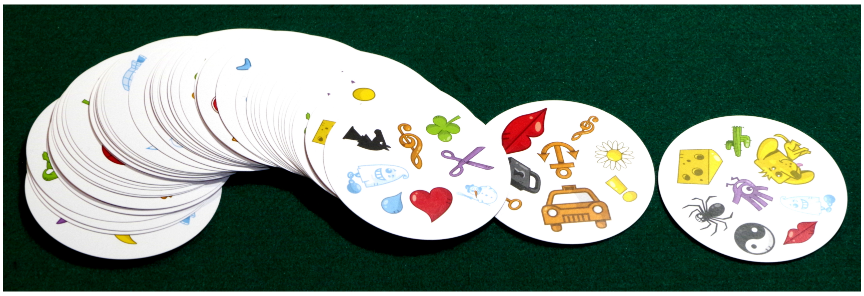
¿Le faltan cartas al juego DOBBLE?



Una aproximación desde la geometría proyectiva

Iria González Álvarez-Ron

Samuel Civeira Corral

Trabajo realizado en el bachillerato **STEMBach**

Bienio 2018/2020

Bajo la dirección conjunta de:

Dr. José Ángel Cid Araújo	Dr. Carlos Ferreiro García
Departamento de Matemáticas	IES Blanco Amor de Ourense
Universidade Vigo	

Ourense, abril de 2020

Resumen

En un plano proyectivo finito, dos rectas distintas siempre tienen un punto en común y todas las rectas tienen el mismo número finito de puntos. En el juego Dobble, dos cartas distintas tienen una única figura en común y todas las cartas tienen el mismo número de figuras. Si llamamos rectas a las cartas y puntos a las figuras de cada carta, el modelo se nos antoja adecuado para poder explicar el juego mediante un plano proyectivo finito, en concreto, de orden 7.

Aunque la estructura del juego parece ser un problema de naturaleza combinatoria, si representamos cada carta como una línea y cada figura como un punto (o viceversa), tendríamos un problema de naturaleza geométrica, con la peculiaridad de que no existen líneas paralelas, por lo que el contexto adecuado para analizar este juego no es la geometría euclidiana sino la geometría proyectiva.

Comenzamos con unas disquisiciones teóricas para introducir la aritmética modular, cuerpos finitos, los planos proyectivos finitos, los planos cíclicos y los discos de Penrose.

Fijada la base teórica, vemos que se pueden generar juegos del tipo Dobble con $1 + n + n^2$ cartas y $n + 1$ figuras por carta, siendo n la potencia de un primo. En particular un juego con $1 + 7 + 7^2 = 57$ cartas, similar a Dobble, es factible.

Por último generamos juegos con $7, 13, 21, 31, 57, 73$ cartas.

Abstract

In a finite projective plane, two different lines always have one point in common and all the lines have the same finite number of points. In the Dobble game, two different cards have a single figure in common and all the cards have the same number of figures. If we call the cards and points straight to the figures of each card, the model seems appropriate to explain the game through a finite projective plane, specifically, of order 7.

Although the structure of the game seems to be a problem of combinatorial nature, if we represent each card as a line and each figure as a point (or vice versa), we would have a problem of a geometric nature, with the peculiarity that there are no parallel lines, so that the right context to analyze this game is not Euclidean geometry but Projective geometry.

We begin with theoretical disquisitions to introduce modular arithmetic, finite fields, finite projective planes, cyclic planes and Penrose discs.

Once the theoretical basis is fixed, we can see that games of the Dobble type can be generated with $1 + n + n^2$ cards and $n + 1$ figures per card, n being the power of a prime. In particular a game with $1 + 7 + 7^2 = 57$ cards, similar to Dobble, is feasible.

Finally we generate games with $7, 13, 21, 31, 57, 73$ cards.

Índice

Índice general **2**

1. Introducción **4**

2. Aritmética modular **4**

3. Cuerpos finitos **5**

4. Planos proyectivos finitos **7**

5. Plano afín **12**

6. Construcción de un plano proyectivo a partir de un plano afín **14**

7. Conjuntos con diferencia perfecta **15**

8. Automatizando tareas **18**

9. Discos de Penrose **19**

10. Averiguando las cartas que faltan en el juego **19**

11. Ejemplos de Juegos elaborados por nosotros **20**

12. Conexiones con otras áreas **20**

13. Consideraciones finales **22**

A. Tablas de sumar y multiplicar de un cuerpo finito de 9 elementos **24**

B. Generamos líneas para algunos planos proyectivos **25**

C. Programa en Java para generar conjuntos con diferencia perfecta **27**

D. Plano cíclico de orden siete **29**

E. Nombres de las figuras que aparecen en las cartas **30**

F. Cartas que faltan en el juego de Asmodée **32**

G. Cartas de un Dobble con notas musicales **33**

H. Cartas de un Dobble con motivos de animales **37**

I. Cartas de un Dobble con motivos de comida **44**

J. Cartas de un Dobble con motivos navideños **55**

K. Cartas de un Dobble con banderas **71**

L. Cartas de un Dobble con símbolos de la tabla periódica **100**

M. Representación de algunos discos de Penrose **137**

Bibliografía **141**

1. Introducción

El juego Dobble fue inventado por Denis Blanchot, Jacques Cottereau y otros. En la actualidad hay varias versiones, Stars Wars, Dobble Junior, ... La más popular, comercializada por Asmodée, consta de 55 cartas en forma de círculo. Cada carta tiene representadas ocho figuras y dos cartas cualesquiera tienen en común una sola de esas figuras.

Hay varias formas de jugar, pero en todas ellas se busca ser el primero en encontrar la figura que comparte tu carta con una ajena y así poder coger cartas o deshacerse de ellas, más rápido que los rivales.

En las instrucciones se afirma algo extraordinario: cada par de cartas supuestamente tiene exactamente un símbolo compartido. Parece que las cartas deben diseñarse utilizando un patrón especial para producir este resultado. ¿Qué tipo de patrón se utiliza? ¿Hay algo especial en el número 55? ¿Podría este resultado haber sido alcanzado usando un número diferente de símbolos en cada tarjeta?

Por extraño que parezca, podemos usar la geometría para responder estas preguntas. De hecho, Dobble tiene casi exactamente la misma estructura que un objeto geométrico llamado plano proyectivo finito. ¿Cómo podemos usar la geometría para responder preguntas sobre un juego de cartas? En geometría moderna, las palabras “línea”, “punto”, etc., no reciben ninguna definición específica. Sin embargo, ciertos supuestos (o axiomas) son ideados para especificar cómo las “líneas” y los “puntos” están relacionados entre sí. De hecho, al usar axiomas que son diferentes de los axiomas de la geometría euclidiana, se puede crear geometrías que se comporten de formas completamente diferentes. Por ejemplo, al cambiar los axiomas, se puede crear una geometría en la que los ángulos de un triángulo sumen menos de 180°, uno en el que las líneas paralelas no existen, o incluso uno con un número finito de puntos y líneas, sin generar contradicciones.

Aprovecharemos la flexibilidad de la geometría moderna para construir un conjunto de axiomas que describa al juego Dobble. Al refinar estos axiomas, mostraremos que Dobble se basa en un plano proyectivo finito. Primero, sin embargo, discutiremos los planos proyectivos finitos y los axiomas en los que están basados. La diferencia esencial entre los espacios euclidianos y proyectivos es que en espacios proyectivos cada par de líneas en un plano deben cortarse, es decir, no hay noción de paralelismo. Esta falta de paralelismo proporciona una bella simetría (dualidad) a los planos proyectivos: cada dos puntos distintos determinan una línea única y cada dos líneas distintas se encuentran en un punto único. ¡Se puede intercambiar los papeles que desempeñan puntos y rectas en las definiciones y teoremas!

2. Aritmética modular

Definición 1. *Decimos que a y b son* ***congruentes módulo*** **n** *si ambos dejan el mismo resto al dividirlos entre n, o equivalentemente si $a-b$ es múltiplo de n.*

Escribiremos

$$a \equiv b \pmod{n}$$

Ejemplo 1. *Decimos que* $5 \equiv 17 \pmod{3}$ *porque al dividir* 5 *entre* 3 *da el mismo resto* 2 *que al dividir* 17 *entre* 3.

La aritmética modular se basa en una relación de equivalencia, y las clases de equivalencia de un entero a se denota con $[a]_n$, o simplemente $[a]$ si sobreentendemos el módulo.

El conjunto cociente de todas las clases de equivalencia módulo n se denota con $\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], [2], ..., [n-1]\}$. Nótese que representa el conjunto de restos o residuos de la división entre n.

Sean $[a]_n$ y $[b]_n$ las clases de equivalencia módulo n de a y b respectivamente. Se definen las operaciones suma y multiplicación mediante:

$$[a]_n + [b]_n = [a+b]_n$$
$$[a]_n \cdot [b]_n = [a \cdot b]_n$$

De este modo, $\mathbb{Z}_n$ se convierte en un "ANILLO" con n elementos. Por ejemplo, en el anillo $\mathbb{Z}_{12}$, se tiene: $[11] \cdot [4] + [6] = [50] = [2]$.

3. Cuerpos finitos

Definición 2. *Un conjunto* $\mathbb{K}$ *con las operaciones de sumar y multiplicar* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *tiene estructura de cuerpo si*

- $\mathbb{K}$ *es cerrado para la adición y la multiplicación.*

$$\forall a, b \in \mathbb{K} \Rightarrow \begin{cases} a + b \in \mathbb{K} \\ a \cdot b \in \mathbb{K} \end{cases}$$

- *Asociatividad de la suma y la multiplicación.*

$$\forall a, b, c \in \mathbb{K} \Rightarrow \begin{cases} (a+b)+c = a+(b+c) \\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \end{cases}$$

- *Conmutatividad de la suma y del producto.*

$$\forall a, b, \in \mathbb{K} \Rightarrow \begin{cases} a + b = b + a \\ a \cdot b = b \cdot a \end{cases}$$

- *Existencia de elemento neutro para la suma y para el producto.*

$$\textit{Existe un elemento } 0 \in \mathbb{K}, \ \textit{tal que } a + 0 = a$$
$$\textit{Existe un elemento } 1 \in \mathbb{K}, \ \textit{tal que } a \cdot 1 = a$$

- *Existencia de elemento opuesto para la suma e inverso para el producto.*

$$\textit{Para cada } a \in \mathbb{K}, \ \textit{existe un elemento } -a \in \mathbb{K}, \ \textit{tal que } a + (-a) = 0$$
$$\textit{Para cada } a \in \mathbb{K}, a \neq 0 \ \textit{existe un elemento } a^{-1} \in \mathbb{K}, \ \textit{tal que } a \cdot (a^{-1}) = 1$$

- *Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma.*

$$\forall a, b, c \in \mathbb{K} \Rightarrow a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Si el conjunto $\mathbb{K}$ tiene un número finito de elementos se llama **cuerpo finito**.

Los cuerpos finitos más simples son los de los números enteros módulo un número primo. De hecho, $\mathbb{Z}_p$ forma un cuerpo finito si y sólo si p es primo.

Ejemplo 2. *El más pequeño de estos cuerpos se obtiene para* $p = 2$.

Así $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ con las operaciones de sumar y multiplicar $\pmod 2$ tiene estructura de cuerpo.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Ejemplo 3. *Un cuerpo de cinco elementos.*

Tomamos $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ con la suma y multiplicación $\pmod 5$

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Así, en $\mathbb{Z}_5$ todo elemento no nulo tiene un inverso (multiplicativo); por ejemplo, el inverso de 2 es 3, puesto que $2 \cdot 3 = 1$. Además, la multiplicación de dos elementos no nulos nunca puede dar 0. Estas propiedades fallan si se toma un número no primo. Por ejemplo, en $\mathbb{Z}_6$ no existe el inverso de 3 puesto que la congruencia $3x = 1 \pmod 6$ no tiene solución; además, $2 \cdot 3 = 0$, por lo que 0 puede factorizarse como el producto de dos elementos no nulos.

En el siglo XIX se demostró, siguiendo la obra de Galois, que existe un cuerpo finito con q elementos no sólo cuando q es primo, sino siempre que q sea una potencia de un primo. Este cuerpo, denotado por $GF(q)$, llamado el cuerpo de Galois de orden q, no es el conjunto de restos $\pmod q$ a no ser que q sea primo. Por ejemplo, los enteros $\pmod 6$ no forman un cuerpo puesto que, por ejemplo, 3 no tiene inverso. La importancia de los cuerpos $GF(q)$ en geometría proyectiva finita es que su existencia nos permite construcciones que pueden ser extendidas de primos a potencias de primos.

En términos generales, $GF(p^m)$ con p primo y $n \in \mathbb{N}$ puede ser construido como sigue: encontramos un polinomio $f(x)$ de grado m, con coeficientes en $\mathbb{Z}_p$ que sea irreducible sobre $\mathbb{Z}_p$, es decir, que no pueda ser expresado como producto de dos polinomios de menor grado con coeficientes en $\mathbb{Z}_p$. Luego tomamos como elementos del cuerpo buscado a todos los polinomios sobre $\mathbb{Z}_p$ de grado menor que m. Tales polinomios serán de la forma $a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + ... + a_1 x + a_0$, donde hay p posibilidades para cada a_i; en consecuencia, habrán p^m de tales polinomios. La suma se realiza sumando los correspondientes coeficientes $\pmod p$, y la multiplicación se realiza $\pmod{f(x)}$, es decir, multiplicando de manera normal en $\mathbb{Z}_p$ y luego tomando el resto de la división del producto obtenido entre $f(x)$.

Ejemplo 4. *Construcción de un cuerpo de orden 4, es decir, con* $4 = 2^2$ *elementos.*

Tomamos[1,2] $f(x) = x^2+x+1$. Los elementos del cuerpo serán 0, 1, x y $x+1$, y la suma y multiplicación se lleva a cabo como sigue:

$+$	0	1	x	$x+1$
0	0	1	x	$x+1$
1	1	0	$x+1$	x
x	x	$x+1$	0	1
$x+1$	$x+1$	x	1	0

$\cdot$	0	1	x	$x+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$
x	0	x	$x+1$	1
$x+1$	0	$x+1$	1	x

Por ejemplo,

$$x + (x+1) = 2x + 1 = 1, \text{ puesto que } 2 = 0 \pmod{2};$$
$$x(x+1) = x^2 + x = 1(x^2+x+1) + 1 = 1 \pmod{x^2+x+1};$$
$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = x^2 + 1 = 1(x^2+x+1) + x = x.$$

Ejemplo 5. *Construcción de un cuerpo de orden* $9 = 3^2$.

Elegimos $f(x) = x^2 + 2x + 2$ sobre $\mathbb{Z}_3$.

a) Probamos que $f(x)$ es irreducible. En efecto, como $f(0) = 2$, $f(1) = 2$ y $f(2) = 1$, $f(x)$ no tiene ninguna raíz simple y, por tanto, no es factorizable.

b) Encontramos los elementos de $GF(9) = \{0, 1, 2, x, x+1, x+2, 2x, 2x+1, 2x+2\}$

c) Construimos las tablas de la suma y multiplicación en $GF(9)$. Ver anexo A.

Se puede demostrar que para cada primo p y cada $m \geq 2$, existe un polinomio $f(x)$ de grado m que es irreducible sobre $\mathbb{Z}_p$, de tal forma que un cuerpo finito de orden p^m siempre existe. Además es único, salvo "isomorfismo". De esta manera, para la construcción del cuerpo se puede partir de cualquier polinomio irreducible que cumpla las condiciones.

4. Planos proyectivos finitos

Definición 3. *Un* ***plano proyectivo finito de orden*** **n**, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ *es un conjunto de "puntos" y ciertos subconjuntos llamados "líneas" que cumplen los siguientes axiomas:*

Ax.1 Existen al menos cuatro puntos, tales que ninguna terna de los mismos es incidente a la misma línea.

Ax.2 Existe al menos una línea que contiene exactamente $n+1$ *puntos* ($n > 1$).

Ax.3 Dados dos puntos distintos, existe una única línea que los contiene.

Ax.4 Dadas dos líneas distintas, existe por lo menos un punto común a ambas.

[1] $f(x)$ es irreducible, ya que en $\mathbb{Z}_2$ resulta $f(0) = f(1) = 1 \neq 0$ y entonces $f(x)$ no tiene raíces simples y por tanto no es factorizable.

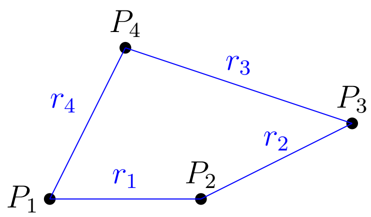
[2] (Observemos que x^2+1 no podría ser una posible elección puesto que x^2+1 se factoriza sobre $\mathbb{Z}_2$ ya que $x^2+1 = (x+1)(x+1)$ ¡sobre $\mathbb{Z}_2$!)

Una característica de los planos proyectivos es la dualidad que desempeñan los puntos y las líneas en numerosas definiciones y teoremas.

En un plano proyectivo, una afirmación que contenga puntos, líneas y relaciones de incidencia entre ellos se puede dualizar, es decir, intercambiar puntos por líneas y con los ajustes gramaticales necesarios, la afirmación sigue siendo cierta.

Teorema 1 (Dual del Ax.1)**.** *Existen al menos cuatro líneas, tales que ninguna terna de las mismas son concurrentes en un punto.*

Demostración. Por el Ax. 1, existen cuatro puntos, tales que ninguna terna de ellos son colineales. Sean P_1, P_2, P_3, P_4 esos puntos.



Sean r_1 la línea que contiene los puntos P_1 y P_2; sea r_2 la línea que contiene los puntos P_2 y P_3; sea r_3 la línea que contiene los puntos P_3 y P_4, y sea r_4 la línea que contiene los puntos P_4 y P_1.

Esas cuatro líneas son distintas porque hemos supuesto que no hay tres de esos puntos alineados.

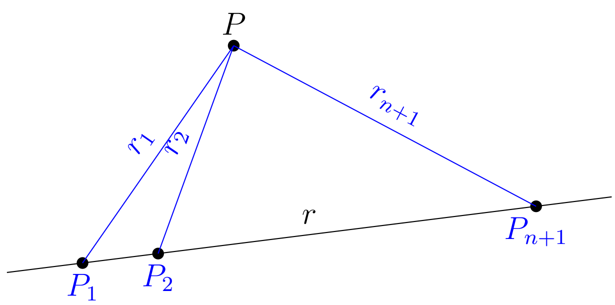
Ahora demostraremos que ninguna terna de ellas son concurrentes.

Asumamos que tres (o más) de las líneas r_1, r_2, r_3, r_4 se intersecan en un punto común P. Entonces lo anterior implica que $P \neq P_i, \forall i = 1, \ldots, 4$. Notemos que entre cualesquiera tres de estas líneas debe haber, al menos, dos de ellas que tengan en común alguno de los puntos P_i. Así hemos encontrado al menos dos líneas distintas que se intersecan en P y en otro punto P_i. Esto contradice el Ax. 3. Por tanto la asunción debe ser incorrecta y ninguna terna de las cuatro líneas r_1, r_2, r_3, r_4 son concurrentes.

$\square$

Teorema 2 (Dual del Ax.2)**.** *Existe, al menos, un punto que está contenido en exactamente* $n + 1$ *líneas.*

Demostración. Por el Ax. 2 tenemos la línea r con $n + 1$ puntos, $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ y por el Ax. 1 hay un punto P no incidente con r.



Por el Ax. 3 dos puntos distintos determinan una línea. Sean $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$ las líneas que se obtienen uniendo P con cada P_i . Es suficiente con probar que esas líneas son distintas y que no hay otra línea pasando por P.

Si $r_i = r_j$ para $i \neq j$ entonces, dado que dos puntos distintos determinan una única línea, $r_i = r_j = r$ y entonces P estaría en r contradiciendo la suposición inicial.

Supongamos ahora que hay una línea s distinta de las anteriores y que pasa por P. Por el Ax. 4 hay, al menos, un punto en común con r. Sea Q ese punto en común. Si $Q \neq P_i$, la línea r tendría $n+2$ puntos, en contradicción con el Ax. 2. Si $Q = P_i$ para algún i tendríamos que la línea $r_i = s$, ya que las dos pasan por P y por $P_i = Q$ que según el Ax. 3 determinan una única línea, en contradicción con lo supuesto. □

Teorema 3 (Dual del Ax.3)**.** *Dadas dos líneas distintas, tienen exactamente un punto en común entre ellas.*

Demostración. Sean r y s dos líneas y supongamos que tienen por lo menos dos puntos en común, pero el Ax. 3 nos dice que dados dos puntos distintos existe una única línea que los contiene y por tanto $r = s$ en contradicción con lo supuesto.

Por otro lado el Ax. 4 nos garantiza que dos líneas distintas tienen, por lo menos, un punto en común. □

Teorema 4 (Dual del Ax.4)**.** *Dados dos puntos distintos hay por lo menos una línea que los contiene.*

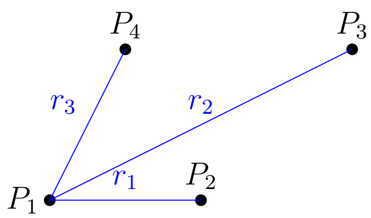
Demostración. El Ax. 3 es incluso más restrictivo, nos garantiza que dados dos puntos distintos, existe una única línea que los contiene. □

Lema 1. *Para cada punto P existe, al menos, una línea no incidente con P.*

Demostración. Sean l y m dos líneas distintas. O una de ellas no contiene a P (con lo cual queda demostrada la afirmación) o $P = l \cap m$. Por el Ax 2 tenemos que toda línea tiene al menos dos puntos, existe un punto $P_l \in l$, $P_l \neq P$ y un punto $P_m \in m$, $P_m \neq P$. La línea que contiene los puntos P_l y P_m no podría contener a P puesto que, de lo contrario violaría el Ax. 3. □

Lema 2. *Cada línea del plano proyectivo es incidente con, al menos, tres puntos.*

Demostración. Sea l una línea y sean P_1, P_2, P_3, P_4 los puntos del Ax. 1. Supongamos, sin perder generalidad, que P_1 no está en l. Consideremos la línea r_1 que contienen a P_1 y P_2; la que contiene a P_1 y P_3, que llamaremos r_2 y por último la línea r_3 que contiene a P_1 y P_4. Puesto que todas ellas concurren en P_1, entonces deben ser distintas por el Ax 1, con lo cual l tendrá tres puntos de intersección, uno con cada una de las líneas.

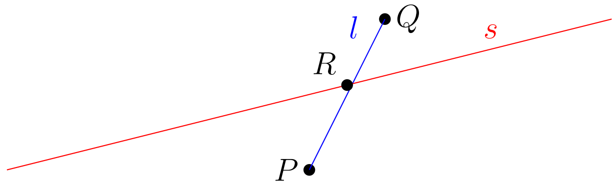


□

Corolario 1. *Dados dos puntos P y Q, existe, al menos una línea no incidente con P y Q.*

Demostración. Sea l la línea que contiene a P y Q. Por el Ax. 1, existe un punto $T \notin l$. Por el Lema 2, existe $R \in l$, $R \neq Q$ y $R \neq P$. Consideramos la línea s que contiene a R y T. Así $R = l \cap s$.

P no puede estar en s, pues en ese caso, P estaría en la intersección de l y s. De la misma forma, Q no puede estar en s.

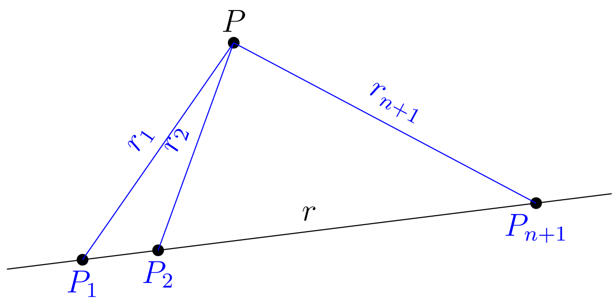


□

Teorema 5. *En un plano proyectivo de orden n, cada punto está exactamente en $n+1$ líneas.*

Demostración. Por el Ax. 2, existe al menos una línea que contiene exactamente $n+1$ puntos. Sea r esa línea y sean $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ los puntos de r.

Sea P un punto que según el Ax. 1 no está alineado con r y sean $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$ las líneas que determina P con cada uno de los P_i de r que nos garantiza el Ax. 3.

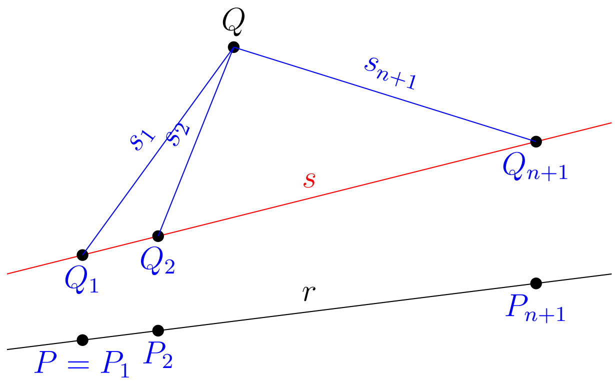


Supongamos que por P pasa otra línea t distinta de r_i. Por el Ax. 4, r y t deben tener por lo menos un punto en común.

Si t corta a r en P_i debe ser r_i por el Ax. 3. Si t corta a r en un punto distinto de P_i entonces r tendría más de $n+1$ puntos, en contradicción con lo que habíamos supuesto.

Con esto demostramos el teorema para todo punto exterior a la línea r.

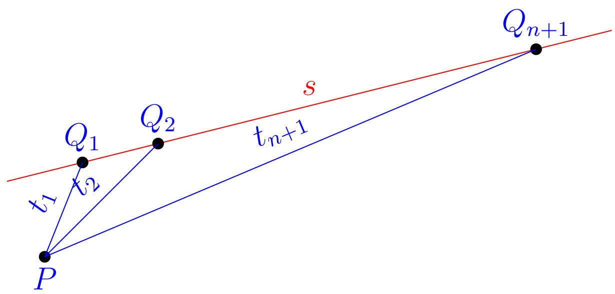
Supongamos ahora que P es un punto de la línea r, por ejemplo $P = P_1$. El Ax. 1 nos garantiza que existe, al menos un punto Q que no está en r, y como acabamos de demostrar Q está en exactamente $n+1$ líneas, que vamos a llamar $s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}$.



El Corolario 1 nos garantiza que tenemos una línea que no pasa por P ni por Q. Llamamos s a esa línea.

Las líneas $s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}$ cortan a s en $n+1$ puntos distintos $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n+1}$ ya que dos líneas distintas tienen un único punto en común.

El punto P no está en s, entonces $P \neq Q_i, \forall i = 1, 2, \ldots, n+1$ y como 2 puntos distintos determinan una única línea, tenemos $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$ líneas pasando por el punto P.



Supongamos que hay otra línea t distinta de t_i que contiene a P. Esa línea debe cortar a s en un punto Q' distinto de Q_i, para todo índice $i = 1, 2, \ldots, n+1$, pero entonces tendremos una nueva línea que pasa por Q y por Q' en contradicción con lo que habíamos demostrado de que por Q pasan exactamente $n+1$ líneas.

□

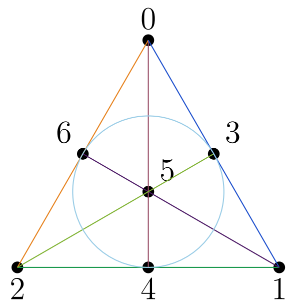
Teorema 6 (Dual del teorema 5)**.** *En un plano proyectivo de orden n, cada línea posee exactamente $n+1$ puntos.*

Teorema 7. *Un plano proyectivo de orden n contiene exactamente n^2+n+1 puntos y n^2+n+1 líneas.*

Demostración. Sea P un punto del plano proyectivo de orden n. Cada otro punto del plano determina con P una línea. Por el Teorema 5 hay exactamente $n+1$ líneas que pasan por P y por el teorema 6 cada una de esas líneas tiene exactamente $n+1$ puntos, es decir n puntos además de P. En total el número de puntos es $n(n+1)+1 = n^2+n+1$.

El principio de dualidad permite demostrar con un argumento similar que el número de líneas es n^2+n+1. □

Ejemplo 6. *El plano proyectivo finito con el menor número posible de puntos se obtiene para $n = 2$, es el conocido como plano de Fano (7 puntos, 7 líneas y cada línea tres puntos).*



Hemos coloreado cada una de las líneas con diferentes colores para distinguirlas, pero en realidad cada línea tiene solo tres puntos.

1	2	3	4	5	6	7
2	2	2	4	4	1	1
4	5	6	5	6	5	3
1	3	0	0	3	6	0

Ejemplo 7. *El plano proyectivo de orden* $n = 3$ *tiene* 13 *puntos,* 13 *líneas y cada línea tiene* 4 *puntos.*

Si denotamos los puntos por letras mayúsculas $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M\}$*, entonces las líneas serían las columnas de la siguiente tabla*

L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}	L_{11}	L_{12}	L_{13}
A	A	A	A	B	B	B	C	C	C	D	D	D
B	E	H	K	E	F	G	E	F	G	E	F	G
C	F	I	L	H	I	J	I	J	H	J	H	I
D	G	J	M	K	L	M	M	K	L	L	M	K

Una de las cuestiones sin resolver es la determinación de los órdenes para los cuales existe algún plano proyectivo finito. Se sabe que si n es la potencia de un primo, entonces existe plano proyectivo de orden n. Basta construirlo sobre un cuerpo finito de orden n como veremos más adelante. También existen planos que no derivan de cuerpos finitos, pero el orden de todos los encontrados hasta ahora es siempre la potencia de un primo. Por ejemplo, sabemos que de orden 9 hay cuatro planos proyectivos diferentes, tres de ellos no desarguesianos [3]. De momento se sabe que no hay planos de orden 6 ni de orden 10 pero no sabemos si los hay de orden 12, por ejemplo.

Sobre la existencia, en general, de planos proyectivos de ciertos órdenes, el conocido teorema de Bruck y Ryser [2] es un teorema de no existencia.

Teorema 8. *(Bruck y Ryser, 1949) Sean* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $n \equiv 1$ *o* $2 \pmod 4$ *y además* n *no es suma de dos cuadrados en* $\mathbb{Z}$*. Entonces no existe ningún plano proyectivo de orden* n*.*

Una aplicación clara resulta para $n = 6$, que satisface ambas condiciones. No obstante para $n = 10$, se tiene $10 \equiv 2 \pmod 4$ pero $10 = 1^2 + 3^2$ y el teorema no se aplica.

5. Plano afín

La noción de plano proyectivo está íntimamente ligada a la noción de plano afín.

Definición 4. *Un plano afín es una estructura de incidencia*

$$\mathbb{A} = \{P, R, I\}, \quad P = \textit{puntos}, \quad R = \textit{líneas}, \quad I = \textit{incidencia}$$

sometida a los siguientes axiomas.

1. *Para todo par de puntos distintos existe una única línea incidente con ambos.*

2. *Dados una línea r y un punto p no incidentes, existe una única línea incidente con p pero no incidente con r.*

3. *Existen tres puntos no incidentes con ninguna línea. (Existen tres puntos no alineados).*

Si el plano afín es finito existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que:

- El número de puntos del plano es n^2
- El número de líneas del plano es $n \cdot (n+1)$
- El número de puntos de cualquier línea es n
- Por cada punto pasan exactamente $n+1$ líneas.

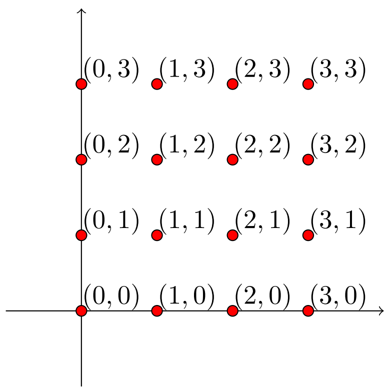
Decimos entonces que el plano afin tiene orden n.

Dado un plano afín de orden n podemos definir un sistema de coordenadas de la siguiente manera:

Tomamos una línea y numeramos sus puntos $0, 1, 2, \ldots, n-1$

Por 0 tomamos otra línea y numeramos los puntos de la misma manera, siendo el 0 el punto común a ambas líneas.

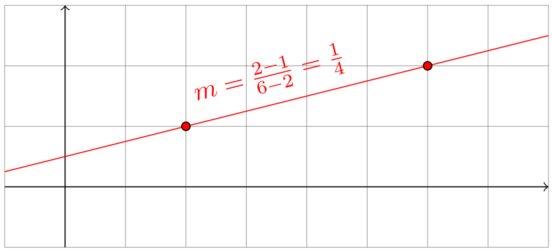
Utilizando estas líneas como ejes coordenados, podemos representar los n^2 puntos del plano por pares ordenados de la forma (a, b) siendo $a, b \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$



En la geometría euclidiana, cualquier línea no vertical tiene asociada una pendiente.

La línea que pasa por (x_0, y_0) y por (x_1, y_1) con $x_0 \neq x_1$ tiene por pendiente

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$



A veces, por un abuso del lenguaje, decimos que las líneas verticales tienen pendiente infinita.

6. Construcción de un plano proyectivo a partir de un plano afín

Podemos construir el plano proyectivo real de la siguiente manera: para cada dirección de la recta afín (para cada pendiente) añadimos un nuevo punto que vamos a llamar "punto del infinito". Dos rectas paralelas definen el mismo punto del infinito.

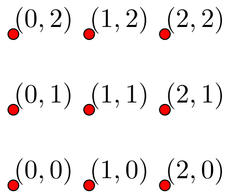
Las líneas del plano proyectivo son las rectas del plano afín, añadiéndole el punto del infinito de esa dirección. La línea que contiene todos los puntos del infinito le llamaremos línea del infinito.

Denotaremos por $P_2(\mathbb{R})$ al plano proyectivo así definido.

Proposición 1. *El plano proyectivo $P_2(\mathbb{R})$ tiene las siguientes propiedades*

1. *Por dos puntos distintos pasa una única línea.*
2. *Dos líneas distintas se cortan en un único punto.*

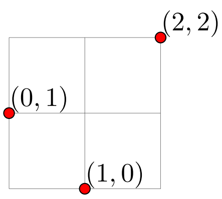
Si en lugar del plano afín real, consideramos un plano afín finito, por ejemplo sea $\mathbb{F}_3$ un cuerpo finito con 3 elementos y asociamos a cada par ordenado (x, y) un punto del plano, siendo $x, y \in \mathbb{F}_3$

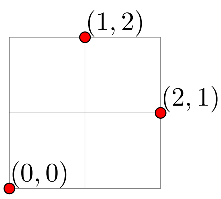


Tenemos entonces un plano afín con $3 \times 3 = 9$ puntos.

En este plano las líneas tienen todas tres puntos y una línea de pendiente 2, por ejemplo, quiere decir que cuando la abscisa aumenta una unidad, la ordenada aumenta 2 unidades, siempre módulo 3.

Por ejemplo, las siguientes son líneas de pendiente 2.





Vemos que al tener la misma pendiente son paralelas y no tienen puntos en común.

Tomemos ahora las tres líneas que tienen pendiente 0 (líneas horizontales y hagámoslas coincidir en un nuevo punto que vamos a llamar P_0.

Las tres líneas que tienen pendiente 1 las hacemos coincidir en P_1, las tres de pendiente 2 en el punto P_2 y las tres líneas verticales que coincidan en P_3. Llamemos línea del infinito a la línea que tiene los puntos $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$

Es fácil comprobar que la geometría así construida es un plano proyectivo, ya que cumple los cuatro axiomas (Ax. 1, Ax. 2, Ax. 3, Ax. 4).

De esta forma se puede construir un plano proyectivo $P_2(\mathbb{F}_p)$ siendo p un número primo.

Cada línea del planos proyectivo tienen $p+1$ puntos (los p del plano afín más el punto del infinito de esa dirección).

En total tiene p^2+p+1 puntos, los p^2 del plano afín más los $p+1$ de la línea del infinito.

7. Conjuntos con diferencia perfecta

Introduciremos otra forma de representar planos proyectivos finitos.

En un plano proyectivo de orden n, toda línea tiene $n+1$ puntos y todo punto tiene $n+1$ líneas sobre él. Además el tal plano contendrá n^2+n+1 líneas. El número n refleja el número de elementos en el cuerpo finito asociado al plano proyectivo. Veremos que también corresponde al número de miembros de un conjunto con diferencia perfecta representativo.

Definición 5. *Sea $S_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ donde $n \geq 2$ y $0 \leq a_i \leq k$ para $i = 1, \ldots, n+1$. Se llama un* ***conjunto con diferencia perfecta de orden n*** *(con respecto a k) si, para todo $m \neq 0 \pmod{k}$, existe un único par ordenado (a_i, a_j) tal que $a_i, a_j \in S_n$ y $a_i - a_j = m \pmod{k}$.*

Ejemplo 8. *$S = \{0, 1, 3\}$ es un conjunto con diferencia perfecta de orden 2 (con respecto a 7) pues*

$1 = 1 - 0 \pmod{7}$	$3 = 3 - 0 \pmod{7}$	$5 = 1 - 3 \pmod{7}$
$2 = 3 - 1 \pmod{7}$	$4 = 0 - 3 \pmod{7}$	$6 = 0 - 1 \pmod{7}$

Teorema 9. *Si S es un conjunto con diferencia perfecta de orden n con respecto a k, entonces*

$$k = n^2 + n + 1$$

Demostración. En efecto, en un conjunto de $n+1$ elementos se pueden formar $(n+1)\cdot n$ pares ordenados. Como cada uno de esos pares debe generar un único elemento entre los restos módulo k, y puesto que todos los elementos excepto el 0 son generados, entonces $k = (n+1)\cdot n + 1 = n^2 + n + 1$. □

Conjuntos con diferencia perfecta de un orden dado no son únicos. Por ejemplo, $\{1, 2, 4\}$ y $\{2, 3, 5\}$ son conjuntos con diferencia perfecta de orden 2.

De hecho, los conjuntos $\{i, 1+i, 3+i\}$, donde $i = 0, \ldots, 6$, con la suma módulo 7, son todos conjuntos con diferencia perfecta de orden 2.

Más aún, dos números no determinan de manera única un conjunto con diferencia perfecta, como puede verse en los ejemplos 8 y 9.

