493 - \binom{4}{1} \cdot 0{,}04^1 \cdot (1 - 0{,}04)^{4-1} = 0{,}0091$

c) Si se eligen 200 pacientes al azar, el número esperado de pacientes con efectos secundarios es la media de *X*, es decir, $200 \cdot 0{,}04 = 8$.

67. **Página 282**

a) La variable, *X*, cuenta los hogares con al menos un perro. Es una variable discreta.

Analizamos una muestra de 6 hogares $\rightarrow n = 6$

Identificamos el suceso: *P* = «Hay al menos un perro en el hogar» $\rightarrow P(P) = 0{,}35$

Que un hogar tenga perro es independiente de que lo tenga otro.

La variable sigue una distribución binomial, $X = B(6; 0{,}35)$.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 1) - P(X = 0) = 1 - \binom{6}{1} \cdot 0{,}35^1 \cdot (1 - 0{,}35)^{6-1} - \binom{6}{0} \cdot 0{,}35^0 \cdot (1 - 0{,}35)^6 = 0{,}6809$$

b) $P\ 2 \leqslant X \leqslant 4\ = P\ X = 2\ + P\ X = 3\ + P\ X = 4\ = \binom{6}{2} \cdot 0{,}35^2 \cdot\ 1 - 0{,}35\ ^{6-2} -$

$- \binom{6}{3} \cdot 0{,}35^3 \cdot\ 1 - 0{,}35\ ^{6-3} - \binom{6}{4} \cdot 0{,}35^4 \cdot\ 1 - 0{,}35\ ^{6-4} = 0{,}6586$

68. **Página 282**

a) La variable, *X*, cuenta el número de mujeres entre 16 y 21 años que son madres. Es discreta.

Analizamos una muestra de 5 mujeres → $n = 5$

Identificamos el suceso: $M =$ «Una mujer es madre» $- P\ M\ = \frac{108}{1000} = 0{,}108$

Que una mujer sea madre es independiente de que lo sea otra.

La variable sigue una distribución binomial, $X = B\ 5; 0{,}108\ .$

$P\ X \geqslant 1\ = 1 - P\ X = 0\ = 1 - \binom{5}{0} \cdot 0{,}108^0 \cdot\ 1 - 0{,}108\ ^5 = 0{,}4353$

b) $P\ X \leqslant 4\ = 1 - P\ X = 4\ - P\ X = 5\ = 1 - \binom{5}{4} \cdot 0{,}108^4 \cdot\ 1 - 0{,}108\ ^{5-4} - \binom{5}{5} \cdot 0{,}108^5 \cdot\ 1 - 0{,}108\ ^{5-5} = 0{,}99938$

69. **Página 282**

a) La variable, *X*, cuenta el número de personas que celebran el Día del Padre el 19 de marzo. Es una variable discreta.

Analizamos una muestra de 7 personas $\cdot n\ \ 7$

Identificamos el suceso: $P =$ «Celebran el Día del Padre» $- P\ P\ - 0{,}78$

Que una persona celebre el Día del Padre es independiente de que lo haga otra.

La variable sigue una distribución binomial, $X = B\ 7; 0{,}78\ .$

$P\ X = 0\ = \binom{7}{0} \cdot 0{,}78^0 \cdot\ 1 - 0{,}78\ ^7 = 0{,}000025$

b) $P\ X \geqslant 1\ - 1 - P\ X - 0\ - 1 - 0{,}000025 - 0{,}999975$

c) $P\ X = 7\ = \binom{7}{7} \cdot 0{,}78^7 \cdot\ 1 - 0{,}78\ ^0 = 0{,}1757$

70. **Página 282**

a) La variable, *X*, cuenta el número de personas que viven pasados 30 años. Es una variable discreta.

Analizamos una muestra de 6 personas → $n = 6$

Identificamos el suceso: $V =$ «Viven después de 30 años» $- P\ V\ - \frac{4}{5} - 0{,}8$

Que una persona viva después de 30 años es independiente de que lo haga otra.

La variable sigue una distribución binomial, $X = B\ 6; 0{,}8\ .$

$P\ X = 6\ = \binom{6}{6} \cdot 0{,}8^6 \cdot\ 1 - 0{,}8\ ^{6-6} = 0{,}2621$

b) $P\ X=4\ =\binom{6}{4}\cdot 0,8^4\cdot\ 1-0,8\ ^{6-4}=0,2458$

c) $P\ X\geq 4\ =P\ X=4\ -P\ X=5\ -P\ X=6\ =0,2621-\binom{6}{5}\cdot 0,8^5\cdot\ 1-0,8\ ^{6-5}-0,2458\ =0,9011$

71. **Página 282**

a) La variable, *X*, cuenta el número de personas que tienen estudios superiores. Es una variable discreta.

Analizamos una muestra de 8 personas → $n=8$

Identificamos el suceso: $S=$ «Tienen estudios superiores» $-P\ S\ -0,4$

Que una persona tenga estudios superiores es independiente de que los tenga otra.

La variable sigue una distribución binomial, $X=B\ 8;0,4\ .$

$P\ X=0\ =\binom{8}{0}\cdot 0,4^0\cdot\ 1-0,4\ ^8=0,0168$

b) $P\ X=4\ =\binom{8}{4}\cdot 0,4^4\ \ 1-0,4\ ^{8-4}=0,2322$

c) $P\ X\geq 7\ =P\ X=7\ +P\ X=8\ =\binom{8}{7}\cdot 0,4^7\ \ 1-0,4\ ^{8-7}-\binom{8}{8}\cdot 0,4^8\cdot\ 1-0,4\ ^{8-8}=0,0085$

72. **Página 282**

a) $P\ X\leq 1,5\ -0,9332$

b) $P\ X\geq 1,5\ -1-P\ X\leq 1,5\ -0,0668$

c) $P\ 0,2\leq X\leq 1,5\ -P\ X\leq 1,5\ -P\ X\leq 0,2\ -0,9332-0,5793-0,3539$

d) $P\ X\geq -1,5\ -P\ X\leq 1,5\ -0,9332$

e) $P\ X\leq -1,5\ -P\ X\geq 1,5\ -0,0668$

f) $P\ -0,2\leq X\leq 1,5\ =P\ X\leq 1,5\ -P\ X\leq -0,2\ =0,9332-\ 1-P\ X\leq 0,2\ \ -0,9332-\ 1-0,5793\ -0,5125$

g) $P\ -1,5\leq X\leq 0,2\ -P\ -0,2\leq X\leq 1,5\ -0,5125$

h) $P\ -1,5\leq X\leq -0,2\ -P\ 0,2\leq X\leq 1,5\ -P\ 0,2\leq X\leq 1,5\ -0,3539$

73. **Página 282**

a) $P\ X\leq 15\ =P\left[Z\leq\frac{15-14}{5}\right]=P\ Z\leq 0,2\ =0,5793$

b) $P\ X\geq 15\ -1-P\ X\leq 15\ -1-0,5793-0,4207$

c) $P\ 15\leq X\leq 16\ =P\left[\frac{15-14}{5}\leq Z\leq\frac{16-14}{5}\right]=P\ 0,2\leq Z\leq 0,4\ =P\ Z\leq 0,4\ -P\ Z\leq 0,2\ =0,6554-0,5793=0,0761$

d) $P\ X\geq 11\ =P\left[Z\geq\frac{11-14}{5}\right]=P\ Z\geq -0,6\ =P\ Z\leq 0,6\ =0,7257$

e) $P\ X < 11 = 1 - P\ X \geq 11 = 1 - 0,7257 = 0,2743$

f) $P\ 11 < X < 15 = P\ X < 15 - P\ X < 11 = 0,5793 - 0,2743 = 0,305$

g) $P\ 11 < X < 13 = P\left[\frac{11-14}{5} < Z < \frac{13-14}{5}\right] = P\ -0,6 < Z < -0,2 = P\ 0,2 < Z < 0,6 =$

$= P\ Z < 0,6 - P\ Z < 0,2 = 0,7257 - 0,5793 = 0,1464$

h) $P\ 4 < X < 20 = P\left[\frac{4-14}{5} < Z < \frac{20-14}{5}\right] = P\ -2 < Z < 1,2 = P\ Z < 1,2 - 1 - P\ Z < 2 =$

$= 0,8849 - 1 - 0,9772 = 0,8621$

74. **Página 282**

a) $P\ Z < k = 0,5 \rightarrow k = 0$

b) $P\ Z < k = 0,8729 \rightarrow k = 1,14$

c) $P\ Z < k = 0,9 \rightarrow k = 1,28$

d) $P\ Z < k = 0,33 \rightarrow P\ Z < -k = 1 - 0,33 = 0,67 \rightarrow -k = 0,44 \rightarrow k = -0,44$

e) $P\ Z < k = 0,2 \rightarrow P\ Z < -k = 1 - 0,2 = 0,8 \rightarrow -k = 0,84 \rightarrow k = -0,84$

f) $P\ Z > k = 0,12 \rightarrow P\ Z < k = 1 - 0,12 = 0,88 \rightarrow k = 1,175$

g) $P\ Z > k = 0,9971 \rightarrow P\ Z < -k = 0,9971 \rightarrow -k = 2,76 \rightarrow k = -2,76$

h) $P\ Z > k = 0,6 \rightarrow P\ Z < -k = 0,6 \rightarrow -k = 0,25 \rightarrow k = -0,25$

75. **Página 282**

$X = N\ 2,4; 0,8$

a) $P\ X > 2,5 = P\left[Z > \frac{2,5-2,4}{0,8}\right] = P\ Z > 0,125 = 1 - P\ Z < 0,125 = 1 - \frac{0,5478 - 0,5517}{2} = 0,45025$

La probabilidad de que beba más de 2,5 litros de agua al día es 0,45025.

b) $P\ 2 < X < 3 = P\left[\frac{2-2,4}{0,8} < Z < \frac{3-2,4}{0,8}\right] = P\ -0,5 < Z < 0,75 =$

$= P\ Z < 0,75 - 1 - P\ Z < 0,5 = 0,7734 - 1 - 0,6915 = 0,4649$

La probabilidad de que beba entre 2 y 3 litros de agua diarios es 0,4649.

76. **Página 282**

$X = N\ 9, 1$

a) $P\ X > 8,5 = P\left[Z > \frac{8,5-9}{1}\right] = P\ Z > -0,5 = P\ Z < 0,5 = 0,6915$

La probabilidad de que duerma más de 8,5 horas es de 0,6915.

b) $P\ 8 < X < 10 = P\left[\frac{8-9}{1} < Z < \frac{10-9}{1}\right] = P\ -1 < Z < 1 = P\ Z < 1 - 1 - P\ Z < 1 = 0,8413 - 1 - 0,8413 = 0,6826$

La probabilidad de que duerma entre 8 y 10 horas es de 0,6826.

77. **Página 283**

$X = N\ 15, 5$

a) $P\ X \geq 10\ = P\left[Z \geq \frac{10-15}{5}\right] = P\ Z \geq -1\ = P\ Z \leq 1\ = 0,8413$

La probabilidad de que la tasa de ahorro supere el 10 % es de 0,8413.

b) $P\ X \leq 10\ = 1 - P\ X \geq 10\ = 1 - 0,8413 = 0,1587$

La probabilidad de que la tasa de ahorro no supere el 10 % es de 0,1587.

c) $P\ 15 \leq X \leq 20\ = P\left[\frac{15-15}{5} \leq Z \leq \frac{20-15}{5}\right] = P\ 0 \leq Z \leq 1\ = P\ Z \leq 1 - P\ Z \leq 0\ = 0,8413 - 0,5 = 0,3413$

La probabilidad de que la tasa de ahorro esté entre 15 % y 20 % es de 0,3413.

d) $P\ 10 \leq X \leq 20\ = P\left[\frac{10-15}{5} \leq Z \leq \frac{20-15}{5}\right] = P\ -1 \leq Z \leq 1\ = P\ Z \leq 1\ - \ 1 - P\ Z \leq 1\ = 0,8413 - \ 1 - 0,8413\ = 0,6826$

La probabilidad de que la tasa de ahorro esté entre 10 % y 20 % es de 0,6826.

78. **Página 283**

$X = N\ 1,8; 0,7$

a) $P\ X \geq 2\ = P\left[Z \geq \frac{2-1,8}{0,7}\right] = P\ Z \geq 0,29\ = 1 - P\ Z \leq 0,29\ = 1 - 0,6141 = 0,3859$

La probabilidad de que dedique más de dos horas al juego es 0,3859.

b) $P\ X \geq 1\ = P\left[Z \geq \frac{1-1,8}{0,7}\right] = P\ Z \geq -1,14\ = P\ Z \leq 1,14\ = 0,8729$

La probabilidad de que dedique más de una hora al juego es 0,8729.

c) $P\ 1,5 \leq X \leq 2,5\ = P\left[\frac{1,5-1,8}{0,7} \leq Z \leq \frac{2,5-1,8}{0,7}\right] = P\ -0,43 \leq Z \leq 1\ =$

$= P\ Z \leq 1\ - \ 1 - P\ Z \leq 0,43\ = 0,8413 - \ 1 - 0,6664\ = 0,5077$

La probabilidad de que dedique al juego entre 1,5 horas y 2,5 es 0,5077.

79. **Página 283**

$X = N\ 9, 2$

a) $P\ X \geq 10\ = P\left[Z \geq \frac{10-9}{2}\right] = P\ Z \geq 0,5\ = 1 - P\ Z \leq 0,5\ = 1 - 0,6915 = 0,3085$

La probabilidad de que dedique más del 10 % a I+D es de 0,3085.

b) $P\ 8 \leq X \leq 11\ = P\left[\frac{8-9}{2} \leq Z \leq \frac{11-9}{2}\right] = P\ -0,5 \leq Z \leq 1\ = P\ Z \leq 1\ - \ 1 - P\ Z \leq 0,5\ = \ - 0,8413 - \ 1 - 0,6915\ - 0,5328$

La probabilidad de que entre el 8 % y el 11 % del presupuesto total se dedique a I+D es de 0,5328.

80. **Página 283**

$X = N\ 120, 10$

a) $P\ X < k_1\ = P\left[Z < \dfrac{k_1 - 120}{10}\right] = 0,25 \rightarrow P\left[Z > -\dfrac{k_1 - 120}{10}\right] = 1 - 0,25 = 0,75$

$\begin{cases} P\ Z < 0,67\ = 0,7486 \\ P\ Z < 0,68\ = 0,7517 \end{cases} - -\dfrac{k_1 - 120}{10} = 0,675 \rightarrow k_1 = 113,25$

$P\ X < k_2\ = P\left[Z < \dfrac{k_2 - 120}{10}\right] = 0,75 - \dfrac{k_1 - 120}{10} = 0,675 - k_1 = 126,75$

El primer cuartil es 113,25 y el tercer cuartil es 126,75.

b) $P\ 100 < X < 130\ = P\left[\dfrac{100 - 120}{10} < Z < \dfrac{130 - 120}{10}\right] = P\ -2 < Z < 1\ =$

$= P\ Z < 1\ - \ 1 - P\ Z > 2\ = 0,8413 - \ 1 - 0,9772\ = 0,8186$

La probabilidad de que la lluvia caída esté entre 100 y 130 litros es 0,8186.

81. **Página 283**

$X = N\ 22,5; 8$

$P\ X < 30\ = P\left[Z < \dfrac{30 - 22,5}{8}\right] = P\ Z < 0,94\ = 0,8264 = 82,64\ \%$

El porcentaje de viajes que duran menos de 30 minutos es de 82,64 %.