Ejemplo 9. *$S = \{0, 1, 5\}$ es un conjunto con diferencia perfecta de orden 2 (con respecto a 7) pues*

$1 = 1 - 0 \pmod 7$ $\quad$ $3 = 1 - 5 \pmod 7$ $\quad$ $5 = 5 - 0 \pmod 7$

$2 = 0 - 5 \pmod 7$ $\quad$ $4 = 5 - 1 \pmod 7$ $\quad$ $6 = 0 - 1 \pmod 7$

Definición 6. *Sea $S_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ un conjunto con diferencia perfecta de orden n. Sean*

$$\mathcal{P} = \{p_0, p_1, \ldots, p_{n^2+n}\}, \quad \mathcal{L} = \{L_o, L_1, \ldots, L_{n^2+n}\} \quad e \quad \mathcal{I} = \{(p_i, L_j); i + j \in S_n\}$$

entonces $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ se denomina ***plano cíclico de orden*** **n** ***generado por*** $\mathbf{S_n}$

Ejemplo 10. *Sea $S_2 = \{0, 1, 3\}$ un conjunto con diferencia perfecta de orden 2. Si las letras i y j representan subíndices de los puntos y líneas, respectivamente, el plano cíclico asociado se ilustra en la siguiente tabla:*

	j						
	0	1	2	3	4	5	6
	0	6	5	4	3	2	1
i	1	0	6	5	4	3	2
	3	2	1	0	6	5	4

Los subíndices de puntos sobre la línea L_j se leen verticalmente en la tabla (por ej. L_2 contiene a p_5, p_6, p_1)

Ejemplo 11. *Sea $S_3 = \{0, 1, 3, 9\}$ un conjunto con diferencia perfecta para $n = 3$; el plano cíclico asociado se ilustra en la siguiente tabla:*

	j												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	0	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
i	1	0	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
	3	2	1	0	12	11	10	9	8	7	6	5	4
	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	12	11	10

Ejemplo 12. *Sea $S_4 = \{0, 1, 4, 14, 16\}$ un conjunto con diferencia perfecta para $n = 4$; el plano cíclico asociado se muestra en la siguiente tabla:*

	j																				
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	0	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
	1	0	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
i	4	3	2	1	0	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5
	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	20	19	18	17	16	15
	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	20	19	18	17

Ejemplo 13. *Sea $S_7 = \{0, 1, 3, 13, 32, 36, 43, 52\}$ un conjunto con diferencia perfecta para $n = 7$. El plano cíclico asociado se muestra en el apéndice D.*

Este plano cíclico lo usaremos más tarde para averiguar las cartas que faltan en el Dobble de Asmodée.

Podemos comprobar que esos planos cíclicos de órdenes 2, 3, 4 y 7 son planos proyectivos de órdenes 2, 3, 4 y 7 respectivamente.

En efecto, todo plano cíclico es un plano proyectivo, como lo afirma el siguiente teorema.

Teorema 10. *Un plano cíclico de orden n es un plano proyectivo de orden n.*

Demostración. Lo demostraremos en varios pasos:

1. El primer paso es demostrar que toda línea contiene exactamente $n+1$ puntos, y su dual, que todo punto tiene exactamente $n+1$ líneas que pasan por él. Dado L_j, sea $S_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ un conjunto con diferencia perfecta de orden n y sean i_k para $1 \leq k \leq n+1$ definidos por $i_k = a_k - j \pmod{n^2+n+1}$. Tales números i_k existen y son únicos para cada k por ser restos módulo n^2+n+1. Entonces los $n+1$ puntos p_{i_k} están en L_j debido a que $i_k + j = a_k \in S_n$. El argumento dual demuestra que todo punto tiene exactamente $n+1$ líneas que pasan por él.

2. El segundo paso es probar que a lo sumo una línea puede pasar por dos puntos distintos, y su dual, que dos líneas distintas se intersecan en un sólo punto. Dados dos puntos distintos p_i y p_j, supongamos que ambas líneas L_k y L_m pasan por p_i y p_j. Entonces $i+k = a_r$, $j+k = a_s$, $i+m = a_t$ y $j+m = a_u$ para ciertos a_r, a_s, a_t, $a_u \in S_n$. En consecuencia, $(i+k)-(j+k) = a_r - a_s$, y $(i+m)-(j+m) = a_t - a_u$; así, $i-j = a_r - a_s = a_t - a_u$. Puesto que $i - j \neq 0$, $i-j$ es generado por la diferencia de un único par de elementos de S_n. Por lo tanto, $a_r = a_t$ y $a_s = a_u$, es decir, $k = m$ y $L_k = L_m$, con lo que sólo una línea pasa por p_i y p_j. Un argumento dual, demuestra que dos líneas se intersecan en un único punto.

3. El siguiente paso es probar que todo par de puntos p y q deben estar en una línea. Existen $n+1$ líneas que concurren en p, conteniendo cada una de ellas n puntos excluyendo p. Así, $n(n+1)+1$ o n^2+n+1 puntos están contenidos en este conjunto de líneas que concurren en p. Pero sólo hay n^2+n+1 puntos en el plano entero, con lo que q debe ser una de esas líneas. Un argumento dual demuestra que cada dos líneas se intersecan en un punto único.

4. El paso final es demostrar que existen cuatro puntos, sin que ninguna terna de ellos sean colineales. Sean $p = p_{a_1}$ y $q = p_{a_2}$. Así, la línea L_q que contiene a p y q es $\{p_i : i \in S_n\}$ y tiene $n+1$ puntos sobre ella. Puesto que $n^2+n+1 > n+1$, podemos escoger un punto r no contenido en L_q. La línea L_q, junto con las dos que contienen a los puntos p y r, y q y r, respectivamente, suman $3n$ puntos. Como $n \geq 2$, sabemos que $n^2+n+1 > 3n$, y podemos escoger un cuarto punto s que no está en ninguna de esas tres líneas. En consecuencia, p, q, r, s son los cuatro puntos buscados.

$\square$

Hemos probado, entonces, que el plano cíclico es precisamente un plano proyectivo y, claramente, este plano proyectivo tiene orden n.

En la tabla 1 presentamos una lista abreviada de conjuntos con diferencia perfecta.

Respecto a la omisión en la tabla de conjuntos con diferencia de orden $n = 6$, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 21 y 24, se explica porque se ha demostrado que no existen conjuntos con diferencia perfecta de esos órdenes. De hecho, para $n \leq 3\,600$, todo conjunto con diferencia perfecta de orden n es de orden potencia de un primo (Ver [5] y [6]).

Debe señalarse, también, que no todo plano proyectivo finito puede ser representado a través de conjuntos con diferencia perfecta.

n	Conjunto con diferencia perfecta
2	$\{0,1,3\}$
3	$\{0,1,3,9\}$
4	$\{0,1,4,14,16\}$
5	$\{0,1,3,8,12,18\}$
7	$\{0,1,3,13,32,36,43,52\}$
8	$\{0,1,3,7,15,31,36,54,63\}$
9	$\{0,1,3,9,27,49,56,61,77,81\}$
11	$\{0,1,3,12,20,34,38,81,88,94,104,109\}$
13	$\{0,1,3,16,23,28,42,76,82,86,119,137,154,175\}$
16	$\{0,1,3,7,15,31,63,90,116,127,136,181,194,204,233,238,255\}$
17	$\{0,1,4,38,40,85,92,110,115,163,179,189,246,252,265,279,287,290\}$
19	$\{0,1,4,22,47,61,81,111,116,147,149,160,189,201,252,284,310,358,366,375\}$
23	$\{0,1,3,17,36,42,64,93,131,149,161,193,204,214,219,227,264,273,313,400,448,452,472,479\}$

Cuadro 1: Lista abreviada de conjuntos con diferencia perfecta

8. Automatizando tareas

A partir del plano afín

Ahora que tenemos un procedimiento para generar planos proyectivos de orden n vamos a diseñar un programa en Java que nos ayude con las líneas de esos planos:

```java
public static void main(String[]args) {
         int i,k,j,r=0;
         int n=7;
//n+1 primeras cartas
        for(j=0;j<=n;j++) {
         System.out.println("\n"+ "Carta: "+ (++r));
         System.out.print(0+"   ");
         for(k=1;k<=n;k++) {
                 System.out.print(n*j + k+"   ");
                 }
         }
//n*n siguientes cartas
        for(i=0;i<n;i++) {
            for(j=0;j<n;j++) {
             System.out.println("\n"+ "Carta: "+ (++r));
             System.out.print(i+1+"   ");
             for(k=0;k<n;k++) {
                     System.out.print(n+1+n*k+(i*k+j)%n+"   ");
                     }
             }
           }
}
```

Con este algoritmo y simplemente cambiando el valor de n, podemos tener las líneas del plano proyectivo $P_2(\mathbb{F}_n)$, con n primo.

En el cuadro 5 tenemos generadas las líneas del plano de orden $n = 5$ y en el 6 las líneas de $P_2(\mathbb{F}_7)$.

A partir de conjuntos con diferencia perfecta

En este caso utilizaremos la estructura aritmética de conjuntos con diferencia perfecta para generar planos proyectivos de orden n que, igualmente, generará las líneas de esos planos.

Podemos ver en el apéndice C el código Java empleado para generar las diferencias perfectas del cuadro 1.

9. Discos de Penrose

Roger Penrose es un físico y matemático inglés, famoso por sus contribuciones a la teoría de la relatividad, la cosmología, las teselaciones de cuasicristales y a la divulgación científica, entre otras muchas. Es famosa su escalera infinita o escalera imposible. Penrose no solo inventó la teoría de los twistores, que vuelven a estar de actualidad últimamente. También diseñó unos círculos que, basándose en los planos cíclicos que vimos anteriormente, nos permiten construir un plano proyectivo determinado.

Tomemos un círculo de un material apropiado como cartulina o metacrilato y hagámosle un agujero en el centro que nos permita unirlo a otro círculo un poco mas grande y al mismo tiempo girar sobre él.

Marquemos en la circunferencia del borde del círculo base (círculo grande), una serie de $q^2 + q + 1$ puntos igualmente espaciados, etiquetándolos en sentido contrario a las agujas del reloj, mediante los números $0, 1, 2, \ldots, q(1 + q)$.

En el disco rotatorio (círculo más pequeño) marcaremos $1 + q$ puntos especiales en ciertas posiciones cuidadosamente escogidas. Estas posiciones serán tales que, para cualquier selección de dos de los puntos marcados en la base, hay exactamente una posición del disco para la que los dos puntos seleccionados coinciden con dos de esos puntos especiales en el disco.

Otra forma de decirlo es la siguiente: si $a_0, a_1, \ldots, a_q$ son las distancias sucesivas a lo largo de la circunferencia entre estos puntos especiales, tomados cíclicamente, entonces cada distancia $1, 2, 3, \ldots, q + 1$ puede representarse unívocamente como una suma de una colección de as cíclicamente sucesivos.

En el apéndice M hemos reproducido algunos de estos discos.

10. Averiguando las cartas que faltan en el juego

En el apéndice D tenemos una representación de un plano cíclico de orden $n = 7$. En la tabla del apéndice E hemos escrito el nombre de las figuras que aparecen en las cartas.

Nos fijamos en las dos primeras filas de la tabla del plano cíclico (podemos coger cualesquiera otras, pero con estas parece más fácil porque son consecutivas) y vamos buscando cartas que tienen esas dos figuras. Por ejemplo, la carta número 0 tiene las figuras 0 y 1 (Candado y Árbol). La carta número 1 tiene las figuras 56 y 0 (Llave y Candado). La carta número 2 tiene las figuras 55 y 56 (Araña y Llave).

Vamos retirando esas cartas hasta llegar a la número 8 que debería tener las figuras 49 y 50 (Ojo y Calavera) pero que no aparece.

Seguimos el mismo procedimiento y cuando llegamos a la carta número 41 que debería tener las figuras 16 y 17 (Hoja de arce y Cubo de hielo) esta no aparece.

Hemos, por tanto, localizado las dos cartas que le faltan al juego Dobble.

En el apéndice F aparecen representadas esas dos cartas.

11. Ejemplos de Juegos elaborados por nosotros

Llegados a este punto en que somos capaces de generar juegos de Dobble con $1+n+n^2$ cartas siendo n la potencia de un primo, pasamos a exponer algunos ejemplos:

Ejemplo 14. *Para $n = 2$ tenemos que $1 + n + n^2 = 7$, pensamos en un juego con las siete notas musicales y los colores del arcoíris. En cada carta tendremos $n + 1 = 3$ notas. Es el juego más sencillo y podría ser apto para niños pequeños. En el apéndice G tenemos una representación de las cartas de este juego.*

Ejemplo 15. *Para $n = 3$ tendríamos un juego con $1 + n + n^2 = 13$ cartas y cuatro figuras en cada carta. En el apéndice H aparece una representación de ese juego. Sigue siendo un juego muy fácil, por eso elegimos motivos de animales y apropiado para niños pequeños.*

Ejemplo 16. *Con $n = 4$ resulta un juego de $1 + n + n^2 = 21$ cartas y en cada carta cinco figuras. La representación de este juego está en el apéndice I.*

Ejemplo 17. *Diciembre es el mes de la Navidad y es el mes de los juguetes por excelencia. Con $n = 5$ representamos en el apéndice J las $1+n+n^2 = 31$ cartas de un juego con motivos navideños y 6 figuras por carta.*

Ejemplo 18. *Para $n = 7$ podemos hacer juegos con $1 + n + n^2 = 57$ cartas y ocho figuras por carta. En el apéndice K tenemos un juego hecho con banderas que puede considerarse educativo.*

Ejemplo 19. *El año 2019 fue declarado por las Naciones Unidas, año internacional de la tabla periódica, al cumplirse 150 años de la versión que Mendeléyev creó de la misma. Para celebrarlo creamos un Dobble para $n = 8$ con $1+n+n^2 = 73$ cartas y símbolos de elementos químicos. Lo tenemos en el apéndice L y se puede usar con alumnado de bachillerato de ciencias.*

12. Conexiones con otras áreas

En el mundo de las matemáticas, nos encontramos con una variedad desconcertante de temas sin aparente conexión entre ellos. Pero las apariencias son engañosas. Hemos visto la conexión entre planos proyectivos y conjuntos con diferencia finita. Para fijar ideas, al conjunto con diferencia finita (Definición 5) S_n lo denotaremos por la terna (v, k, λ), donde $v = n^2 + n + 1$, k es el número de elementos de S_n y λ es el número de maneras diferentes en que cada elemento $m \pmod{k}$ puede ser representado como diferencia de elementos de S_n. Nótese que en el caso de conjuntos con diferencia perfecta, $\lambda = 1$. A fin de concretar, consideremos la terna $(7, 3, 1)$. Vimos en el ejemplo 8 que se corresponde con el conjunto con diferencia perfecta S_2. También vimos que se corresponde con el plano de Fano (Ejemplo 6). En el ejemplo 10, describimos los elementos del plano cíclico asociado a S_2:

$$013,\ 124,\ 235,\ 346,\ 450,\ 561 \text{ y } 602.$$

Observemos que cada terna representa una línea en el triángulo de Fano (Ejemplo 6). Pero, también, que para esos 7 conjuntos (o *bloques*), cuyos elementos son tomados de un conjunto de 7 elementos, a saber, $[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]$, cada elemento aparece en tres bloques, cada bloque tiene tres elementos, y cada par de elementos aparecen juntos en exactamente un bloque. Los conjuntos con diferencia finita dan lugar a algunas clases especiales de lo que se llama *diseños de bloques*. En este contexto, $(7, 3, 1)$ es un diseño (*simétrico*). Los diseños de bloques aparecieron en conexión con el trabajo del matemático R. A. Fisher en el diseño estadístico de experimentos agrícolas. Los conocidos cuadrados mágicos son fuentes de otros diseños de bloques. También, una clase de diseños de bloques que ha atraído considerable interés son los llamados *sistemas de Steiner*. El plano de Fano $(7, 3, 1)$ es un sistema (triada) de Steiner.

Un *cuadrado grecolatino* de orden n es una matriz $n \times n$ con entradas del conjunto $[1, 2, ...n]$ tales que cada elemento de $[1, 2, ...n]$ aparece en cada fila y cada columna de la matriz exactamente una vez. Se dice que dos cuadrados grecolatinos $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ de orden n son *ortogonales* si los n^2 pares ordenados (a_{ij}, b_{ij}) son distintos. Es fácil comprobar que las siguientes matrices son cuadrados grecolatinos ortogonales por pares:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Resulta que la existencia de este trío de cuadrados grecolatinos ortogonales por pares de tamaño 4 es equivalente a la existencia de un plano proyectivo finito de orden 4; de hecho, esto es cierto en general:

Teorema 11. *Sea n un número entero mayor que 1. Entonces existe un plano finito proyectivo plano de orden n si y sólo si existe un conjunto de $n - 1$ cuadrados grecolatinos de tamaño n que son ortogonales por pares. (Una demostración puede encontrarse en [13]).*

Según lo visto para planos proyectivos, si n es una potencia de un primo, entonces existe un conjunto de $n - 1$ cuadrados grecolatinos de tamaño n que son ortogonales por pares. Así, existen planos proyectivos de orden 2, 3, 4, 5, 7, 8 y 9. En particular, $(7, 3, 1)$ siendo un plano proyectivo de orden 2, debe corresponderle un conjunto de 1 cuadrado grecolatino de tamaño 2, precisamente

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

¿Qué sucede en el caso de orden 6? La cuestión de existencia de cuadrados grecolatinos se remonta a Leonhard Euler quien en 1782 planteó el célebre Problema de los 36 oficiales. Se trata de saber si 36 oficiales, de 6 grados diferentes y de 6 cuarteles diferentes pueden disponerse en un cuadrado de 6 filas por 6 columnas de manera tal que cada grado y cada cuartel este representado por un oficial, en cada fila y en cada columna. Es claro que si disponemos de dos cuadrados latinos de orden 6 ortogonales, sabremos cómo lograr esa disposición. Entonces Euler intentó construir un par de tamaño 6; al no lograrlo, conjeturó la imposibilidad de responder afirmativamente este problema. En su estudio sobre los cuadrados grecolatinos, mostró cómo construir un par de tamaño n si n no tiene la forma $4k + 2$, y vio de inmediato que es imposible construir un par de cuadrados grecolatinos ortogonales de tamaño 2, lo que lo impulsó a proponer la siguiente conjetura:

Conjetura. *(Euler,* 1782*). Para cada entero no negativo k, no existe ningún par de cuadrados grecolatinos ortogonales de tamaño $4k + 2$.*

Durante más de 100 años, no pasó nada. Luego, en 1900, G. Tarry demostró que Euler tenía razón sobre 6. Pero Bose, Shrikhande y Parker en 1960, demostraron que estaba espectacularmente equivocado para todos los demás valores de la forma $4k + 2$ mayores de 6: Existe un par de cuadrados grecolatinos ortogonales de orden n para todos $n > 6$. (Ver [5]). Notar que se sigue del resultado de Tarry de la solución negativa del problema de los 36 oficiales, que no existen planos proyectivos de orden 6, resultado éste incluido en el Teorema de Bruck y Ryser [2].

También existe una relación de todo esto con los torneos, del tipo todos contra todos, que se estudian en el contexto de teoría de grafos (ver [10]).

Otra aplicación sorprendente de los conjuntos con diferencia perfecta o planos cíclicos aparece en la música. Aunque la mayoría de las composiciones musicales se realizan en un sistema de escala temperada (o escala de igual temperamento) basado en 12 semitonos iguales, se le ha prestado atención a otros sistemas obtenidos al dividir la octava en distintos números de divisores. En especial, es de interés los sistemas de escala temperada con n tonos, donde n es un número de la forma $k^2 + k + 1$, para algún entero k, como, por ejemplo, los sistemas de 7 tonos ($k = 2$), de 31 tonos ($k = 5$), entre otros, donde se emplea los planos proyectivos finitos para generarlos.

13. Consideraciones finales

Queda claro que el juego Dobble podría tener 57 cartas y entonces, ¿por qué la empresa lo comercializa con 55 cartas?

Si bien el juego con ocho figuras por carta y de modo que dos cartas diferentes tengan una única figura en común tiene un máximo de 57 cartas, también es cierto que se puede jugar con menos cartas.

Se nos ocurren varias respuestas a la pregunta, aunque todas ellas son meras especulaciones. Dejamos al lector que escoja la que más le guste o que aporte una nueva que será bienvenida.

Hipótesis de la manejabilidad

Si consultamos la Wikipedia vemos que en la mayoría de juegos de naipes, las barajas tienen entre 40 y 52 cartas. Suponemos que barajas con muchas más cartas son menos apetecibles, menos manejables. Sería un argumento para hacer menos de 57 pero no exactamente 55 cartas.

Hipótesis de los divisores

Está claro que una baraja de 55 cartas la podemos dividir entre 5 jugadores dando 11 cartas a cada uno o dando 5 cartas a cada uno de los 11 jugadores, cosa que no podemos hacer con una baraja de 57 cartas.

Este supuesto es muy débil porque el 56 tiene muchos más divisores: 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56 y está más cerca de 57.

Hipótesis de la ignorancia

Supongamos que los editores no sabían geometría proyectiva finita, fueron creando las cartas a ojo y no encontraron más que 55.

También este supuesto es poco factible porque en las instrucciones que acompañan al juego y donde habla de su historia, menciona que el antecesor del actual fue el "juego de los insectos" basado en un plano proyectivo de orden 5.

Hipótesis del marketing

Conocedores de la curiosidad innata de los matemáticos, supusieron que este desajuste haría correr ríos de tinta y daría lugar a varios artículos, generando así una publicidad gratuita para el producto.

Esta hipótesis puede parecer fantasiosa pero lo cierto es que, en parte, lo consiguieron [4], [7], [12], ...

Hipótesis de los derechos de autor

Reinhard Staupe, un inventor de juegos alemán, publicó en 1995 un juego muy similar llamado Kunterbunt con cartas rectangulares 15 símbolos por carta y basado en el mismo principio "dos cartas diferentes, un sólo símbolo en común".

Aunque Reinhard Staupe se quejó públicamente[3] en una carta abierta, del trato recibido por Asmodée, no parece que fuera ese el motivo de elegir 55 cartas en vez de 57 ya que lo que tienen en común es el mecanismo del juego, no el número de cartas.

Hipótesis de limitaciones técnicas

En la fabricación del juego, primero se imprimen las cartas en la cartulina y luego se recortan. Suponemos que, tanto el diámetro de las cartas (85 mm) como el número de cartas que va en cada fila y en cada columna de la cartulina, tiene bastante que ver con el tamaño del papel empleado.

Esta es, a nuestro juicio, la hipótesis que cobra más fuerza.

[3] http://www.jugamostodos.org/index.php/noticias-en-el-mundo/noticias-94262/2130-kunterbunt-vs-dobble

A. Tablas de sumar y multiplicar de un cuerpo finito de 9 elementos

+	0	1	2	x	x+1	x+2	2x	2x+1	2x+2
0	0	1	2	x	x+1	x+2	2x	2x+1	2x+2
1	1	2	0	x+1	x+2	x	2x+1	2x+2	2x
2	2	0	1	x+2	x	x+1	2x+2	2x	2x+1
x	x	x+1	x+2	2x	2x+1	2x+2	0	1	2
x+1	x+1	x+2	x	2x+1	2x+2	2x	1	2	0
x+2	x+2	x	x+1	2x+2	2x	2x+1	2	0	1
2x	2x	2x+1	2x+2	0	1	2	x	x+1	x+2
2x+1	2x+1	2x+2	2x	1	2	0	x+1	x+2	x
2x+2	2x+2	2x	2x+1	2	0	1	x+2	x	x+1

Cuadro 2: Tabla de sumar para $\mathbb{F}_9$

·	0	1	2	x	x+1	x+2	2x	2x+1	2x+2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	x	x+1	x+2	2x	2x+1	2x+2
2	0	2	1	2x	2x+2	2x+1	x	x+2	x+1
x	0	x	2x	x+1	2x+1	1	2x+2	x	x+2
x+1	0	x+1	x+2	2x+1	2	x	x+2	2x	1
x+2	0	x+2	2x+1	1	x	2x+2	2	x+1	2x
2x	0	2x	x	2x+2	x+2	2	x+1	1	2x+1
2x+1	0	2x+1	x+2	2	2x	x+1	1	2x+2	x
2x+2	0	2x+2	x+1	x+2	1	2x	2x+1	x	2

Cuadro 3: Tabla de multiplicar para $\mathbb{F}_9$

B. Generamos líneas para algunos planos proyectivos

Recta: 13→	3	6	8	10
Recta: 12→	3	5	7	12
Recta: 11→	3	4	9	11
Recta: 10→	2	6	7	11
Recta: 9→	2	5	9	10
Recta: 8→	2	4	8	12
Recta: 7→	1	6	9	12
Recta: 6→	1	5	8	11
Recta: 5→	1	4	7	10
Recta: 4→	0	10	11	12
Recta: 3→	0	7	8	9
Recta: 2→	0	4	5	6
Recta: 1→	0	1	2	3

Cuadro 4: Rectas de un plano proyectivo de orden $n = 3$

Recta: 31→	5	10	14	18	22	26
Recta: 30→	5	9	13	17	21	30
Recta: 29→	5	8	12	16	25	29
Recta: 28→	5	7	11	20	24	28
Recta: 27→	5	6	15	19	23	27
Recta: 26→	4	10	13	16	24	27
Recta: 25→	4	9	12	20	23	26
Recta: 24→	4	8	11	19	22	30
Recta: 23→	4	7	15	18	21	29
Recta: 22→	4	6	14	17	25	28
Recta: 21→	3	10	12	19	21	28
Recta: 20→	3	9	11	18	25	27
Recta: 19→	3	8	15	17	24	26
Recta: 18→	3	7	14	16	23	30
Recta: 17→	3	6	13	20	22	29
Recta: 16→	2	10	11	17	23	29
Recta: 15→	2	9	15	16	22	28
Recta: 14→	2	8	14	20	21	27
Recta: 13→	2	7	13	19	25	26
Recta: 12→	2	6	12	18	24	30
Recta: 11→	1	10	15	20	25	30
Recta: 10→	1	9	14	19	24	29
Recta: 9→	1	8	13	18	23	28
Recta: 8→	1	7	12	17	22	27
Recta: 7→	1	6	11	16	21	26
Recta: 6→	0	26	27	28	29	30
Recta: 5→	0	21	22	23	24	25
Recta: 4→	0	16	17	18	19	20
Recta: 3→	0	11	12	13	14	15
Recta: 2→	0	6	7	8	9	10
Recta: 1→	0	1	2	3	4	5

Cuadro 5: Rectas de un plano proyectivo de orden $n = 5$

Recta: 57→	7	14	20	26	32	38	44	50
Recta: 56→	7	13	19	25	31	37	43	56
Recta: 55→	7	12	18	24	30	36	49	55
Recta: 54→	7	11	17	23	29	42	48	54
Recta: 53→	7	10	16	22	35	41	47	53
Recta: 52→	7	9	15	28	34	40	46	52
Recta: 51→	7	8	21	27	33	39	45	51
Recta: 50→	6	14	19	24	29	41	46	51
Recta: 49→	6	13	18	23	35	40	45	50
Recta: 48→	6	12	17	22	34	39	44	56
Recta: 47→	6	11	16	28	33	38	43	55
Recta: 46→	6	10	15	27	32	37	49	54
Recta: 45→	6	9	21	26	31	36	48	53
Recta: 44→	6	8	20	25	30	42	47	52
Recta: 43→	5	14	18	22	33	37	48	52
Recta: 42→	5	13	17	28	32	36	47	51
Recta: 41→	5	12	16	27	31	42	46	50
Recta: 40→	5	11	15	26	30	41	45	56
Recta: 39→	5	10	21	25	29	40	44	55
Recta: 38→	5	9	20	24	35	39	43	54
Recta: 37→	5	8	19	23	34	38	49	53
Recta: 36→	4	14	17	27	30	40	43	53
Recta: 35→	4	13	16	26	29	39	49	52
Recta: 34→	4	12	15	25	35	38	48	51
Recta: 33→	4	11	21	24	34	37	47	50
Recta: 32→	4	10	20	23	33	36	46	56
Recta: 31→	4	9	19	22	32	42	45	55
Recta: 30→	4	8	18	28	31	41	44	54
Recta: 29→	3	14	16	25	34	36	45	54
Recta: 28→	3	13	15	24	33	42	44	53
Recta: 27→	3	12	21	23	32	41	43	52
Recta: 26→	3	11	20	22	31	40	49	51
Recta: 25→	3	10	19	28	30	39	48	50
Recta: 24→	3	9	18	27	29	38	47	56
Recta: 23→	3	8	17	26	35	37	46	55
Recta: 22→	2	14	15	23	31	39	47	55
Recta: 21→	2	13	21	22	30	38	46	54
Recta: 20→	2	12	20	28	29	37	45	53
Recta: 19→	2	11	19	27	35	36	44	52
Recta: 18→	2	10	18	26	34	42	43	51
Recta: 17→	2	9	17	25	33	41	49	50
Recta: 16→	2	8	16	24	32	40	48	56
Recta: 15→	1	14	21	28	35	42	49	56
Recta: 14→	1	13	20	27	34	41	48	55
Recta: 13→	1	12	19	26	33	40	47	54
Recta: 12→	1	11	18	25	32	39	46	53
Recta: 11→	1	10	17	24	31	38	45	52
Recta: 10→	1	9	16	23	30	37	44	51
Recta: 9→	1	8	15	22	29	36	43	50
Recta: 8→	0	50	51	52	53	54	55	56
Recta: 7→	0	43	44	45	46	47	48	49
Recta: 6→	0	36	37	38	39	40	41	42
Recta: 5→	0	29	30	31	32	33	34	35
Recta: 4→	0	22	23	24	25	26	27	28
Recta: 3→	0	15	16	17	18	19	20	21
Recta: 2→	0	8	9	10	11	12	13	14
Recta: 1→	0	1	2	3	4	5	6	7

Cuadro 6: Rectas de un plano proyectivo de orden $n = 7$

C. Programa en Java para generar conjuntos con diferencia perfecta

```java
package dobble;
import java.util.ArrayList;
import java.util.List;
import java.util.Random;

public class dobble2 {
  public static void main(String[]args) {
      int n = 2; // Orden n del conjunto
      int k = (n*n)+n+1; // Mod k
      List<Integer> lista = new ArrayList<Integer>(n+1);
      List<Integer> contain = new ArrayList<Integer>(k);
      for(int i = 1; i < k; i++) {
          contain.add(i);
      }
      lista = comprobacion(random(n,k-1),contain,n,k);
      System.out.println("El conjunto con diferencia perfecta de orden "+n+" es "+lista); // Conjunto con diferencia perfecta

      List<List> planoCiclico = new ArrayList<List>(k);
      planoCiclico.add(lista);

      for(int x = 0; x < k-1; x++) {
      List<Integer> lista1 = new ArrayList<Integer>(n+1);
          for(int y = 0; y < n+1; y++) {
      lista1.add((lista.get(y) + (k-1) - x) % k);
      }
      planoCiclico.add(lista1);
      }
      System.out.print("El plano c\'iclico asociado al conjunto con diferencia perfecta de orden "+n+ " es: "+"\n"+planoCiclico);
      }

      public static List<Integer> random(int n, int k){
          List<Integer> lista1 = new ArrayList<Integer>(n+1);
          lista1.add(0);
          lista1.add(1);
          for(int i = 0; i < (n-1); i++) {
          Random aleatorio = new Random();
          int x = aleatorio.nextInt(k); // N\'umero random perteneciente a la clase del m\'odulo k
          lista1.add(x);
          }
        return lista1;
  }
      public static List<Integer> comprobacion(List<Integer> random1, List<Integer> contain, int n, int k) {
```

```
            int numero = 0;
            for(int i = 0; i < (n+1); i++) {
                for(int x = 0; x < (n+1); x++) {
                  if(i != x) {
                      numero = random1.get(i) - random1.get(x);
                      if(numero < 0) {
                          numero = numero + k;
                      }
                      else {
                          numero = numero % k;
                      }

                      if(contain.contains(numero)) {
                          for(int l = 0; l < contain.size(); l++) {
                              if(contain.get(l).equals(numero))
                         contain.remove(l);
                          }
                  }
                      else {
                          List<Integer> contain3 = new ArrayList<Integer
                             >(k);
                            for(int p = 1; p < k; p++)
                                contain3.add(p);

                          random1 = comprobacion(random(n,k-1), contain3
                             , n, k);
                      }
                  }
            }
            }
            return random1;
        }
}
```

D. Plano cíclico de orden siete

	j																																																							
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
i	0	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
	1	0	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
	3	2	1	0	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14
	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33
	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37
	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45	44
	52	51	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	56	55	54	53

E. Nombres de las figuras que aparecen en las cartas

Nombre figura	Punto asignado
Candado	0
Árbol	1
Margarita	2
Manzana	3
Copo de nieve	4
Martillo	5
Luna	6
Fantasma	7
Punto de mira	8
Reloj	9
Cebra	10
Interrogación	11
Labio	12
Mano con ojo	13
Delfín	14
Ying-Yang	15
Hoja de arce	16
Cubo de hielo	17
Bacteria verde	18
Gingermann	19
Splash yellow	20
Vela	21
Lápiz	22
Tortuga	23
Bombilla	24
Queso	25
Corazón	26
Payaso	27
Mariquita	28
Dinosaurio	29
Caballo	30
Ancla	31
Bomba	32
Zanahoria	33
Biberón	34
Exclamación	35
Gato	36
Gota de agua	37

Nombre figura	Punto asignado
Dirección prohibida	38
Iglú	39
Fuego	40
Pollito	41
Coche	42
Telaraña	43
Perro	44
Dragón	45
Tijera	46
Rayo	47
Cactus	48
Ojo	49
Calavera	50
Clave de Sol	51
Muñeco de nieve	52
Gafas	53
Trébol	54
Araña	55
Llave	56