82. **Página 283**

$X = N\ 1,65;$

a) $P\ X > 1,7\ = P\left[Z > \dfrac{1,7 - 1,65}{}\right] = P\left[Z > \dfrac{0,05}{}\right] = 0,33 - P\left[Z < \dfrac{0,05}{}\right] = 0,67$

$P\ Z < 0,44\ - 0,67 - \dfrac{0,05}{} - 0,44 - = - 0,1136 - ^2 - 0,0129$

La varianza es 0,0129.

b) $X \equiv N\ 1,65; 0,1136\ - P\ X < 1,6\ = P\left[Z < \dfrac{1,6 - 1,65}{0,0129}\right] = P\ Z < -0,44\ = 1 - P\ Z > 0,44\ = 0,33 = 33\ \%$

El 33 % de los alumnos varones miden menos de 1,60 m.

83. **Página 283**

$^2 - 225 \rightarrow - 15 - X = N\ 65; 15$

$P\ Z < k_1\ = 0,25 - P\ Z < -k_1\ = 0,75 - \begin{cases} P\ Z < 0,67\ = 0,7486 \\ P\ Z < 0,68\ = 0,7517 \end{cases} \rightarrow k_1 = -0,675$

$P\ Z < k_2\ = 0,95 - \begin{cases} P\ Z < 1,64\ = 0,9495 \\ P\ Z < 1,65\ = 0,9505 \end{cases} \rightarrow k_2 = 1,645$

Hallamos el valor correspondiente a estos valores tipificados:

$$\left.\begin{array}{l} -0{,}675 = \dfrac{a-65}{15} \\ 1{,}645 = \dfrac{b-65}{15} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} a = 54{,}875 \\ b = 89{,}675 \end{array}$$

Las puntuaciones que separan un grupo de otro son 54,875 y 79,675, es decir, 55 y 80.

84. **Página 283**

$X = N(7, 1)$

a) $P(X \leq 2) = P\left(Z \leq \dfrac{2-7}{1}\right) = P(Z \leq -5) = 0 \rightarrow$ Un 0 % de cafeteras tendrá que ser remplazadas.

b) $P(X \leq k) = P\left(Z \leq \dfrac{k-7}{1}\right) = P(Z \leq k-7) = 0{,}04 \rightarrow P(Z \leq 7-k) = 0{,}96$

$P(Z \leq 1{,}75) = 0{,}9599 \rightarrow 7-k = 1{,}75 \rightarrow k = 5{,}25$ años $= 5{,}25 \cdot 12 = 63$ meses

c) $P(7 \leq X \leq 8) = P\left(\dfrac{7-7}{1} \leq Z \leq \dfrac{8-7}{1}\right) = P(0 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq 0) = 0{,}8413 - 0{,}5 = 0{,}3413 \rightarrow 34{,}13\ \%$

Un 34,13 % de cafeteras durarán entre 7 y 8 años.

85. **Página 283**

$X = N(6, 4)$

a) $P(5 \leq X \leq 7{,}5) = P\left(\dfrac{5-6}{4} \leq Z \leq \dfrac{7{,}5-6}{4}\right) = P(-0{,}25 \leq Z \leq 0{,}375) =$

$= P(Z \leq 0{,}375) - [1 - P(Z \leq 0{,}25)] = 0{,}6462 - [1 - 0{,}5987] = 0{,}2449$

Las llamadas durarán entre 5 y 7 minutos en una proporción de 0,2449.

b) $P(X \leq 2) = P\left(Z \leq \dfrac{2-6}{4}\right) = P(Z \leq -1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

La proporción de llamadas que se completan en 2 minutos o menos es 0,1587.

c) $P(X \geq 5) = P\left(Z \geq \dfrac{5-6}{4}\right) = P(Z \geq -0{,}25) = P(Z \leq 0{,}25) = 0{,}5987$

La probabilidad de que dure más de 5 minutos es de 0,5987.

86. **Página 283**

$X = N(\mu, \sigma)$

$$P(X \geq 40) = 0{,}6 \rightarrow P\left(Z \geq \frac{40-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}6 \rightarrow P\left(Z \leq -\frac{40-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}6 \rightarrow P(Z \leq 0{,}25) = 0{,}5987 \rightarrow -\frac{40-\mu}{\sigma} = 0{,}25$$

$$P(X \leq 50) = 0{,}55 \rightarrow P\left(Z \leq \frac{50-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}55 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} P(Z \leq 0{,}12) = 0{,}5478 \\ P(Z \leq 0{,}13) = 0{,}5517 \end{array}\right. \rightarrow \frac{50-\mu}{\sigma} = 0{,}125$$

$$\left.\begin{array}{l} -40 + \mu = 0{,}25\sigma \\ 50 - \mu = 0{,}125\sigma \end{array}\right\} - 10 = 0{,}375\sigma \rightarrow \sigma = 26{,}67 \qquad 50 - \mu = 0{,}125 \cdot 26{,}67 = 3{,}334 \rightarrow \mu = 46{,}666$$

Por lo tanto, $X = N(46{,}666; 26{,}67)$.

87. **Página 284**

Calculamos la probabilidad de que alguien obtenga menos nota que ellos en cada caso:

$X_1 = N(76{,}2; 3{,}1)$ $\qquad$ $X_2 = N(62{,}7; 2{,}9)$

$$P(X_1 < 81{,}5) = P\left(Z < \frac{81{,}5 - 76{,}2}{3{,}1}\right) = P(Z < 1{,}71) = 0{,}9554$$

$$P(X_2 < 76{,}5) = P\left(Z < \frac{76{,}5 - 62{,}7}{2{,}9}\right) = P(Z < 4{,}76) = 1$$

Se encuentra en la mejor posición el segundo individuo porque hay más gente con menos nota que él.

88. **Página 284**

$X = N(25, 2)$

a) $P(Z < z_{0{,}05}) = 0{,}95 \rightarrow \begin{cases} P(Z < 1{,}64) = 0{,}9495 \\ P(Z < 1{,}65) = 0{,}9505 \end{cases} \rightarrow z_{0{,}05} = 1{,}645 = \dfrac{a - 25}{2} = 1{,}645 \rightarrow a = 28{,}29$

Por debajo de 28,29 gramos se encuentra el 95 % de las rebanadas.

b) El intervalo característico es:

$$(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma) = (25 - 2 \cdot 1{,}645; 25 - 2 \cdot 1{,}645) = (21{,}71; 28{,}29)$$

89. **Página 284**

$X = N(15, 5)$

a) $P(X > 14) = P\left(Z > \dfrac{14 - 15}{5}\right) = P(Z > -0{,}2) = P(Z < 0{,}2) = 0{,}5793$

b) $P(Z < z_{0{,}05}) = 0{,}95 \rightarrow \begin{cases} P(Z < 1{,}64) = 0{,}9495 \\ P(Z < 1{,}65) = 0{,}9505 \end{cases} \rightarrow z_{0{,}05} = 1{,}645 = \dfrac{a - 15}{5} = 1{,}645 \rightarrow a = 23{,}225$

Por debajo de 23,225 kg se encuentra el 95 % de los paquetes.

c) $1 - \alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 = \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}015 = P(Z < 2{,}17) = 0{,}985 \rightarrow z_{0{,}015} = 2{,}17$

El intervalo característico es:

$$(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma) = (15 - 5 \cdot 2{,}17; 15 - 5 \cdot 2{,}17) = (4{,}15; 25{,}85)$$

90. **Página 284**

$X = N(10, 6)$

a) $P(X < 5) = P\left(Z < \dfrac{5 - 10}{6}\right) = P(Z < -0{,}83) = 1 - P(Z < 0{,}83) = 1 - 0{,}7967 = 0{,}2033$

b) $P(X > 2) = P\left(Z > \dfrac{2 - 10}{6}\right) = P(Z > -1{,}33) = P(Z < 1{,}33) = 0{,}9082$

c) $P(Z > k) = 0{,}9 \rightarrow P(Z \leq k) = 0{,}9 \rightarrow P(Z \leq 1{,}28) = 0{,}8997 \rightarrow k = 1{,}28 \rightarrow \dfrac{a - 10}{6} = 1{,}28 \rightarrow a = 2{,}32$

Por encima de 2,32 minutos se encuentra el 90 % de los retrasos de los autobuses.

d) $1-\alpha=0{,}99 \rightarrow \alpha=0{,}01 \rightarrow \frac{\alpha}{2}=0{,}005 \rightarrow \begin{cases} P(Z\leq 2{,}57)=0{,}9949 \\ P(Z\leq 2{,}58)=0{,}9951 \end{cases} \rightarrow z_{0{,}005}=2{,}575$

El intervalo característico es:

$$(\mu-\sigma z_{0{,}05},\mu-\sigma z_{0{,}05}) = (10-6\cdot 2{,}575;10+6\cdot 2{,}575) = (-5{,}45;25{,}45)$$

91. **Página 284**

$X = N(24,1)$

$1-\alpha=0{,}75 \rightarrow \alpha=0{,}25 \rightarrow \frac{\alpha}{2}=0{,}125 \rightarrow P(Z\leq z_{0{,}125})=0{,}875 \rightarrow P(Z\leq 1{,}15)=0{,}8749 \rightarrow z_{0{,}125}=1{,}15$

El intervalo característico es:

$$(\mu-\sigma z_{0{,}125},\mu+\sigma z_{0{,}125}) = (24-1\cdot 1{,}15;24-1\cdot 1{,}15) = (22{,}85;25{,}15)$$

El 75 % de las baterías de los relojes duran entre 22,85 y 25,15 horas.

$1-\alpha=0{,}9 \rightarrow \alpha=0{,}1 \rightarrow \frac{\alpha}{2}=0{,}05 \rightarrow P(Z\leq z_{0{,}05})=0{,}95 \rightarrow \begin{cases} P(Z\leq 1{,}64)=0{,}9495 \\ P(Z\leq 1{,}65)=0{,}9505 \end{cases} \rightarrow z_{0{,}05}=1{,}645$

El intervalo característico es:

$$(\mu-\sigma z_{0{,}05},\mu-\sigma z_{0{,}05}) = (24-1\cdot 1{,}645;24-1\cdot 1{,}645) = (22{,}355;25{,}645)$$

El 90 % de las baterías de los relojes duran entre 22,355 y 25,645 horas.

$1-\alpha=0{,}95 \rightarrow \alpha=0{,}1 \rightarrow \frac{\alpha}{2}=0{,}025 \rightarrow P(Z\leq z_{0{,}025})=0{,}975 \rightarrow P(Z\leq 0{,}975)=1{,}96 \rightarrow z_{0{,}025}=1{,}96$

El intervalo característico es:

$$(\mu-\sigma z_{0{,}05},\mu-\sigma z_{0{,}05}) = (24-1\cdot 1{,}96;24-1\cdot 1{,}96) = (22{,}04;25{,}96)$$

El 95 % de las baterías de los relojes duran entre 22,04 y 25,96 horas.

$1-\alpha=0{,}99 \rightarrow \alpha=0{,}01 \rightarrow \frac{\alpha}{2}=0{,}005 \rightarrow P(Z\leq z_{0{,}005})=0{,}995 \rightarrow \begin{cases} P(Z\leq 2{,}57)=0{,}9949 \\ P(Z\leq 2{,}58)=0{,}9951 \end{cases} \rightarrow z_{0{,}005}=2{,}575$

El intervalo característico es:

$$(\mu-\sigma z_{0{,}05},\mu-\sigma z_{0{,}05}) = (24-1\cdot 2{,}575;24-1\cdot 2{,}575) = (21{,}425;26{,}575)$$

El 99 % de las baterías de los relojes duran entre 21,425 y 26,575 horas.

92. **Página 284**

a) $^2=81 \rightarrow \sigma=9 \rightarrow X = N(250,9)$

$$P(Z\leq z_{0{,}01})=0{,}99 \rightarrow P(Z\leq 2{,}33)=0{,}9901 \rightarrow z_{0{,}01}=2{,}33 \rightarrow \frac{a-250}{9}=2{,}33 \rightarrow a=270{,}97$$

Por debajo de 270,97 gramos se encuentra el 99 % de las bolas.

b) El intervalo característico es:

$$(\mu-\sigma z_{0{,}01},\mu-\sigma z_{0{,}01}) = (250-9\cdot 2{,}33;250-9\cdot 2{,}33) = (229{,}03;270{,}7)$$

93. **Página 284**

$X = B(20; 0{,}12) \rightarrow n - 20 > 8$

$np = 20 \cdot 0{,}12 = 2{,}4 < 5 \rightarrow$ No se puede aproximar a una distribución normal.

$P(X > 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) =$

$= 1 - \binom{20}{0} 0{,}12^0 \, 1 - 0{,}12^{20} - \binom{20}{1} 0{,}12^1 \, 1 - 0{,}12^{20-1} - \binom{20}{2} 0{,}12^2 \, 1 - 0{,}12^{20-2} = 0{,}437$

94. **Página 284**

a) $X = B(500; 0{,}01)$

$\mu = np = 500 \cdot 0{,}01 = 5 \rightarrow$ El número esperado de roturas es 5.

b) $X = B(500; 0{,}01) \rightarrow n - 500 > 8$

$np = 500 \cdot 0{,}01 = 5 > 5$ $\qquad$ $n(1 - p) = 500(0{,}99) = 495 > 5$

$\sigma = \sqrt{np(1 - p)} = 2{,}225 \rightarrow X \equiv B(500; 0{,}01) \approx N(5; 2{,}225)$

$P(X > 20) = P\left(Z > \dfrac{20 - 5}{2{,}225}\right) = P(Z > 6{,}74) = 1$

95. **Página 284**

$X = B(100; 0{,}25) \rightarrow n - 100 > 8$

$np = 100 \cdot 0{,}25 = 25 > 5$ $\qquad$ $n(1 - p) = 100 \cdot 0{,}75 = 75 > 5$

$\left.\begin{array}{l} \mu = np = 100 \cdot 0{,}25 = 25 \\ \sigma = \sqrt{np(1 - p)} = 4{,}33 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(100; 0{,}25) \approx N(25; 4{,}33)$

$P(X > 80) = 1 - P(X < 80) = 1 - P\left(Z < \dfrac{80 - 25}{4{,}33}\right) = 1 - P(Z < 12{,}7) = 0$

96. **Página 284**

a) $X \equiv B\left(90; \dfrac{1}{3}\right) \rightarrow n = 90 > 8$

$np = 90 \cdot \dfrac{1}{3} = 30 > 5$ $\qquad$ $n(1 - p) = 90 \dfrac{2}{3} = 60 > 5$

$\left.\begin{array}{l} \mu = np = 90 \cdot \dfrac{1}{3} = 30 \\ \sigma = \sqrt{np(1 - p)} = 4{,}47 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B\left(90; \dfrac{1}{3}\right) \approx N(30; 4{,}47)$

b) $P(X > 25) = P\left(Z > \dfrac{25 - 30}{4{,}47}\right) = P(Z > -1{,}12) = P(Z < 1{,}12) = 0{,}8686$

97. **Página 284**

$X = B\ 2000; 0,03 \rightarrow n - 2000 \geq 8$

$np = 2000 \cdot 0,03 = 60 \geq 5$ $\qquad$ $n\ 1-p\ - 2000 \cdot 0,97 - 1940 \geq 5$

$$\left.\begin{array}{l} \mu = np = 2000 \cdot 0,03 = 60 \\ \sigma = \sqrt{np\ 1-p\ } = 7,63 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B\ 2000; 0,03 \approx N\ 60; 7,63$$

$$P\ X < 50\ = P\left\{Z < \frac{50-60}{7,63}\right\} = P\ Z < -1,31\ = 1-P\ Z < 1,31\ = 1-0,9049 = 0,0951$$

98. **Página 285**

a) $X = B\ 60; 0,7\ \rightarrow n - 60 \geq 8$

$np = 60 \cdot 0,7 = 42 \geq 5$ $\qquad$ $n\ 1-p\ - 60 \cdot 0,3 - 18 \geq 5$

$$\left.\begin{array}{l} \mu = np = 60 \cdot 0,7 = 42 \\ \sigma = \sqrt{np\ 1-p\ } = 3,55 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B\ 60; 0,7 \approx N\ 42; 3,55$$

$$P\ X \geq 20\ = P\left\{Z \geq \frac{20-42}{3,55}\right\} = P\ Z \geq -6,2\ = 1$$

b) $$P\ 30 \leq X < 35\ = P\left\{\frac{30-42}{3,55} \leq Z < \frac{35-42}{3,55}\right\} = P\ -3,38 \leq Z < -1,97\ = P\ 1,97 < Z \leq 3,38\ =$$

$P\ Z \leq 3,38\ - P\ Z \leq 1,97\ - 0,9996 - 0,9756 - 0,024$

99. **Página 285**

a) $X = B\ 1000\,000; 0,15\ \rightarrow n - 1000\,000 \geq 8$

$np\ \ 1000\,000\ \ 0,15\ \ \ 150\,000 \geq 5$ $\qquad$ $n\ 1-p\ - 1000\,000 \cdot 0,85 - 850\,000 \geq 5$

$$\left.\begin{array}{l} \mu = np = 1\,000\,000 \cdot 0,15 = 150\,000 \\ \sigma = \sqrt{np\ 1-p\ } = 357,07 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B\ 1000\,000; 0,15 \approx N\ 150\,000; 357,07$$

$$P\ X \geq 300\,000\ = P\left\{Z \geq \frac{300\,000-150\,000}{357,07}\right\} = P\ Z \geq 420,08\ = 0$$

b) Como estamos aproximando por una variable continua, tenemos: $P\ X \geq 300\,000\ - P\ X > 300\,000\ - 0$.

c) $$P\ 100\,000 \leq X \leq 200\,000\ = P\left\{\frac{100\,000-150\,000}{357,07} \leq Z \leq \frac{200\,000-150\,000}{357,07}\right\} - P\ -140,03 \leq Z \leq 140,03\ - 1$$

100. **Página 285**

a) $X = B(100; 0,4) \rightarrow n - 100 > 8$

$np = 100 \cdot 0,4 = 40 > 5$

$n(1-p) = 100(0,6) = 60 > 5$

$$\left.\begin{array}{l} \mu = np = 100 \cdot 0,4 = 40 \\ \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 4,9 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(100; 0,4) \approx N(40; 4,9)$$

$$P(X > 30) = P\left(Z > \frac{30-40}{4,9}\right) = P(Z > -2,04) = P(Z < 2,04) = 0,9793$$

b) $$P(X < 50) = P\left(Z < \frac{50-40}{4,9}\right) = P(Z < 2,04) = 0,9793$$

c) $$P(30 < X < 50) = P\left(\frac{30-40}{4,9} < Z < \frac{50-40}{4,9}\right) = P(-2,04 < Z < 2,04) =$$

$$= P(Z < 2,04) - [1 - P(Z < 2,04)] = 0,9793 - (1 - 0,9793) = 0,9586$$

101. **Página 285**

a) $X = B(50; 0,75) - n - 50 > 8$

$np = 50 \cdot 0,75 = 37,5 > 5$

$n(1-p) = 50(0,25) = 12,5 > 5$

$$\left.\begin{array}{l} \mu = np = 50 \cdot 0,75 = 37,5 \\ \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 3,06 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(50; 0,75) \approx N(37,5; 3,06)$$

$$P(X > 40) = P\left(Z > \frac{40-37,5}{3,06}\right) = P(Z > 0,82) = 1 - P(Z < 0,82) = 1 - 0,7939 = 0,2061$$

b) $$P(X < 30) = P\left(Z < \frac{30-37,5}{3,06}\right) = P(Z < -2,45) = 1 - P(Z < 2,45) = 1 - 0,9929 = 0,0071$$

102. **Página 285**

a) $X = B(100; 0,2) \rightarrow n - 100 > 8$

$np = 100 \cdot 0,2 = 20 > 5$ $\qquad$ $n(1-p) = 100 \cdot 0,8 = 80 > 5$

$$\left.\begin{array}{l} \mu = np = 100 \cdot 0,2 = 20 \\ \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 4 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(100; 0,2) \approx N(20, 4)$$

$$P(20 - 0,5 < X < 20 - 0,5) = P\left(\frac{19,5-20}{4} < Z < \frac{20,5-20}{4}\right) = P(-0,125 < Z < 0,125) =$$

$$= P(Z < 0,125) - [1 - P(Z < 0,125)] = \frac{0,5478 - 0,5517}{2} - \left[1 - \frac{0,5478 + 0,5517}{2}\right] = 0,0995$$

b) $$P(X < 20) = P\left(Z < \frac{20-20}{4}\right) = P(Z < 0) = 0,5$$

c) $$P(X < 20) = P(X < 19) = P\left(Z < \frac{19-20}{4}\right) = P(Z < -0,25) = 1 - P(Z < 0,25) = 1 - 0,5987 = 0,4013$$

103. **Página 285**

a) $X = B\ 200; 0,82 \rightarrow n - 200 \geq 8$

$np = 200 \cdot 0,82 = 164 \geq 5$

$n\ 1 - p\ - 200 \cdot 0,18 - 36 \geq 5$

$\left.\begin{array}{l} \mu = np = 200 \cdot 0,82 = 164 \\ \sigma = \sqrt{np\ 1 - p\ } = 5,43 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B\ 200; 0,82\ \ldots N\ 164; 5,43$

$P\ X \geq 160\ = P\left\{Z \geq \dfrac{160 - 164}{5,43}\right\} = P\ Z \geq -0,74\ = P\ Z \leq 0,74\ = 0,7704$

b) La secretaría de comercio dará el visto bueno al producto dependiendo del número de personas a las que les haya sido efectivo. Debería establecer un límite inferior a partir del cual aceptará el producto dependiendo con que certeza queramos tener la seguridad de que la estimación del vendedor es correcta. Por ejemplo, teniendo en cuenta el apartado a) si queremos tener la seguridad de que el 77,04 % de las muestras tomadas deben estar por encima de ese valor. Nuestro valor límite sería 160.

104. **Página 285**

a) $X = N\ 25; 10$

$P\ Z \leq k_1\ = 0,25 \rightarrow P\ Z \leq -k_1\ = 0,75 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} P\ Z \leq 0,67\ = 0,7486 \\ P\ Z \leq 0,68\ = 0,7517 \end{array}\right. \rightarrow k_1 = -0,675$

$P\ Z \leq k_2\ - 0,5 \rightarrow k_2 - 0$

$P\ Z \leq k_3\ = 0,75 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} P\ Z \leq 0,67\ = 0,7486 \\ P\ Z \leq 0,68\ = 0,7517 \end{array}\right. \rightarrow k_3 = 0,675$

Hallamos el valor correspondiente a estos valores tipificados:

$\left.\begin{array}{l} -0,675 = \dfrac{a - 25}{10} \\ 0 = \dfrac{b - 25}{10} \\ 0,675 = \dfrac{c - 25}{10} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 18,25 \\ b = 25 \\ c = 31,75 \end{array}\right.$

Las puntuaciones que separan un grupo de otro son 18,25; 25 y 31,75. Es decir, 18, 25 y 32.

b) Los cuartiles de la variable.

105. **Página 285**

$X = N\ 250, 15$

a) $P\ 250 \leq X \leq 260\ = P\left\{\dfrac{250 - 250}{15} \leq Z \leq \dfrac{260 - 250}{15}\right\} = P\ 0 \leq Z \leq 0,67\ = P\ Z \leq 0,67\ - P\ Z \leq 0\ = 0,7486 - 0,5 = 0,2486$

La probabilidad de que un vaso contenga entre 250 y 260 ml es de 0,2486.

b) $P\ X \geq 270\ = P\left\{Z \geq \dfrac{270 - 250}{15}\right\} = P\ Z \geq 1,33\ = 1 - P\ Z \leq 1,33\ = 1 - 0,9082 = 0,0918$

El número esperado de vasos que se derramarán es $0,0918 \cdot 1\,000 = 91,8$. Es decir, 92 vasos.

c) $P(Z \leq k) = 0{,}25 \rightarrow P(Z \leq -k) = 0{,}75 \rightarrow \begin{cases} P(Z \leq 0{,}67) = 0{,}7486 \\ P(Z \leq 0{,}68) = 0{,}7517 \end{cases} \rightarrow -k = -0{,}675$

Hallamos el valor correspondiente al valor tipificado obtenido:

$$-0{,}675 = \frac{a - 250}{15} \rightarrow a = 239{,}875$$

El 25 % de las bebidas más pequeñas están por debajo de 239,875. Es decir, 240 ml.

106. **Página 285**

$X = N(1{,}275; 0{,}0125)$

$$P(1{,}26 \leq X \leq 1{,}29) = P\left(\frac{1{,}26 - 1{,}275}{0{,}0125} \leq Z \leq \frac{1{,}29 - 1{,}275}{0{,}0125}\right) = P(-1{,}2 \leq Z \leq 1{,}2) =$$

$$= P(Z \leq 1{,}2) - (1 - P(Z \leq 1{,}2)) = 0{,}8849 - (1 - 0{,}8849) = 0{,}7698$$

P(Defectuosas) $= 1 - P(1{,}26 \leq X \leq 1{,}29) = 1 - 0{,}7698 = 0{,}2302 = 23{,}02\,\%$

El 23,02 % de las lavadoras producidas por la máquina son defectuosas.

107. **Página 285**

a) $X = B(30; 0{,}18) \rightarrow n = 30 \geq 8$

$np = 30 \cdot 0{,}18 = 5{,}4 \geq 5$

$n(1 - p) = 30 \cdot 0{,}82 = 24{,}6 \geq 5$

$$\left.\begin{matrix} \mu = np = 30 \cdot 0{,}18 = 5{,}4 \\ \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 2{,}1 \end{matrix}\right\} \rightarrow X \equiv B(30; 0{,}18) \approx N(5{,}4; 2{,}1)$$

$$P(X \leq 5) = P(X \leq 4) = P\left(Z \leq \frac{4 - 5{,}4}{2{,}1}\right) = P(Z \leq -0{,}48) = 1 - P(Z \leq 0{,}48) = 1 - 0{,}6844 = 0{,}3156$$

b) $$P(4 \leq X \leq 8) = P\left(\frac{4 - 5{,}4}{2{,}1} \leq Z \leq \frac{8 - 5{,}4}{2{,}1}\right) = P(-0{,}67 \leq Z \leq 1{,}24) = P(Z \leq 1{,}24) - (1 - P(Z \leq 0{,}67)) =$$

$$= 0{,}8925 - (1 - 0{,}7486) = 0{,}6411$$

108. **Página 285**

a) $X = B(100; 0{,}1) \rightarrow n = 100 \geq 8$

$np = 100 \cdot 0{,}1 = 10 \geq 5$

$n(1 - p) = 100 \cdot 0{,}9 = 90 \geq 5$

$$\left.\begin{matrix} \mu = np = 100 \cdot 0{,}1 = 10 \\ \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 3 \end{matrix}\right\} \rightarrow X \equiv B(100; 0{,}1) \approx N(10, 3)$$

$$P(X \geq 12) = P\left(Z \geq \frac{12 - 10}{3}\right) = P(Z \geq 0{,}67) = 1 - P(Z \leq 0{,}67) = 1 - 0{,}7486 = 0{,}2514$$

b) $$P(X \leq 10) = P(X \leq 9) = P\left(Z \leq \frac{9 - 10}{3}\right) = P(Z \leq -0{,}33) = 1 - P(Z \leq 0{,}33) = 1 - 0{,}6293 = 0{,}3707$$

109. **Página 285**

a) $X = N(\mu, \sigma)$

$P(Z \leq z_{0,025}) = 0,975 \rightarrow P(Z \leq 1,96) = 0,975 \rightarrow z_{0,025} = 1,96$

El intervalo característico es:

$(\mu - 1,96\sigma, \mu - 1,96\sigma) = (7,9; 8,5) \rightarrow \begin{cases} \mu - 1,96\sigma = 7,9 \\ \mu - 1,96\sigma = 8,5 \end{cases} \rightarrow 2\mu = 16,4 \rightarrow \mu = 8,2$

$8,2 - 1,96\sigma = 8,5 \rightarrow \sigma = 0,153 \rightarrow X = N(8,2; 0,153)$

b) $P(Z \geq k) = 0,2 \rightarrow P(Z \leq k) = 0,8 \rightarrow P(Z \leq 0,84) = 0,7995 \rightarrow k = 0,84 \rightarrow \dfrac{a - 8,2}{0,153} = 0,84 \rightarrow a = 8,329$

110. **Página 285**

a) $X = N(\mu, \sigma)$

$P(Z \leq z_{0,005}) = 0,995 \rightarrow \begin{cases} P(Z \leq 2,57) = 0,9949 \\ P(Z \leq 2,58) = 0,9951 \end{cases} \rightarrow z_{0,005} = 2,575$

El intervalo característico es:

$(\mu - 2,575\sigma, \mu + 2,575\sigma) = (1460, 1550) \rightarrow \begin{cases} \mu - 2,575\sigma = 1460 \\ \mu - 2,575\sigma = 1550 \end{cases} \rightarrow 2\mu = 3010 \rightarrow \mu = 1505$

$1505 - 2,575\sigma = 1550 \rightarrow \sigma = -17,48 \rightarrow X = N(1505; 17,48)$

b) $P(Z \geq k) = 0,93 \rightarrow P(Z \leq -k) = 0,93 \rightarrow \begin{cases} P(Z \leq 1,47) = 0,9292 \\ P(Z \leq 1,48) = 0,9306 \end{cases} \rightarrow -k = -1,475 \rightarrow \dfrac{a - 1505}{17,48} = -1,475 \rightarrow a = 1479,22$

El 93 % de los electrodomésticos tiene una duración por encima de 1 479,22 días.

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Página 286

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Tres situaciones que corresponden a una distribución normal son el número de pie de zapato, la duración de una bombilla y el efecto de un fármaco en el tiempo.

2. Página 286

Sí, hay menos personas de que una persona tenga un coeficiente intelectual de 115 que de 110, ya que la probabilidad de que una persona tenga un coeficiente de 115 es menor que de que tenga un coeficiente intelectual de 110.

La probabilidad de que una persona tenga un coeficiente intelectual de 115 y de 85 es la misma; por lo tanto, habrá las mismas personas con coeficiente intelectual de 115 y de 85.

3. Página 286

La función puede tomar todos los valores reales, aunque sea con probabilidad muy pequeña.

4. Página 286

Si hay 46,77 millones de españoles, habrá $\frac{46,77}{2} - 23,385$ millones de españoles con inteligencia superior a la que se considera normal.

Inferencia estadística. Estimación

12

ACTIVIDADES

1. Página 288

Aplicamos el teorema central del límite a $X =$ "Peso total de 10 personas de la ciudad".

$$X - N\left(10 \cdot 68, 8\sqrt{10}\right) - N(680; 25,3) \rightarrow P(X > 700) = P\left(Z > \frac{700 - 680}{25,3}\right) = P(Z > 0,79) = 1 - P(Z < 0,79) = 1 - 0,7852 = 0,2148$$

2. Página 288

Aplicamos el teorema central del límite a $X =$ "Gasto total de 35 jóvenes".

$$X - N\left(35 \cdot 30, 10\sqrt{35}\right) - N(1050; 59,16)$$

$$P(1000 < X < 1150) = P\left(\frac{1000 - 1050}{59,16} < Z < \frac{1150 - 1050}{59,16}\right) = P(-0,85 < Z < 1,69) = P(Z < 1,69) - P(Z < -0,85) =$$

$$= P(Z > 1,69) - 1 - P(Z < 0,85) = 0,9545 - (1 - 0,8023) = 0,7568$$

3. Página 289

La población tiene: $\begin{cases} \mu = 68 \\ \sigma = 8 \end{cases} - \overline{X} \equiv N\left(68, \frac{8}{\sqrt{100}}\right) = N\left(68, \frac{8}{10}\right) = N(68; 0,8)$

$$P(69 < \overline{X}) = P\left(\frac{69 - 68}{0,8} < Z\right) = P(1,25 < Z) = 1 - P(Z < 1,25) = 1 - 0,8944 = 0,1056$$

Hay una probabilidad de 10,56 % de que la media sea superior a 69 kg.

$$P(67 > \overline{X}) = P\left(\frac{67 - 68}{0,8} > Z\right) = P(-1,25 > Z) = 1 - P(Z < 1,25) = 1 - 0,8944 = 0,1056$$

Hay una probabilidad de 10,56 % de que la media sea inferior a 67 kg.