F. Cartas que faltan en el juego de Asmodée

Figura 1: Carta número 8 que falta en el juego de Asmodée

Figura 2: Carta número 41 que falta en el juego de Asmodée

G. Cartas de un Dobble con notas musicales

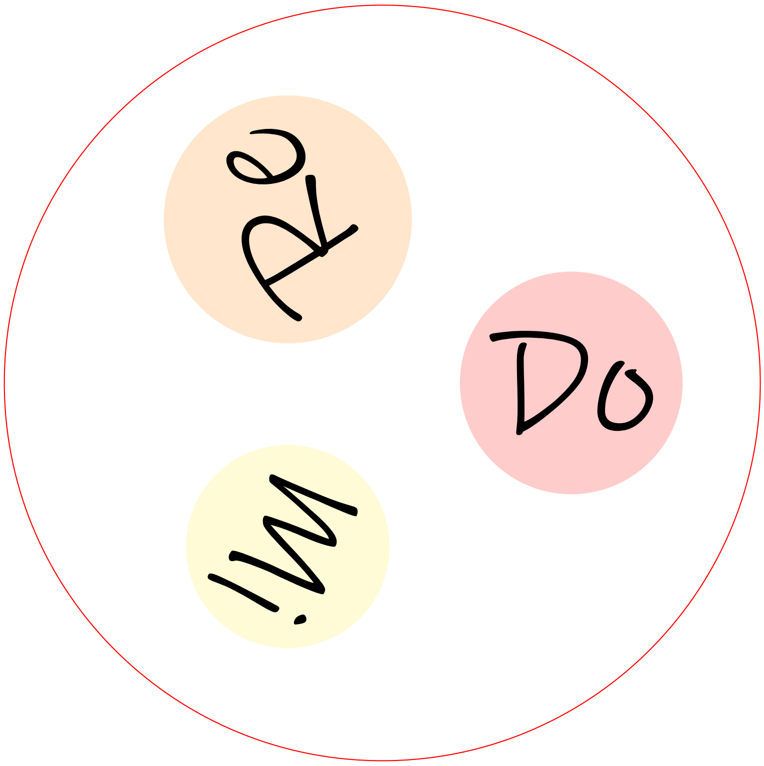


Figura 3: Primera carta del Dobble musical

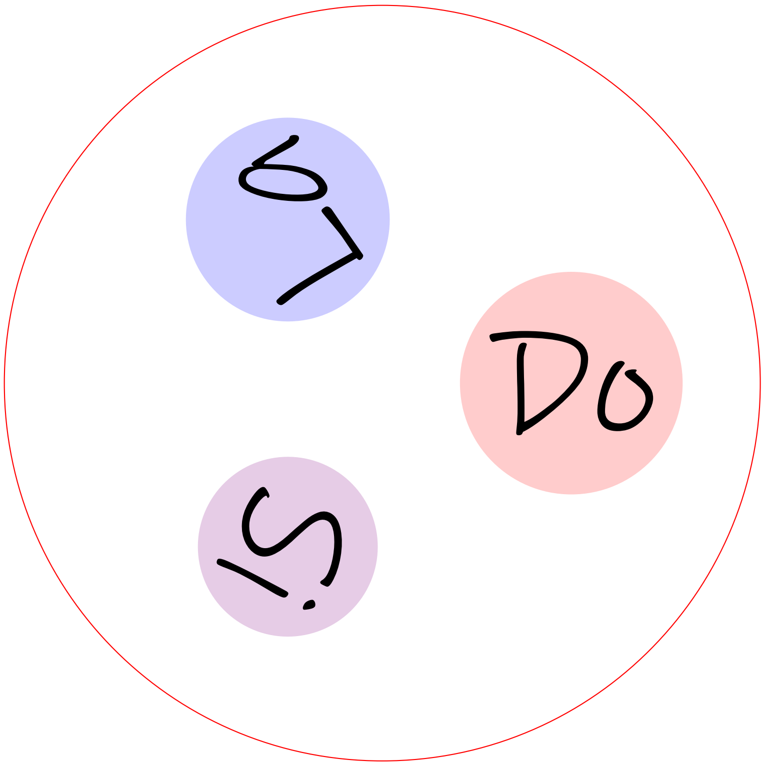


Figura 4: Segunda carta del Dobble musical

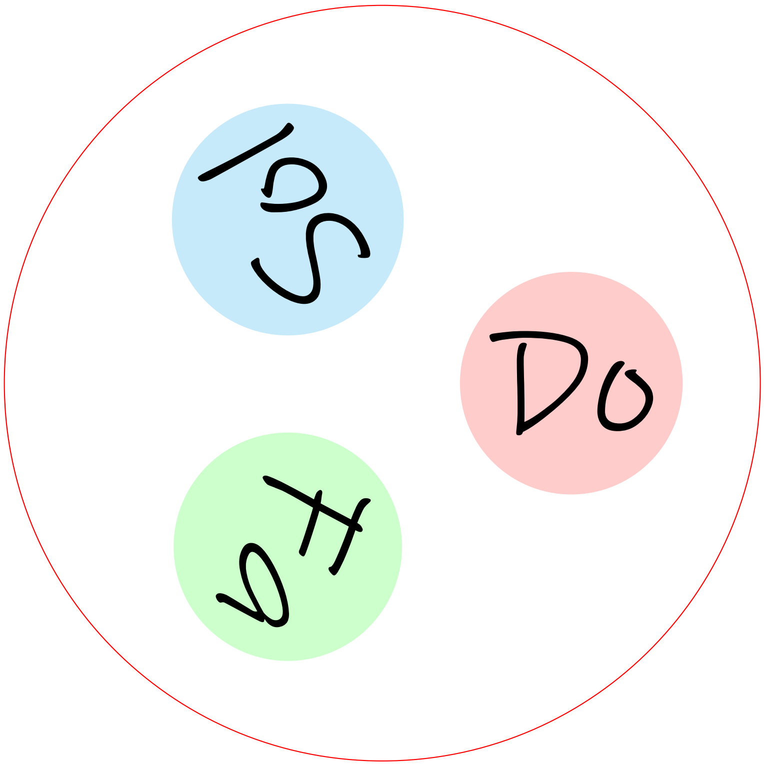


Figura 5: Tercera carta del Dobble musical

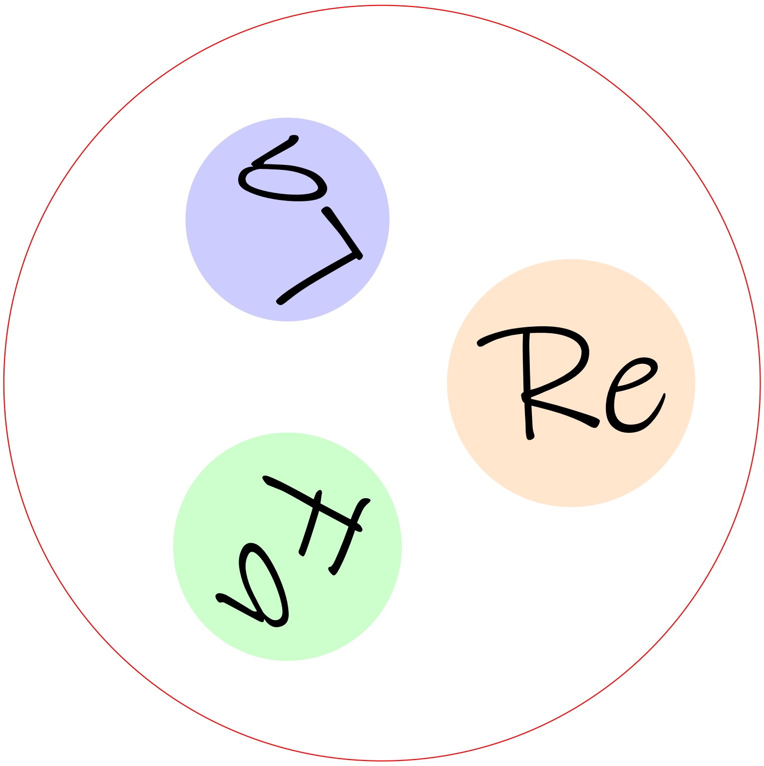


Figura 6: Cuarta carta del Dobble musical

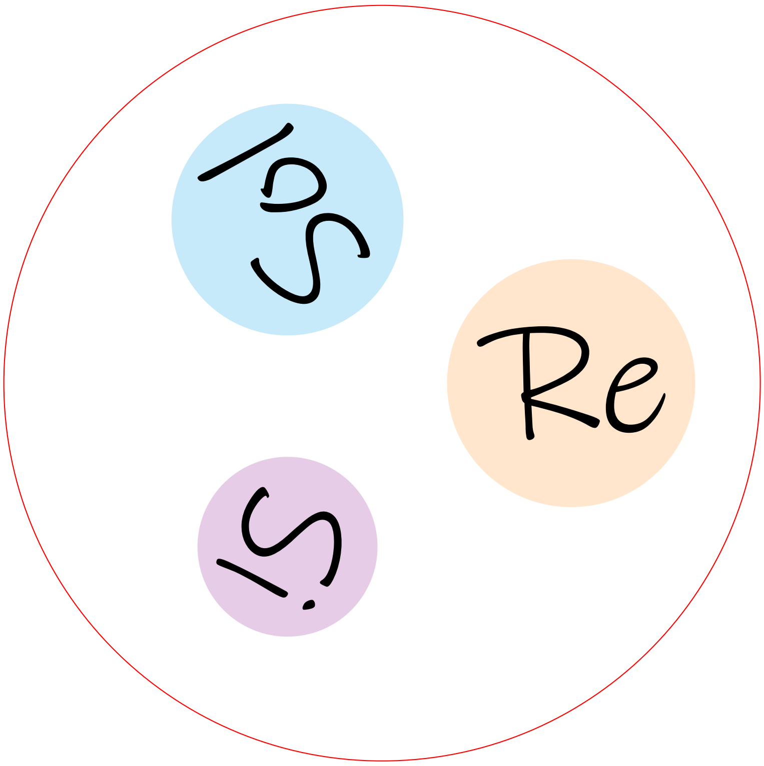


Figura 7: Quinta carta del Dobble musical

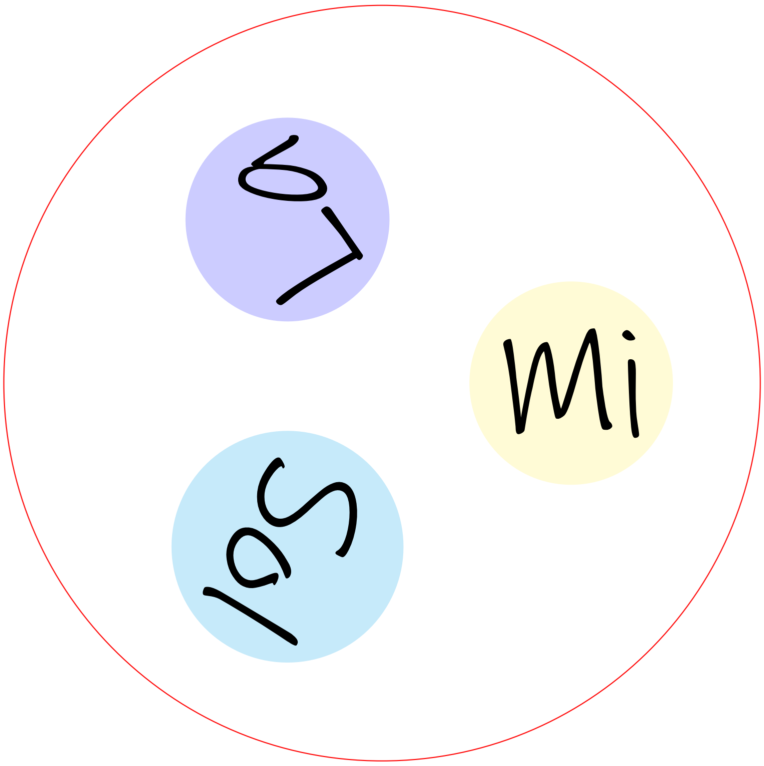


Figura 8: Sexta carta del Dobble musical

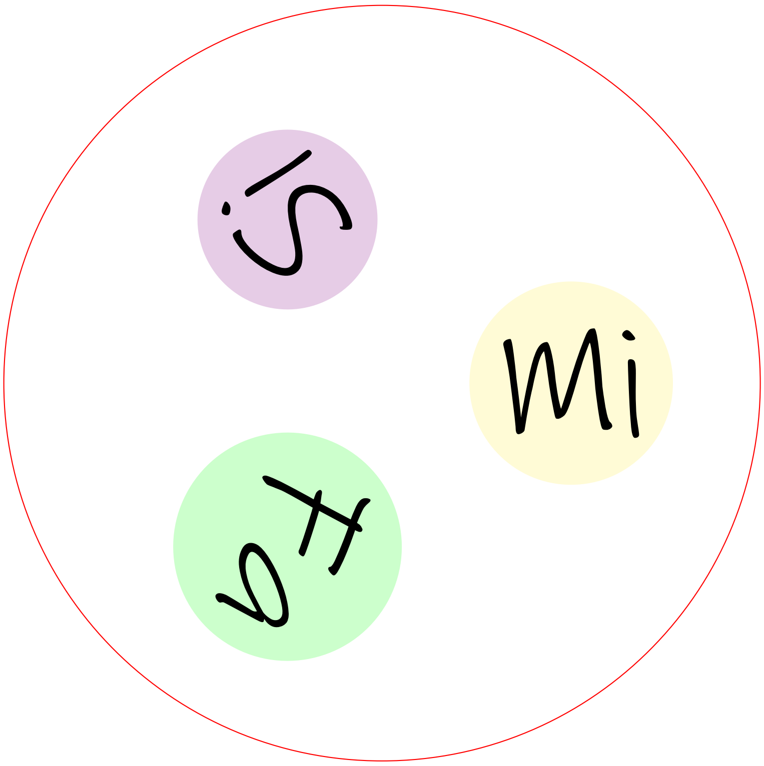


Figura 9: Séptima carta del Dobble musical

H. Cartas de un Dobble con motivos de animales

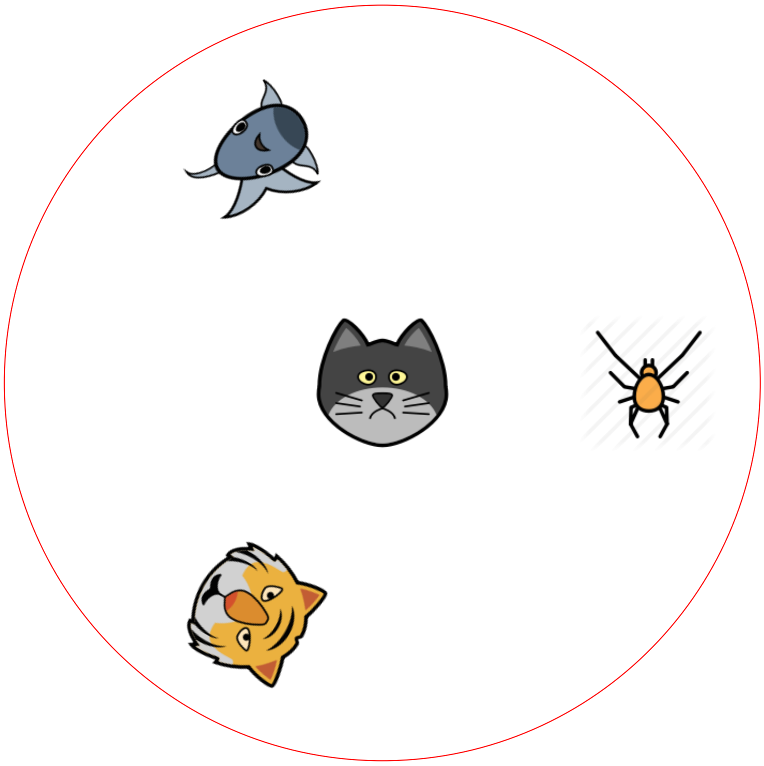


Figura 10: Carta 1

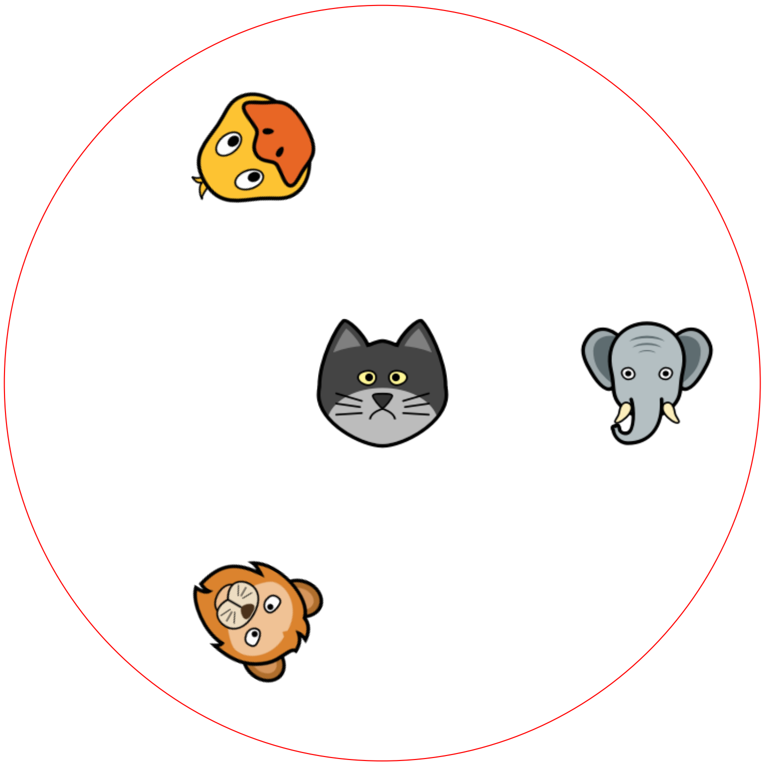


Figura 11: Carta 2

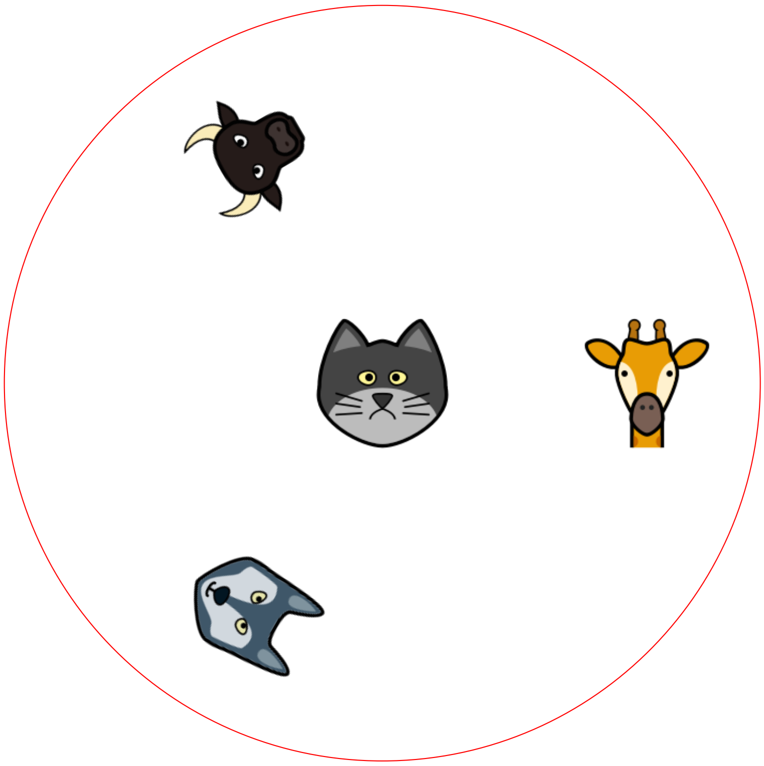


Figura 12: Carta 3

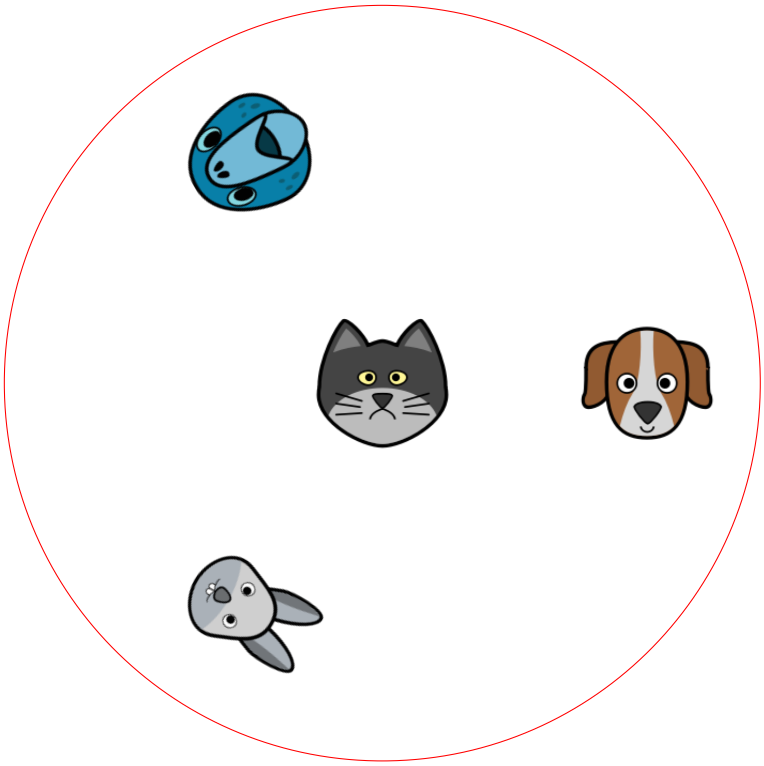


Figura 13: Carta 4

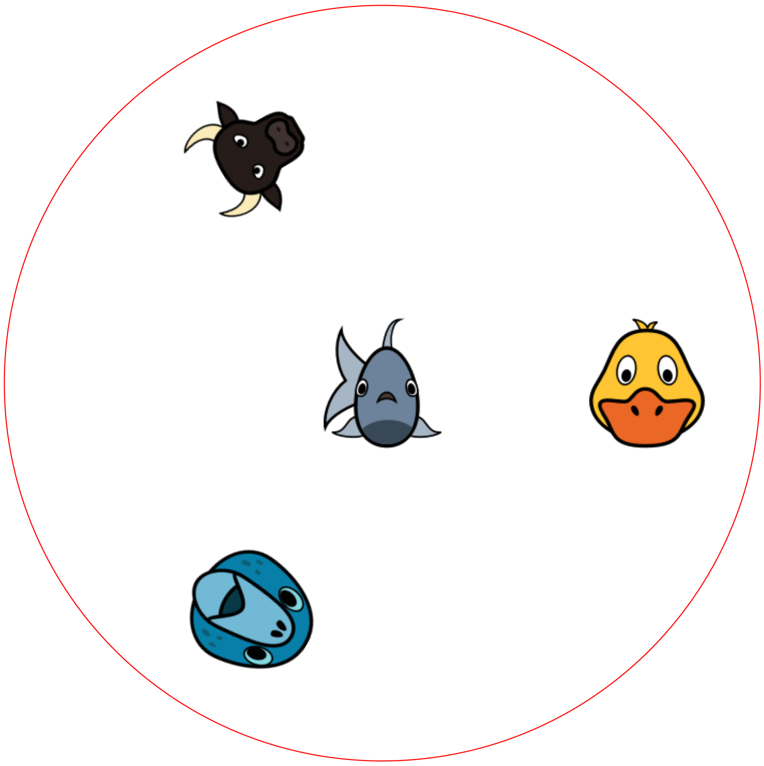


Figura 14: Carta 5

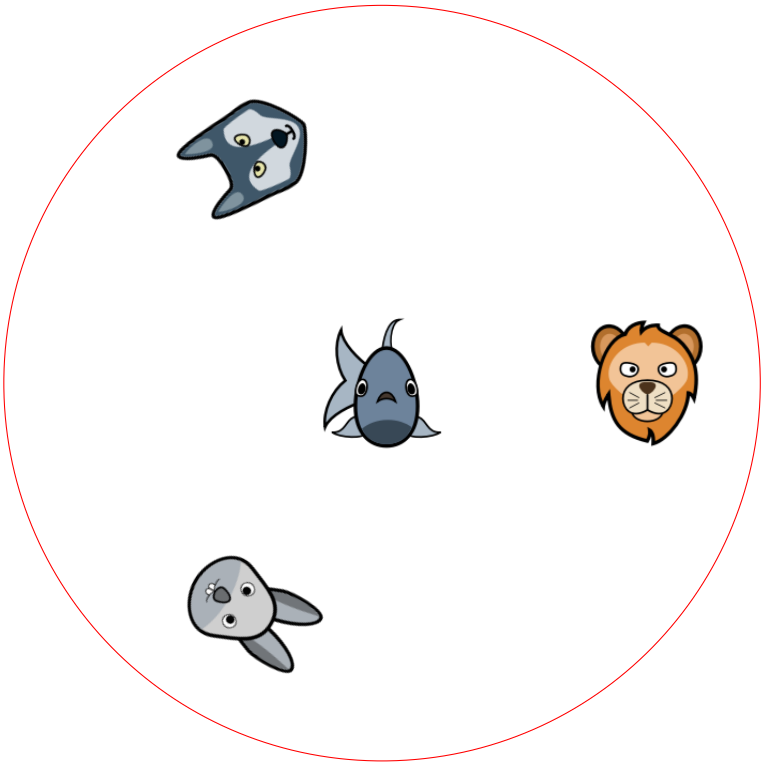


Figura 15: Carta 6

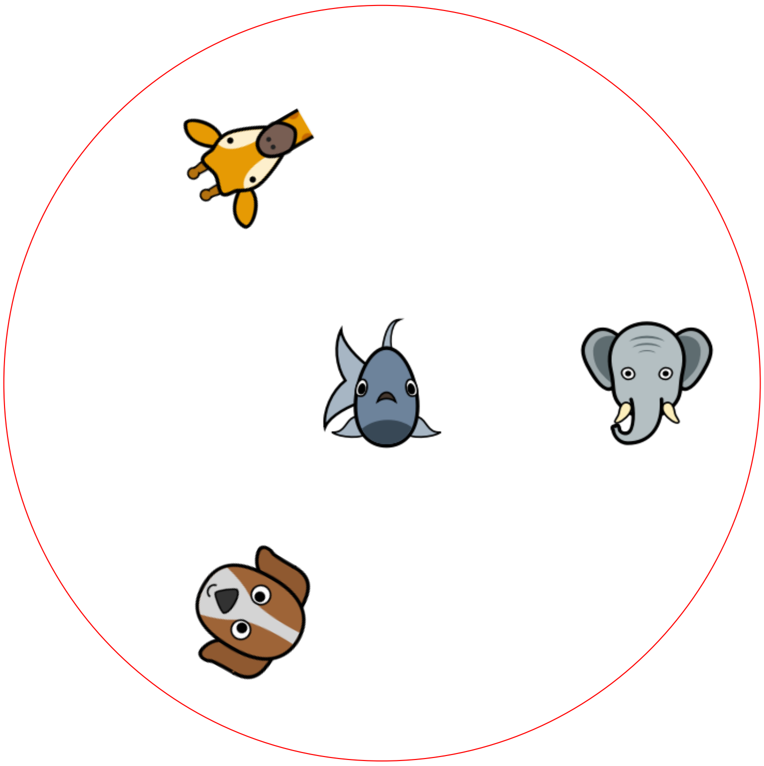


Figura 16: Carta 7

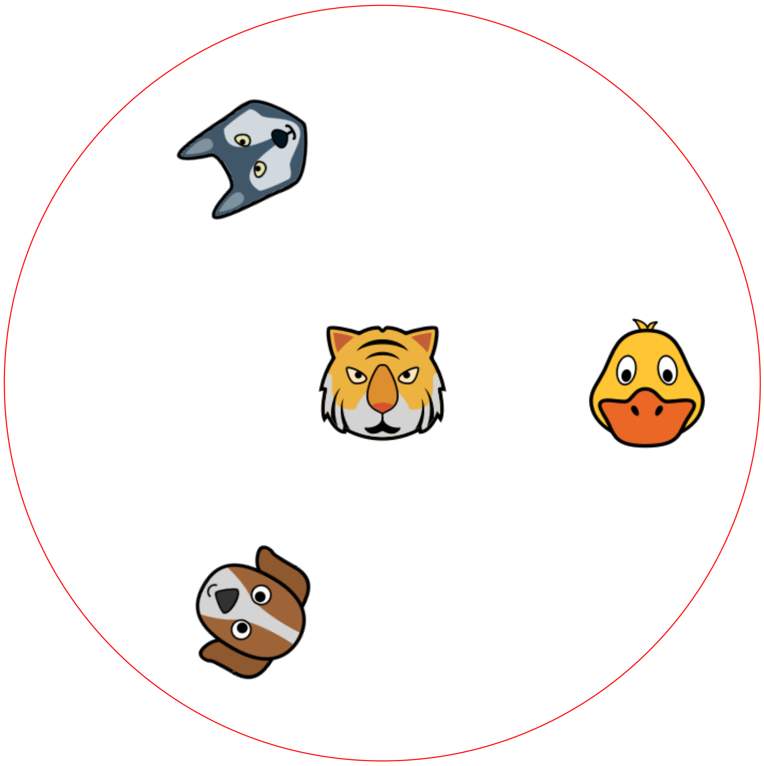


Figura 17: Carta 8

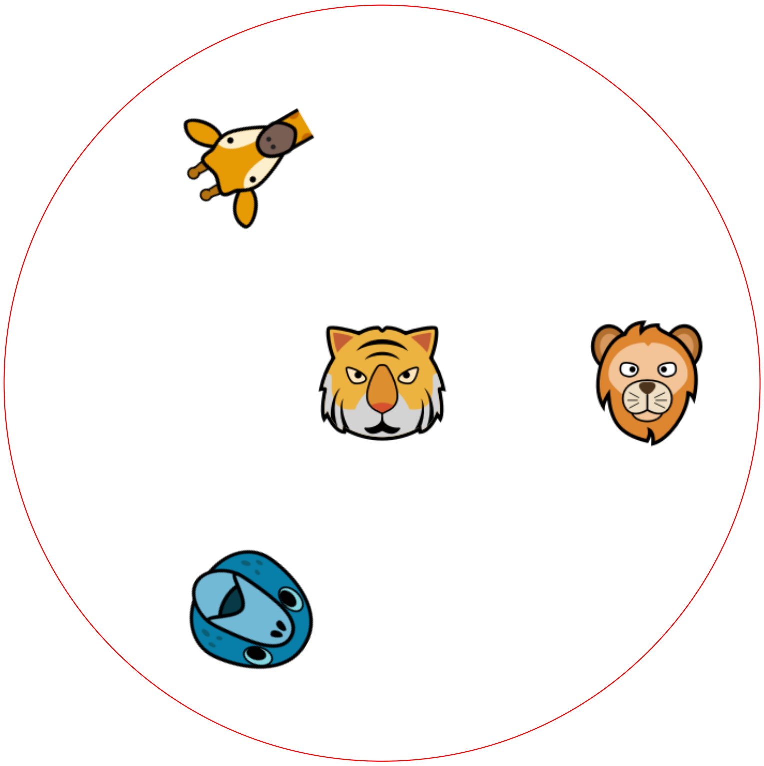


Figura 18: Carta 9

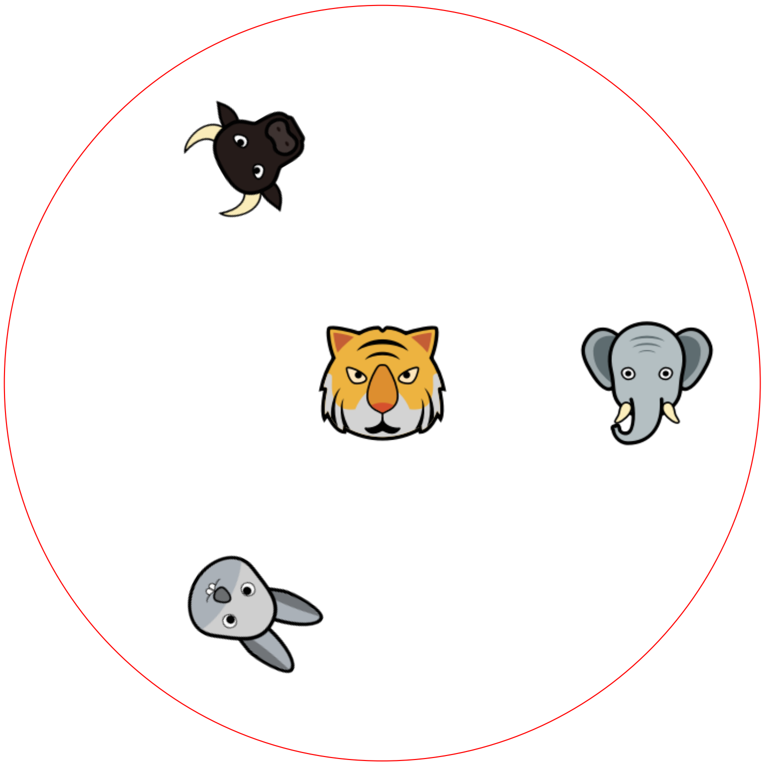


Figura 19: Carta 10

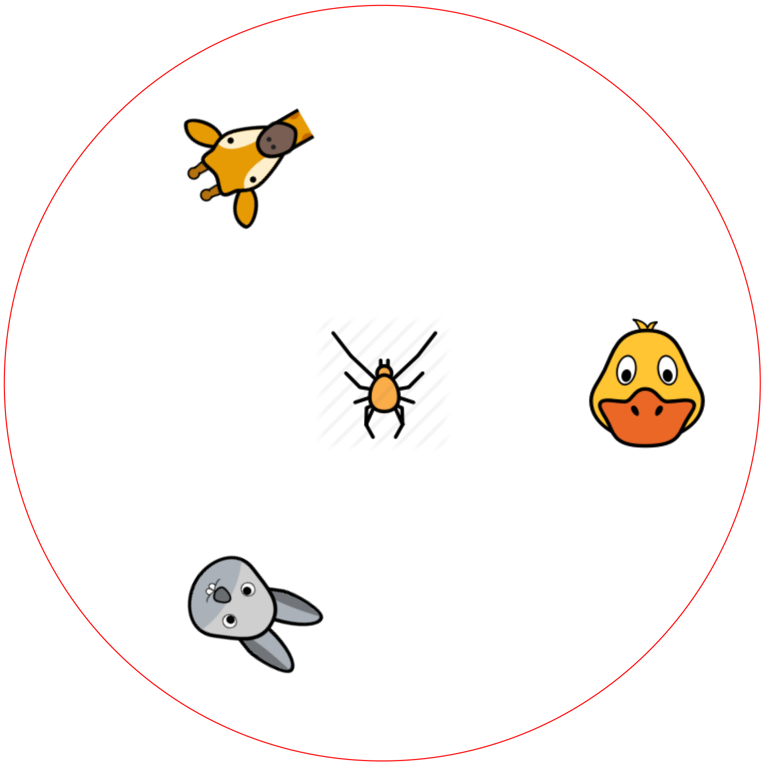


Figura 20: Carta 11

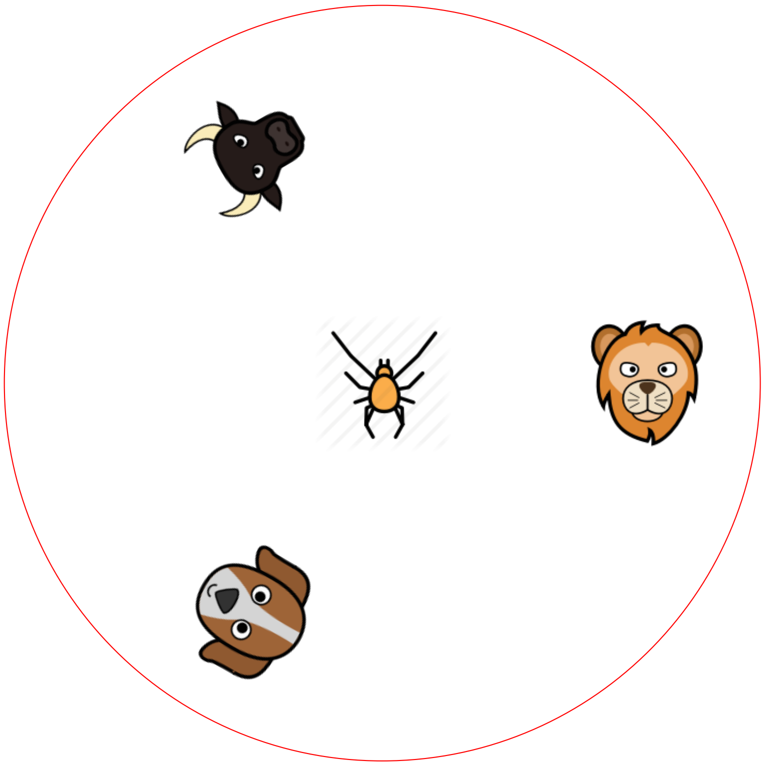


Figura 21: Carta 12

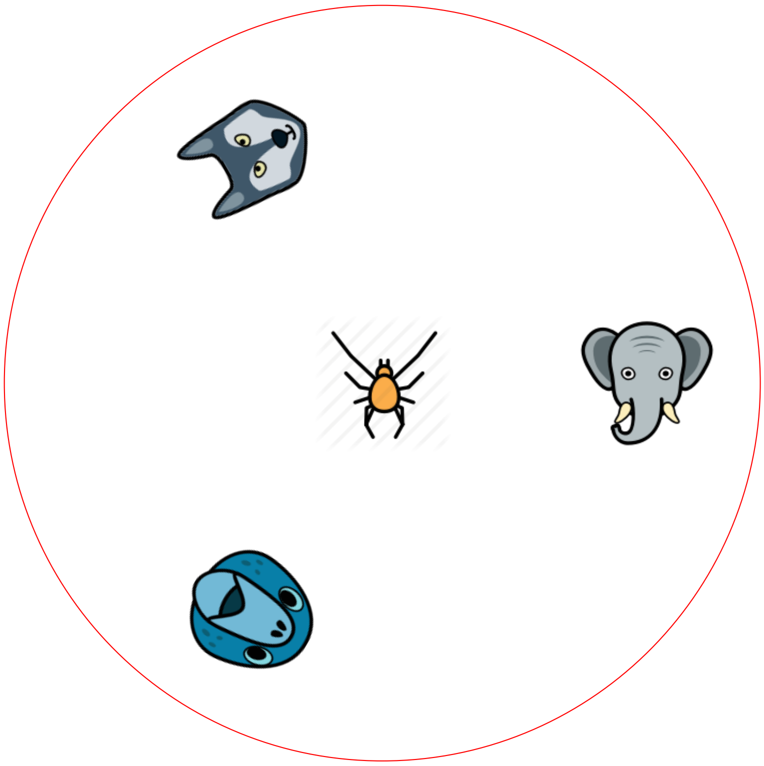


Figura 22: Carta 13

I. Cartas de un Dobble con motivos de comida

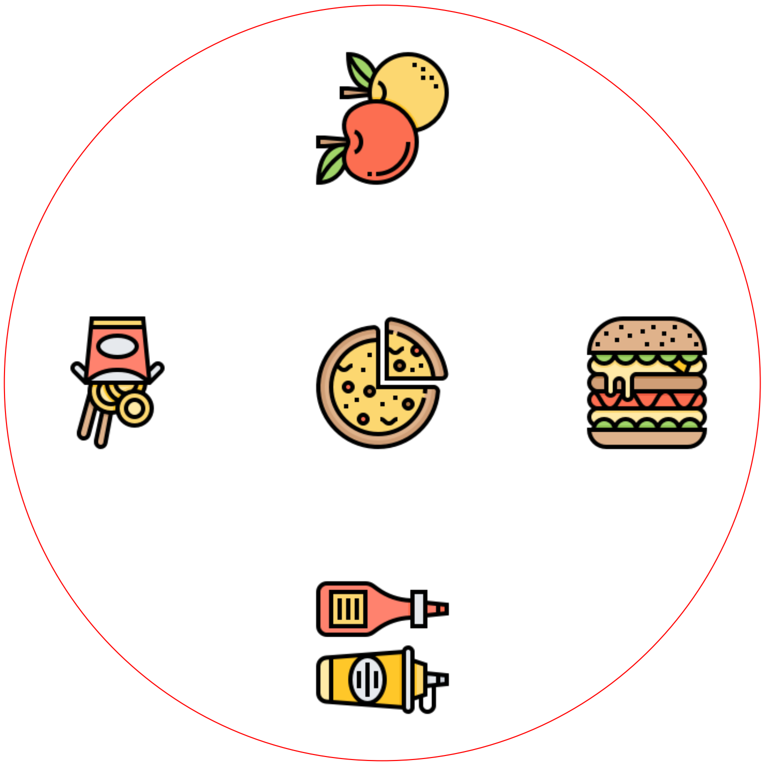


Figura 23: Carta 1

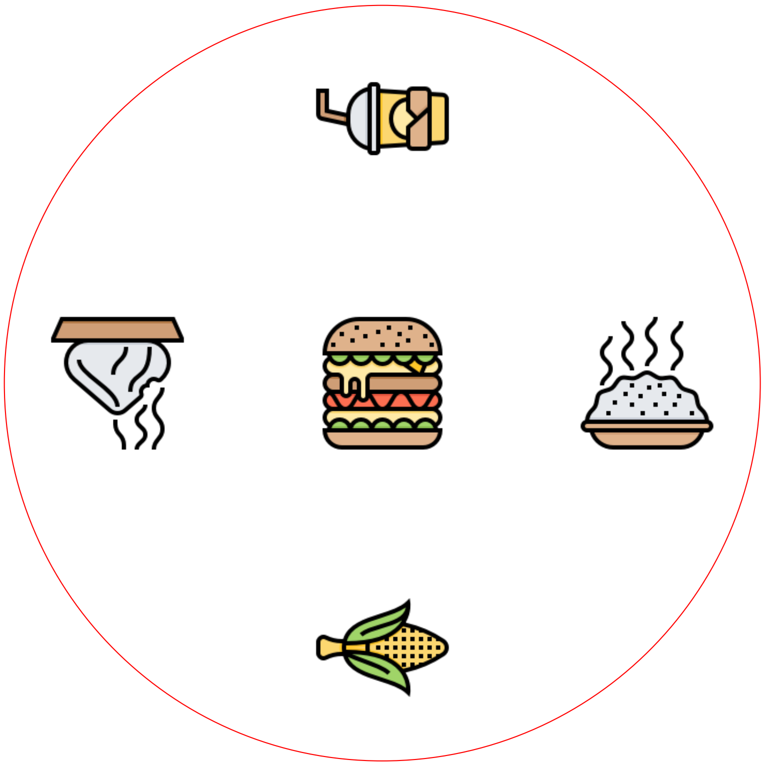


Figura 24: Carta 2

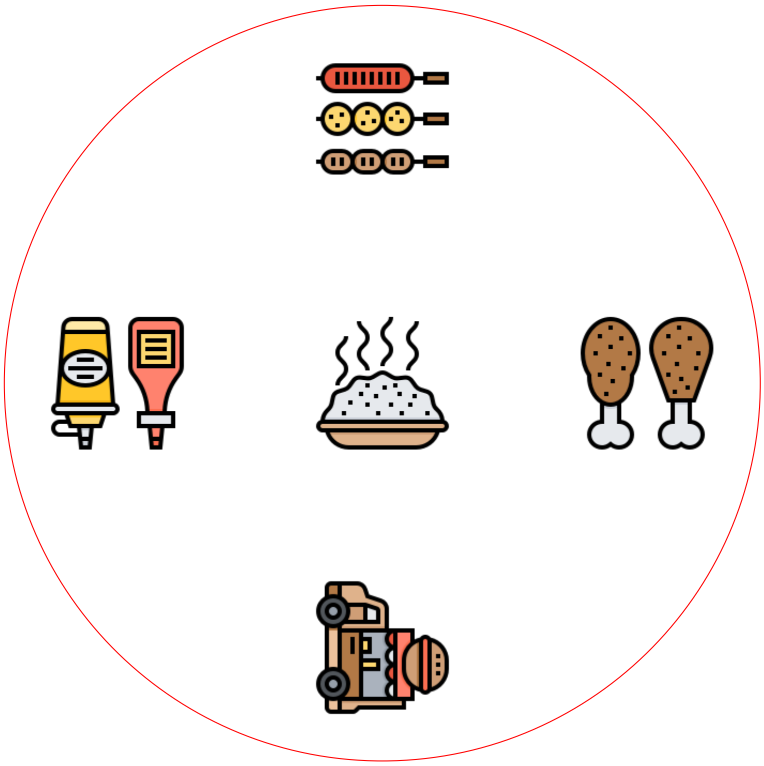


Figura 25: Carta 3

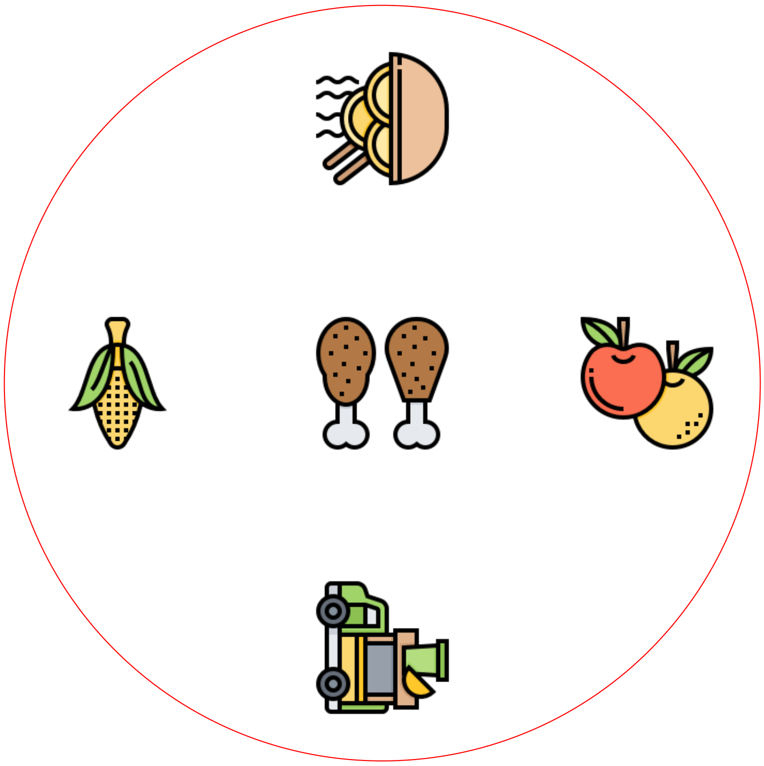


Figura 26: Carta 4

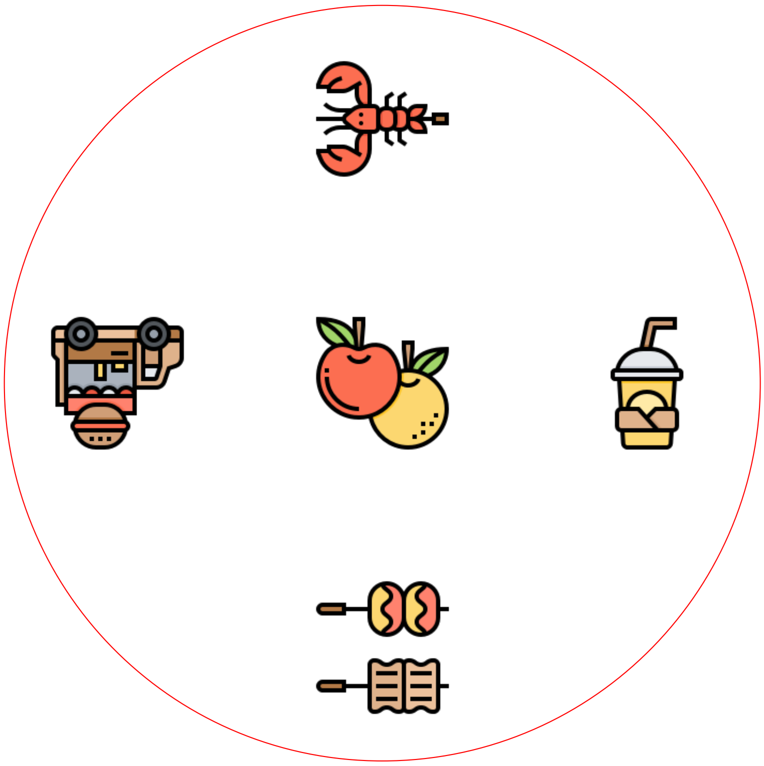


Figura 27: Carta 5

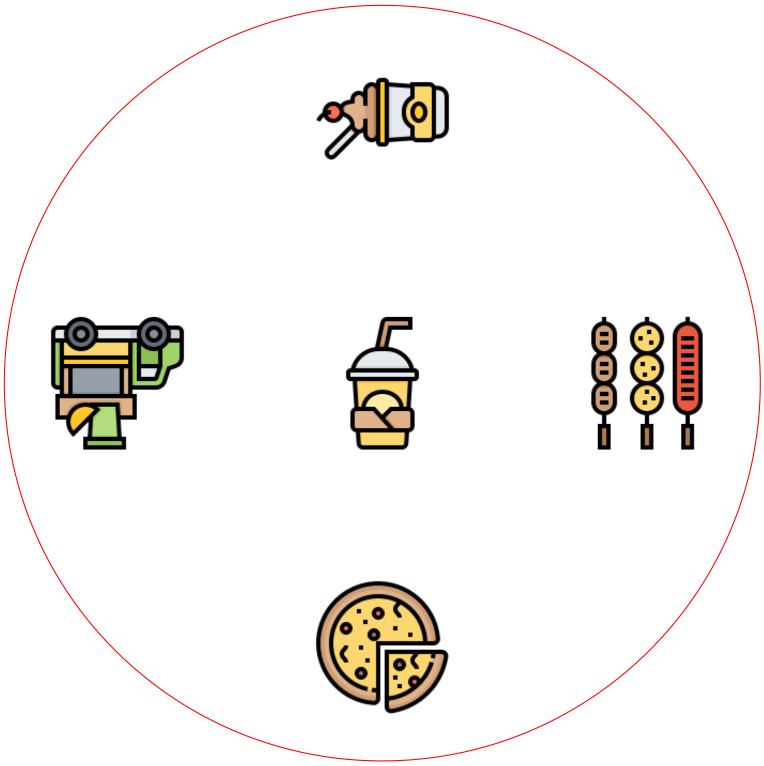


Figura 28: Carta 6

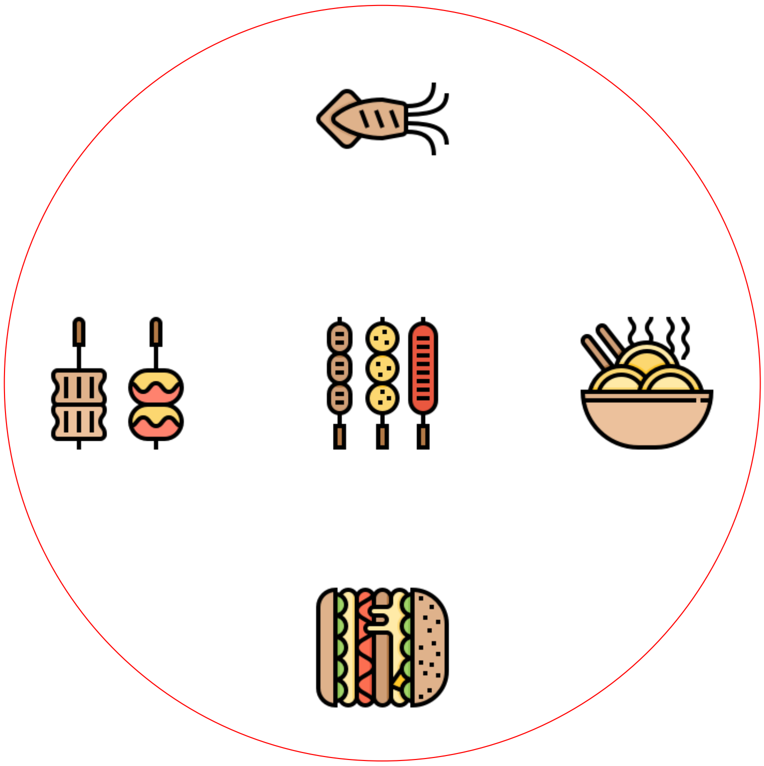


Figura 29: Carta 7

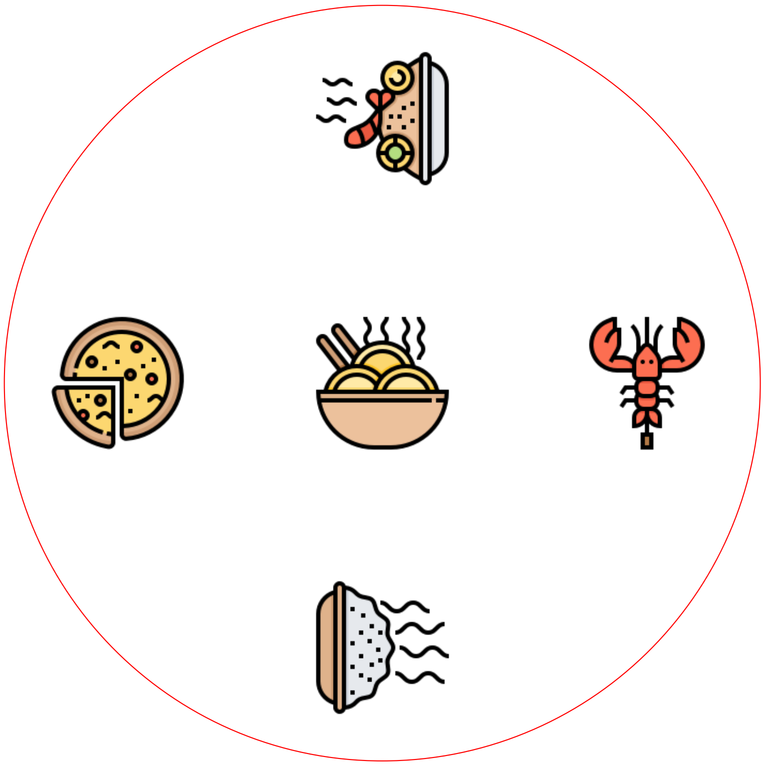


Figura 30: Carta 8

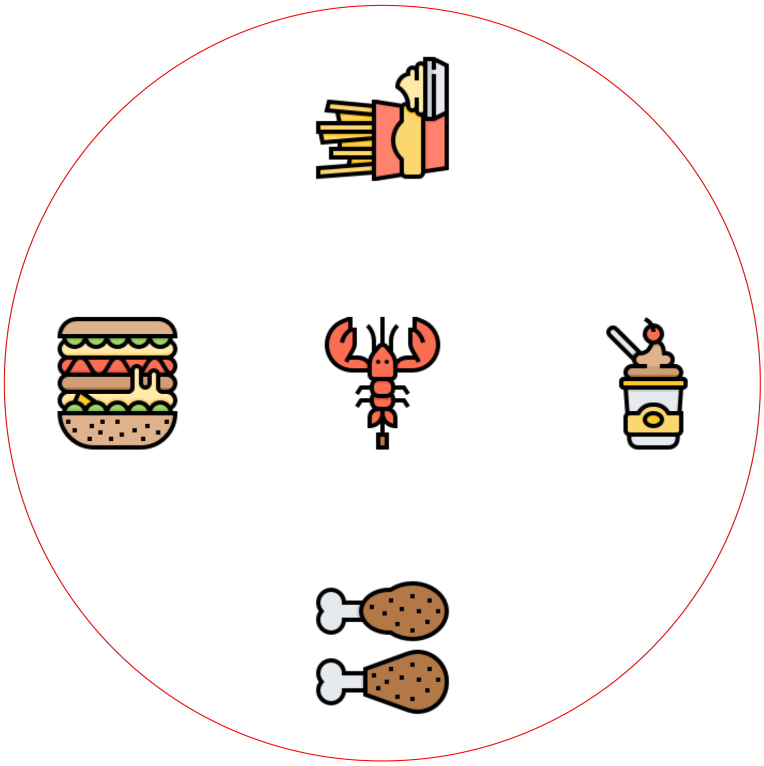


Figura 31: Carta 9

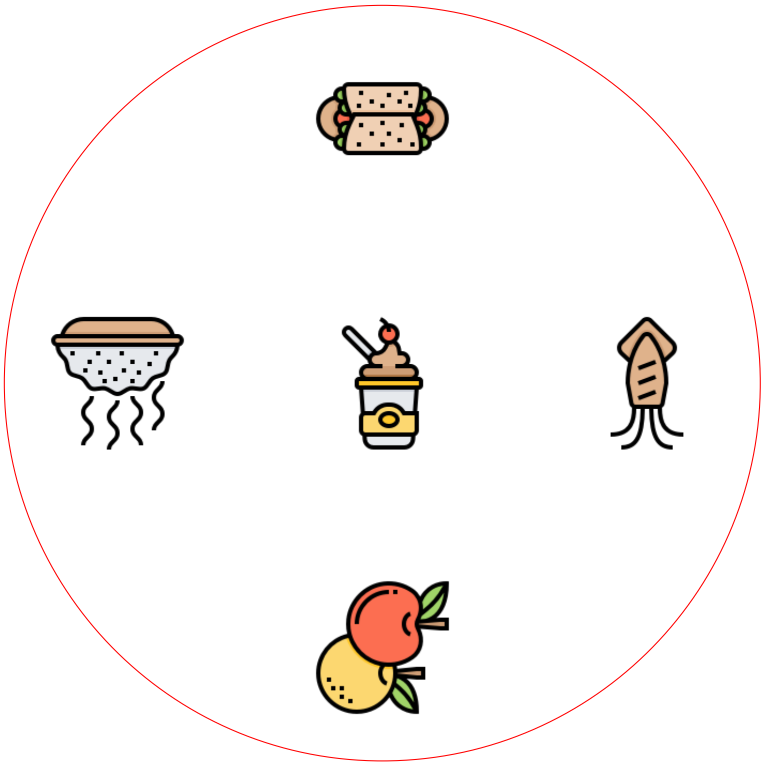


Figura 32: Carta 10

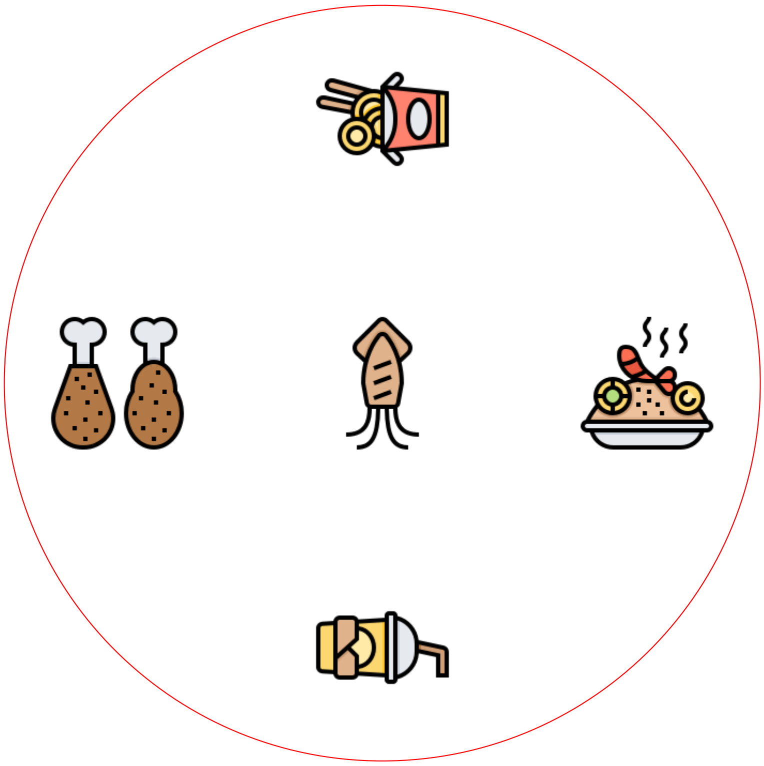


Figura 33: Carta 11

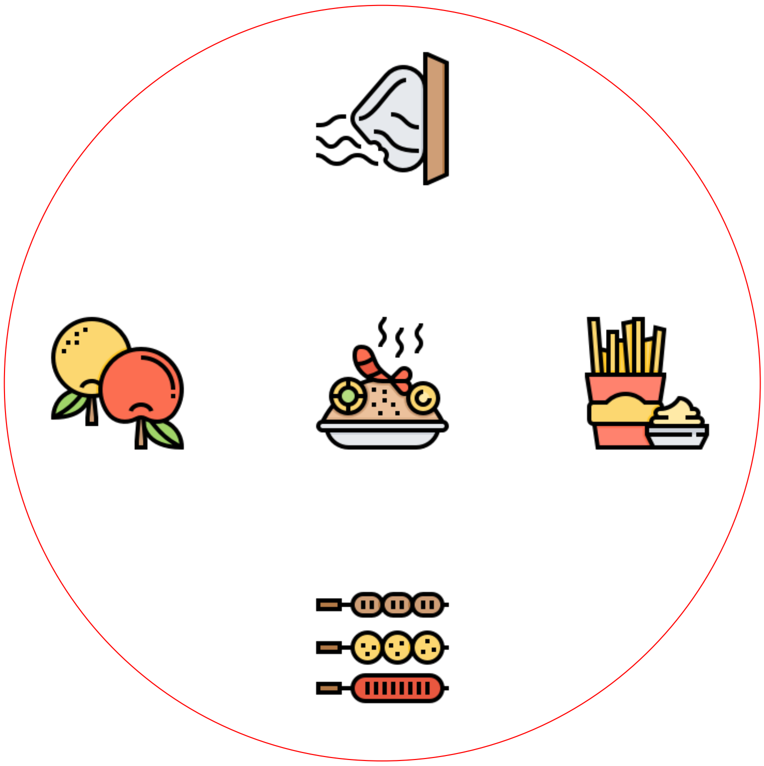


Figura 34: Carta 12

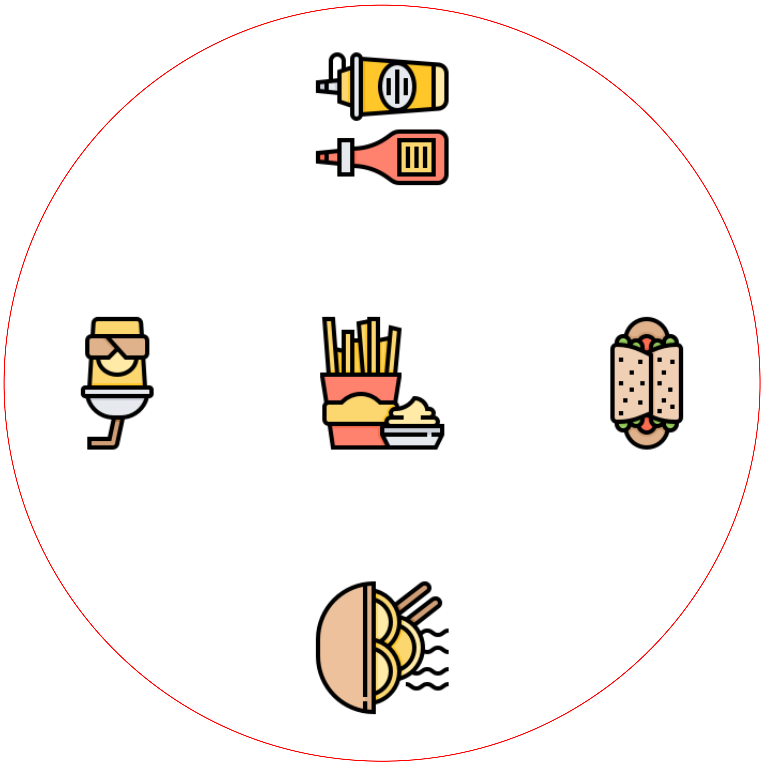


Figura 35: Carta 13

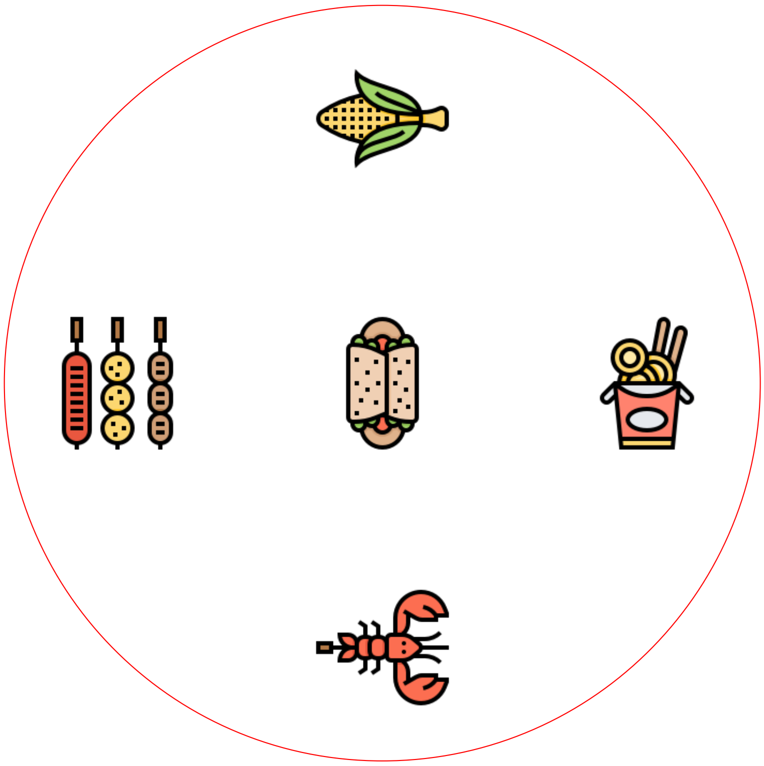


Figura 36: Carta 14

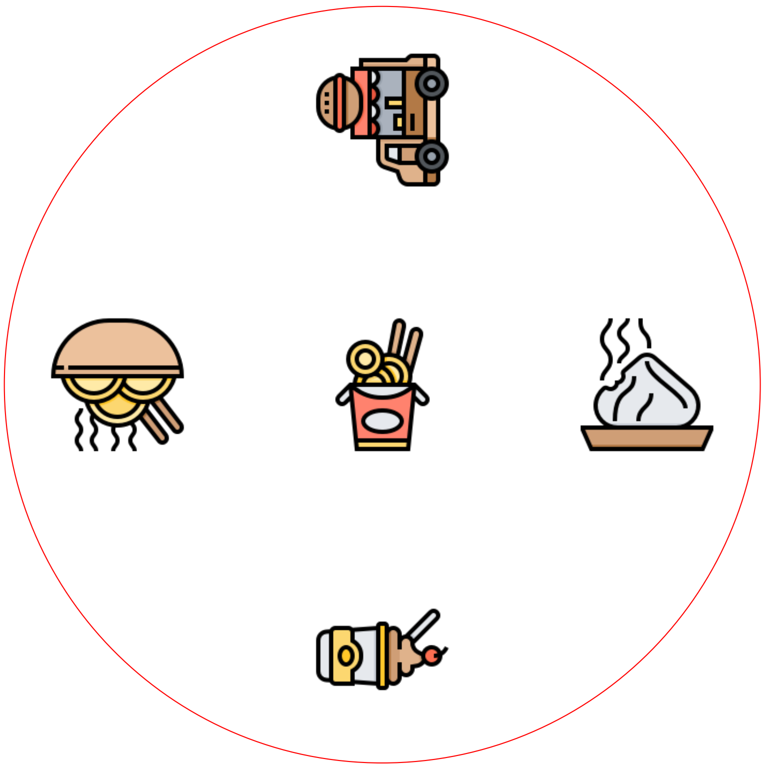


Figura 37: Carta 15

Figura 38: Carta 16

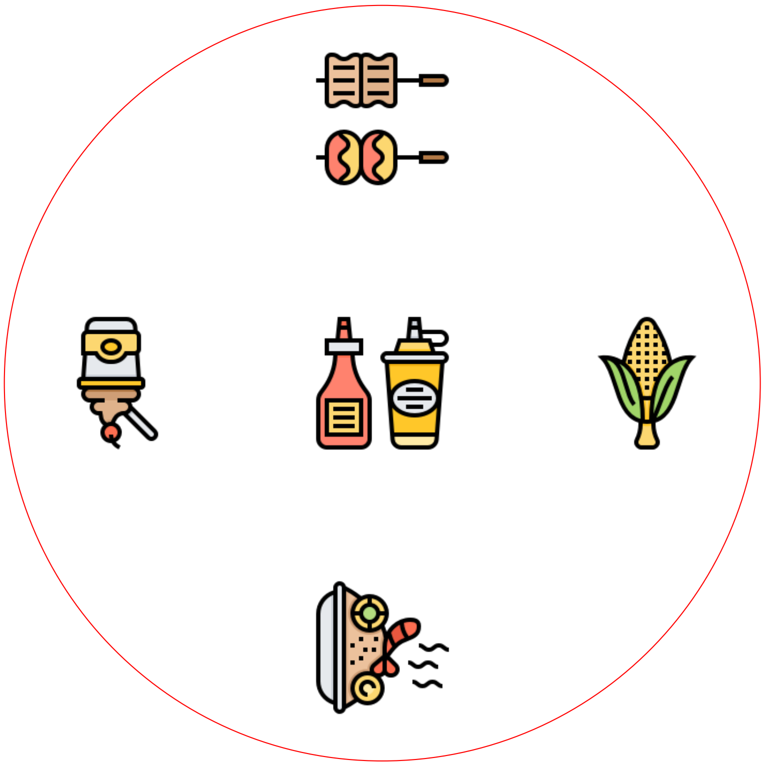


Figura 39: Carta 17

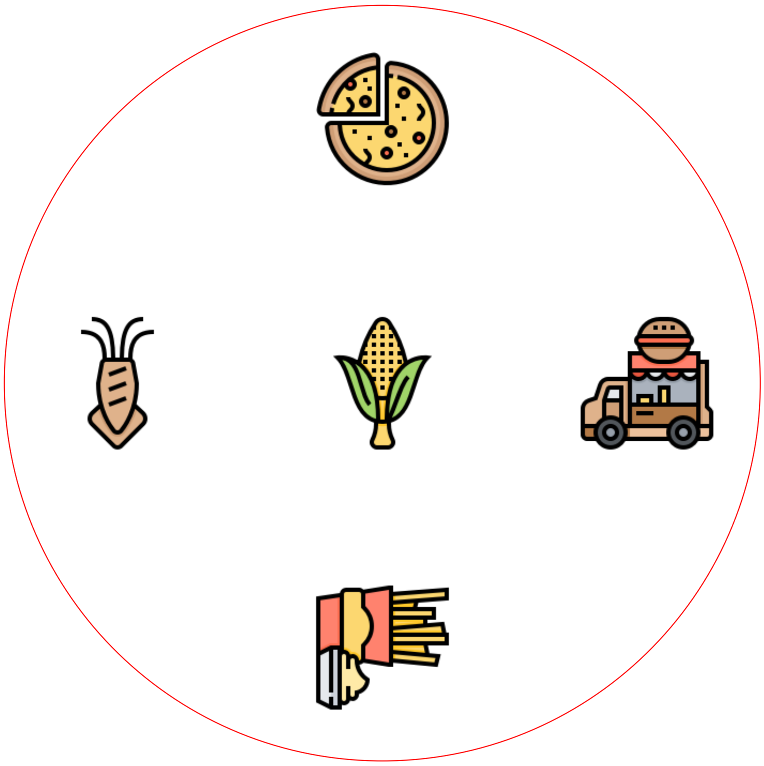


Figura 40: Carta 18

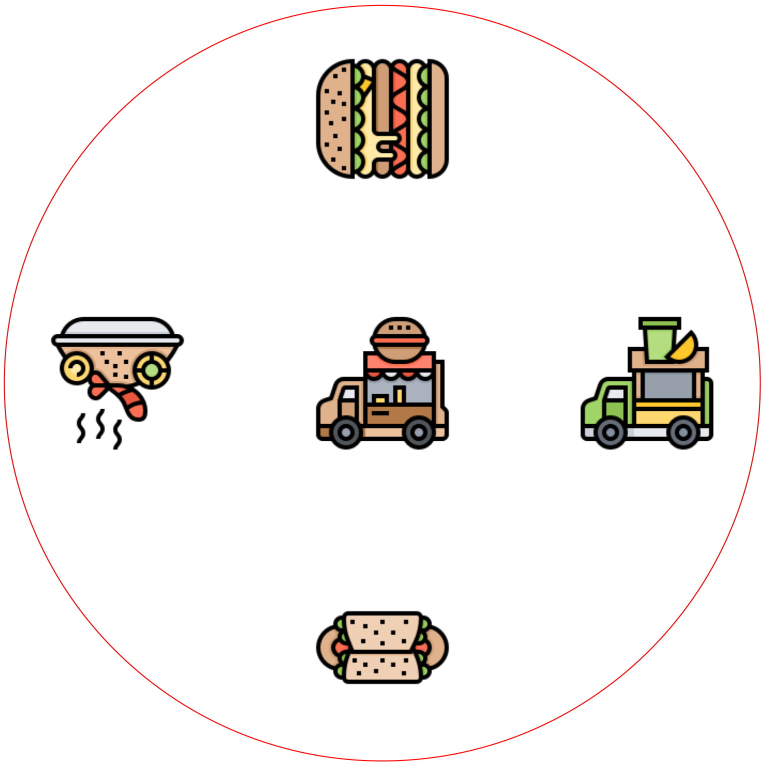


Figura 41: Carta 19

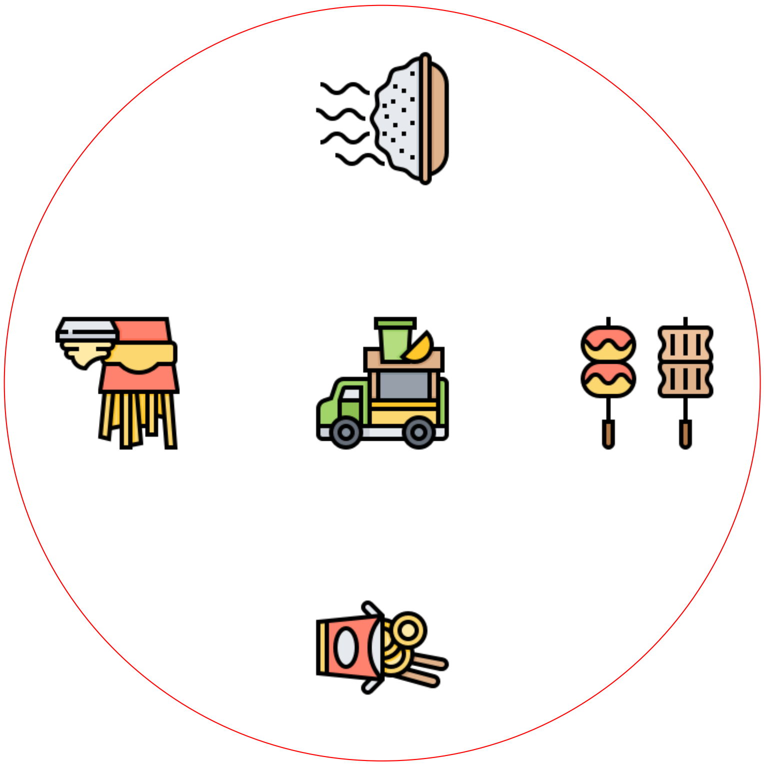


Figura 42: Carta 20

Figura 43: Carta 21

J. Cartas de un Dobble con motivos navideños

Figura 44: Carta 1

Figura 45: Carta 2

Figura 46: Carta 3

Figura 47: Carta 4

Figura 48: Carta 5

Figura 49: Carta 6

Figura 50: Carta 7

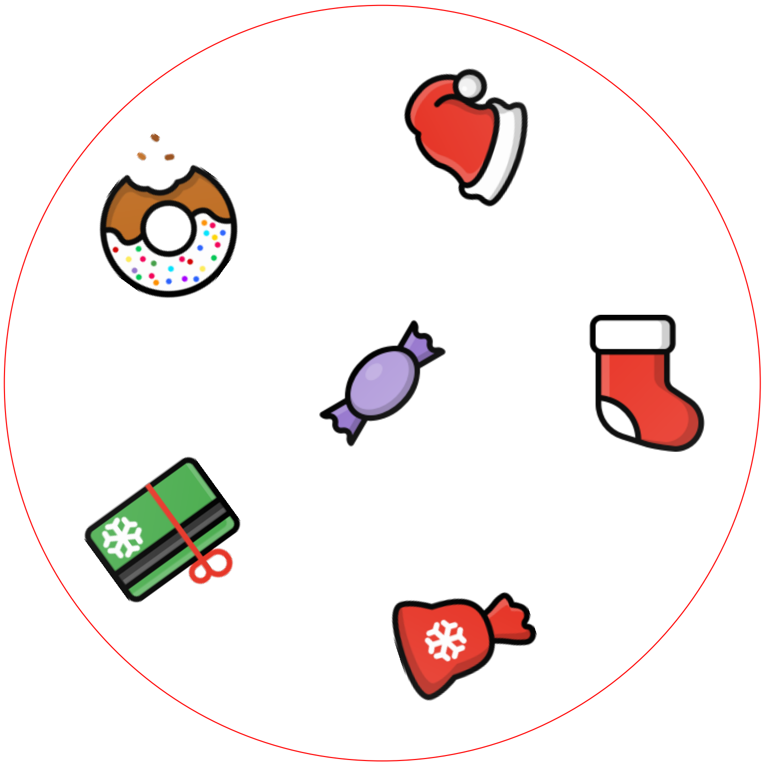


Figura 51: Carta 8

Figura 52: Carta 9

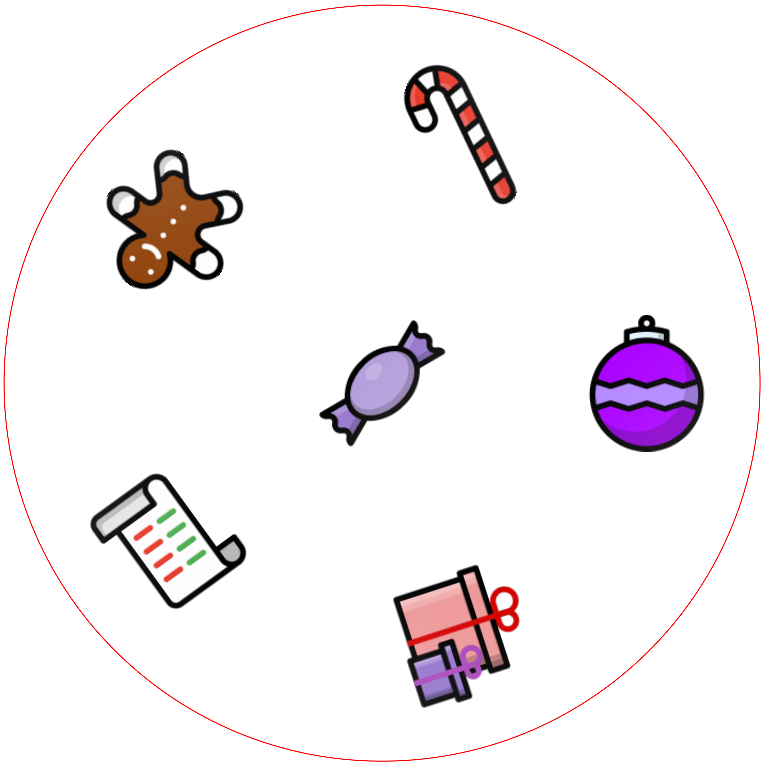


Figura 53: Carta 10

Figura 54: Carta 11

Figura 55: Carta 12

Figura 56: Carta 13

Figura 57: Carta 14

Figura 58: Carta 15

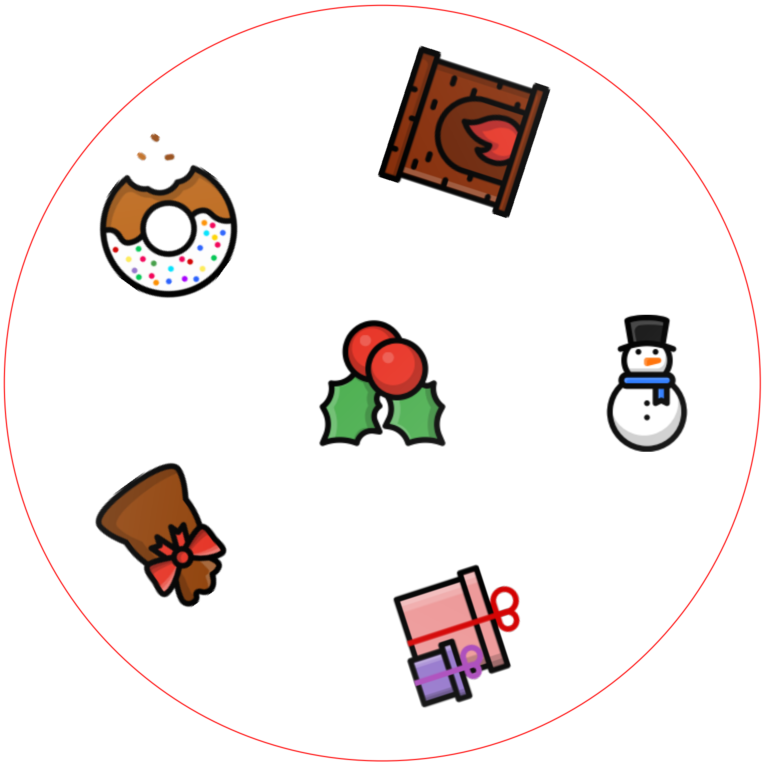


Figura 59: Carta 16

Figura 60: Carta 17

Figura 61: Carta 18

Figura 62: Carta 19

Figura 63: Carta 20

Figura 64: Carta 21

Figura 65: Carta 22

Figura 66: Carta 23

Figura 67: Carta 24

Figura 68: Carta 25

Figura 69: Carta 26

Figura 70: Carta 27

Figura 71: Carta 28

Figura 72: Carta 29

Figura 73: Carta 30

Figura 74: Carta 31

K. Cartas de un Dobble con banderas