4. Página 289

La población tiene: $\begin{cases} \mu = 51 \\ \sigma = 7 \end{cases} \xrightarrow{n=16} \overline{X} \equiv N\left(51, \frac{7}{\sqrt{16}}\right) = N\left(51, \frac{7}{4}\right) = N(51; 1,75)$.

La población tiene: $\begin{cases} \mu = 51 \\ \sigma = 7 \end{cases} \xrightarrow{n=25} \overline{X} \equiv N\left(51, \frac{7}{\sqrt{25}}\right) = N\left(51, \frac{7}{5}\right) = N(51; 1,4)$.

La población tiene: $\begin{cases} \mu = 51 \\ \sigma = 7 \end{cases} \xrightarrow{n=36} \overline{X} \equiv N\left(51, \frac{7}{\sqrt{36}}\right) = N\left(51, \frac{7}{6}\right) = N(51; 1,67)$.

La población tiene: $\begin{cases} \mu = 51 \\ \sigma = 7 \end{cases} \xrightarrow{n=49} \overline{X} \equiv N\left(51, \frac{7}{\sqrt{49}}\right) = N(51, 1)$.

La población tiene: $\begin{cases} \mu = 51 \\ \sigma = 7 \end{cases} \xrightarrow{n=100} \overline{X} \equiv N\left(51, \frac{7}{\sqrt{100}}\right) = N\left(51, \frac{7}{10}\right) = N(51; 0,7)$.

Si la población no siguiera una distribución normal, los cálculos serían válidos en los tres últimos casos, porque el tamaño de la muestra es mayor que 30. Mientras que en los dos primeros casos no serían válidos los cálculos porque el tamaño de la muestra es menor que 30.

5. **Página 290**

La muestra es aleatoria.

$n = 1\,600 > 30$

La muestra tiene $p = 0{,}1$.

$n \cdot p = 1\,600 \cdot 0{,}1 = 160 > 5$

$n \cdot q = 1\,600 \cdot 0{,}9 = 1\,440 > 5$

$\rightarrow \hat{p} = N\left(0{,}1;\ \sqrt{\frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{1\,600}}\right) = N(0{,}1;\ 0{,}0075)$

$$P\left(\hat{p} = \frac{150}{1\,600}\right) = P\left(\frac{149{,}5}{1\,600} < \hat{p} < \frac{150{,}5}{1\,600}\right) = P(0{,}0934375 < \hat{p} < 0{,}0940625) = P\left(\frac{0{,}0934375 - 0{,}1}{0{,}0075} < Z < \frac{0{,}0940625 - 0{,}1}{0{,}0075}\right) =$$

$$= P(-0{,}875 < Z < -0{,}792) = P(z < 0{,}875) - P(Z < 0{,}792) = 0{,}8106 - 0{,}7852 = 0{,}0254$$

Hay una probabilidad del 2,54% de encontrar 150 yogures con menos fruta de lo indicado.

6. **Página 290**

La muestra es aleatoria.

$n = 100 > 30$

La población tiene $p = 0{,}25$.

$n \cdot p = 100 \cdot 0{,}25 = 25$

$n \cdot q = 100 \cdot 0{,}75 = 75$

$\rightarrow \hat{p} = N\left(0{,}25;\ \sqrt{\frac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{100}}\right) = N(0{,}25;\ 0{,}0433)$

$$P\left(\frac{30}{100} \leq \hat{p} \leq \frac{20}{100}\right) = P(0{,}3 \leq \hat{p} \leq 0{,}2) = P\left(\frac{0{,}3 - 0{,}25}{0{,}0433} \leq Z \leq \frac{0{,}2 - 0{,}25}{0{,}0433}\right) = P(1{,}155 \leq Z \leq -1{,}155) = P(Z < 1{,}155) - P(Z < -1{,}155)$$

$$= P(Z < 1{,}155) - [1 - P(Z < 1{,}155)] = 2P(Z < 1{,}155) - 1 = 2 \cdot 0{,}87595 - 1 = 0{,}7519$$

$P(Z < 1{,}15) = 0{,}8749$
$P(Z < 1{,}16) = 0{,}877$
$\rightarrow P(Z < 1{,}155) = 0{,}87595$

7. **Página 291**

Las muestras son aleatorias. $n_1 = 50 > 30$, $n_2 = 40 > 30$

Los parámetros de las poblaciones son $\begin{cases} \mu_1 = 15 & \sigma_1 = 3 \\ \mu_2 = 12 & \sigma_2 = 2 \end{cases}$.

a) $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 = N\left(15 - 12;\ \sqrt{\frac{9}{50} + \frac{4}{40}}\right) = N\left(3;\ \frac{\sqrt{7}}{5}\right) = N(3;\ 0{,}53)$

b) $P(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 < 0{,}75) = P\left(Z < \frac{0{,}75 - 3}{0{,}53}\right) = P(Z < -4{,}245) = 0$

8. **Página 291**

Las muestras son aleatorias. $n_1 = 36 > 30$, $n_2 = 35 > 30$

Los parámetros de las poblaciones son: $\begin{cases} \mu_1 = 7 & \sigma_1 = 0{,}9 \\ \mu_2 = 6{,}2 & \sigma_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \overline{X}_1 - \overline{X}_2 = N\left(7 - 6{,}2;\ \sqrt{\frac{0{,}81}{36} - \frac{1}{35}}\right) = N(0{,}8;\ 0{,}226)$

$$P(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \geq 1) = P\left(Z \geq \frac{1 - 0{,}8}{0{,}226}\right) = P(Z \geq 0{,}88) = 1 - P(Z < 0{,}88) = 1 - 0{,}8106 = 0{,}1894$$

9. **Página 292**

La población son todas las personas de la ciudad y la muestra son las 400 personas.

Proporción de las personas que practican algún tipo de deporte: $\hat{p} = \frac{\text{n.º de casos favorables}}{\text{n.º de casos posibles}} = \frac{120}{400} = 0,3$

10. **Página 292**

La muestra son los 20 bebés pesados.

$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{20} = \frac{62,967}{20} = 3,148$ → Podemos considerar 3,148 kg el peso medio de la población.

Proporción de niños dentro de la población: $\hat{p} = \frac{\text{n.º de casos favorables}}{\text{n.º de casos posibles}} = \frac{9}{20} = 0,45$

11. **Página 293**

Con la muestra elegida, la probabilidad de que la longitud de la ballena esté en el intervalo de confianza (20 m, 26 m) es del 90 %.

Nivel de confianza: $1 - \alpha = 0,9$. Nivel de significación: $\alpha = 0,1$.

En una variable que siga una distribución normal $N(0, 1)$, al nivel de confianza 0,9 le corresponde un valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0,1}{2}} = z_{0,05}$, y se cumple que $P(-z_{0,05} \leq Z \leq z_{0,05}) = 0,9$.

Radio: $\frac{26 - 20}{2} = 3$ m Punto medio: $\frac{26 - 20}{2} = 23$ m

El error máximo admisible es de 3 m; es decir, al considerar la longitud media de la ballena como 23 m, el error máximo que podemos cometer en la estimación es de 3 m.

12. **Página 293**

Con la muestra elegida, la probabilidad de que el gasto durante un fin de semana esté en el intervalo de confianza (28 €, 36 €) es del 98 %.

Nivel de confianza: $1 - \alpha = 0,98$. Nivel de significación: $\alpha = 0,02$.

En una variable que siga una distribución normal $N(0, 1)$, al nivel de confianza 0,02 le corresponde un valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0,02}{2}} = z_{0,01}$, y se cumple que $P(-z_{0,01} \leq Z \leq z_{0,01}) = 0,98$.

Radio: $\frac{36 \quad 28}{2} \quad 4$ € Punto medio: $\frac{36 \quad 28}{2} \quad 32$ €

El error máximo admisible es de 4 €; es decir, al considerar el gasto medio del fin de semana como 32 € el error máximo que podemos cometer en la estimación es de 4 €.

13. **Página 294**

Se halla el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0,05}{2}} = z_{0,025}$, y se cumple que $P(Z \leq z_{0,025}) = 1 - 0,025 = 0,975 \rightarrow z_{0,025} = 1,96$.

Se calcula el intervalo de confianza: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(18 - 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{100}}, 18 - 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{100}} \right) = (17,02; 18,98)$

Con la muestra elegida la probabilidad de que el consumo medio de leche entre los jóvenes esté en el intervalo de confianza (17,02; 18,98) es del 95 %.

14. **Página 294**

Se halla el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0,03}{2}} = z_{0,015}$, y se cumple que $P(Z \leq z_{0,015}) = 1 - 0,015 = 0,985 \rightarrow z_{0,015} = 2,17$.

Se calcula el intervalo de confianza con los datos obtenidos.

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(6,92 - 2,17 \cdot \frac{3,2}{\sqrt{150}}, 6,92 - 2,17 \cdot \frac{3,2}{\sqrt{150}}\right) = (6,353; 7,487)$$

Con la muestra elegida la probabilidad de que la antigüedad media de los coches esté en el intervalo de confianza (6,353; 7,487) es del 97 %.

15. **Página 295**

Se halla el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0,1}{2}} = z_{0,05}$, y se cumple que $P(Z \leq z_{0,05}) = 1 - 0,05 = 0,95 \rightarrow z_{0,05} = 1,645$.

$P(Z \leq 1,64) = 0,9495$
$P(Z \leq 1,65) = 0,9505$

Se calcula el intervalo de confianza con los datos obtenidos.

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(248 - 1,645 \cdot \frac{18}{\sqrt{400}}, 248 - 1,645 \cdot \frac{18}{\sqrt{400}}\right) = (246,52; 249,48)$$

El intervalo de confianza del 90 % es (246,52; 249,48).

El error máximo admisible es $E = 1,645 \cdot \frac{18}{\sqrt{400}} = 1,48$.

16. **Página 295**

$1 - \alpha = 0,975 \rightarrow \alpha = 0,025$

$P(Z \leq z_{0,0125}) = 1 - 0,0125 = 0,9875 \rightarrow z_{0,0125} = 2,24$

$$3 = 2,24\,\frac{18}{\sqrt{n}} \rightarrow n = \left(\frac{2,24 \cdot 18}{3}\right)^2 = 180,63$$

Para que se cumplan las condiciones y como *n* tiene que ser un número entero, debe ser mayor o igual que 181.

17. **Página 296**

Determinamos la proporción de la muestra:

$$\hat{p} = \frac{\text{n.º de casos favorables}}{\text{n.º de casos posibles}} = \frac{125}{450} = 0,278$$

Hallamos el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0,1}{2}} = z_{0,05}$, y se cumple que $P(Z \leq z_{0,05}) = 1 - 0,05 = 0,95 \rightarrow z_{0,05} = 1,645$.

$P(Z \leq 1,64) = 0,9495$
$P(Z \leq 1,65) = 0,9505$

Calculamos el intervalo de confianza con los datos obtenidos:

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = \left(0,278 - 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,278 \cdot 0,722}{450}}, 0,278 - 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,278 \cdot 0,722}{450}}\right) = (0,243; 0,313)$$

Con la muestra elegida, la probabilidad de que la proporción de personas que han visto la película esté en el intervalo (0,243; 0,313) es 0,9.

18. **Página 296**

Determinamos la proporción de la muestra: $\hat{p} = \frac{\text{n.º de casos favorables}}{\text{n.º de casos posibles}} = \frac{415}{500} = 0{,}83$

a) Hallamos el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0{,}05}{2}} = z_{0{,}025}$, y se cumple que $P(Z \leq z_{0{,}025}) = 1 - 0{,}025 = 0{,}975 \rightarrow z_{0{,}025} = 1{,}96$.

Calculamos el intervalo de confianza con los datos obtenidos:

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}},\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = \left(0{,}83 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}83 \cdot 0{,}17}{500}};\ 0{,}83 + 1{,}96\ \sqrt{\frac{0{,}83\ \ 0{,}17}{500}}\right) = (0{,}797;\ 0{,}863)$$

Con la muestra elegida, la probabilidad de que la proporción de usuarios con tarifa de datos superior a 1Gb esté en (0,797; 0,863) es 0,95.

b) Hallamos el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0{,}01}{2}} = z_{0{,}005}$, y se cumple que $P(Z \leq z_{0{,}005}) = 1 - 0{,}005 = 0{,}995 \rightarrow z_{0{,}005} = 2{,}575$.

Calculamos el intervalo de confianza con los datos obtenidos:

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}},\ \overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = \left(0{,}83 - 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}83 \cdot 0{,}17}{500}};\ 0{,}83 - 2{,}575\ \sqrt{\frac{0{,}83 \cdot 0{,}17}{500}}\right) = (0{,}787;\ 0{,}873)$$

$P(Z \leq 2{,}57) = 0{,}9949$
$P(Z \leq 2{,}58) = 0{,}9951$

Con la muestra elegida, la probabilidad de que la proporción de usuarios con tarifa de datos superior a 1Gb esté en (0,787; 0,873) es 0,99.

19. **Página 297**

$\alpha = 0{,}01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}005} = 2{,}575$ $\qquad \hat{p}\ \ \frac{24}{300}\ \ 0{,}08$

$P(Z \leq 2{,}57) = 0{,}9949$
$P(Z \leq 2{,}58) = 0{,}9951$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}08 \cdot 0{,}92}{300}} = 0{,}04$$

Este resultado indica que, al considerar 8 % como la proporción de bombillas rotas, el mayor error que podemos cometer en la estimación es 0,04.

20. **Página 297**

$\alpha = 0{,}01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}005} = 2{,}575$ $\qquad \hat{p} - \frac{24}{300} - 0{,}08$

$P(Z \leq 2{,}57) = 0{,}9949$
$P(Z \leq 2{,}58) = 0{,}9951$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}08 \cdot 0{,}92}{n}} = 0{,}02 \rightarrow n = \frac{2{,}575^2 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92}{0{,}02^2} = 1\,220{,}04$$

Para que se cumplan las condiciones y como *n* tiene que ser un número entero, debe ser mayor o igual que 1 221.

21. **Página 298**

Hallamos el valor crítico: $\alpha = 0,1 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645$

$P(Z < 1,64) = 0,9495$

$P(Z < 1,65) = 0,9505$

Calculamos el intervalo de confianza con los datos obtenidos:

$$\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} - \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right)$$

$$\left(34 - 23 - 1,645 \cdot \sqrt{\frac{9}{45} - \frac{9}{45}},\ 34 - 23 + 1,645 \sqrt{\frac{9}{45} - \frac{9}{45}} \right) = (9,96; 12,04)$$

Con la muestra elegida, la probabilidad de que la diferencia de medias esté en (9,96; 12,04) es 0,9.

22. **Página 298**

Hallamos el valor crítico: $1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,575$

$P(Z < 2,57) = 0,9949$

$P(Z < 2,58) = 0,9951$

Calculamos el intervalo de confianza con los datos obtenidos:

$$\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} - \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right)$$

$$\left(26 - 23 - 2,575 \sqrt{\frac{16}{15} - \frac{16}{20}},\ 26 - 23 - 2,575 \cdot \sqrt{\frac{16}{15} - \frac{16}{20}} \right) = (-0,52; 6,52)$$

Con la muestra elegida, la probabilidad de que la diferencia de medias esté en (–0,52; 6,52) es 0,99.

23. **Página 299**

Hallamos el valor crítico:

$1 - \alpha = 0,92 \rightarrow \alpha = 0,08 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,04} = 1,75$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} - \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = 1,75 \cdot \sqrt{\frac{9}{45} - \frac{9}{45}} = 1,107$$

24. **Página 299**

Hallamos el valor crítico:

$\alpha = 0,02 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,01} = 2,33$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = 2,33 \cdot \sqrt{\frac{16}{15} - \frac{16}{20}} = 3,173$$

25. **Página 300**

Se identifican la distribución que se está estudiando y las probabilidades conocidas:

$$\bar{X} \equiv N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(\mu, \frac{\sigma}{9}\right) \qquad P(\bar{X} < 25) = 0{,}645 \qquad P(\bar{X} > 40) = 0{,}04$$

$$P(\bar{X} < 25) = P\left(Z < \frac{25-\mu}{\sigma/9}\right) = 0{,}645$$

$$P(\bar{X} > 40) = P\left(Z > \frac{40-\mu}{\sigma/9}\right) = 0{,}04 \rightarrow P\left(Z < \frac{40-\mu}{\sigma/9}\right) = 1-0{,}04 = 0{,}96$$

Buscamos en la tabla de la $N(0, 1)$ el valor que acumula cada probabilidad.

$$P(Z < 0{,}37) = 0{,}6443 \rightarrow \frac{25-\mu}{\sigma/9} = 0{,}37$$

$$P(Z < 1{,}75) = 0{,}9599 \rightarrow \frac{40-\mu}{\sigma/9} = 1{,}75$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{25-\mu}{\sigma/9} = 0{,}37 \\ \dfrac{40-\mu}{\sigma/9} = 1{,}75 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 25-\mu = 0{,}37\cdot\dfrac{\sigma}{9} \\ 40-\mu = 1{,}75\ \dfrac{\sigma}{9} \end{array}\right\} \rightarrow 15 = 1{,}38\cdot\frac{\sigma}{9} \rightarrow \sigma = 97{,}83$$

$$25-\mu = 0{,}37\cdot\frac{\sigma}{9} \xrightarrow{\sigma=97{,}83} \mu = 20{,}98$$

26. **Página 300**

Se calculan los parámetros de la distribución de la media muestral a partir de los parámetros de la población.

La distribución de la media muestral es una distribución normal de media $\mu = 83$ y desviación típica $\sigma = \frac{7}{\sqrt{n}} = \frac{7}{\sqrt{64}} = \frac{7}{8} = 0{,}875$. Es decir, $\bar{X} = N(83; 0{,}875)$.

27. **Página 300**

Se calculan los parámetros de la distribución de la media muestral a partir de los parámetros de la población.

$$\bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(25, \frac{5}{\sqrt{100}}\right) = N(25; 0{,}5)$$

$$P(24 < \bar{X} < 26) = P\left(\frac{24-25}{0{,}5} < Z < \frac{26-25}{0{,}5}\right) = P(-2 < Z < 2)$$

$$= P(Z < 2) - P(Z < -2) = P(Z < 2) - 1 - P(Z < 2)$$
$$= 2P(Z < 2) - 1 = 2\cdot 0{,}9772 - 1 = 0{,}9544$$

28. **Página 301**

$X = N\ 34;1,4 \qquad n = 400 \rightarrow \bar{X} \equiv N\left(34, \frac{1,4}{\sqrt{400}}\right) = N\ 34;0,07$

Se calcula, en la distribución $N\ 0,1$, el intervalo característico que corresponde a la probabilidad pedida.

$p - 0,995 \rightarrow \alpha - 1 - 0,995 - 0,005 \rightarrow \frac{\alpha}{2} - 0,0025$

$0,005 = 1 - P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \rightarrow P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,995$

$- P\left(Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) - P\left(Z < -z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) - \left[1 - P\left(Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right)\right] = 2P\left(Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) - 1 = 0,995$

$- P\left(Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{1,995}{2} = 0,9975 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,81$

Se calculan los valores de la distribución que corresponden a estos valores tipificados.

$0,995 = P\ 34 - k < \bar{X} < 34 - k\ - P\left(\frac{34 - k - 34}{0,07} < Z < \frac{34 - k - 34}{0,07}\right) = P\left(-\frac{k}{0,07} < Z < \frac{k}{0,07}\right) = 0,995$

$- \frac{k}{0,07} = 2,81 - k = 0,197$

Por tanto, el intervalo correspondiente es $34 - 0,197;34 + 0,197 - 33,803;34,197$.

29. **Página 301**

Se trata de un intervalo de confianza para la media: $\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\bar{x} = 2,75 \qquad \sigma = 0,25 \qquad n\ \ 100 \qquad 1 - \alpha = 0,9 \rightarrow \alpha = 0,1 - z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645$

El intervalo de confianza al 90 % es: $\left(2,75 - 1,645 \cdot \frac{0,25}{\sqrt{100}}; 2,75 - 1,645 \cdot \frac{0,25}{\sqrt{100}}\right) = 2,71;2,79$

$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96$

El intervalo de confianza al 95 % es: $\left(2,75 - 1,96\ \frac{0,25}{\sqrt{100}}; 2,75 - 1,96 \cdot \frac{0,25}{\sqrt{100}}\right) = 2,701;2,799$

$1 - \alpha = 0,99 - \alpha = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,575$

El intervalo de confianza al 99 % es: $\left(2,75 - 2,575\ \frac{0,25}{\sqrt{100}}; 2,75 + 2,575 \cdot \frac{0,25}{\sqrt{100}}\right) = 2,685;2,815$

30. **Página 302**

Se trata de un intervalo de confianza para la media: $\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\bar{x} - \frac{2 - 5 - 1 - 3 - 4 - 1 - 0 - 1 - 2}{9} - 1,22 \qquad \sigma = 1 \qquad n = 9$

$1 - \alpha = 0,99 - \alpha = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,575$

El intervalo de confianza al 99 % es: $\left(1,22 - 2,575 \cdot \frac{1}{\sqrt{9}}; 1,22 - 2,575 \cdot \frac{1}{\sqrt{9}}\right) = 0,36;2,07$

31. **Página 302**

Se trata de un intervalo de confianza para la proporción:

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}},\ \hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = (0{,}3;0{,}5) \qquad 1-\alpha = 0{,}99 \rightarrow \alpha = 0{,}01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}005} = 2{,}575$$

Obtenemos el sistema dado por los extremos del intervalo:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 0{,}3 \\ \hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 0{,}5 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{sumamos ambas igualdades}} 2\hat{p} = 0{,}8 \rightarrow \hat{p} = 0{,}4$$

La proporción muestral de votantes de la candidatura es 0,4.

32. **Página 302**

$$L = 2z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 10 \qquad 1-\alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96 \qquad 2 \cdot 1{,}96 \cdot \frac{6}{\sqrt{n}} = 10 \rightarrow n = \left(\frac{2 \cdot 1{,}96 \cdot 6}{10}\right)^2 = 5{,}53$$

Como *n* toma valores enteros, el tamaño mínimo de la muestra es 6.

33. **Página 303**

El estimador dado es el centro del intervalo: $\frac{52-53}{2} = 52{,}5 \rightarrow \bar{x} = 52{,}5$.

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(52{,}5 - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{5{,}3}{\sqrt{169}};\ 52{,}5 - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{5{,}3}{\sqrt{169}}\right)$$

Igualamos los extremos del intervalo:

$$\left.\begin{array}{l} 52{,}5 - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{5{,}3}{13} = 52 \\ 52{,}5 - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{5{,}3}{13} = 53 \end{array}\right\} \rightarrow -2z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{5{,}3}{13} = -1 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}23 \qquad F(1{,}23) = 0{,}8907$$

Determinamos el nivel de confianza:

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - 0{,}8907 = 0{,}1093 \rightarrow 1-\alpha = 1 - 2 \cdot 0{,}1093 = 0{,}7814$$

El nivel de confianza es del 78,14 %.

34. **Página 303**

Se trata de un intervalo de confianza para la proporción: $\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}},\ \hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = (0{,}018;0{,}024)$

Obtenemos el sistema dado por los extremos del intervalo:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 0{,}018 \\ \hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 0{,}024 \end{array}\right\} \rightarrow 2\hat{p} = 0{,}042 \rightarrow \hat{p} = 0{,}021 \rightarrow$$ La proporción de productos defectuosos es 0,021.

35. **Página 303**

$1-\alpha = 0{,}96 \rightarrow \alpha = 0{,}04 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}02} = 2{,}055$

$P(Z \leq 2{,}05) = 0{,}9798$
$P(Z \leq 2{,}06) = 0{,}9803$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}055 \cdot \frac{6\,000}{\sqrt{n}} = 100 \rightarrow n = \left| 2{,}055 \cdot \frac{6\,000}{100} \right|^2 = 15\,202{,}9$$

Como n es un número entero, el tamaño mínimo de la muestra tiene que ser 15 203.

36. **Página 304**

Aplicamos el teorema central del límite a X = "Peso total de 30 personas".

$\sigma^2 = 100 \rightarrow \sigma = 10$

$$X \sim N\left(30 \cdot 76{,}10; \sqrt{30} \cdot N(2\,280; 54{,}77)\right) \rightarrow P(X \leq 2\,500) = P\left(Z \leq \frac{2\,500 - 2\,280}{54{,}77}\right) = P(Z \leq 4{,}01) = 0{,}99997$$

37. **Página 304**

Aplicamos el teorema central del límite a X = "Beneficios por 120 euros".

$$X \sim N\left(100 \cdot 1{,}2; 0{,}3\sqrt{100}\right) \sim N(120; 3) \rightarrow P(X \geq 120 + 20) = P\left(Z \geq \frac{140 - 120}{3}\right) = P(Z \geq 6{,}67) = 1 - P(Z \leq 6{,}67) = 0$$

38. **Página 304**

Aplicamos el teorema central del límite a X = "Número de visitantes en un año".

$$X \sim N\left(52 \cdot 4\,750; 2\,500\sqrt{52}\right) \sim N(247\,000; 18\,027{,}8)$$

$$P(250\,000 \leq X \leq 275\,000) = P\left(\frac{250\,000 - 247\,000}{18\,027{,}8} \leq Z \leq \frac{275\,000 - 247\,000}{18\,027{,}8}\right)$$

$$= P(0{,}17 \leq Z \leq 1{,}55) = P(Z \leq 1{,}55) - P(Z \leq 0{,}17) = 0{,}9394 - 0{,}5675 = 0{,}3719$$

39. **Página 304**

Aplicamos el teorema central del límite a X = "Número de litros demandados en 100 días".

$\sigma^2 = 8\,100 \rightarrow \sigma = 90$

$$X \sim N\left(100 \cdot 3\,000; 90\sqrt{100}\right) \sim N(300\,000; 900)$$

a) $$P(299\,000 \leq X \leq 301\,000) = P\left(\frac{299\,000 - 300\,000}{900} \leq Z \leq \frac{301\,000 - 301\,000}{900}\right)$$

$$= P(-1{,}11 \leq Z \leq 1{,}11) = P(Z \leq 1{,}11) - 1 - P(Z \leq 1{,}11) = 2P(Z \leq 1{,}11) - 1 = 2 \cdot 0{,}8665 - 1 = 0{,}733$$

b) $P(Z \leq z_{0{,}02}) = 0{,}98 \rightarrow z_{0{,}02} = 2{,}055$

$P(Z \leq 2{,}05) = 0{,}9798$
$P(Z \leq 2{,}06) = 0{,}9803$

$$2{,}055 = \frac{x_{0{,}02} - 300\,000}{900} \rightarrow x_{0{,}02} = 301\,850$$

Para atender la demanda total con probabilidad 0,98; se deben producir 301 850 litros de refresco.

40. **Página 304**

Aplicamos el teorema central del límite a $X =$ "Número de camisetas vendidas por 50 alumnos".

$X \sim N(50 \cdot 30; 6\sqrt{50}) \sim N(1\,500; 42{,}43)$

$P(Z \geq z_{0,05}) = 1 - P(Z \leq z_{0,05}) = 0{,}95 \rightarrow P(Z \leq z_{0,05}) = 0{,}05 \rightarrow P(Z \geq -z_{0,05}) = 0{,}05 \rightarrow P(Z \leq -z_{0,05}) = 0{,}95 \rightarrow -z_{0,05} = -1{,}645$

$-1{,}645 = \dfrac{x_{0,05} - 1\,500}{42{,}43} \rightarrow x_{0,05} = 1\,430{,}2 \rightarrow$ Deberían encargar 1 431 camisetas para asegurar que las ventas totales son mayores a ese número con una probabilidad de 95 %.

41. **Página 304**

La muestra es aleatoria.

$n = 500 > 30$

La población tiene $p = 0{,}38$.

$n \cdot p = 500 \cdot 0{,}38 = 190 > 5$

$n \cdot q = 500 \cdot 0{,}62 = 310 > 5$

$\rightarrow \hat{p} = N\left(0{,}38; \sqrt{\dfrac{0{,}62 \cdot 0{,}38}{500}}\right) = N(0{,}38;\ 0{,}022)$

a) $P\left(\hat{p} \geq \dfrac{200}{500}\right) = P(\hat{p} \geq 0{,}4) = P\left(Z \geq \dfrac{0{,}4 - 0{,}38}{0{,}022}\right) = P(Z \geq 0{,}909) = 0{,}18$

b) $\dfrac{46\,700}{200} = 233{,}5$ y $\dfrac{51\,200}{200} = 256$

$P\left(\dfrac{234}{500} \leq \hat{p} \leq \dfrac{256}{500}\right) = P\left(\dfrac{0{,}468 - 0{,}38}{0{,}022} \leq Z \leq \dfrac{0{,}512 - 0{,}38}{0{,}022}\right) = P(4 \leq Z \leq 6) = P(Z \leq 6) - P(Z \leq 4) = 1 - 1 = 0$

42. **Página 304**

$n = 25 \rightarrow \overline{X} \equiv N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(10, \dfrac{4}{\sqrt{25}}\right) = N(10; 0{,}8)$

$n = 49 \rightarrow \overline{X} \equiv N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(10, \dfrac{4}{\sqrt{49}}\right) = N(10; 0{,}57)$

$n = 64 \rightarrow \overline{X} \equiv N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(10, \dfrac{4}{\sqrt{64}}\right) = N(10; 0{,}5)$

$n = 100 \rightarrow \overline{X} \equiv N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(10, \dfrac{4}{\sqrt{100}}\right) = N(10; 0{,}4)$

43. **Página 304**

a) $\overline{X} \equiv N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(5{,}4; \dfrac{1}{\sqrt{4}}\right) = N(5{,}4; 0{,}5)$

b) $P(\overline{X} \geq 5{,}5) = P\left(Z \geq \dfrac{5{,}5 - 5{,}4}{0{,}5}\right) = P(Z \geq 0{,}2) = 1 - P(Z \leq 0{,}2) = 1 - 0{,}5793 = 0{,}4207$

44. **Página 304**

a) $\bar{X} \equiv N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(5{,}6; \frac{2{,}4}{\sqrt{10}}\right) = N(5{,}6; 0{,}76)$

b) $P(\bar{X} > 5) = P\left(Z > \frac{5 - 5{,}6}{0{,}76}\right) = P(Z > -0{,}79) = P(Z < 0{,}79) = 0{,}7852$

c) $P(5 < \bar{X} < 6) = P\left(\frac{5 - 5{,}6}{0{,}76} < Z < \frac{6 - 5{,}6}{0{,}76}\right) = P(-0{,}79 < Z < 0{,}53) = P(Z < 0{,}53) - (1 - P(Z < 0{,}79)) = 0{,}4871$