Figura 75: Carta 1

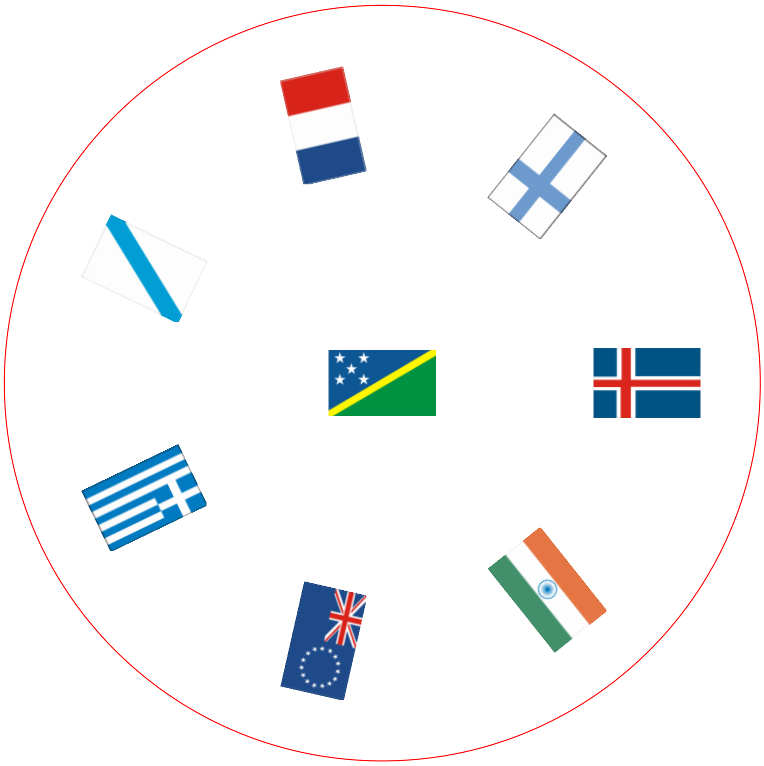


Figura 76: Carta 2

Figura 77: Carta 3

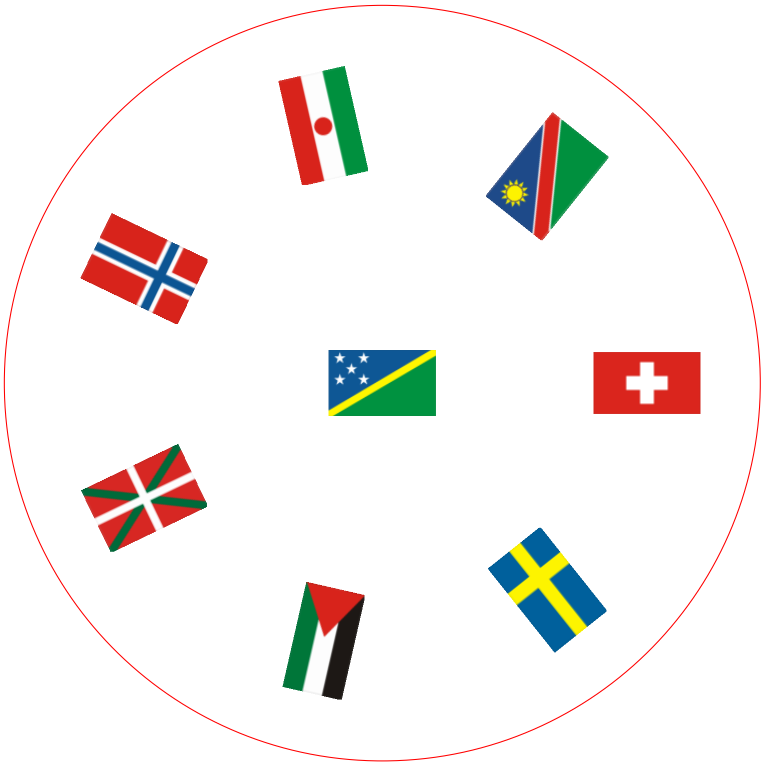


Figura 78: Carta 4

Figura 79: Carta 5

Figura 80: Carta 6

Figura 81: Carta 7

Figura 82: Carta 8

Figura 83: Carta 9

Figura 84: Carta 10

Figura 85: Carta 11

Figura 86: Carta 12

Figura 87: Carta 13

Figura 88: Carta 14

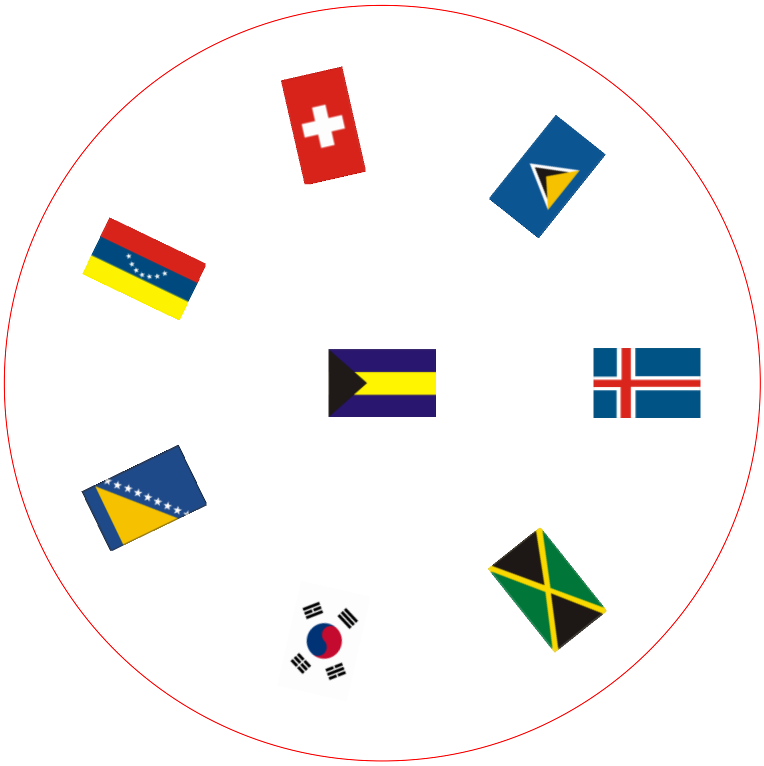


Figura 89: Carta 15

Figura 90: Carta 16

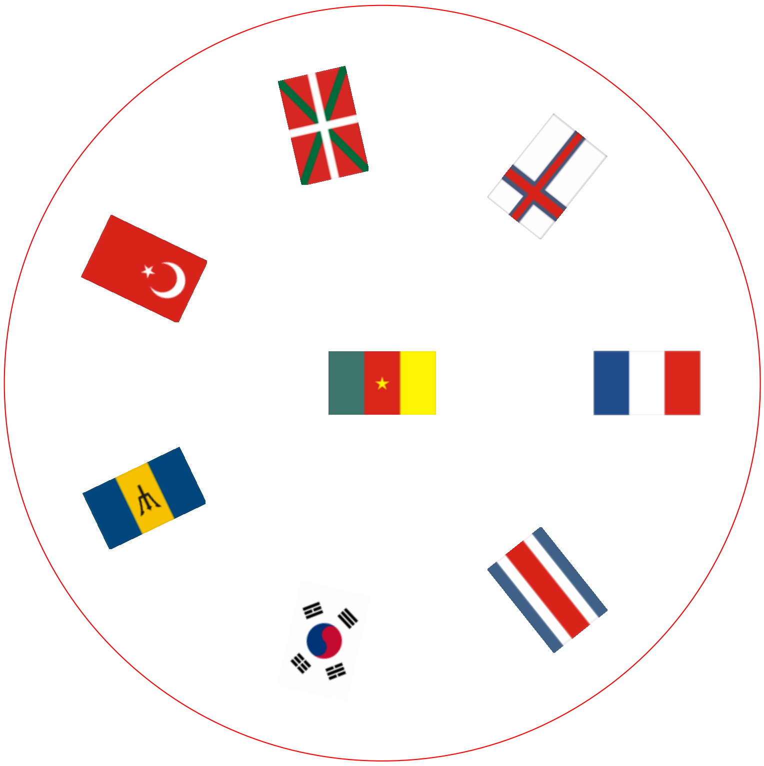


Figura 91: Carta 17

Figura 92: Carta 18

Figura 93: Carta 19

Figura 94: Carta 20

Figura 95: Carta 21

Figura 96: Carta 22

Figura 97: Carta 23

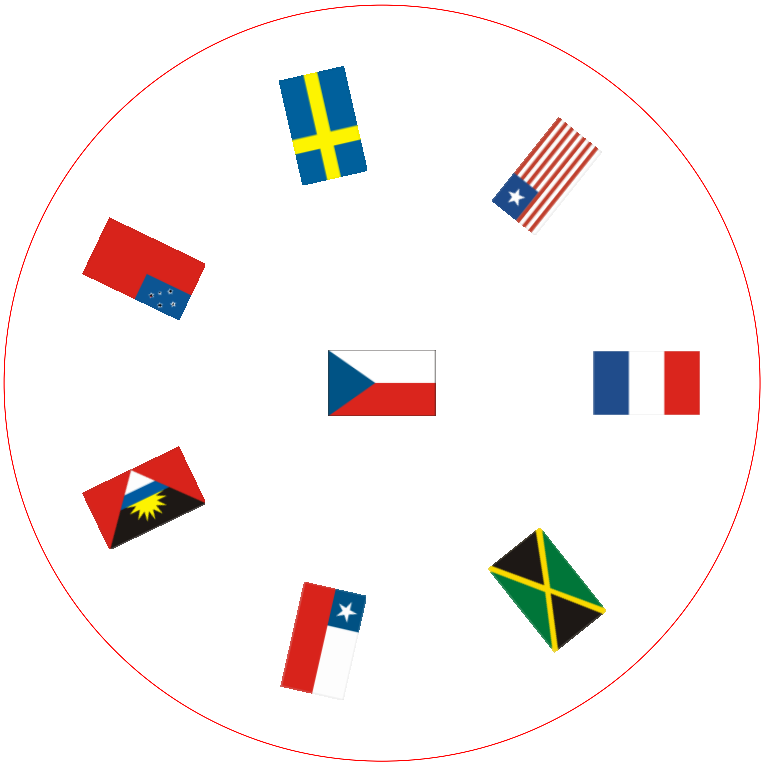


Figura 98: Carta 24

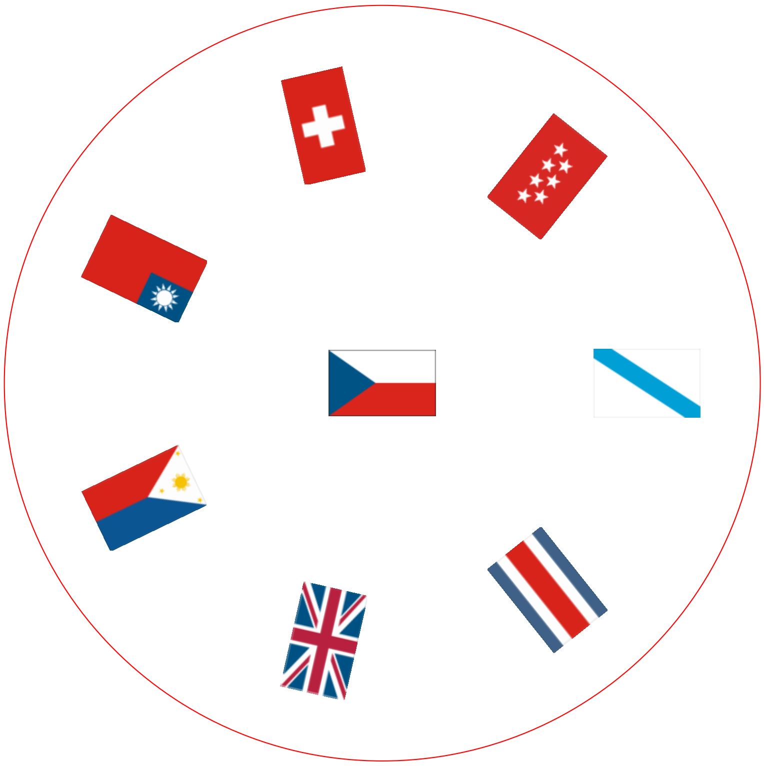


Figura 99: Carta 25

Figura 100: Carta 26

Figura 101: Carta 27

Figura 102: Carta 28

Figura 103: Carta 29

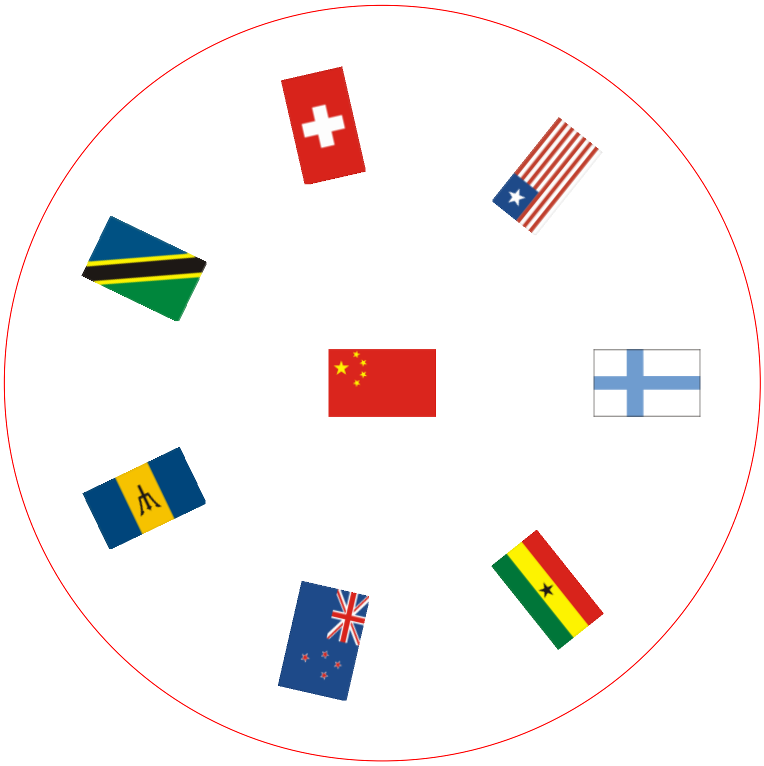


Figura 104: Carta 30

Figura 105: Carta 31

Figura 106: Carta 32

Figura 107: Carta 33

Figura 108: Carta 34

Figura 109: Carta 35

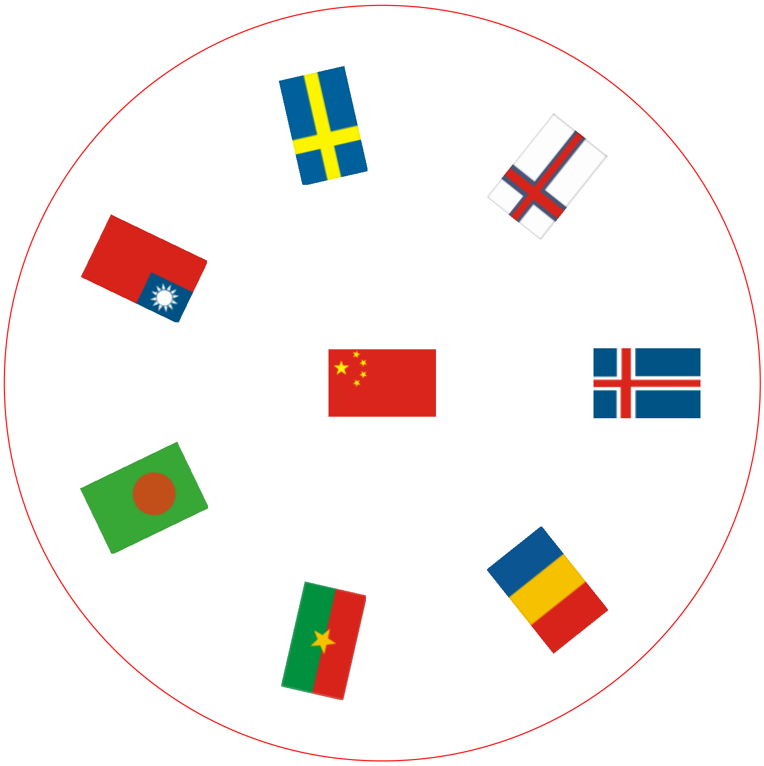


Figura 110: Carta 36

Figura 111: Carta 37

Figura 112: Carta 38

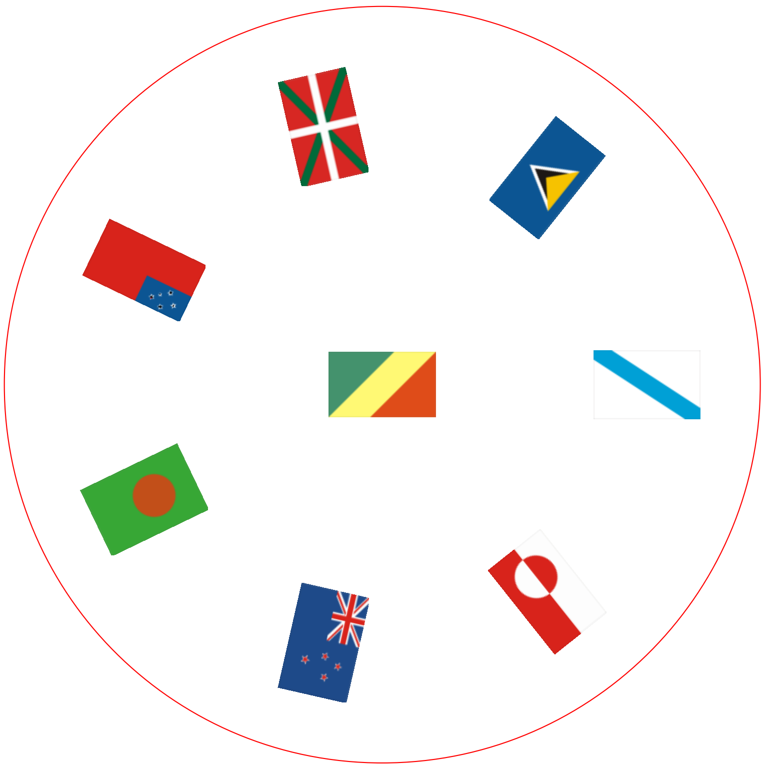


Figura 113: Carta 39

Figura 114: Carta 40

Figura 115: Carta 41

Figura 116: Carta 42

Figura 117: Carta 43

Figura 118: Carta 44

Figura 119: Carta 45

Figura 120: Carta 46

Figura 121: Carta 47

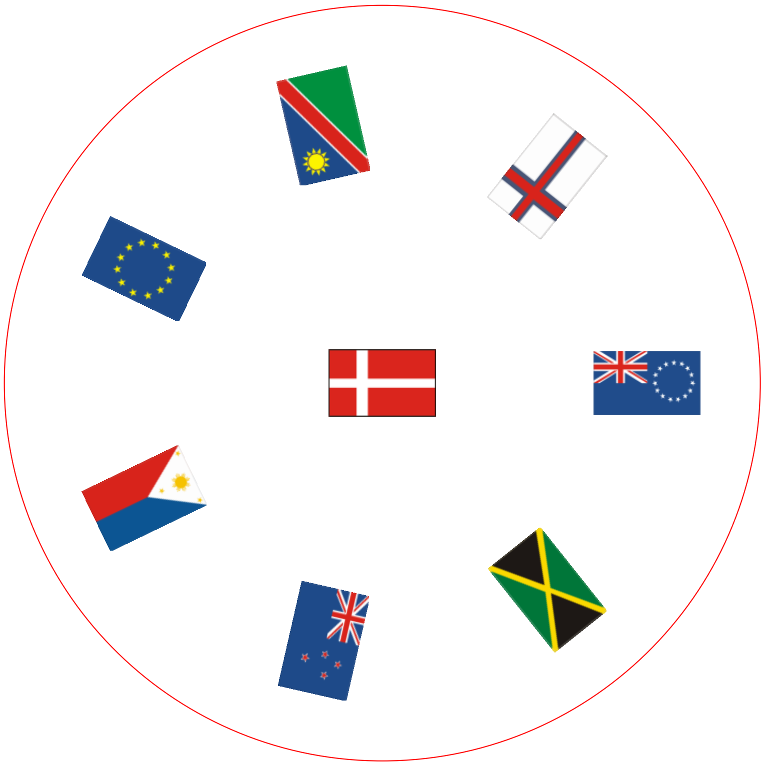


Figura 122: Carta 48

Figura 123: Carta 49

Figura 124: Carta 50

Figura 125: Carta 51

Figura 126: Carta 52

Figura 127: Carta 53

Figura 128: Carta 54

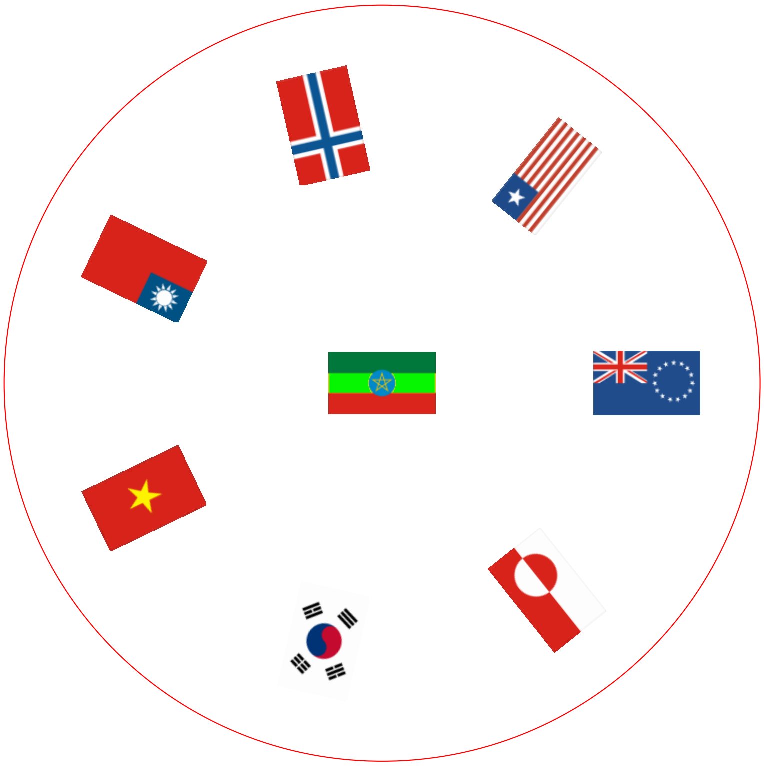


Figura 129: Carta 55

Figura 130: Carta 56

Figura 131: Carta 57

L. Cartas de un Dobble con símbolos de la tabla periódica

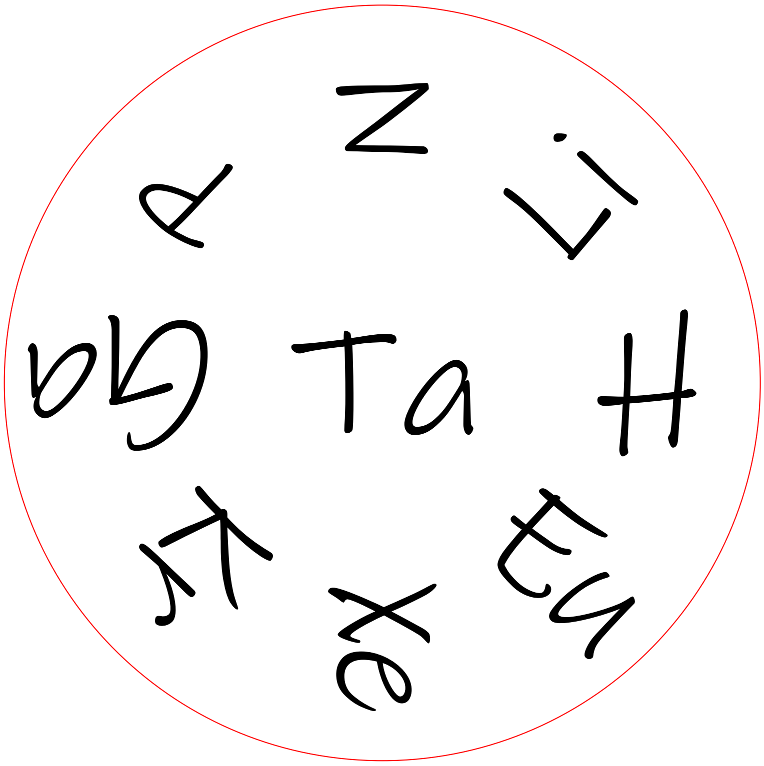


Figura 132: Carta 1

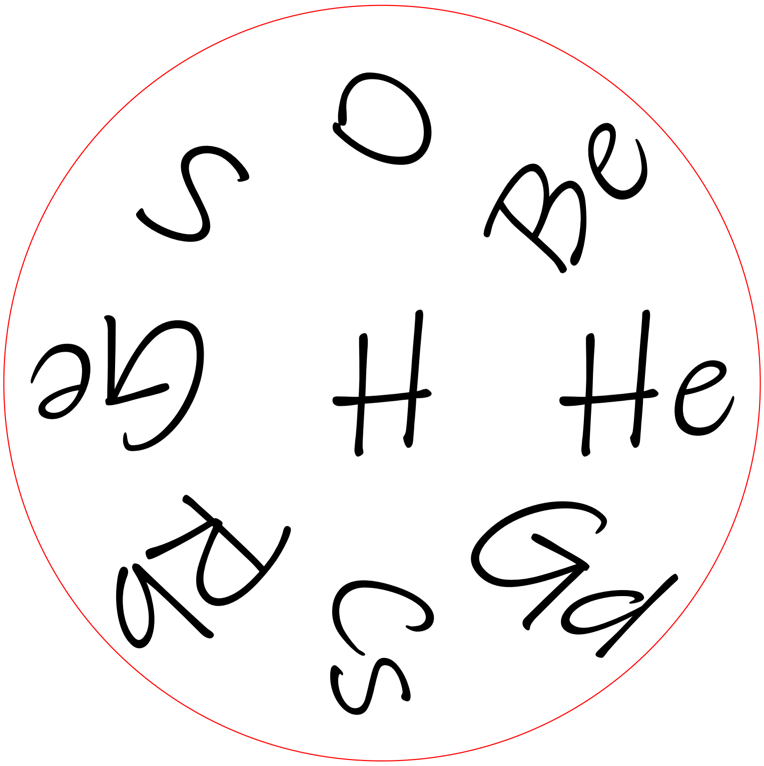


Figura 133: Carta 2

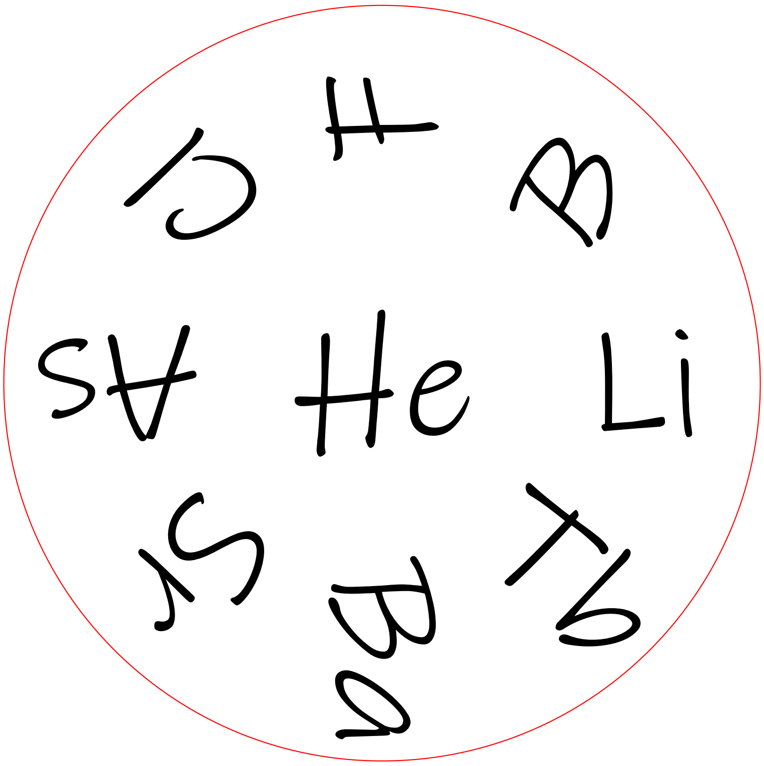