45. **Página 304**

$\bar{X} \equiv N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(900; \frac{100}{\sqrt{60}}\right) = N(900; 12{,}91)$

a) $P(\bar{X} > 880) = P\left(Z > \frac{880 - 900}{12{,}91}\right) = P(Z > -1{,}55) = P(Z < 1{,}55) = 0{,}9394$

b) $P(\bar{X} < 850) = P\left(Z < \frac{850 - 900}{12{,}91}\right) = P(Z < -3{,}87) = 1 - P(Z < 3{,}87) = 1 - 0{,}99995 = 0{,}00005$

46. **Página 304**

a) $\sigma^2 = 16 \rightarrow \sigma = 4$

$\bar{X} \equiv N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(15; \frac{4}{\sqrt{49}}\right) = N(15; 0{,}57)$

$P(\bar{X} > 14{,}5) = P\left(Z > \frac{14{,}5 - 15}{0{,}57}\right) = P(Z > -0{,}88) = P(Z < 0{,}88) = 0{,}8106$

b) $\bar{X} \equiv N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(15; \frac{4}{\sqrt{64}}\right) = N(15; 0{,}5)$

$$P\left(\bar{X} < 15 \,/\, \bar{X} > 14\right) = \frac{P(14 < \bar{X} < 15)}{P(\bar{X} > 14)} = \frac{P\left(\frac{14 - 15}{0{,}5} < Z < \frac{15 - 15}{0{,}5}\right)}{P\left(Z > \frac{14 - 15}{0{,}5}\right)} = \frac{P(-2 < Z < 0)}{P(Z > -2)} =$$

$$= \frac{P(Z < 0) - (1 - P(Z < 2))}{P(Z < 2)} = \frac{0{,}5 - (1 - 0{,}9722)}{0{,}9722} = 0{,}488$$

47. **Página 305**

$$\bar{X} = \frac{2 - 1 + 0 - 2 + 1 - 2 + 1 + 0 + 1 + 0 - 3 - 1 - 2 - 1 + 1 - 1}{16} = -\frac{5}{16} = -0{,}3125$$

$\bar{X} \equiv N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(0{,}3125; \frac{2{,}25}{\sqrt{16}}\right) = N(0{,}3125; 0{,}5625) \rightarrow \mu = 0{,}3125 \quad \sigma = 0{,}5625$

48. **Página 305**

$\bar{X} = \frac{2\,746}{25} = 109{,}84 \quad \sigma^2 = 36 \rightarrow \sigma = 6$

$\bar{X} \equiv N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(109{,}84; \frac{6}{\sqrt{25}}\right) = N(109{,}84; 1{,}2) \rightarrow \mu = 109{,}84 \qquad \sigma = 1{,}2$

49. **Página 305**

a) $\bar{X} \equiv N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(60; \frac{20}{\sqrt{36}}\right) = N(60; 3{,}33)$

b) $P(59 \leq \bar{X} \leq 62) = P\left(\frac{59-60}{3{,}33} \leq Z \leq \frac{62-60}{3{,}33}\right) = P(-0{,}3 \leq Z \leq 0{,}6) = P(Z \leq 0{,}6) - [1 - P(Z \leq 0{,}3)] = 0{,}3436$

50. **Página 305**

$\bar{X} \equiv N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(37{,}1; \frac{0{,}8}{\sqrt{400}}\right) = N(37{,}1; 0{,}04)$

a) $P(\bar{X} \leq 36{,}8) = P\left(Z \leq \frac{36{,}8-37{,}1}{0{,}04}\right) = P(Z \leq -7{,}5) = 1 - P(Z \leq 7{,}5) = 0$

b) $P(36{,}6 \leq \bar{X} \leq 37{,}6) = P\left(\frac{36{,}6-37{,}1}{0{,}04} \leq Z \leq \frac{37{,}6-37{,}1}{0{,}04}\right) = P(-12{,}5 \leq Z \leq 12{,}5) = 1$

51. **Página 305**

$\bar{X} \equiv N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(4{,}2; \frac{1{,}9}{\sqrt{100}}\right) = N(4{,}2; 0{,}19)$

a) $P(\bar{X} \geq 4{,}25) = P\left(Z \geq \frac{4{,}25-4{,}2}{0{,}19}\right) = P(Z \geq 0{,}26) = 1 - P(Z \leq 0{,}26) = 1 - 0{,}6026 = 0{,}3974$

b) El porcentaje de muestras con media superior a 4,25 millones de dólares es 39,74 %.

52. **Página 305**

a) $\sigma^2 = 121 \rightarrow \sigma = 11$

$P(X \geq 109) = P\left(Z \geq \frac{109-\mu}{11}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{109-\mu}{11}\right) = 0{,}1 \rightarrow P\left(Z \leq \frac{109-\mu}{11}\right) = 0{,}9$

$\frac{109-\mu}{11} = 1{,}285 \rightarrow \mu = 94{,}865$

$P(Z \leq 1{,}28) = 0{,}8997$
$P(Z \leq 1{,}29) = 0{,}9015$

b) $P(92 \leq X \leq 100) = P\left(\frac{92-95}{11} \leq Z \leq \frac{100-95}{11}\right) = P(-0{,}27 \leq Z \leq 0{,}45)$

$= P(Z \leq 0{,}45) - [1 - P(Z \leq 0{,}27)] = 0{,}6736 - [1 - 0{,}6064] = 0{,}28$

c) $\bar{X} \equiv N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(95; \frac{11}{\sqrt{9}}\right) = N(95; 3{,}67)$

$P(92 \leq X \leq 100) = P\left(\frac{92-95}{3{,}67} \leq Z \leq \frac{100-95}{3{,}67}\right) = P(-0{,}82 \leq Z \leq 1{,}36)$

$= P(Z \leq 1{,}36) - [1 - P(Z \leq 0{,}82)] = 0{,}9131 - [1 - 0{,}7939] = 0{,}707$

53. **Página 305**

$$\mu - \bar{X} - \frac{1\cdot 44{,}5 + 3\cdot 45{,}5 - 4\ \ 46{,}5 - 12\cdot 47{,}5 - 14\cdot 48{,}5 + 3\cdot 49{,}5 + 2\ \ 50{,}5 - 1\cdot 51{,}5}{40} - 47{,}925$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{X})^2}{n} = 1{,}94 \quad \sigma = 1{,}39$$

$$\bar{X} \equiv N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(47{,}925; \frac{1{,}39}{\sqrt{25}}\right) = N\ 47{,}425; 0{,}278$$

$$P\ \bar{X} > 45\ = P\left(Z > \frac{45 - 47{,}925}{0{,}278}\right) = P\ Z > -10{,}52\ = P\ Z < 10{,}52\ = 1$$

54. **Página 306**

La muestra es aleatoria.

$n = 25 < 30$

La población tiene $p = 0{,}15$.

$n \cdot p = 25 \cdot 0{,}15 = 3{,}75 < 5$

$n \cdot q = 25 \cdot 0{,}85 = 21{,}25 > 5$

Aunque no cumple todas las condiciones la distribución podría aproximarse a:

$$\hat{p} = N\left(0{,}15; \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{25}}\right) = N(0{,}15; 0{,}0714)$$

La muestra es aleatoria.

$n = 49 > 30$

La población tiene $p = 0{,}15$.

$n \cdot p = 49 \cdot 0{,}15 = 7{,}35 > 5$

$n \cdot q = 49 \cdot 0{,}85 = 41{,}65 > 5$

$$\hat{p} = N\left(0{,}15; \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{49}}\right) = N(0{,}15; 0{,}051)$$

La muestra es aleatoria.

$n = 64 > 30$

La población tiene $p = 0{,}15$.

$n \cdot p = 64 \cdot 0{,}15 = 9{,}6 > 5$

$n \cdot q = 64 \cdot 0{,}85 = 54{,}4 > 5$

$$\hat{p} = N\left(0{,}15; \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{64}}\right) = N(0{,}15; 0{,}044)$$

La muestra es aleatoria.

$n = 100 > 30$

La población tiene $p = 0{,}15$.

$n \cdot p = 100 \cdot 0{,}15 = 15 > 5$

$n \cdot q = 100 \cdot 0{,}85 = 85 > 5$

$$\hat{p} = N\left(0{,}15; \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{100}}\right) = N(0{,}15; 0{,}0357)$$

55. **Página 306**

a)

La muestra es aleatoria.

$n = 400 > 30$

La población tiene $p = 0{,}03$.

$n \cdot p = 400 \cdot 0{,}03 = 12 > 5$

$n \cdot q = 400 \cdot 0{,}97 = 388 > 5$

$\rightarrow \hat{p} = N\left(0{,}03; \sqrt{\frac{0{,}03 \cdot 0{,}97}{400}}\right) = N(0{,}03; 0{,}00853)$

b) $P\left(\hat{p} \leq \frac{10}{400}\right) = P(\hat{p} \leq 0{,}025) = P\left(Z \leq \frac{0{,}025 - 0{,}03}{0{,}00853}\right) = P(Z \leq -0{,}59) = 1 - P(Z \leq 0{,}59) = 1 - 0{,}7224 = 0{,}2776$

56. **Página 306**

a)

La muestra es aleatoria.

$n = 225 > 30$

La población tiene $p = 0{,}3$.

$n \cdot p = 225 \cdot 0{,}3 = 67{,}5 > 5$

$n \cdot q = 225 \cdot 0{,}7 = 157{,}5 > 5$

$\rightarrow \hat{p} = N\left(0{,}3; \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{225}}\right) = N(0{,}3; 0{,}03)$

b) $P\left(\hat{p} \leq \frac{75}{225}\right) = P(p \leq 0{,}33) = P\left(Z \leq \frac{0{,}33 - 0{,}3}{0{,}03}\right) = P(Z \leq 1) = 0{,}8413$

57. **Página 306**

La muestra es aleatoria.

$n = 200 > 30$

La población tiene $p = 0{,}62$.

$n \cdot p = 200 \cdot 0{,}62 = 124 > 5$

$n \cdot q = 200 \cdot 0{,}38 = 76 > 5$

$\rightarrow \hat{p} = N\left(0{,}62; \sqrt{\frac{0{,}62 \cdot 0{,}38}{200}}\right) = N(0{,}62; 0{,}034)$

a) $P\left(\hat{p} = \frac{120}{200}\right) = P\left(\frac{119{,}5}{200} \leq \hat{p} \leq \frac{120{,}5}{200}\right) = P(0{,}5975 \leq \hat{p} \leq 0{,}6025) =$

$= P\left(\frac{0{,}5975 - 0{,}62}{0{,}034} \leq Z \leq \frac{0{,}6025 - 0{,}62}{0{,}034}\right) = P(-0{,}66 \leq Z \leq -0{,}51) =$

$= P(Z \leq 0{,}66) - P(Z \leq 0{,}51) = 0{,}7454 - 0{,}6950 = 0{,}0504$

b) $P\left(\hat{p} \geq \frac{120}{200}\right) = P(\hat{p} \geq 0{,}6) = P\left(Z \geq \frac{0{,}6 - 0{,}62}{0{,}034}\right) = P(Z \geq -0{,}6) = P(Z \leq 0{,}6) = 0{,}7257$

58. **Página 306**

a) La muestra es aleatoria.

$n = 50 > 30$

La población tiene $p = \frac{1150}{2\,400} = 0{,}48$.

$n \cdot p = 50 \cdot 0{,}48 = 24 > 5$

$n \cdot q = 50 \cdot 0{,}52 = 26 > 5$

$\Rightarrow \hat{p} = N\left(0{,}48;\ \sqrt{\frac{0{,}48 \cdot 0{,}52}{50}}\right) = N(0{,}48;\ 0{,}07)$

b) $P\left(\hat{p} \geq \frac{27}{50}\right) = P(\hat{p} \geq 0{,}54) = P\left(Z \geq \frac{0{,}54 - 0{,}48}{0{,}070}\right) = P(Z \geq 0{,}86) = 1 - P(Z \leq 0{,}86) = 1 - 0{,}8051 = 0{,}1949$

c) $P\left(\frac{28}{50} \leq \hat{p} \leq \frac{30}{50}\right) = P(0{,}56 \leq \hat{p} \leq 0{,}6) = P\left(\frac{0{,}56 - 0{,}48}{0{,}07} \leq Z \leq \frac{0{,}6 - 0{,}48}{0{,}07}\right) = P(1{,}14 \leq Z \leq 1{,}71)$

$= P(Z \leq 1{,}71) - P(Z \leq 1{,}14) = 0{,}9564 - 0{,}8729 = 0{,}0835$

100 muestras $\Rightarrow 100 \cdot 0{,}0835 = 8{,}35$. En ocho muestras se puede esperar entre 28 y 30 internautas satisfechos.

59. **Página 306**

La muestra es aleatoria.

$n = 500 > 30$

La población tiene $p = 0{,}05$.

$n \cdot p = 500 \cdot 0{,}05 = 25 > 5$

$n \cdot q = 500 \cdot 0{,}95 = 475 > 5$

$\Rightarrow \hat{p} = N\left(0{,}05;\ \sqrt{\frac{0{,}05 \cdot 0{,}95}{500}}\right) = N(0{,}05;\ 0{,}01)$

a) $P\left(\hat{p} = \frac{24}{500}\right) = P\left(\frac{23{,}5}{500} \leq \hat{p} \leq \frac{24{,}5}{500}\right) = P(0{,}047 \leq \hat{p} \leq 0{,}049) = P\left(\frac{0{,}047 - 0{,}05}{0{,}01} \leq Z \leq \frac{0{,}049 - 0{,}05}{0{,}01}\right) = P(-0{,}3 \leq Z \leq -0{,}1) =$

$= P(Z \leq 0{,}3) - P(Z \leq 0{,}1) = 0{,}6179 - 0{,}5398 = 0{,}0781$

b) $P\left(\hat{p} \leq \frac{24}{500}\right) = P(\hat{p} \leq 0{,}048) = P\left(Z \leq \frac{0{,}048 - 0{,}05}{0{,}01}\right) = P(Z \leq -0{,}2) = 1 - P(Z \leq 0{,}2) = 1 - 0{,}5793 = 0{,}4207$

60. **Página 306**

a) $p = 0{,}04$, $n = 500$, el número esperado de clientes que solicitarán un paquete vacacional con crucero es

$n \cdot p = 500 \cdot 0{,}04 = 20$.

b) La muestra es aleatoria.

$n = 500 > 30$

La población tiene $p = 0{,}04$.

$n \cdot p = 500 \cdot 0{,}4 = 20 > 5$

$n \cdot q = 500 \cdot 0{,}96 = 480 > 5$

$\Rightarrow \hat{p} \equiv N\left(0{,}04;\ \sqrt{\frac{0{,}04 \cdot 0{,}96}{500}}\right) = N(0{,}04;\ 0{,}009)$

61. **Página 306**

La muestra es aleatoria.

$n = 150 > 30$

La población tiene $p = 0{,}55$.

$n \cdot p = 150 \cdot 0{,}55 = 82{,}5 > 5$

$n \cdot q = 150 \cdot 0{,}45 = 67{,}5 > 5$

$\Rightarrow \hat{p} = N\left(0{,}55;\ \sqrt{\frac{0{,}55 \cdot 0{,}45}{150}}\right) = N(0{,}55;\ 0{,}041)$

a) $P\left(\hat{p} \geq \frac{80}{150}\right) = P(\hat{p} \geq 0{,}53) = P\left(Z \geq \frac{0{,}53 - 0{,}55}{0{,}041}\right) = P(Z \geq -0{,}49) = 1 - P(Z \leq 0{,}49) = 1 - 0{,}6879 = 0{,}3121$

b) Llamamos x al número de aciertos e y al número de fallos:

$$\left.\begin{matrix} x - y = 150 \\ x = 2y \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3y = 150 \rightarrow y = 50,\ x = 100$$

$$P\left(\hat{p} = \frac{100}{150}\right) = P\left(\frac{99{,}5}{150} < \hat{p} < \frac{100{,}5}{150}\right) = P(0{,}66 < \hat{p} < 0{,}67) = P\left(\frac{0{,}66 - 0{,}55}{0{,}041} < Z < \frac{0{,}67 - 0{,}55}{0{,}041}\right) = P(2{,}68 < Z < 2{,}93) =$$

$$= P(Z < 2{,}93) - P(Z < 2{,}68) = 0{,}9983 - 0{,}9963 = 0{,}002$$

c) $P\left(\frac{70}{150} < \hat{p} < \frac{90}{150}\right) = P(0{,}467 < \hat{p} < 0{,}6) = P\left(\frac{0{,}467 - 0{,}55}{0{,}041} < Z < \frac{0{,}6 - 0{,}55}{0{,}041}\right) = P(-2{,}02 < Z < 1{,}22)$

$$= P(Z < 1{,}22) - [1 - P(Z < 2{,}02)] = 0{,}8888 - [1 - 0{,}9783] = 0{,}8671$$

62. **Página 306**

La muestra es aleatoria.

$n = 80 > 30$

La población tiene $p = 0{,}64$.

$n \cdot p = 80 \cdot 0{,}64 = 51{,}2 > 5$

$n \cdot q = 80 \cdot 0{,}36 = 28{,}8 > 5$

$\Rightarrow \hat{p} = N\left(0{,}64;\ \sqrt{\frac{0{,}64 \cdot 0{,}36}{80}}\right) = N(0{,}64;\ 0{,}054)$

a) $P\left(\hat{p} \geq \frac{52}{80}\right) = P(\hat{p} \geq 0{,}65) = P\left(Z \geq \frac{0{,}65 - 0{,}64}{0{,}054}\right) = P(Z \geq 0{,}185) = 1 - P(Z < 0{,}185) = 1 - 0{,}57335 = 0{,}42665$

$P(Z < 0{,}18) = 0{,}5714$
$P(Z < 0{,}19) = 0{,}5753$

b) $P\left(\hat{p} \geq \frac{48}{80}\right) = P(\hat{p} \geq 0{,}6) = P\left(Z \geq \frac{0{,}6 - 0{,}64}{0{,}054}\right) = P(Z \geq -0{,}74) = P(Z \leq 0{,}74) = 0{,}7704$

c) $P\left(\frac{48}{80} < \hat{p} < \frac{52}{80}\right) = P\left(\hat{p} < \frac{52}{80}\right) - P\left(\hat{p} < \frac{48}{80}\right) = 1 - P\left(\hat{p} \geq \frac{52}{80}\right) - \left[1 - P\left(\hat{p} \geq \frac{48}{80}\right)\right] = 1 - 0{,}42665 - [1 - 0{,}7704] = 0{,}34375$

d) $P\left(\hat{p} = \frac{50}{80}\right) = P\left(\frac{49{,}5}{80} < \hat{p} < \frac{50{,}5}{80}\right) = P(0{,}6188 < \hat{p} < 0{,}6313) = P\left(\frac{0{,}6188 - 0{,}64}{0{,}054} < Z < \frac{0{,}6313 - 0{,}64}{0{,}054}\right) = P(-0{,}39 < Z < -0{,}16)$

$$= P(Z < 0{,}39) - P(Z < 0{,}16) = 0{,}6517 - 0{,}5636 = 0{,}0881$$

63. **Página 306**

La muestra es aleatoria.

$n = 60 > 30$

La población tiene $p = 0{,}1$.

$n \cdot p = 60 \cdot 0{,}1 = 6 > 5$

$n \cdot q = 60 \cdot 0{,}9 = 54 > 5$

$\Rightarrow \hat{p} = N\left(0{,}1; \sqrt{\frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{60}}\right) = N(0{,}1; 0{,}039)$

a) $P\left(\hat{p} \geq \frac{8}{60}\right) = P(\hat{p} \geq 0{,}13) = P\left(Z \geq \frac{0{,}13 - 0{,}1}{0{,}039}\right) = P(Z \geq 0{,}77) = 1 - P(Z < 0{,}77) = 1 - 0{,}7794 = 0{,}2206$

b) $P\left(\hat{p} \geq \frac{7}{60}\right) = P(\hat{p} \geq 0{,}117) = P\left(Z \geq \frac{0{,}117 - 0{,}1}{0{,}039}\right) = P(Z \geq 0{,}41) = 1 - P(Z < 0{,}41) = 1 - 0{,}6591 = 0{,}3409$

64. **Página 307**

Las muestras son aleatorias.

Los parámetros de las poblaciones, distribuciones normales, son $\begin{cases} \mu_1 = 25 & \sigma_1 = 2 \\ \mu_2 = 30 & \sigma_2 = 3 \end{cases}$.

$n = 25 \rightarrow \bar{X}_2 - \bar{X}_1 = N\left(30 - 25; \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{9}{25}}\right) = N\left(5; \frac{\sqrt{13}}{5}\right) = N(5; 0{,}72)$

$n = 49 \rightarrow \bar{X}_2 - \bar{X}_1 = N\left(30 - 25; \sqrt{\frac{4}{49} - \frac{9}{49}}\right) = N\left(5; \frac{\sqrt{13}}{7}\right) = N(5; 0{,}515)$

$n = 64 \rightarrow \bar{X}_2 - \bar{X}_1 \equiv N\left(30 - 25; \sqrt{\frac{4}{64} + \frac{9}{64}}\right) = N\left(5; \frac{\sqrt{13}}{8}\right) = N(5; 0{,}45)$

$n = 100 \rightarrow \bar{X}_2 - \bar{X}_1 = N\left(30 - 25; \sqrt{\frac{4}{100} + \frac{9}{100}}\right) = N\left(5; \frac{\sqrt{13}}{10}\right) = N(5; 0{,}36)$

65. **Página 307**

a) Las muestras son aleatorias.

Los parámetros de las poblaciones, distribuciones normales, son $\begin{cases} \mu_1 = 22 & \sigma_1 = 5 \\ \mu_2 = 24 & \sigma_2 = 4 \end{cases}$.

$n = 25 \rightarrow \bar{X}_2 - \bar{X}_1 \equiv N\left(24 - 22; \sqrt{\frac{25}{25} + \frac{16}{25}}\right) = N\left(2; \frac{\sqrt{41}}{5}\right) = N(2; 1{,}28)$

b) $P\left(\bar{X}_2 - \bar{X}_1 \geq 2\right) = P\left(Z \geq \frac{2 - 2}{1{,}28}\right) = P(Z \geq 0) = 0{,}5$

66. **Página 307**

Las muestras son aleatorias, $n_1 = 400 > 30$ y $n_2 = 625 > 30$.

Los parámetros de las poblaciones son $\begin{cases} \mu_1 = 26\,450 & \sigma_1 = 5\,542 \\ \mu_2 = 37\,430 & \sigma_2 = 2\,457 \end{cases}$.

$$\bar{X}_2 - \bar{X}_1 \equiv N\left(37\,430 - 26\,450;\ \sqrt{\frac{5\,542^2}{400} + \frac{2\,457^2}{625}}\right) = N\left(10\,980;\ \frac{\sqrt{864\,433\,648}}{100}\right) = N(10\,980;\ 294{,}01)$$

a) $P\left(\bar{X}_2 - \bar{X}_1 \leq 10\,000\right) = P\left(Z \leq \frac{10\,000 - 10\,980}{294{,}01}\right) = P\left(Z \leq -3{,}33\right) = 0{,}0004$

b) $P\left(\bar{X}_2 - \bar{X}_1 \geq 6\,000\right) = P\left(Z \geq \frac{6\,000 - 10\,980}{294{,}01}\right) = P\left(Z \geq -16{,}94\right) = 1$

67. **Página 307**

Las muestras son aleatorias.

Los parámetros de las poblaciones, distribuciones normales, son $\begin{cases} \mu_1 = 63 & \sigma_1 = 5 \\ \mu_2 = 68 & \sigma_2 = 2 \end{cases}$.

$$\bar{X}_2 - \bar{X}_1 = N\left(68 - 63;\ \sqrt{\frac{4}{100} - \frac{25}{100}}\right) = N\left(5;\ \frac{\sqrt{29}}{10}\right) = N(5;\ 0{,}54)$$

a) $P\left(\bar{X}_2 - \bar{X}_1 \leq 4\right) = P\left(Z \leq \frac{4 - 5}{0{,}54}\right) = P\left(Z \leq -1{,}85\right) = 0{,}0322$

b) $n_1 = 81,\ n_2 = 49 \rightarrow \bar{X}_2 - \bar{X}_1 \equiv N\left(68 - 63;\ \sqrt{\frac{4}{49} - \frac{25}{81}}\right) = N\left(5;\ \frac{\sqrt{1\,549}}{63}\right) = N(5;\ 0{,}62)$

$P\left(\bar{X}_2 - \bar{X}_1 \leq 4\right) = P\left(Z \leq \frac{4 - 5}{0{,}62}\right) = P\left(Z \leq -1{,}61\right) = 0{,}0537$

68. **Página 307**

Las muestras son aleatorias.

Los parámetros de las poblaciones, distribuciones normales, son $\begin{cases} \mu_1 = 54 & \sigma_1 = 4 \\ \mu_2 = 58 & \sigma_2 = 2 \end{cases}$.

$$\bar{X}_2 - \bar{X}_1 = N\left(58 - 54;\ \sqrt{\frac{4}{6} - \frac{16}{5}}\right) = N(4;\ 1{,}97)$$

$$P\left(\bar{X}_2 - \bar{X}_1 \leq 2{,}5\right) = P\left(Z \leq \frac{2{,}5 - 4}{1{,}97}\right) = P\left(Z \geq -0{,}76\right) = 0{,}2231$$

69. **Página 307**

Las muestras son aleatorias: $n_1 = 225 > 30$ y $n_2 = 400$.

Los parámetros de las poblaciones son $\begin{cases} \mu_1 = 813 & \sigma_1^2 = 85,5 \\ \mu_2 = 798 & \sigma_2^2 = 64,5 \end{cases}$.

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 = N\left(813 - 798; \sqrt{\frac{85,5}{225} - \frac{64,5}{400}}\right) = N(15; 0,74)$$

$$P\left(\left|\overline{X}_2 - \overline{X}_1\right| \leq 2\right) = P\left(\frac{-2-15}{0,74} \leq Z \leq \frac{2-15}{0,74}\right) = P(-22,97 \leq Z \leq -17,57) = 0$$

70. **Página 307**

Las muestras son aleatorias: $n_1 = n_2 = 100 > 30$.

Los parámetros de las poblaciones, distribuciones normales, son $\begin{cases} \mu_1 = 140,2 & \sigma_1 = 22,7 \\ \mu_2 = 131,7 & \sigma_2 = 23,9 \end{cases}$.

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \equiv N\left(140,2 - 131,7; \sqrt{\frac{22,7^2}{100} - \frac{23,9^2}{100}}\right) = N(8,5; 3,296)$$

$$P\left(\left|\overline{X}_2 - \overline{X}_1\right| \geq 10\right) = P\left(Z \geq \frac{10-8,5}{3,296}\right) - P\left(Z \leq \frac{-10-8,5}{3,296}\right) = P(Z \geq 0,46) - P(Z \leq -5,61) = 1 - P(Z \leq 0,46) = 1 - 0,6772 = 0,3228$$

71. **Página 307**

Tamaño de las muestras. Año pasado: $n_1 = 7\,500 \cdot 0,05 = 375$. Este año: $n_2 = 9\,000 \cdot 0,07 = 630$.

Distribuciones: Año pasado: $N(10, 2)$. Este año: $N(10 \cdot 1,02; 2 \cdot 1,02) = N(10,2; 2,04)$.

$$\overline{X}_2 - \overline{X}_1 \equiv N\left(10,2 - 10; \sqrt{\frac{4,16}{630} - \frac{4}{375}}\right) = N(0,2; 0,13)$$

$$P\left(\left|\overline{X}_2 - \overline{X}_1\right| \leq 0,1\right) = P\left(\frac{-0,1-0,2}{0,13} \leq Z \leq \frac{0,1-0,2}{0,13}\right) = P(-2,31 \leq Z \leq -0,77) = P(Z \leq 2,31) - P(Z \leq 0,77) = 0,2102$$

72. **Página 308**

$$\hat{p} = \frac{132}{200} = 0,66$$

Hallamos el valor crítico: $1 - \alpha = 0,9 \rightarrow \alpha = 0,1 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0,1}{2}} = z_{0,05} = 1,645$.

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = \left(0,66 - 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,66 \cdot 0,34}{200}}; 0,66 + 1,645 \sqrt{\frac{0,66 \cdot 0,34}{200}}\right) = (0,6; 0,72)$$

Hallamos el valor crítico: $1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0,05}{2}} = z_{0,025} = 1,96$.

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = \left(0,66 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,66 \cdot 0,34}{200}}; 0,66 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,66 \cdot 0,34}{200}}\right) = (0,59; 0,73)$$

Hallamos el valor crítico: $1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0,01}{2}} = z_{0,005} = 2,575$.

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = \left(0,66 - 2,575 \cdot \sqrt{\frac{0,66 \cdot 0,34}{200}}; 0,66 + 2,575 \cdot \sqrt{\frac{0,66 \cdot 0,34}{200}}\right) = (0,57; 0,75)$$

73. **Página 308**

Hallamos el valor crítico: $1-\alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0,05}{2}} = z_{0,025} = 1,96$.

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(26,2 - 1,96 \cdot \frac{4,25}{\sqrt{81}}; 26,2 - 1,96 \cdot \frac{4,25}{\sqrt{81}}\right) = (25,27; 27,13)$$

Con los datos obtenidos la probabilidad de que el tiempo medio para la ejecución de una orden esté en el intervalo (25,27; 27,13) es del 95 %.

74. **Página 308**

Hallamos el valor crítico: $1-\alpha = 0,975 \rightarrow \alpha = 0,025 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0,025}{2}} = z_{0,0125} = 2,81$.

$n = 12 \cdot 10 = 120$ meses estudiados.

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(10 - 2,81 \cdot \frac{44}{\sqrt{120}}; 10 + 2,81 \cdot \frac{44}{\sqrt{120}}\right) = (-1,29; 21,29)$$

Con los datos obtenidos la probabilidad de que el número de accidentes por mes esté en el intervalo (–1,29; 21,29) es del 97,5 %.

75. **Página 308**

Hallamos el valor crítico: $1-\alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0,05}{2}} = z_{0,025} = 1,96$.

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = \left(0,15 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,15 \cdot 0,85}{500}}; 0,15 + 1,96\sqrt{\frac{0,15\ 0,85}{500}}\right) = (0,134; 0,166)$$

Con los datos obtenidos la probabilidad de que la proporción de las personas que llevan gafas graduadas esté en el intervalo (0,134; 0,166) es del 95 %.

76. **Página 308**

$$\hat{p} - \frac{14}{100} - 0,14$$

a) Hallamos el valor crítico: $1-\alpha = 0,99 - \alpha = 0,01 - z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0,01}{2}} = z_{0,05} = 2,575$.

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = \left(0,14 - 2,575 \cdot \sqrt{\frac{0,14 \cdot 0,86}{100}}; 0,14 + 2,575 \cdot \sqrt{\frac{0,14 \cdot 0,86}{100}}\right) = (0,05; 0,23)$$

Con los datos obtenidos la probabilidad de que la proporción de las personas paradas esté en el intervalo (0,05;0,23) es del 99 %.

b) Hallamos el valor crítico: $1-\alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0,05}{2}} = z_{0,025} = 1,96$.

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = \left(0,14 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,14 \cdot 0,86}{100}}; 0,14 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,14 \cdot 0,86}{100}}\right) = (0,07; 0,21)$$

Con los datos obtenidos la probabilidad de que la proporción de las personas paradas esté en el intervalo (0,07; 0,21) es del 95 %.