Figura 134: Carta 3

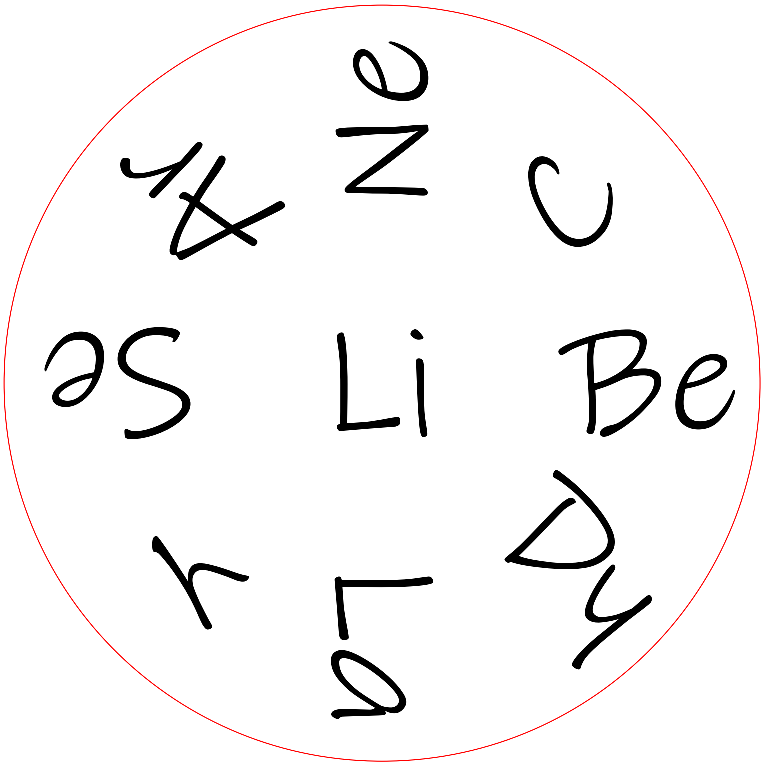


Figura 135: Carta 4

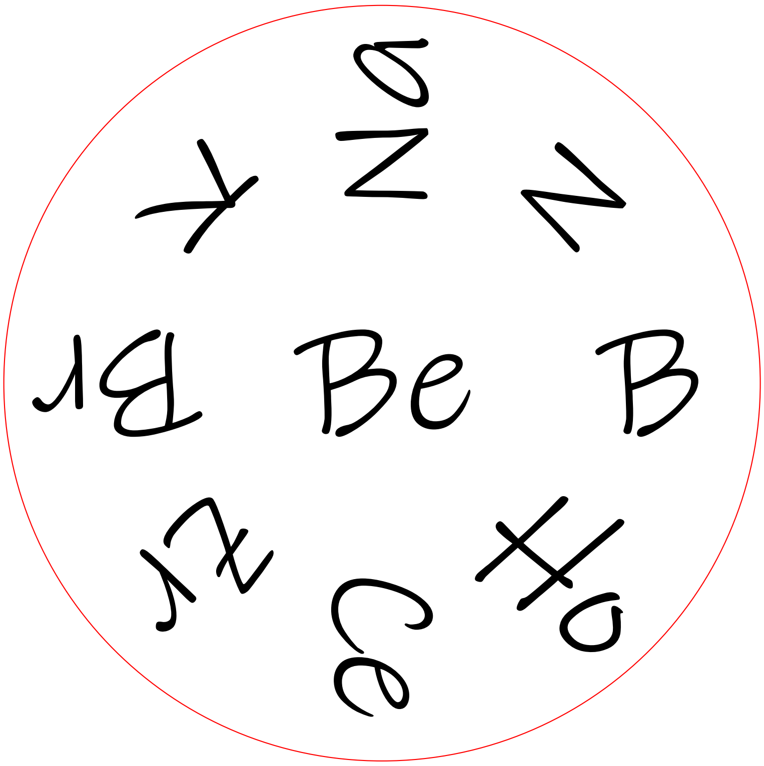


Figura 136: Carta 5

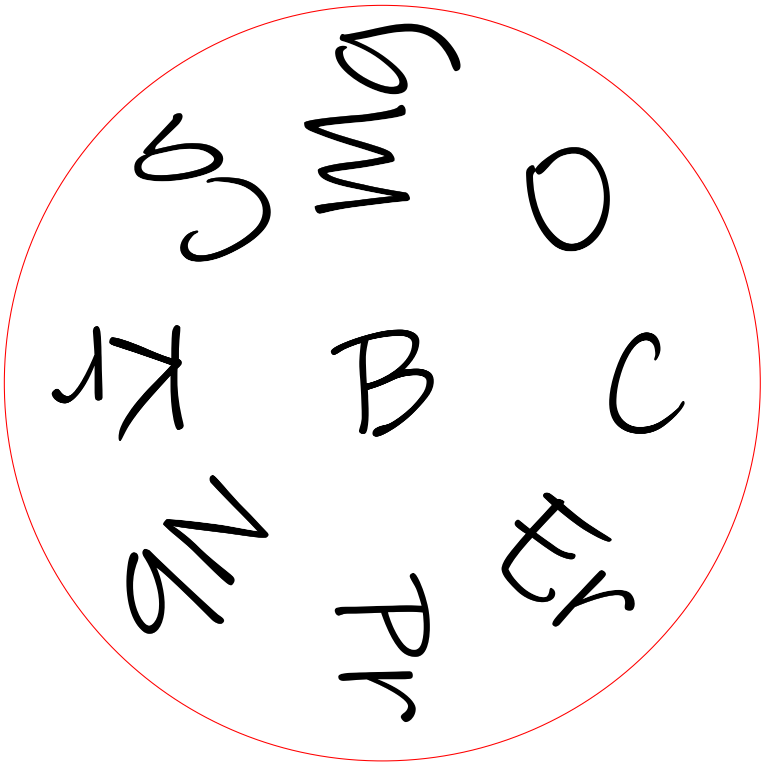


Figura 137: Carta 6

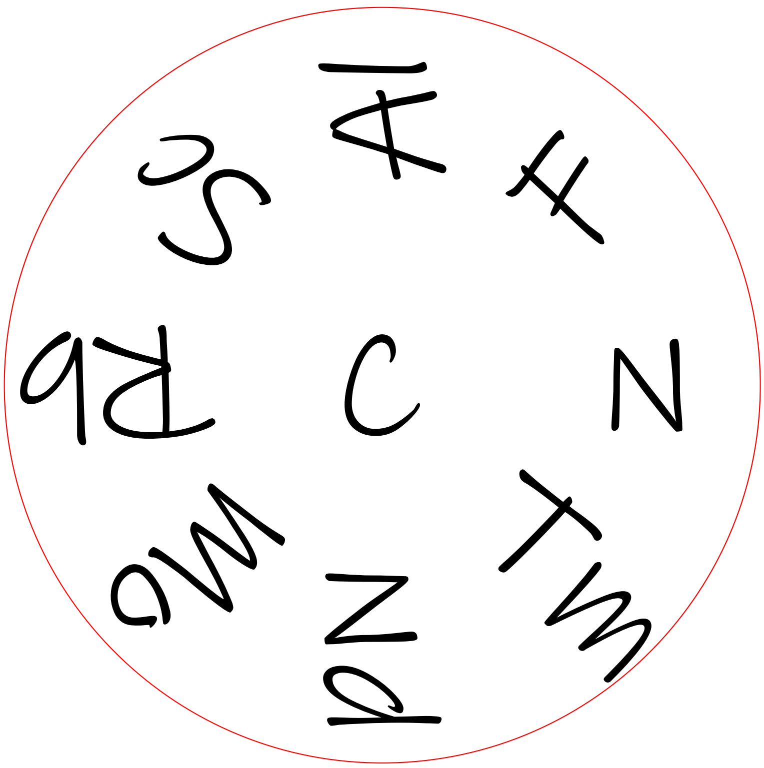


Figura 138: Carta 7

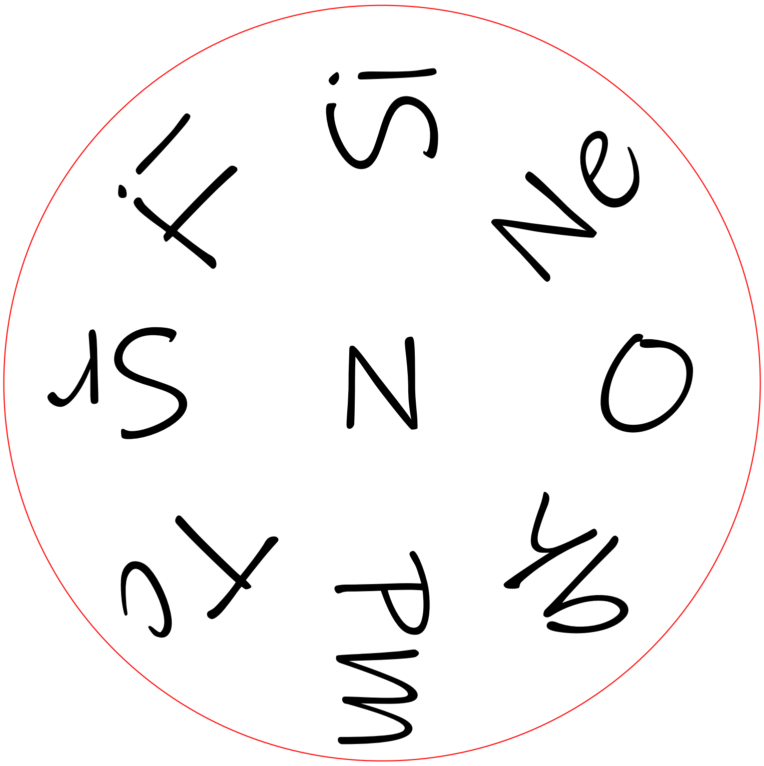


Figura 139: Carta 8

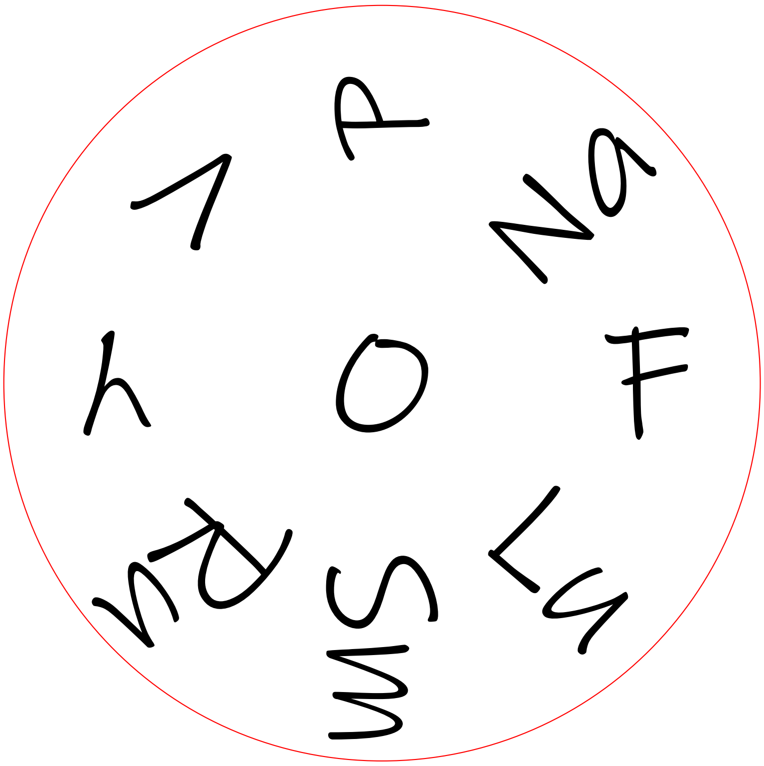


Figura 140: Carta 9

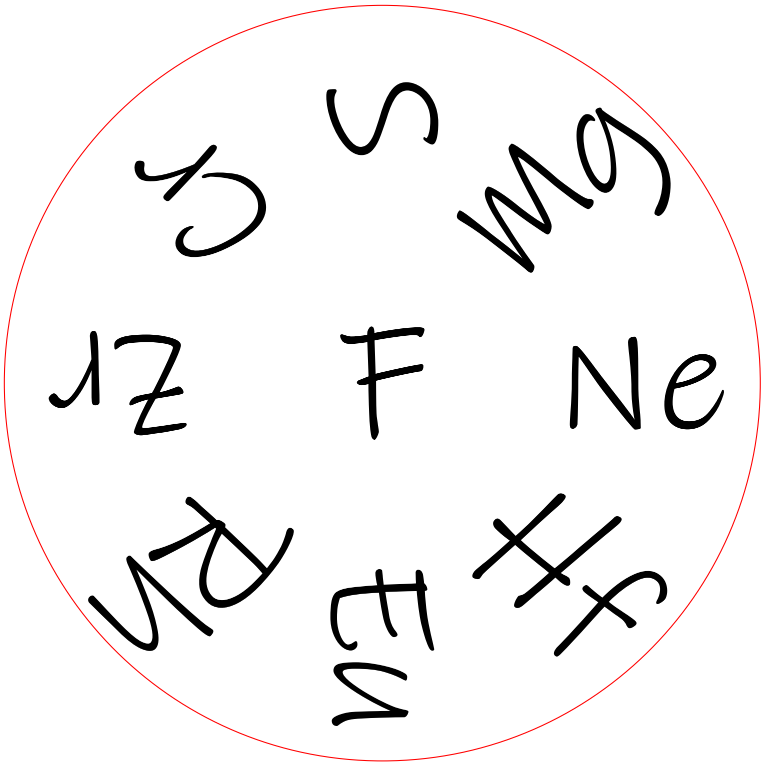


Figura 141: Carta 10

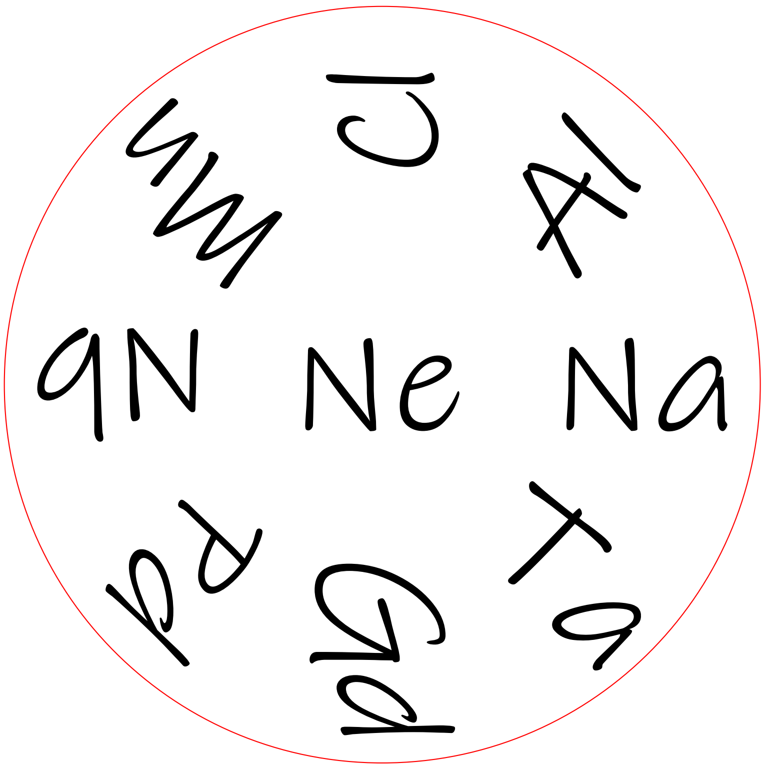


Figura 142: Carta 11

Figura 143: Carta 12

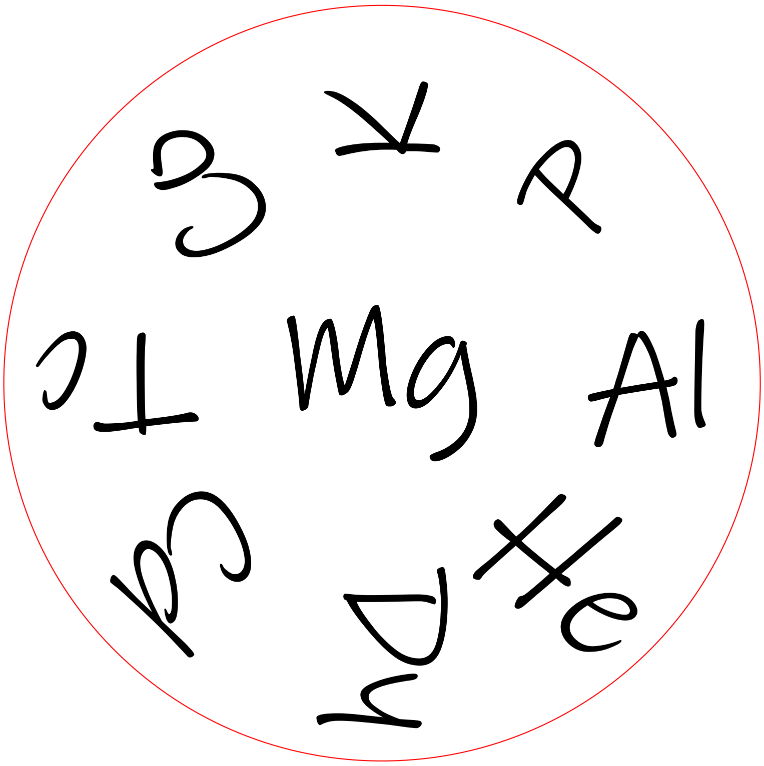


Figura 144: Carta 13

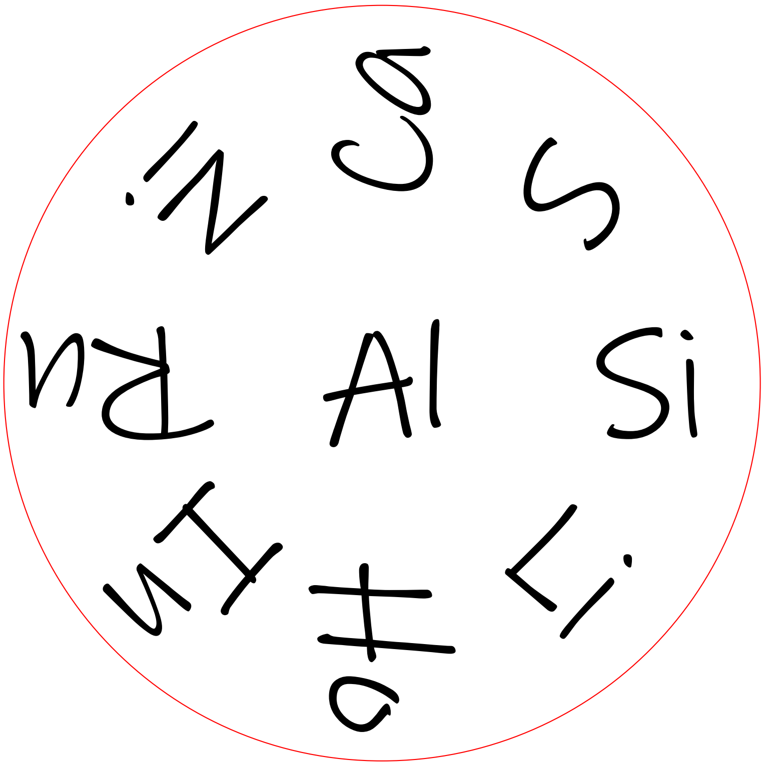


Figura 145: Carta 14

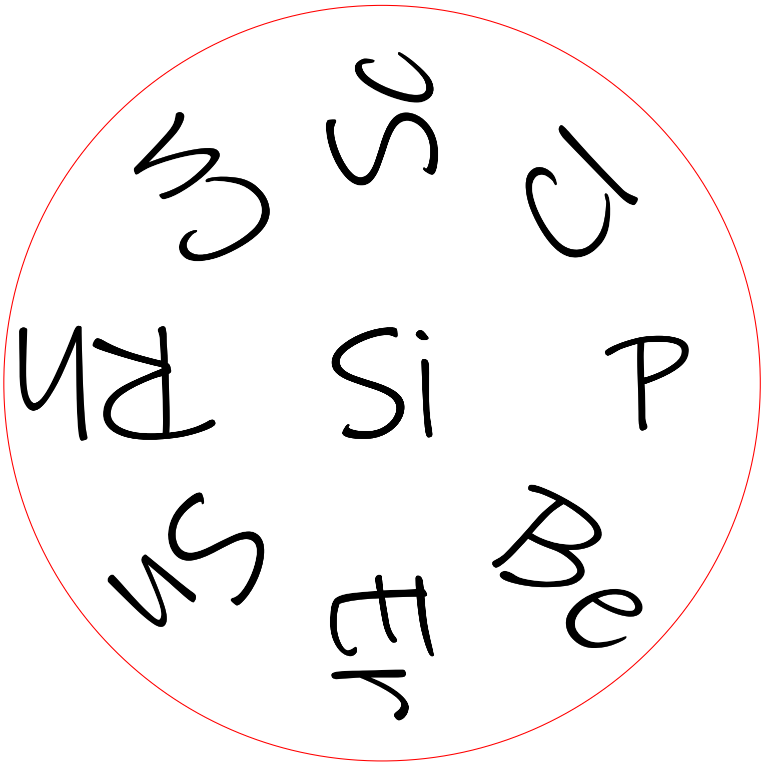


Figura 146: Carta 15

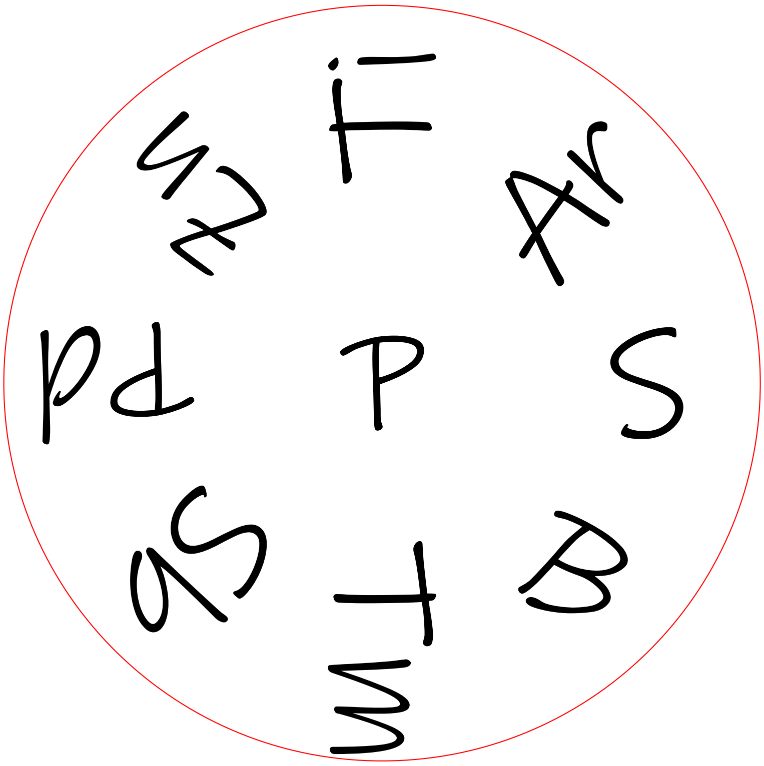


Figura 147: Carta 16

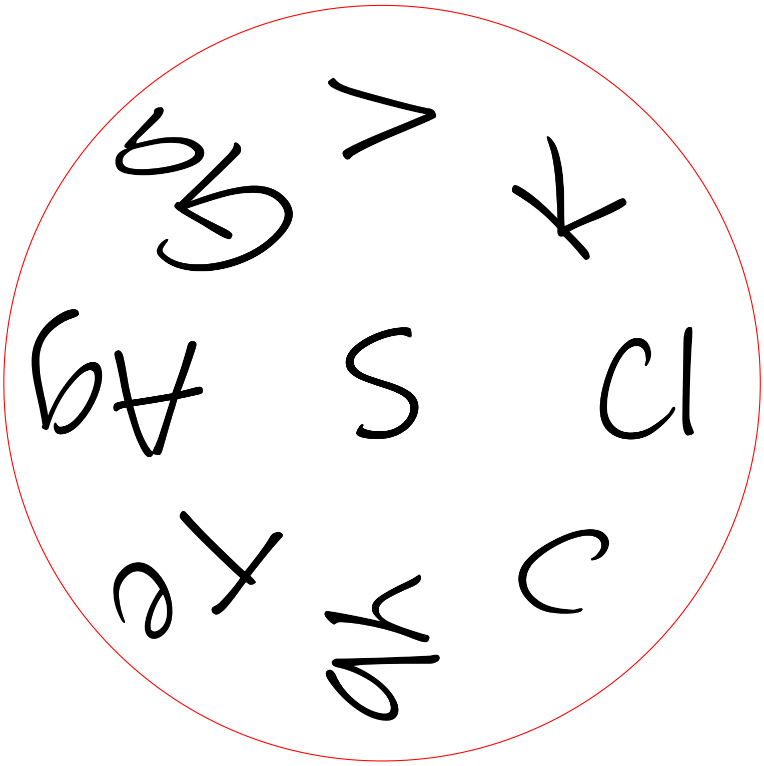


Figura 148: Carta 17

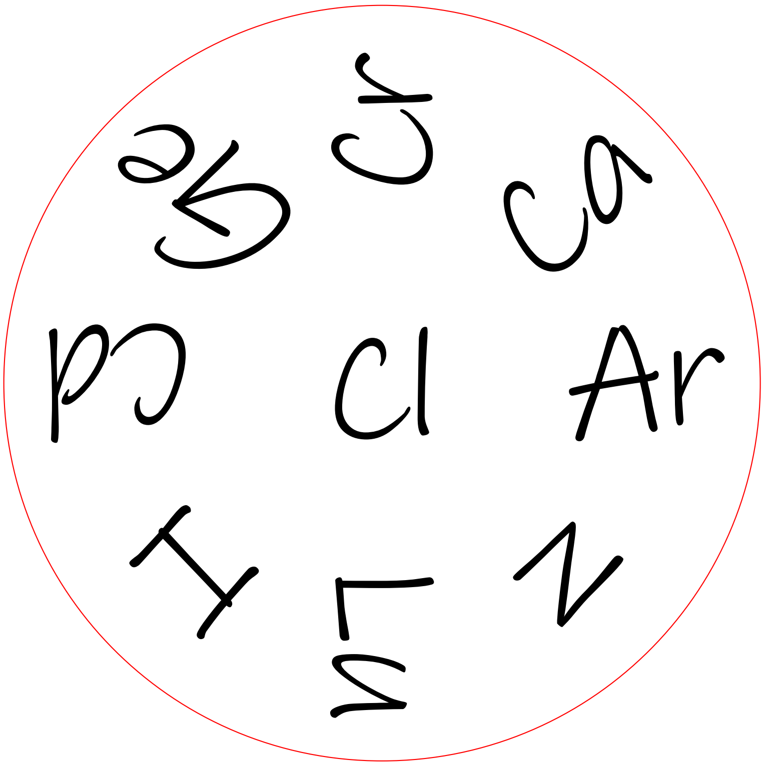


Figura 149: Carta 18

Figura 150: Carta 19

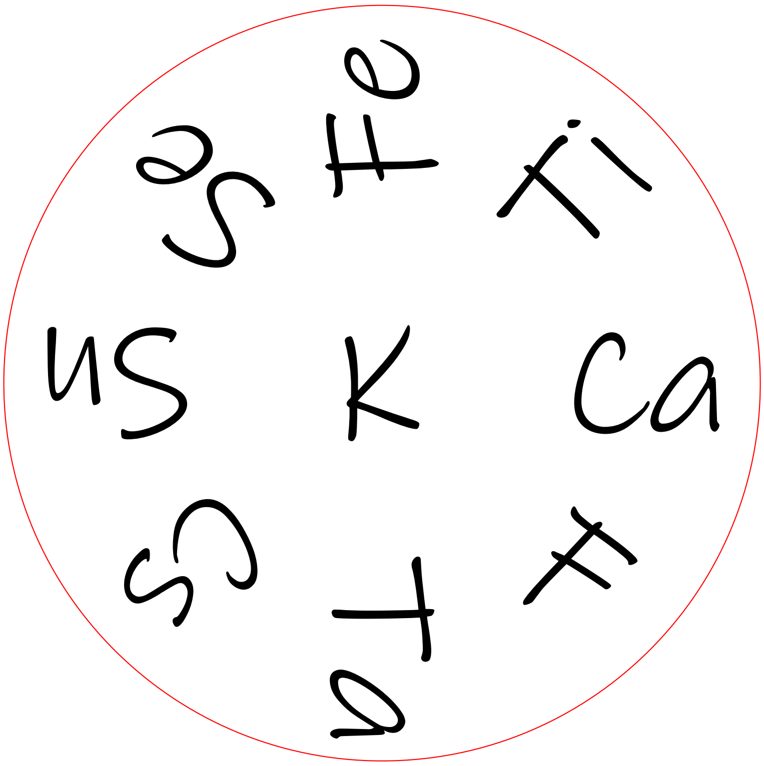


Figura 151: Carta 20

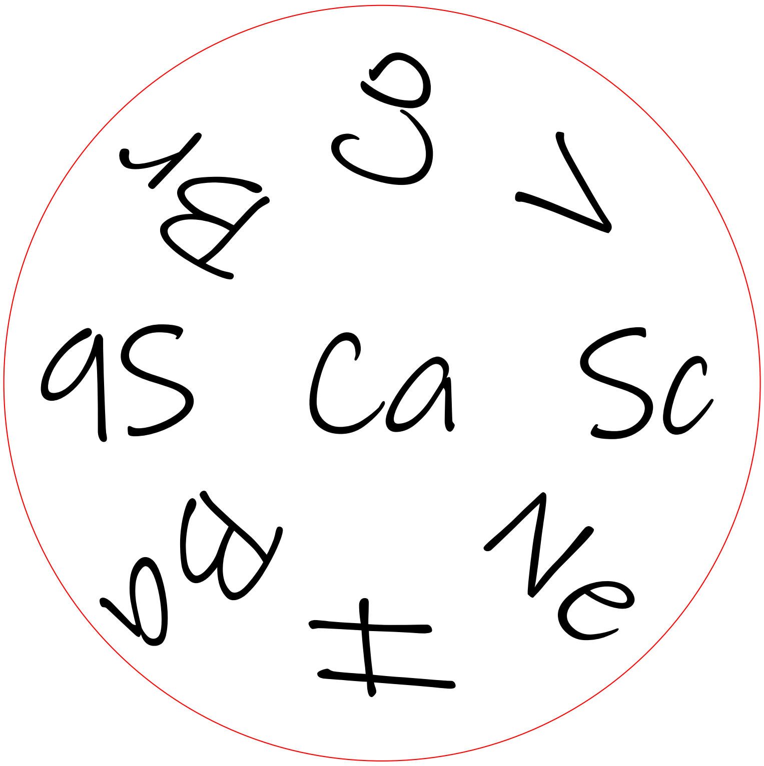


Figura 152: Carta 21

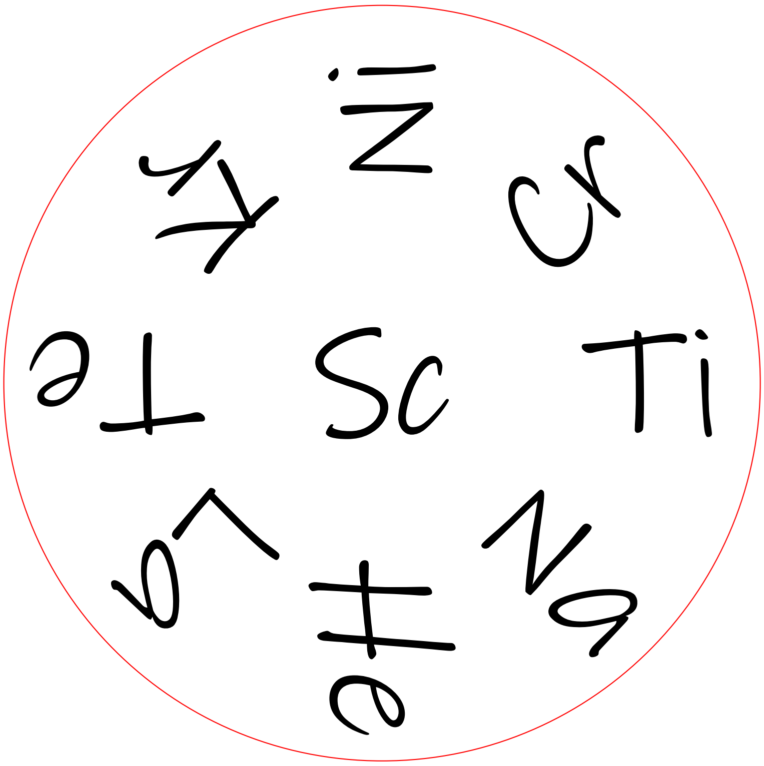


Figura 153: Carta 22

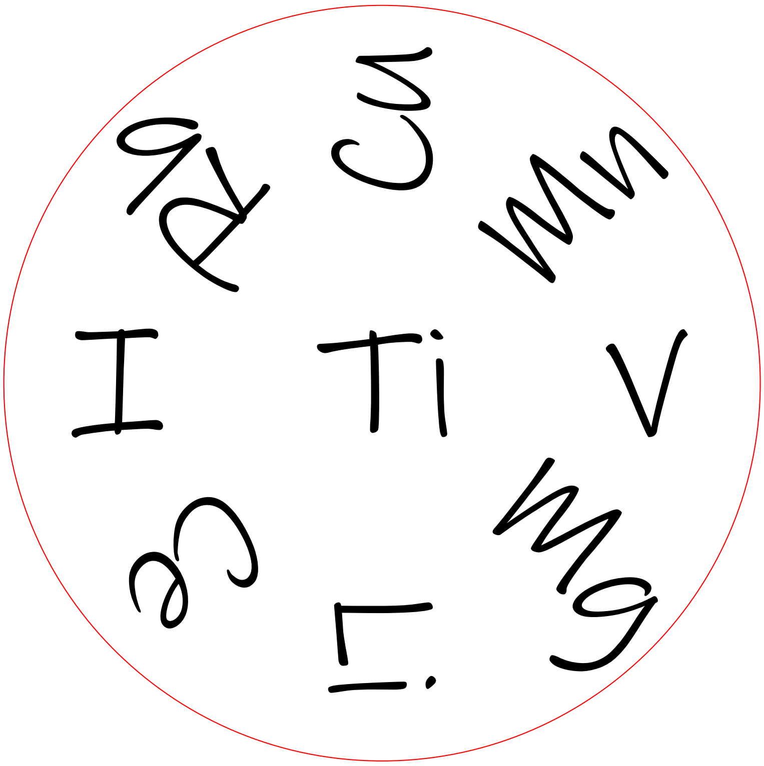


Figura 154: Carta 23

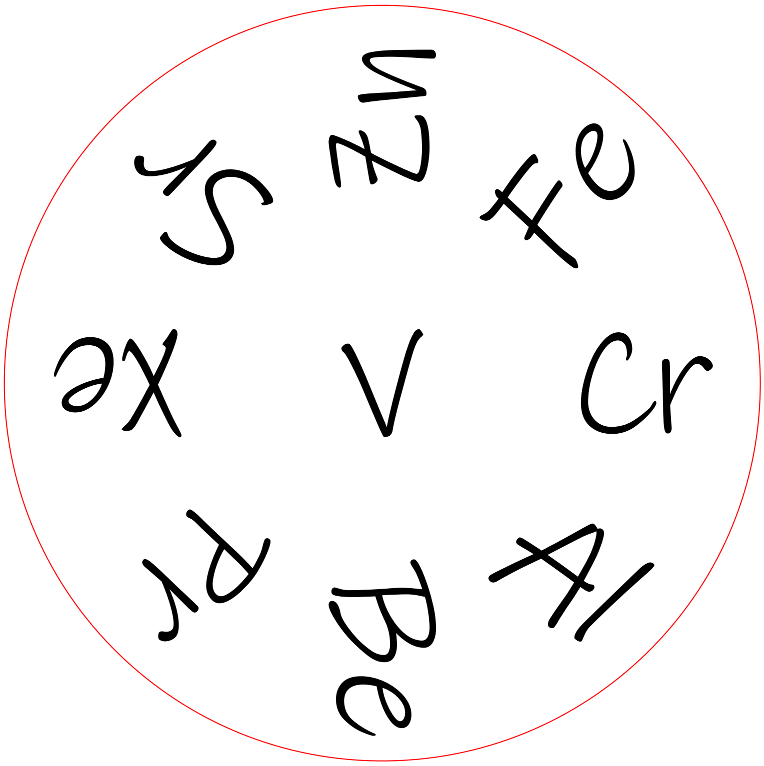


Figura 155: Carta 24

Figura 156: Carta 25

Figura 157: Carta 26

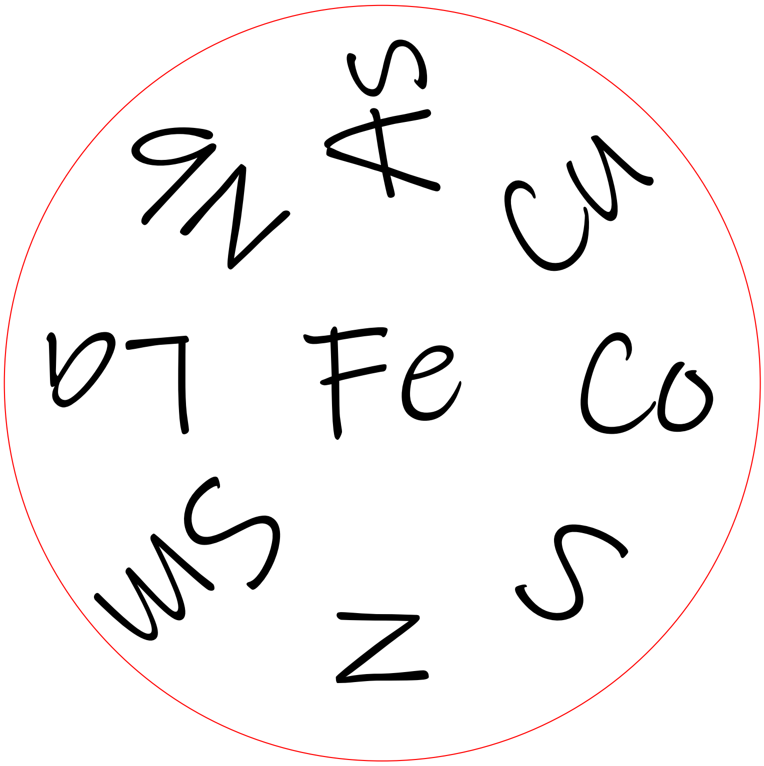


Figura 158: Carta 27

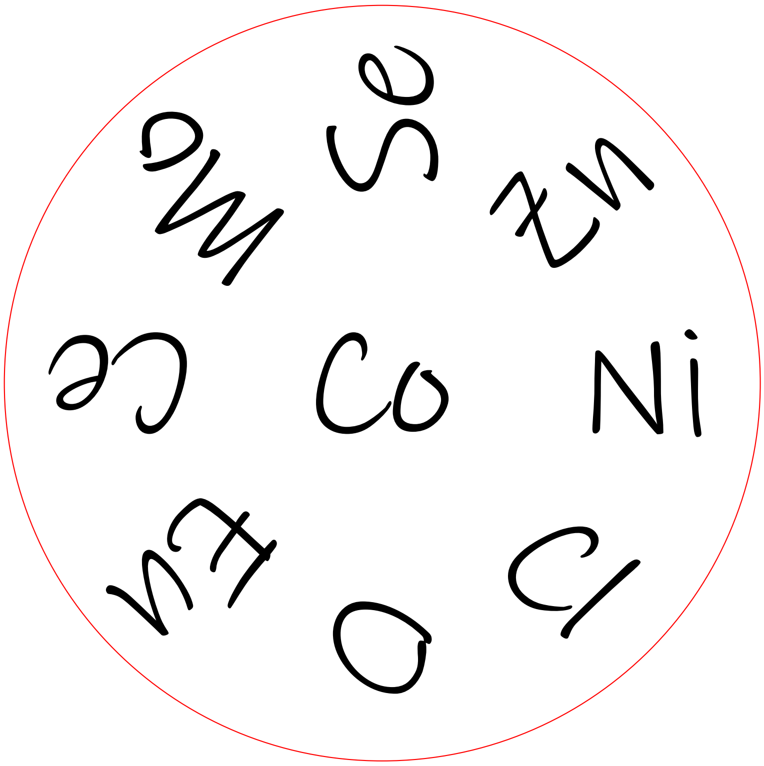


Figura 159: Carta 28

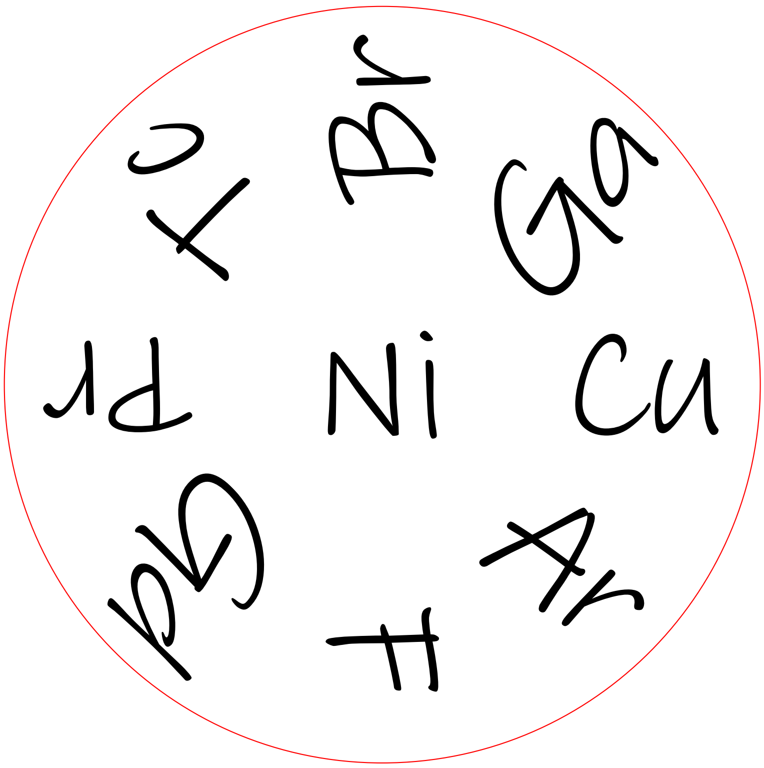


Figura 160: Carta 29

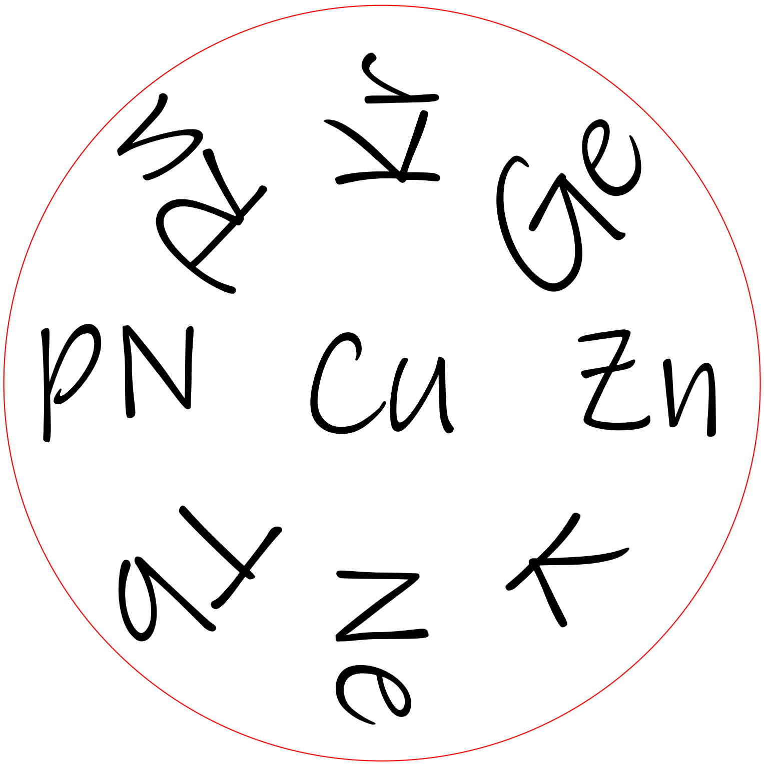


Figura 161: Carta 30

Figura 162: Carta 31

Figura 163: Carta 32

Figura 164: Carta 33

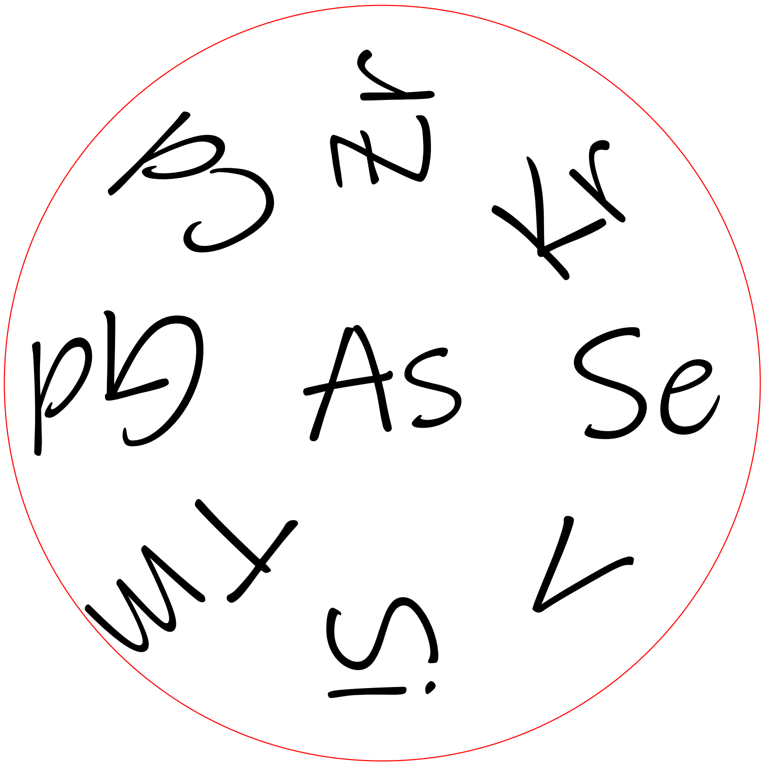


Figura 165: Carta 34

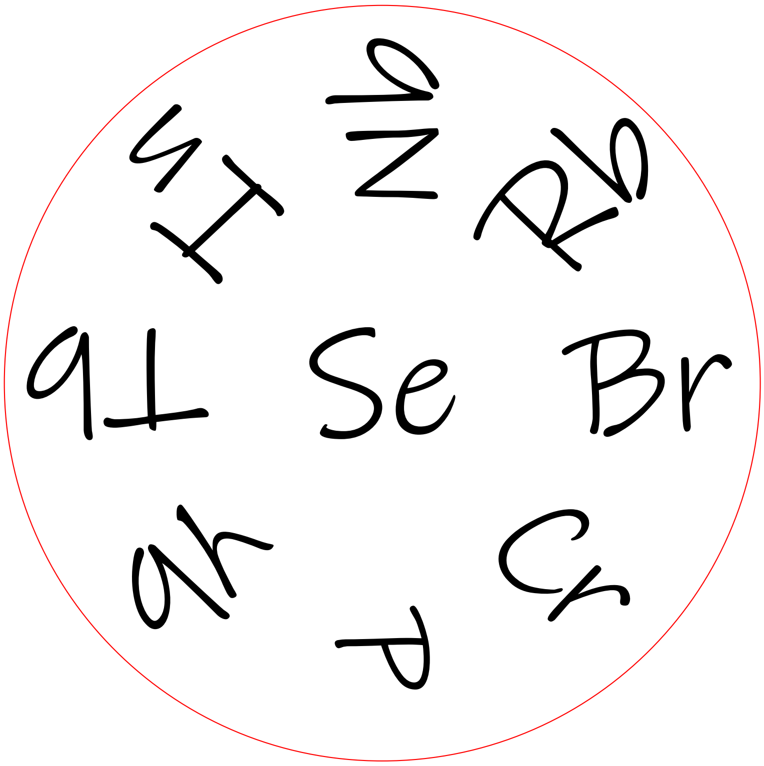


Figura 166: Carta 35

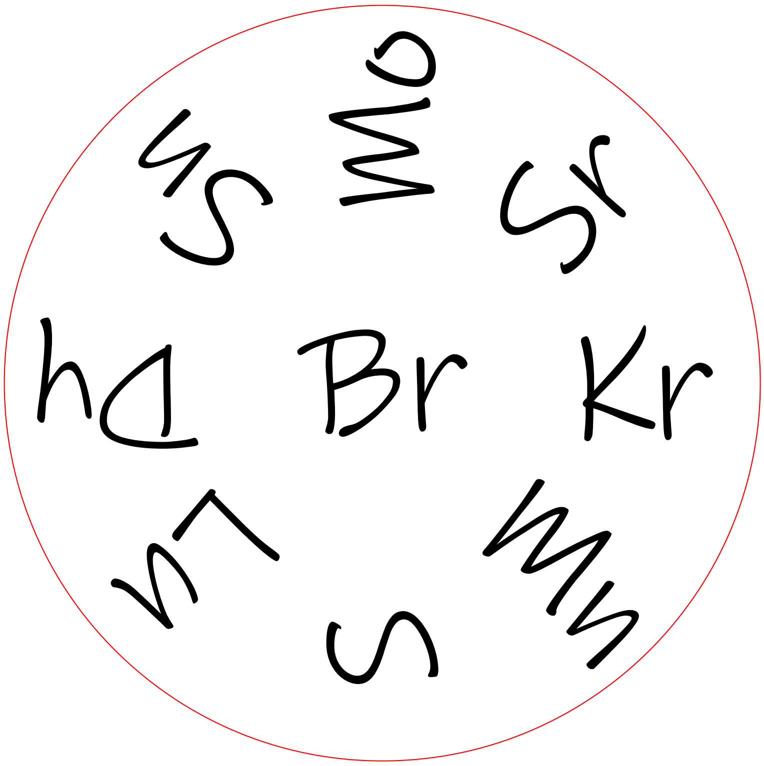


Figura 167: Carta 36

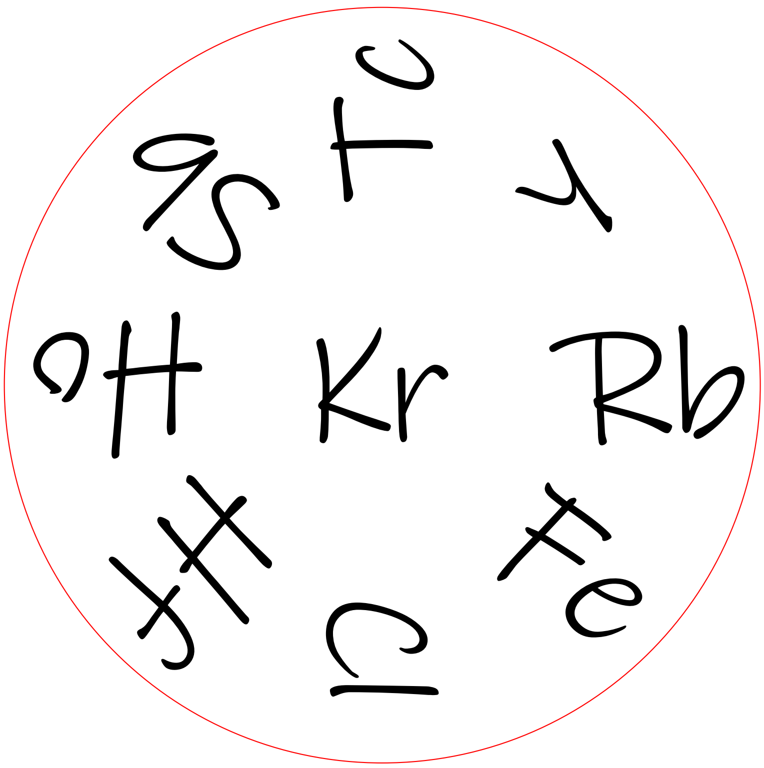