Al disminuir el nivel de confianza disminuye la amplitud del intervalo.

77. **Página 308**

Hallamos el valor crítico: $1-\alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0,05}{2}} = z_{0,025} = 1,96$.

$\hat{p} = 0,62$

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}},\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = \left(0,62 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,62 \cdot 0,38}{300}}; 0,62 - 1,96\sqrt{\frac{0,62 \cdot 0,38}{300}}\right) = (0,565; 0,675)$$

Con los datos obtenidos la probabilidad de que la proporción de universitarios que asisten todas las semanas al cine esté en el intervalo (0,565; 0,675) es del 95 %.

78. **Página 308**

Hallamos el valor crítico: $1-\alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0,03}{2}} = z_{0,015} = 2,17$.

$\hat{p} = \frac{41}{672} = 0,06$

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}},\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = \left(0,06 - 2,17 \cdot \sqrt{\frac{0,06 \cdot 0,94}{672}}; 0,06 - 2,17 \cdot \sqrt{\frac{0,06 \cdot 0,94}{672}}\right) = (0,04; 0,08)$$

Con los datos obtenidos la probabilidad de que la proporción de peces marcados esté en el intervalo (0,04; 0,08) es del 97 %.

Habíamos marcado 400 peces, el intervalo de confianza para la cantidad total de peces del pantano con una probabilidad de 97 % es $\left(\frac{400}{0,08}; \frac{400}{0,04}\right) = (5\,000, 10\,000)$.

79. **Página 308**

Hallamos el valor crítico: $1-\alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0,05}{2}} = z_{0,025} = 1,96$

$$\bar{x} = \frac{175 + 180 + 210 + 215 + 186 + 213 + 190 + 213 + 184 + 195}{10} = 196,1$$

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(196,1 - 1,96 \cdot \frac{15,3}{\sqrt{10}}; 196,1 + 1,96 \cdot \frac{15,3}{\sqrt{10}}\right) = (186,62; 205,58)$$

Con los datos obtenidos la probabilidad de que la producción media del olivar esté en el intervalo (186,62; 205,58) es del 95 %.

80. **Página 308**

Hallamos el valor crítico: $1-\alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0,05}{2}} = z_{0,025} = 1,96$

$$\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} - \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

$$\left(15 - 14 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{36}{25} - \frac{64}{36}};\ 15 - 14 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{36}{25} - \frac{64}{36}}\right) = (-2,52; 4,52)$$

Con la muestra elegida, la probabilidad de que la diferencia de medias esté en (–2,52; 4,52) es 0,95.

81. **Página 308**

Hallamos el valor crítico: $\alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0{,}05}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96$

$$\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} - \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right)$$

$$\left(25{,}2 - 24{,}4 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{8}{26} + \frac{2{,}1^2}{25}};\ 25{,}2 - 24{,}4 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{8}{26} - \frac{2{,}1^2}{25}} \right) = (-0{,}56; 2{,}16)$$

Con la muestra elegida, la probabilidad de que la diferencia de medias esté en (−2,54; 4,54) es 0,95.

82. **Página 308**

Hallamos el valor crítico: $1 - \alpha = 0{,}98 \rightarrow \alpha = 0{,}02 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0{,}02}{2}} = z_{0{,}01} = 2{,}325$

$P(Z \leq 2{,}32) = 0{,}9898$
$P(Z \leq 2{,}33) = 0{,}9901$

$\hat{p}_1 = 0{,}08$; $\hat{p}_2 = 0{,}07$

$$\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} - \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}},\ \hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}} \right) =$$

$$\left(0{,}08 - 0{,}07 - 2{,}325 \cdot \sqrt{\frac{0{,}08 \cdot 0{,}92}{120} - \frac{0{,}07 \cdot 0{,}93}{90}};\ 0{,}08 - 0{,}07 - 2{,}325 \cdot \sqrt{\frac{0{,}08 \cdot 0{,}92}{120} - \frac{0{,}07 \cdot 0{,}93}{90}} \right) = (-0{,}075; 0{,}095)$$

Con la muestra elegida, la probabilidad de que la diferencia de medias esté en (−0,075; 0,095) es 0,98.

83. **Página 308**

a) Hallamos el valor crítico: $1 - \alpha = 0{,}9973 \rightarrow \alpha = 0{,}0027 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0{,}0027}{2}} = z_{0{,}00135} = 3{,}44$.

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(64 - 3{,}44 \cdot \frac{3}{\sqrt{70}};\ 64 - 3{,}44 \cdot \frac{3}{\sqrt{70}} \right) = (62{,}77;\ 65{,}23)$$

Con los datos obtenidos la probabilidad de que el número de accidentes por mes esté en el intervalo (62,77; 65,23) es del 99,73 %.

b) $0{,}1 = 3{,}44 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} \rightarrow n = \left(\frac{3{,}44 \cdot 3}{0{,}1} \right)^2 = 10\,650{,}24$

Como el número de atletas es un número entero, para que el error máximo cometido sea de 0,1 el número de atletas que tienen que participar en la carrera es 10 651.

84. **Página 308**

Hallamos el valor crítico: $1 - \alpha = 0{,}99 \rightarrow \alpha = 0{,}01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0{,}01}{2}} = z_{0{,}05} = 2{,}575$.

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(\bar{x} - 2{,}575 \frac{\sigma}{9},\ \bar{x} - 2{,}575 \cdot \frac{\sigma}{9} \right) = 166{,}170$$

$P(Z \leq 2{,}57) = 0{,}9949$
$P(Z \leq 2{,}58) = 0{,}9951$

Igualamos los extremos del intervalo:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} - 2{,}575 \cdot \frac{\sigma}{9} = 160 \\ \bar{x} - 2{,}575 \cdot \frac{\sigma}{9} = 170 \end{array}\right\} \rightarrow 2\bar{x} = 330 \rightarrow \bar{x} = 165$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} - 2{,}575 \cdot \frac{\sigma}{9} = 160 \\ \bar{x} - 2{,}575 \cdot \frac{\sigma}{9} = 170 \end{array}\right\} \rightarrow -2 \cdot 2{,}575 \cdot \frac{\sigma}{9} = -10 \rightarrow \sigma = 17{,}48$$

85. **Página 309**

Hallamos el valor crítico: $1-\alpha = 0{,}98 \rightarrow \alpha = 0{,}02 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0{,}02}{2}} = z_{0{,}01} = 2{,}325$

$\sigma^2 = 0{,}25 \rightarrow \sigma = 0{,}5$

$$0{,}3 = 2{,}325 \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{n}} \rightarrow n = \left(\frac{2{,}325 \cdot 0{,}5}{0{,}3}\right)^2 = 15{,}02$$

Como n es un número entero, para que el error máximo cometido sea de 0,3, el tamaño mínimo de la muestra debe ser 16.

86. **Página 309**

a) $\bar{X} = \frac{12\,029}{24} = 501{,}21$

Hallamos el valor crítico: $1-\alpha = 0{,}9 \rightarrow \alpha = 0{,}1 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0{,}1}{2}} = z_{0{,}05} = 1{,}645$.

$P(Z < 1{,}64) = 0{,}9495$
$P(Z < 1{,}65) = 0{,}9505$

Calculamos el intervalo de confianza con los datos obtenidos:

$$\left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(501{,}21 - 1{,}645 \cdot \frac{5}{\sqrt{24}}; 501{,}21 - 1{,}645 \cdot \frac{5}{\sqrt{24}}\right) = (499{,}53; 502{,}89)$$

Hallamos el valor crítico: $1-\alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0{,}05}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96$.

Calculamos el intervalo de confianza con los datos obtenidos:

$$\left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(501{,}21 - 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{24}}; 501{,}21 - 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{24}}\right) = (499{,}21; 503{,}21)$$

Hallamos el valor crítico: $1-\alpha = 0{,}99 \rightarrow \alpha = 0{,}01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0{,}01}{2}} = z_{0{,}005} = 2{,}575$.

$P(Z < 2{,}57) = 0{,}9949$
$P(Z < 2{,}58) = 0{,}9951$

Calculamos el intervalo de confianza con los datos obtenidos:

$$\left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(501{,}21 - 2{,}575 \cdot \frac{5}{\sqrt{24}}; 501{,}21 - 2{,}575 \cdot \frac{5}{\sqrt{24}}\right) = (498{,}58; 503{,}84)$$

A medida que aumentamos el nivel de confianza el tamaño del intervalo de confianza aumenta.

b) $2 = 2 \cdot z_{0{,}025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} \rightarrow n = \left(\frac{2 \cdot 1{,}96 \cdot 5}{2}\right)^2 = 96{,}04$

Como n es un número entero, para que la longitud del intervalo sea de 2 gramos, el tamaño mínimo de la muestra es 97.

c) $1-\alpha = 0{,}9 \rightarrow \left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(501{,}21 - 1{,}645 \cdot \frac{5}{\sqrt{24}}; 501{,}21 - 1{,}645 \cdot \frac{5}{\sqrt{24}}\right)$

$$1-\alpha = 0{,}95 \rightarrow \left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(501{,}21 - 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{24}}; 501{,}21 + 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{24}}\right)$$

$$1-\alpha = 0{,}99 \rightarrow \left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(501{,}21 - 2{,}575 \cdot \frac{5}{\sqrt{24}}; 501{,}21 + 2{,}575 \cdot \frac{5}{\sqrt{24}}\right)$$

87. **Página 309**

a) $\alpha = 0{,}04 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}02} = 2{,}055$ $\qquad \hat{p} = 0{,}25$

$P(Z < 2{,}05) = 0{,}9798$
$P(Z < 2{,}06) = 0{,}9803$

$$0{,}026 = z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2{,}055 \cdot \sqrt{\frac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{n}} \rightarrow n = \frac{2{,}055^2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}{0{,}026^2} = 1\,171{,}33$$

Este resultado indica que, al considerar 0,25 como la proporción de daltónicos para cometer un error inferior a 0,026, el tamaño de la muestra tiene que ser como mínimo 1 172, ya que n toma valores enteros.

b) Hallamos el valor crítico: $\alpha = 0{,}01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0{,}01}{2}} = z_{0{,}005} = 2{,}575$. $\qquad \hat{p} = 0{,}28$

$P(Z < 2{,}57) = 0{,}9949$
$P(Z < 2{,}58) = 0{,}9951$

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}},\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = \left(0{,}28 - 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}28 \cdot 0{,}72}{64}};\ 0{,}28 + 2{,}575\sqrt{\frac{0{,}28 \cdot 0{,}72}{64}}\right) = (0{,}224;\ 0{,}336)$$

Con los datos obtenidos la probabilidad de que la proporción de daltónicos esté en el intervalo (0,224; 0,336) es del 99 %.

88. **Página 309**

a) Hallamos el valor crítico: $1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0{,}05}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96$.

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(105 - 1{,}96 \cdot \frac{15}{\sqrt{200}};\ 105 - 1{,}96 \cdot \frac{15}{\sqrt{200}}\right) = (102{,}92;\ 107{,}08)$$

Con los datos obtenidos la probabilidad de que el tiempo medio de conexión se encuentre en el intervalo (102,92; 107,08) es de 0,99.

b) Hallamos el valor crítico: $1 - \alpha = 0{,}99 \rightarrow \alpha = 0{,}01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0{,}01}{2}} = z_{0{,}005} = 2{,}575$.

$$0{,}2575 = z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}575 \cdot \frac{15}{\sqrt{n}} \rightarrow n = \left(\frac{2{,}575 \cdot 15}{0{,}2575}\right)^2 = 22\,500$$

$P(Z < 2{,}57) = 0{,}9949$
$P(Z < 2{,}58) = 0{,}9951$

Para que el error no exceda de 0,2575 el tamaño de la muestra debe ser de 22 500.

89. **Página 309**

a) Hallamos el valor crítico: $1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0{,}05}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96$.

$\sigma^2 = 25 \rightarrow \sigma = 5$

$$L = 2{,}45 = 2z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} \rightarrow n = \left(\frac{2 \cdot 1{,}96 \cdot 5}{2{,}45}\right)^2 = 64$$

El tamaño de la muestra es de 64.

b) La altura media es el punto medio del intervalo, el extremo superior del intervalo es: $170 - \frac{2{,}45}{2} = 171{,}225$ y el extremo inferior es: $170 - \frac{2{,}45}{2} = 168{,}775$.

90. **Página 309**

Hallamos el valor crítico: $1-\alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0{,}03}{2}} = z_{0{,}015} = 2{,}17$.

$$E = 0{,}25 = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}17 \cdot \frac{1{,}2}{\sqrt{n}} \rightarrow n = \left[\frac{2{,}17 \cdot 1{,}2}{0{,}25}\right]^2 = 108{,}49$$

Como el tamaño de la muestra es entero, el tamaño mínimo de la muestra es de 109 bolsas.

91. **Página 309**

Hallamos el valor crítico: $1-\alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0{,}05}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96$.

$$E = 1{,}274 = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \ \frac{\sigma}{10} \rightarrow \sigma = \frac{1{,}274 \cdot 10}{1{,}96} = 6{,}5$$

La desviación típica de la muestra es de 6,5.

92. **Página 309**

a) El intervalo de confianza viene dado por:

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (4{,}663; 5{,}839)$$

Construimos el sistema de los extremos del intervalo:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 4{,}663 \\ \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5{,}839 \end{array}\right\} - 2\bar{x} = 10{,}502 \rightarrow \bar{x} = 5{,}251$$

El peso medio de la muestra es de 5,251 kg.

b) Utilizamos el sistema anterior para conocer el nivel de confianza:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 4{,}663 \\ \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5{,}839 \end{array}\right\} - -2z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = -2z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{0{,}9}{\sqrt{7}} = -1{,}176 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}73$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}9582 \rightarrow \alpha = 0{,}0836 \rightarrow 1-\alpha = 0{,}9164$$

El nivel de confianza es de 0,9164.

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Página 310

No tenemos la seguridad completa de que sea así, ya que las audiencias son resultado de un estudio estadístico. En el texto se indica que las audiencias obtenidas son fiables con un nivel de confianza de 0,95.

Dado que los datos de las audiencias no son 100 % fiables sí que existe la posibilidad de que se elimine un programa de forma injusta.

2. Página 310

Una muestra aleatoria dirigida es un grupo de muestras aleatorias de cada subpoblación (o estrato) en una población. Se utiliza de modo que el investigador pueda asegurarse de que cada subpoblación está representada de forma apropiada en la muestra.

3. Página 310

Un nivel de confianza del 95 % quiere decir que con un 0,95 de probabilidad la audiencia real será la audiencia obtenida mediante el estudio.

4. Página 310

Para llegar a la afirmación de que la muestra de la población es aproximadamente 10 000 personas se tiene en cuenta el número de dispositivos medidores de audiencia instalados en España y se hace una estimación del número de personas que viven en cada hogar.

5. Página 310

Si el tamaño de la muestra fuese mayor, no cabe esperar que los resultados variasen mucho, ya que el nivel de confianza del 0,95 es bastante elevado.

6. Página 310

No sería justo que las cadenas de televisión supieran en qué hogares está instalado el dispositivo que emite las señales, ya que así el estudio podría verse influenciado por este conocimiento y las cadenas podrían dirigirse de forma específica a estos hogares.

7. Página 310

RESPUESTA ABIERTA.

La muestra debe ser extraída de los programas de televisión vistos por la clase.

Probablemente sí que haya bastante variación en algunos casos, ya que en este caso la muestra tomada está en un rango de edad determinado y no abarca todos los estratos de la población.

NOTAS

NOTAS

© 2015 by Santillana Educación, S. L.
Avda. de los Artesanos, 6
28760 Tres Cantos, Madrid
PRINTED IN SPAIN

CP: 790837