Figura 168: Carta 37

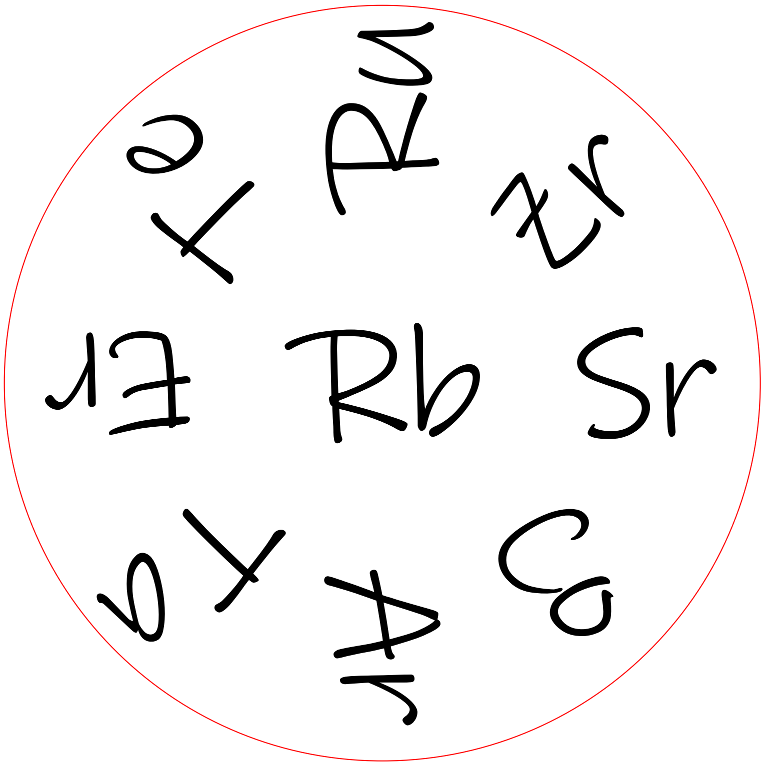


Figura 169: Carta 38

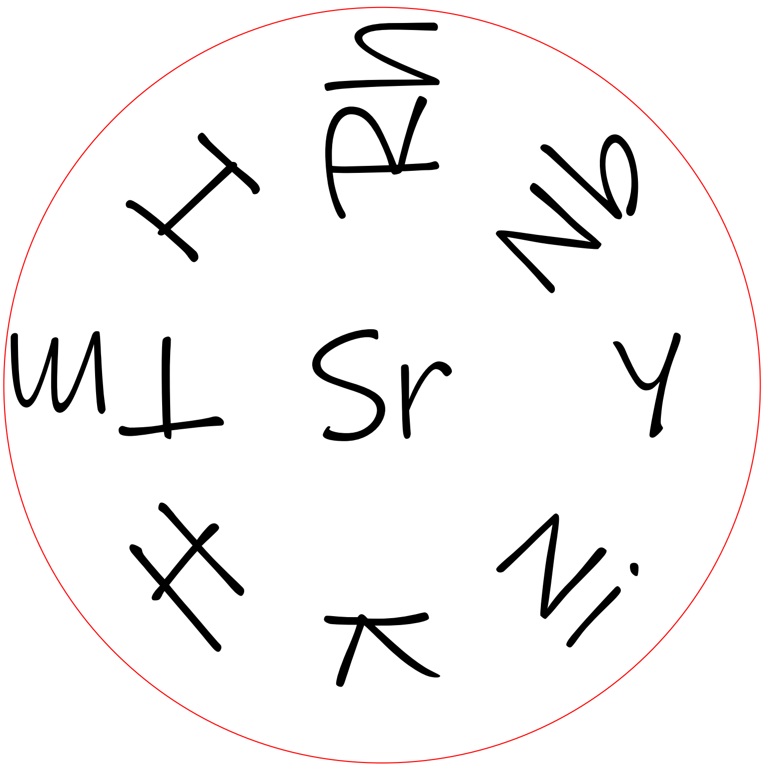


Figura 170: Carta 39

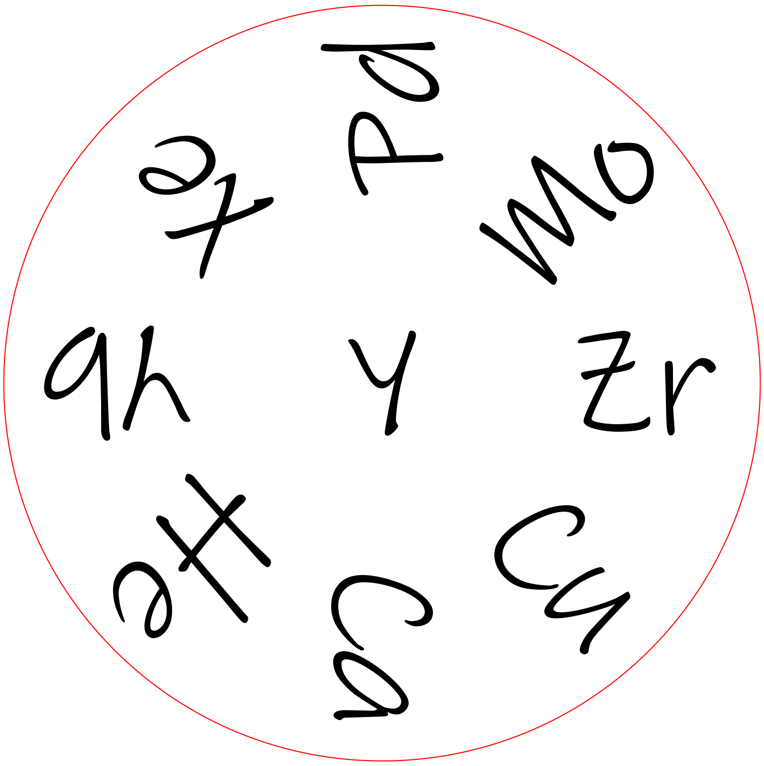


Figura 171: Carta 40

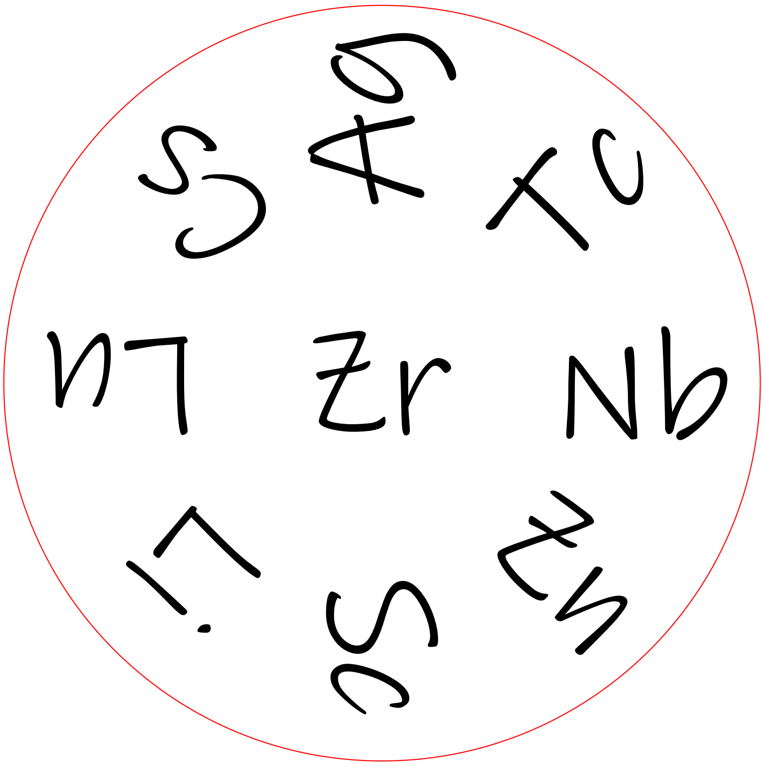


Figura 172: Carta 41

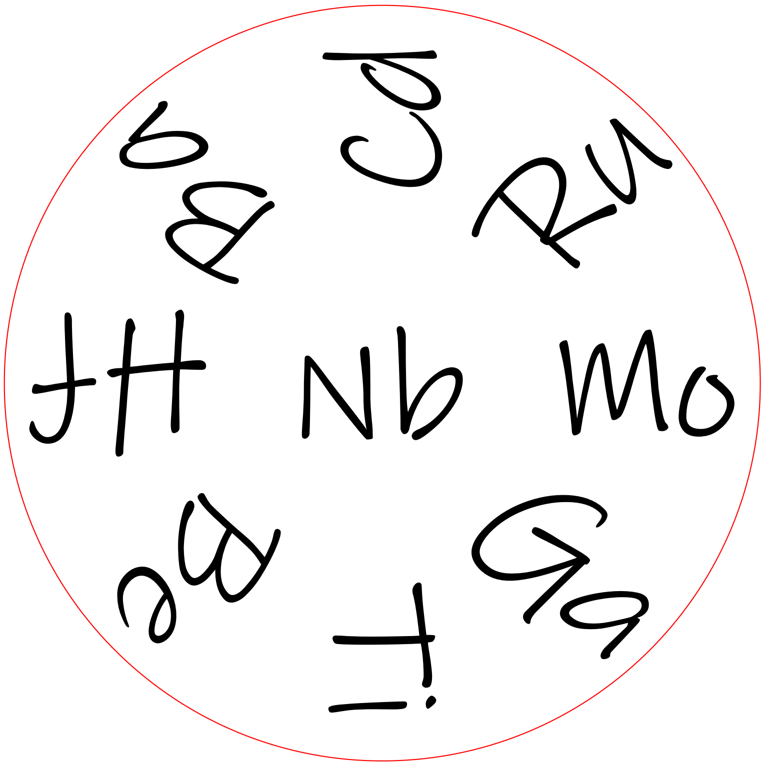


Figura 173: Carta 42

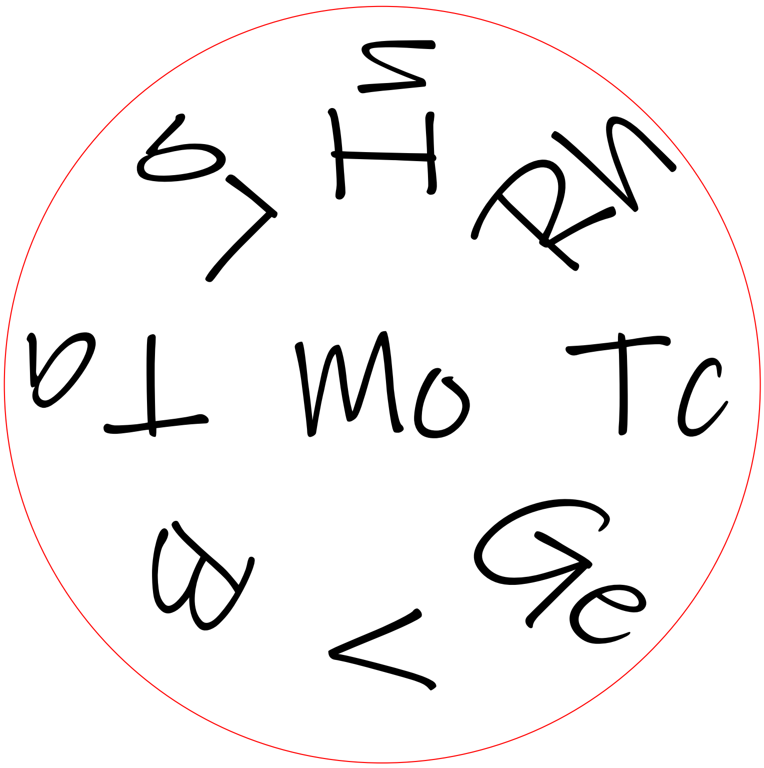


Figura 174: Carta 43

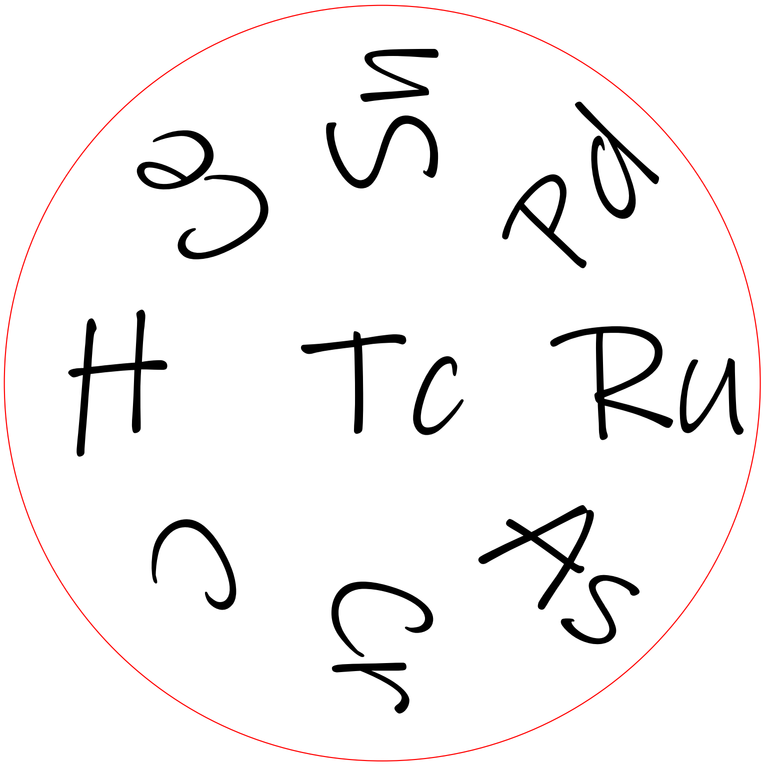


Figura 175: Carta 44

Figura 176: Carta 45

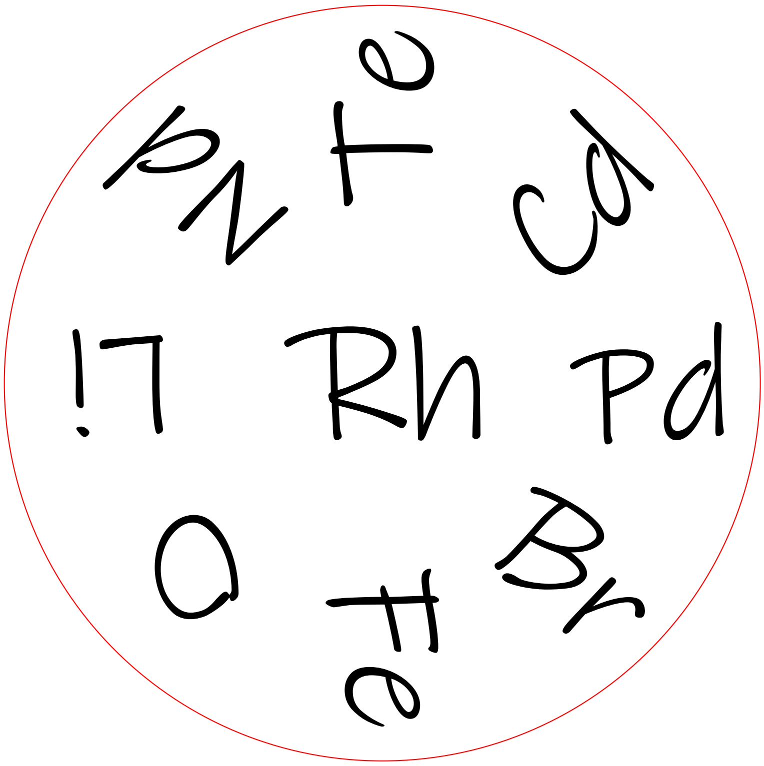


Figura 177: Carta 46

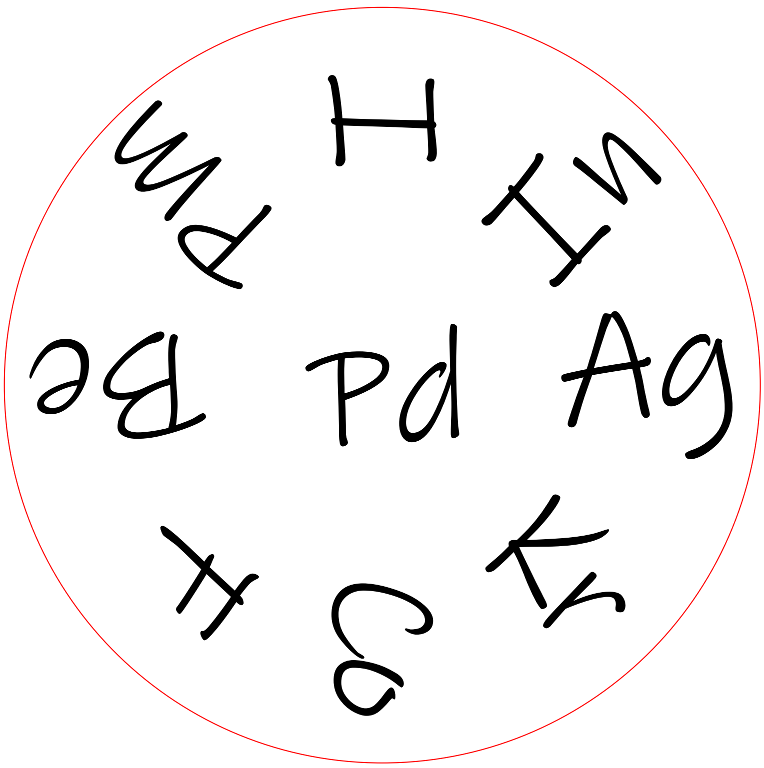


Figura 178: Carta 47

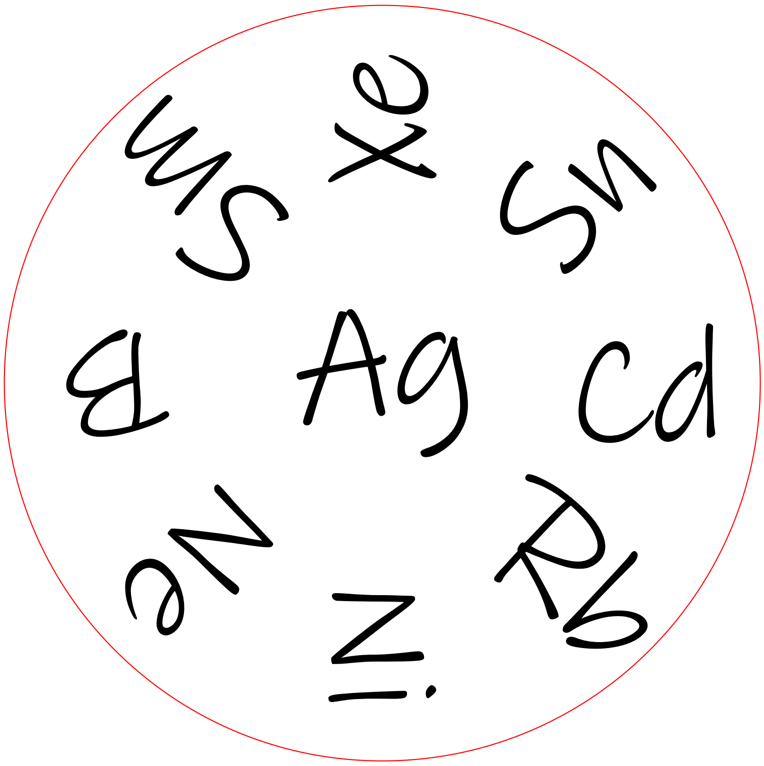


Figura 179: Carta 48

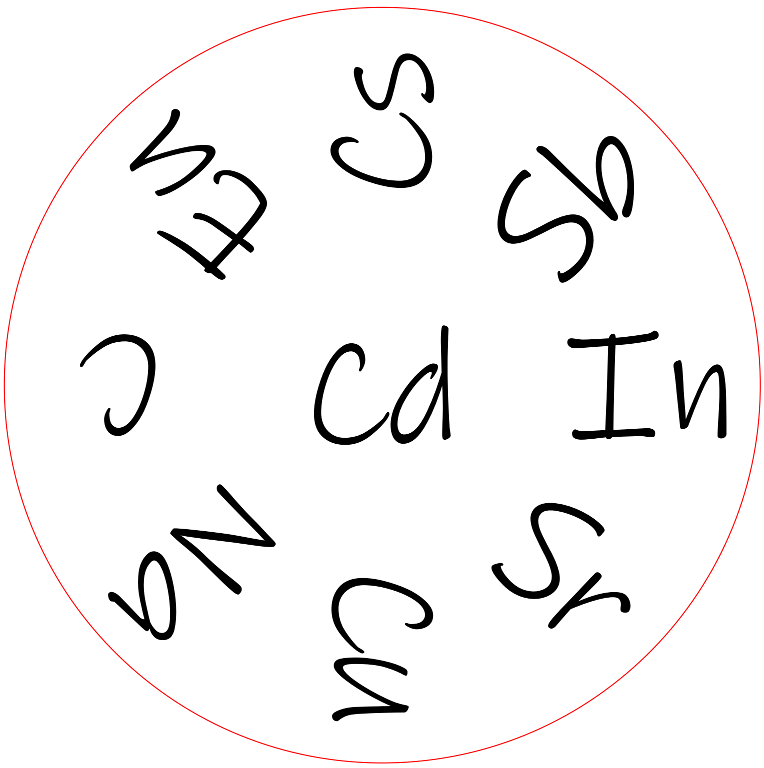


Figura 180: Carta 49

Figura 181: Carta 50

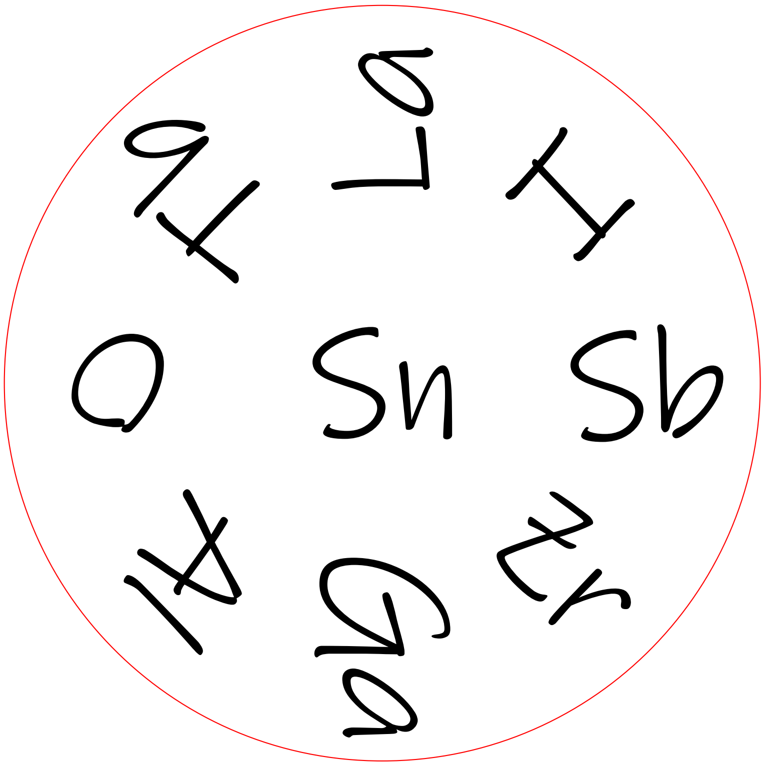


Figura 182: Carta 51

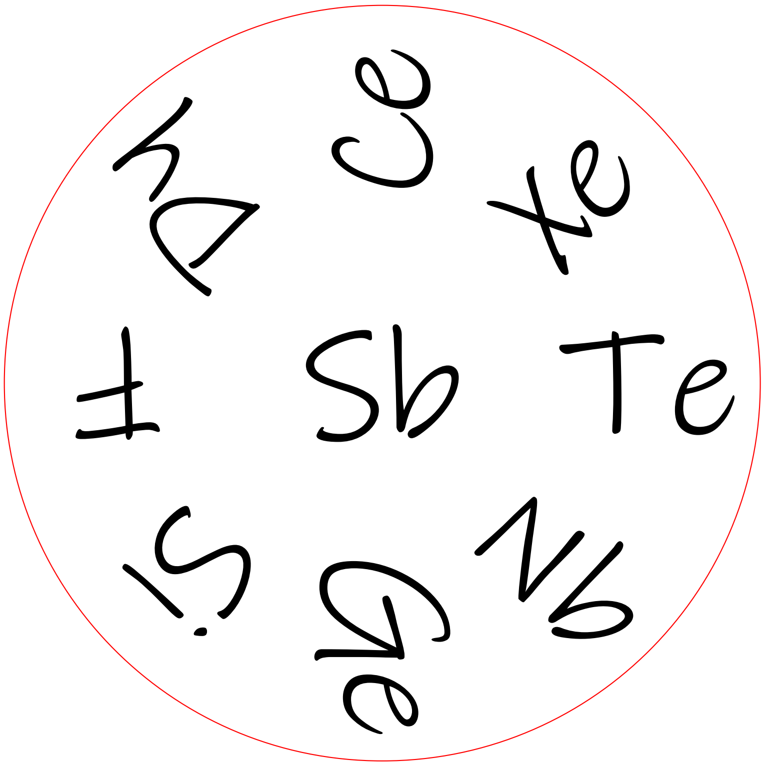


Figura 183: Carta 52

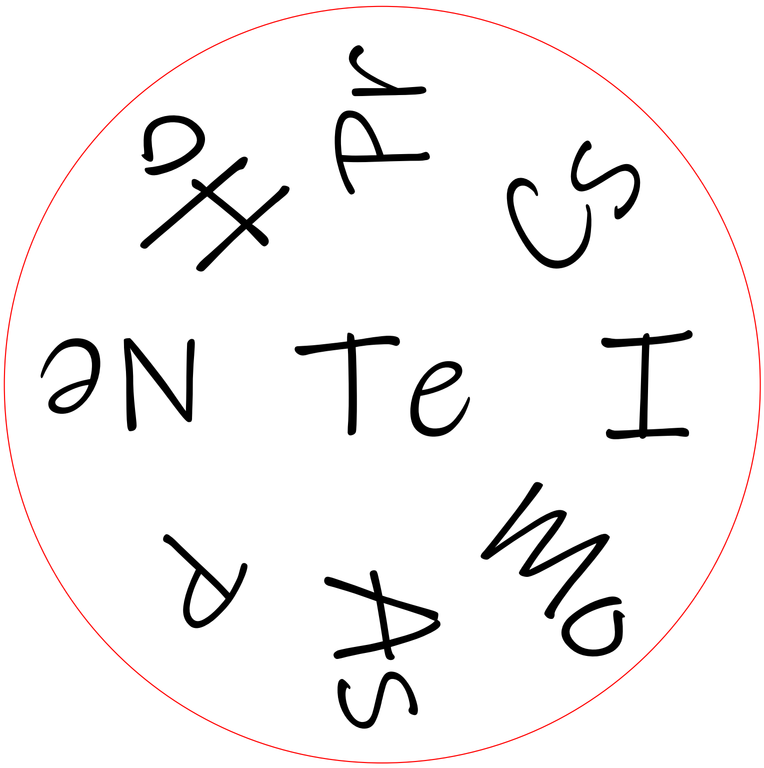


Figura 184: Carta 53

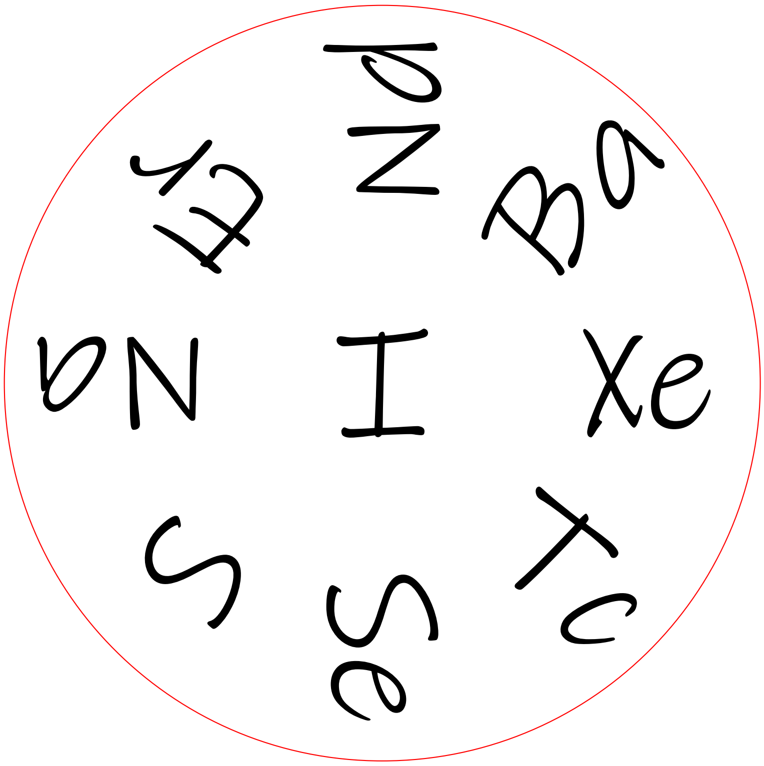


Figura 185: Carta 54

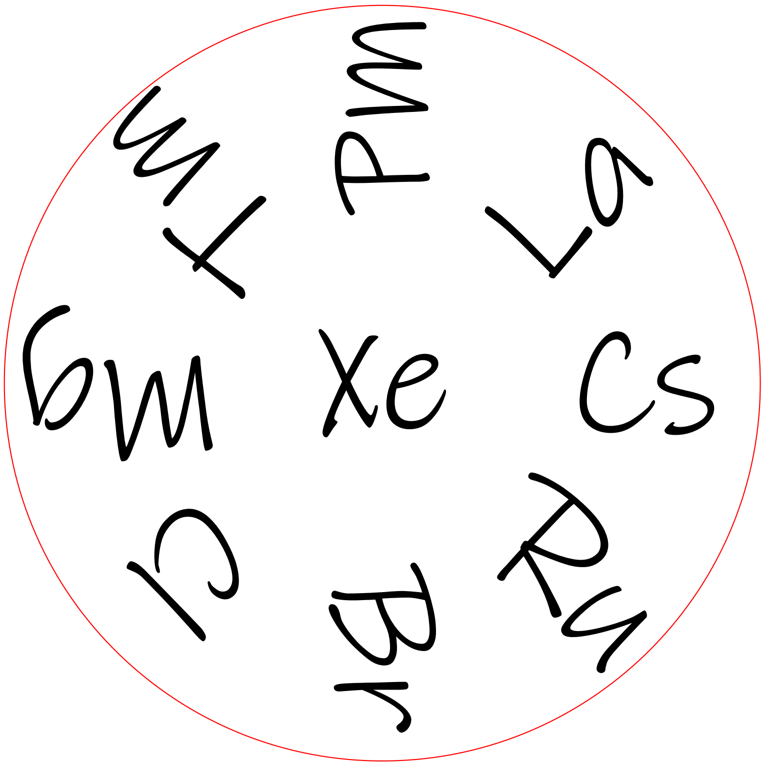


Figura 186: Carta 55

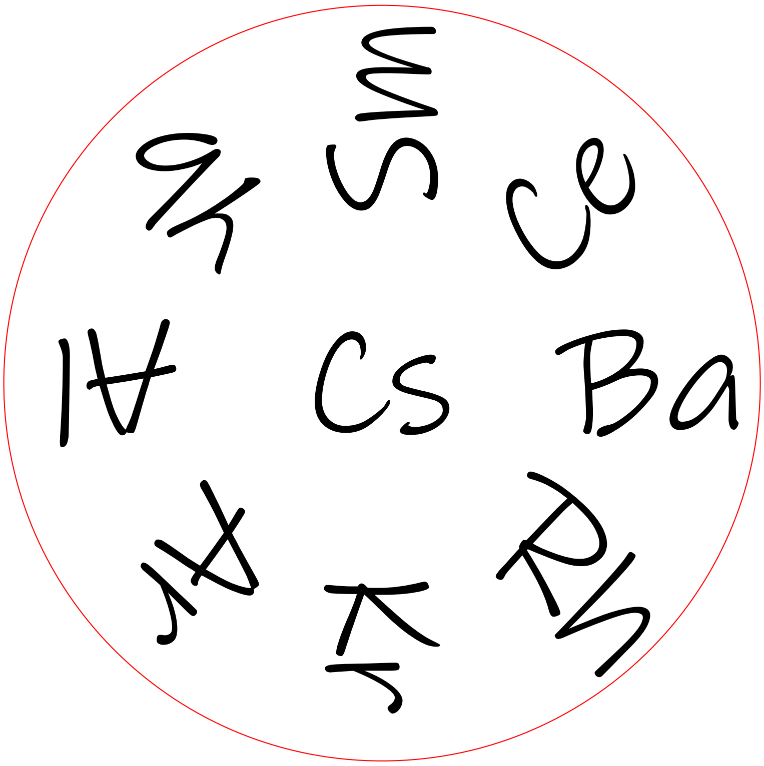


Figura 187: Carta 56

Figura 188: Carta 57

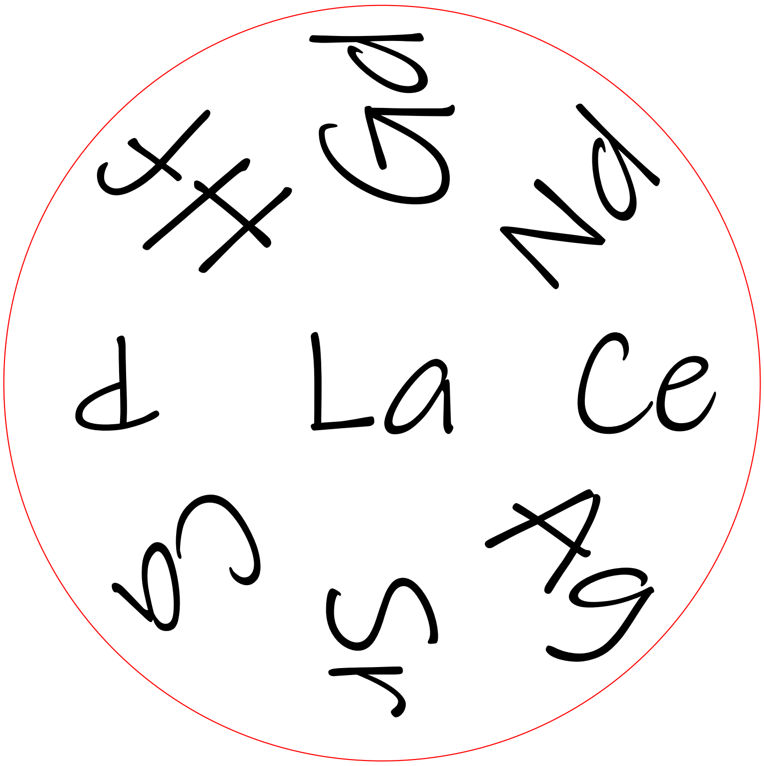


Figura 189: Carta 58

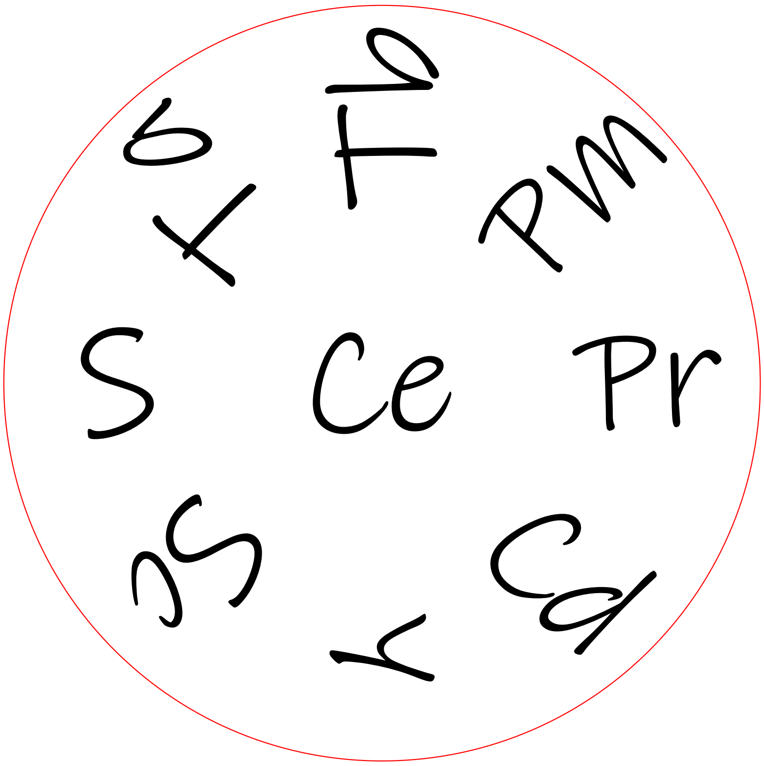


Figura 190: Carta 59

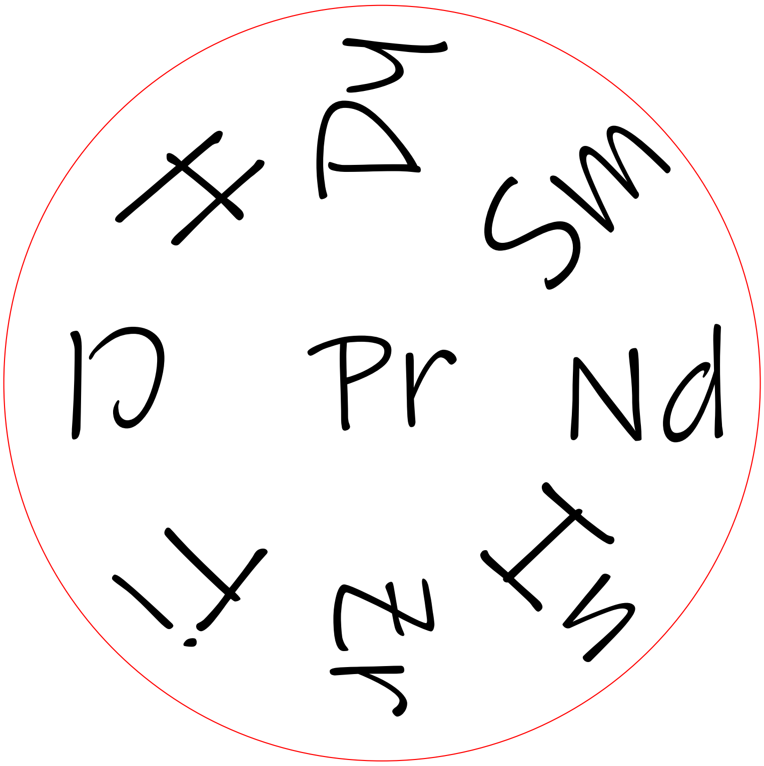


Figura 191: Carta 60

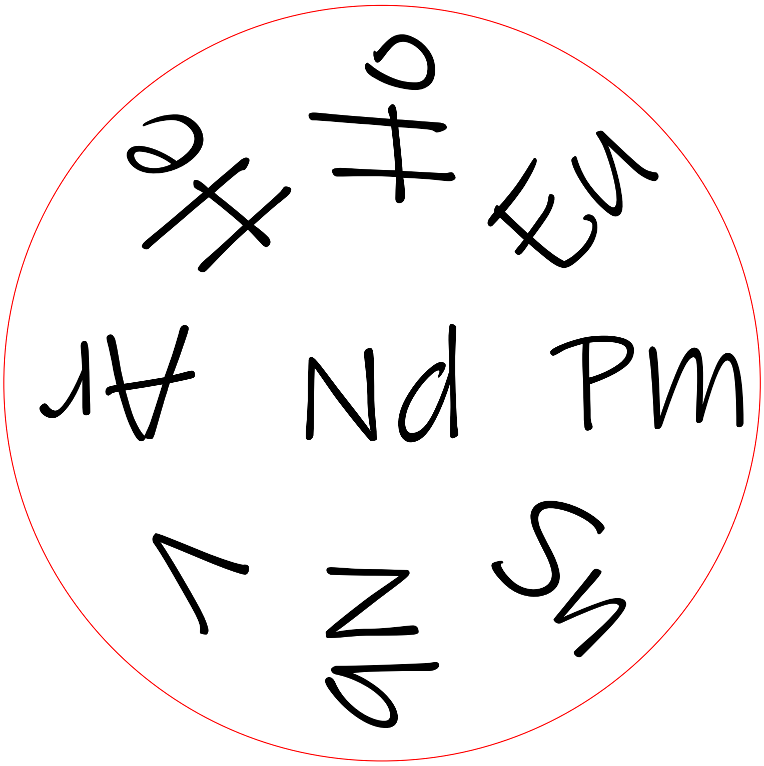


Figura 192: Carta 61

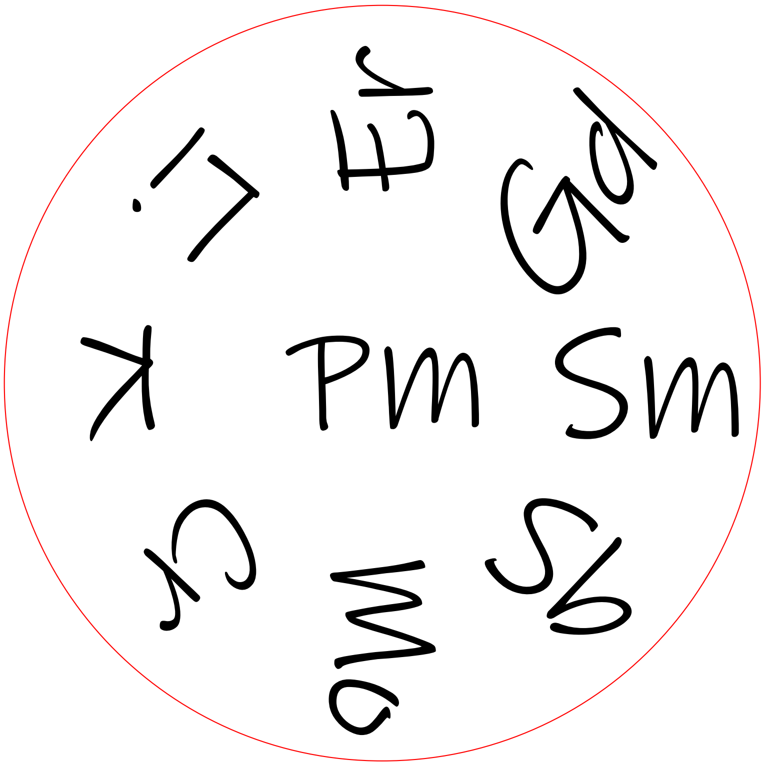


Figura 193: Carta 62

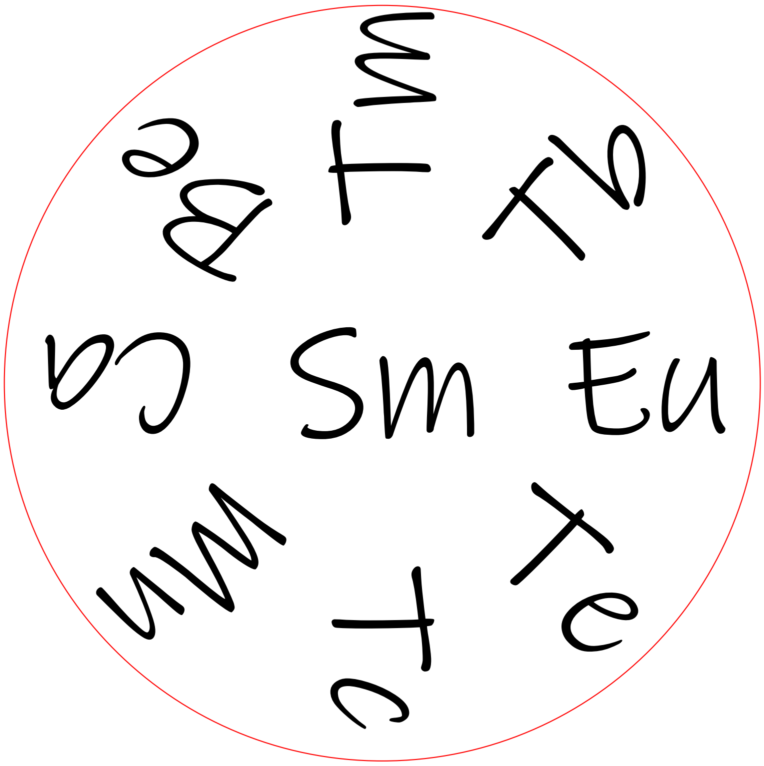


Figura 194: Carta 63

Figura 195: Carta 64

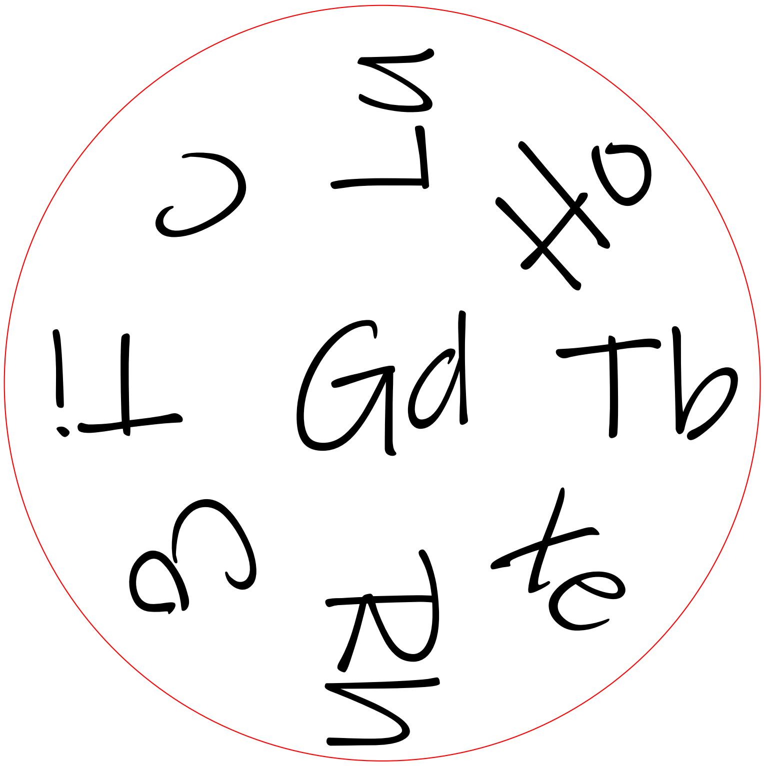


Figura 196: Carta 65

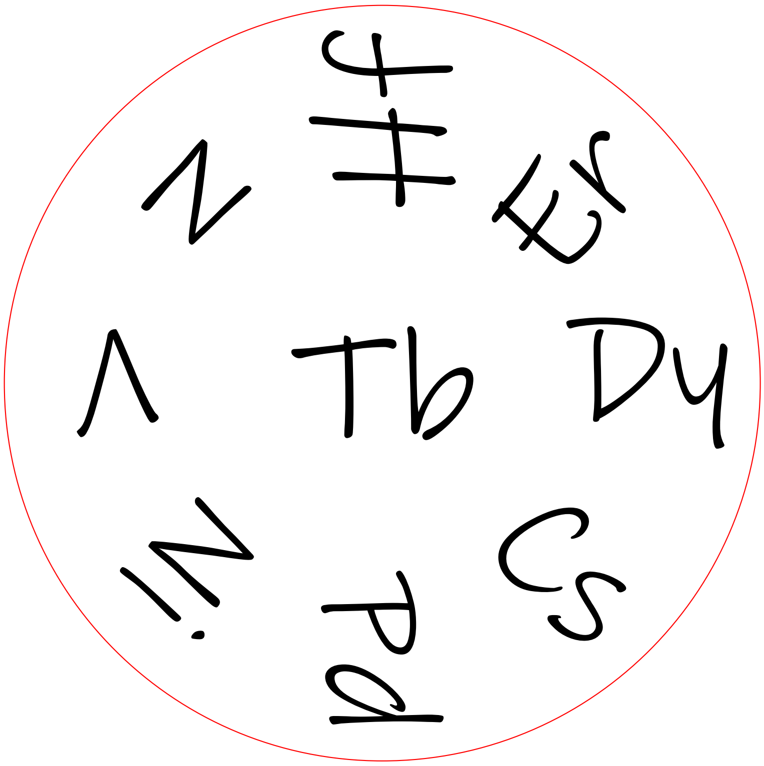


Figura 197: Carta 66

Figura 198: Carta 67

Figura 199: Carta 68

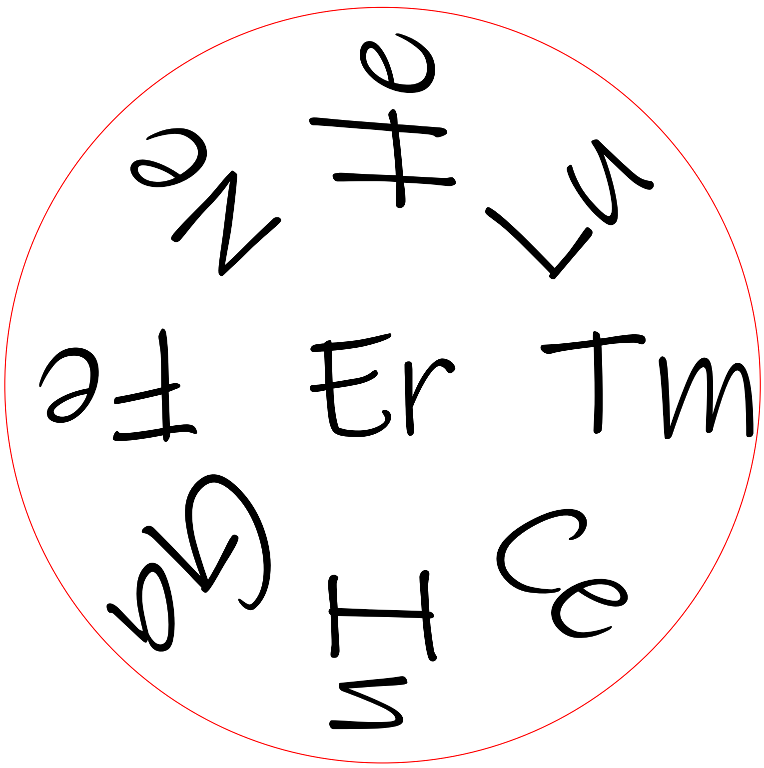


Figura 200: Carta 69

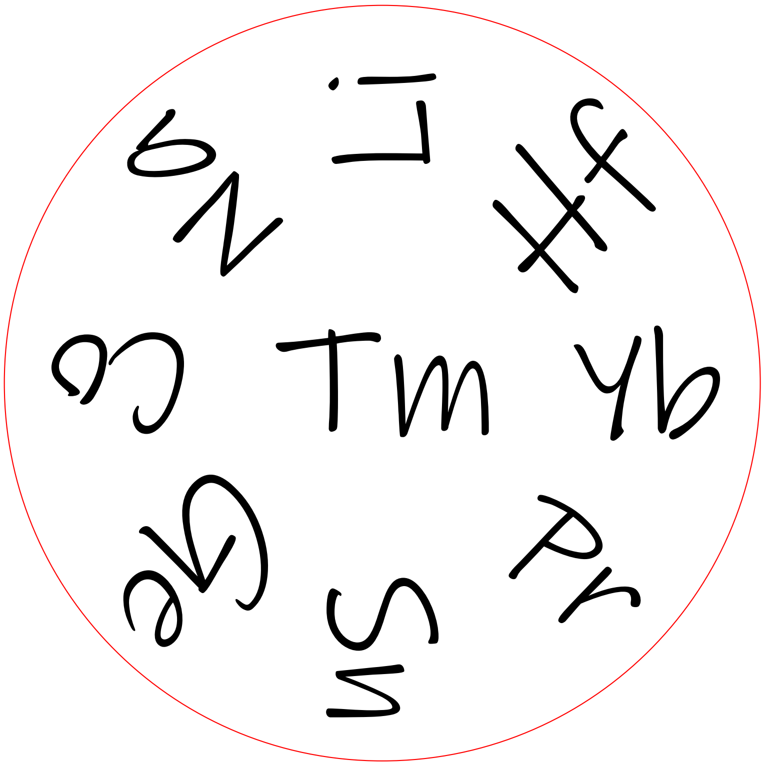


Figura 201: Carta 70

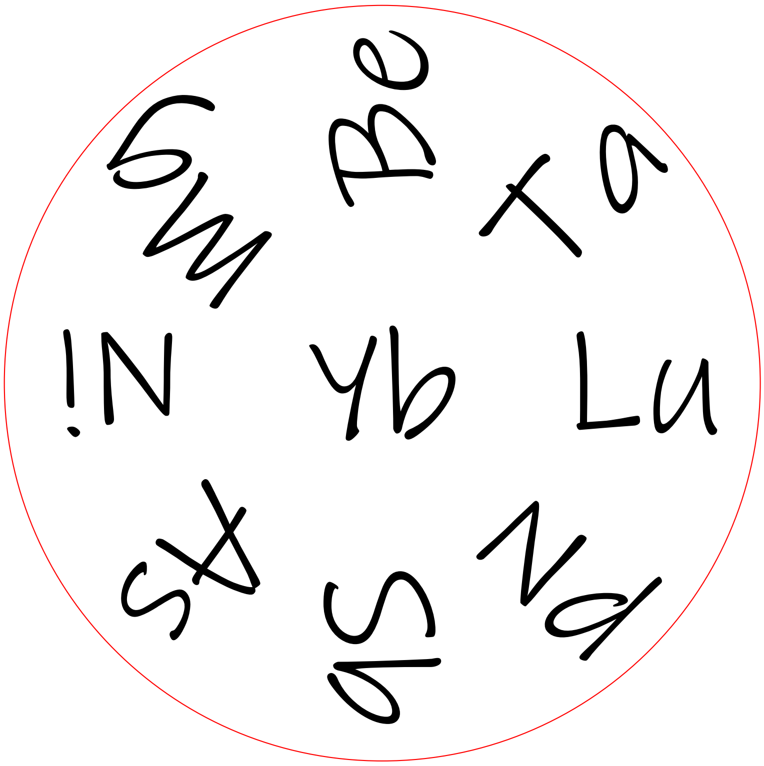


Figura 202: Carta 71

Figura 203: Carta 72

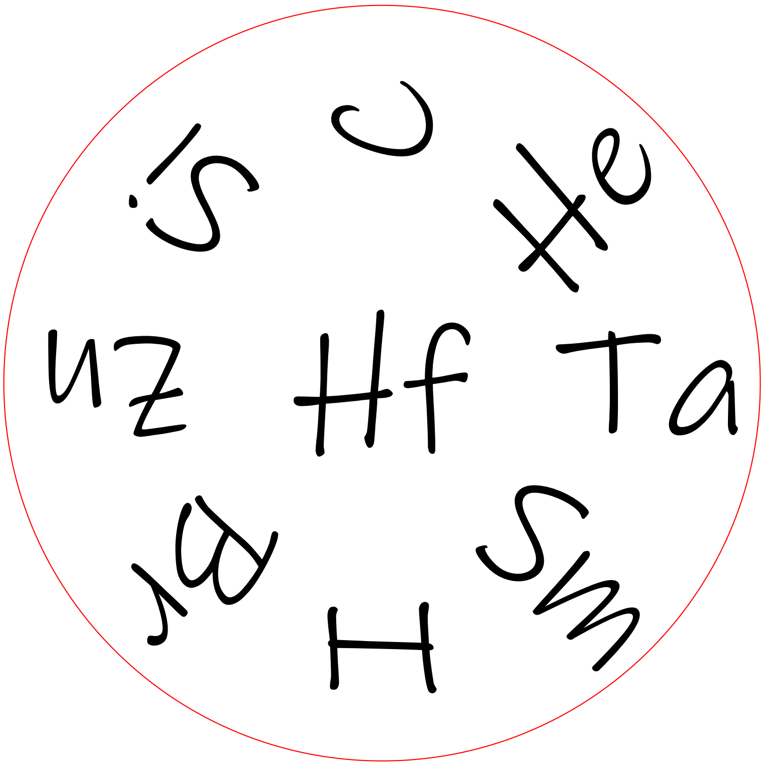


Figura 204: Carta 73

M. Representación de algunos discos de Penrose

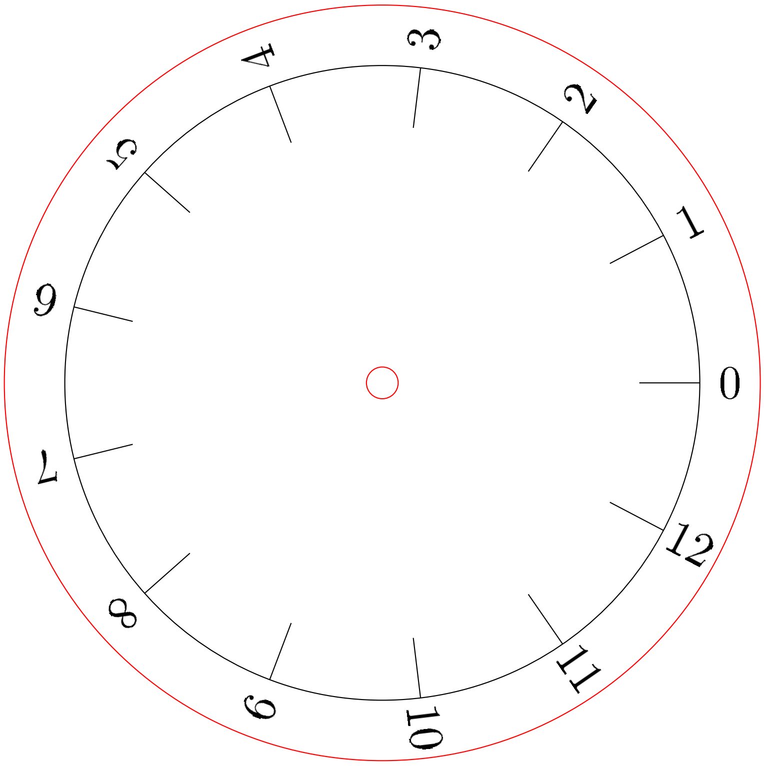


Figura 205: Disco grande de Penrose para $1 + q + q^2 = 13$

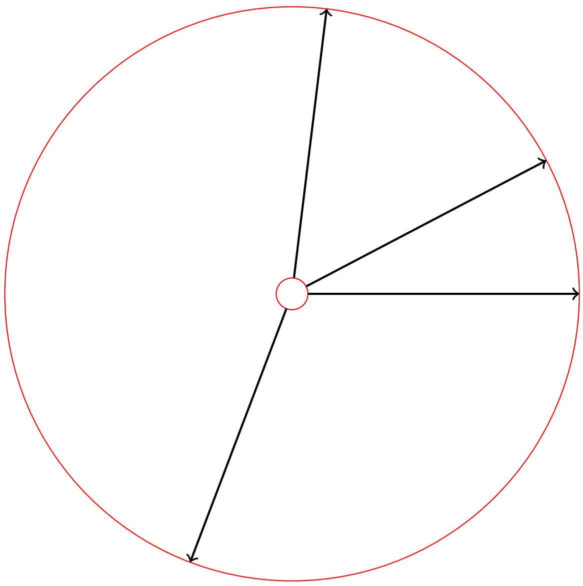


Figura 206: Disco rotatorio de Penrose para $1 + q + q^2 = 13$

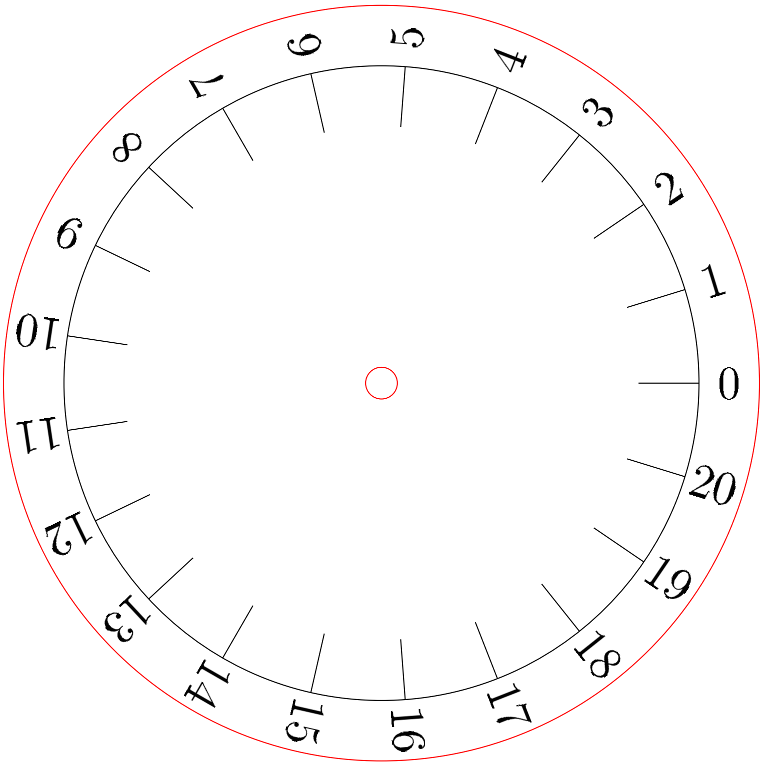


Figura 207: Disco grande de Penrose para $1 + q + q^2 = 21$

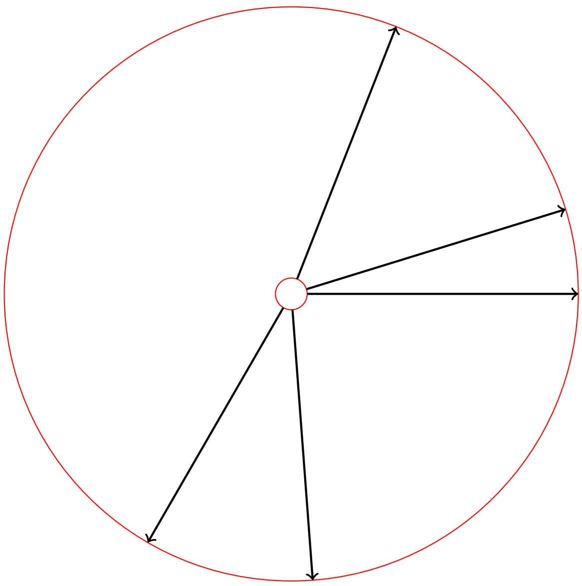


Figura 208: Disco rotatorio de Penrose para $1 + q + q^2 = 21$

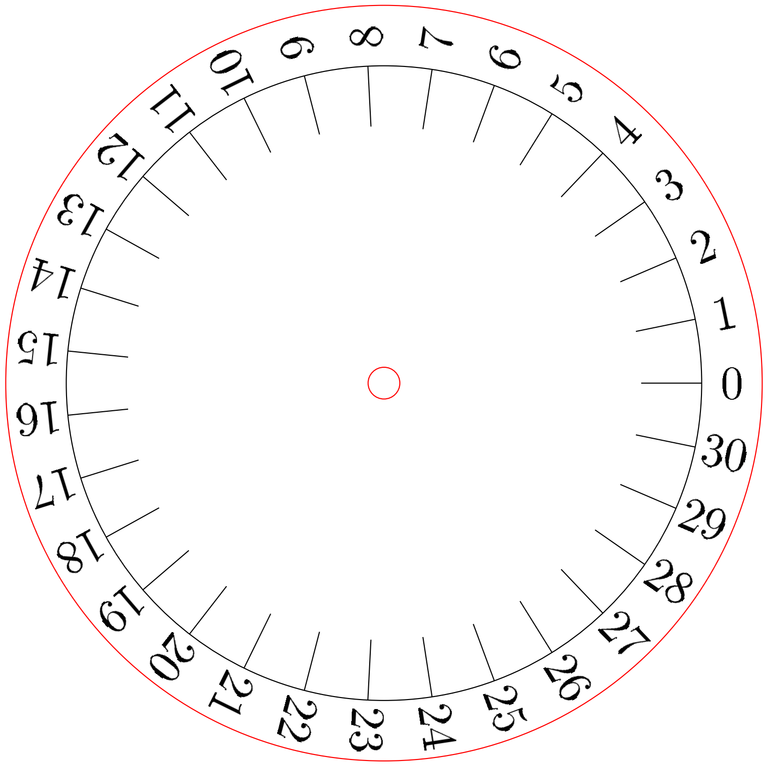


Figura 209: Disco grande de Penrose para $1 + q + q^2 = 31$

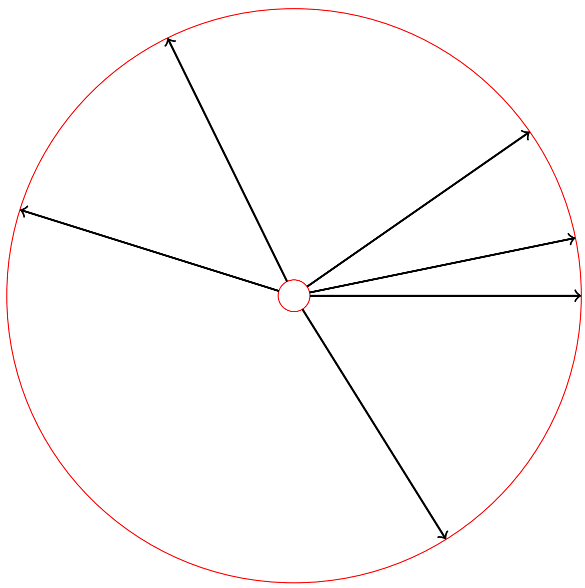


Figura 210: Disco rotatorio de Penrose para $1 + q + q^2 = 31$

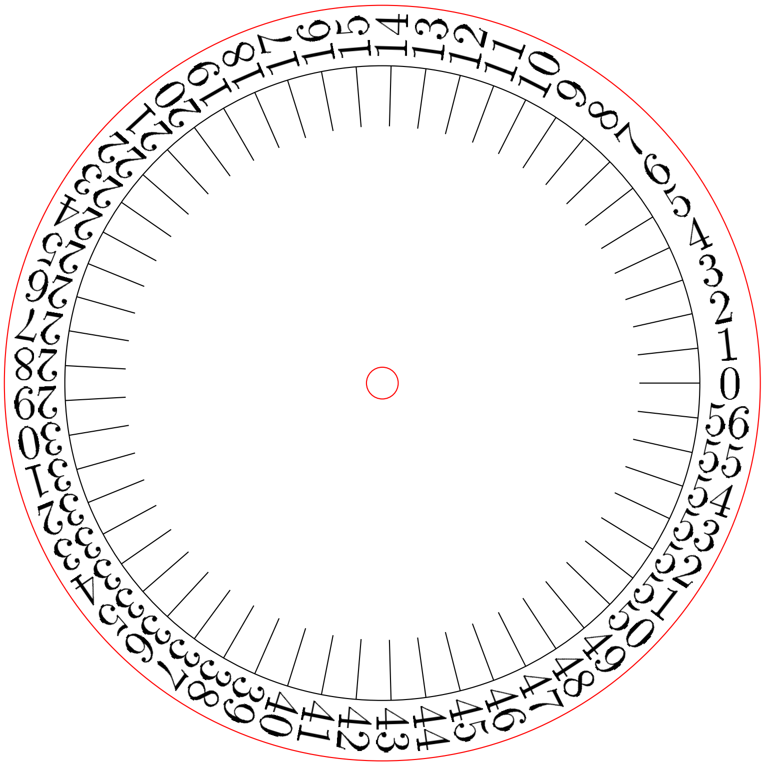


Figura 211: Disco grande de Penrose para $1 + q + q^2 = 57$

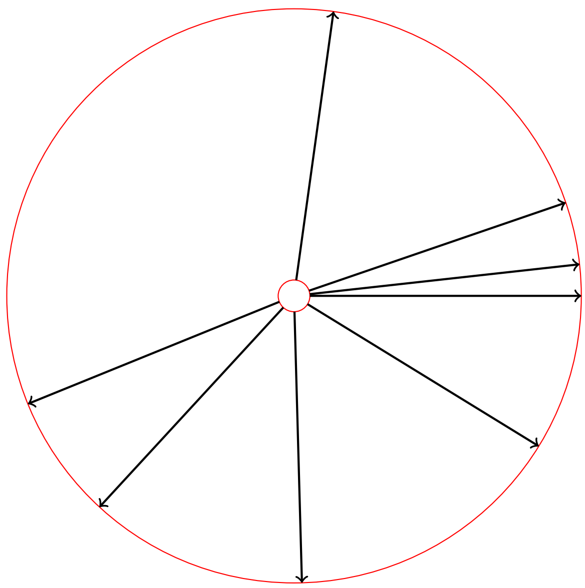


Figura 212: Disco rotatorio de Penrose para $1 + q + q^2 = 57$

Bibliografía

[1] Frank Ayres. *Geometría Proyectiva*. McGraw-Hill Book, Co., 1971.

[2] R. H. Bruck y H. J. Ryser. «The Nonexistence of Certain Finite Projective Planes». En: *Canadian Journal of Mathematics* 1.1 (1949), págs. 88-93.

[3] Judith N. Cederberg. *A Course in Modern Geometries*. New York, NY: Springer New York, 2001.

[4] M. Deléglise. «Plans projectifs, arithmétique modulaire et Dobble». 2013.

[5] P. Dembowski. *Finite Geometries*. Springer-Verlang, 1968.

[6] T. A. Evans y H. B. Mann. «On Simple Difference Sets». En: *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics (1933-1960)* 11.3/4 (1951), págs. 357-364. ISSN: 00364452. URL: http://www.jstor.org/stable/25048098.

[7] *Finite Projective Planes and the Math of Spot It*. URL: https://puzzlewocky.com/games/the-math-of-spot-it/.

[8] John B Fraleigh. *A First Course in Abstract Algebra*. Addison-Wesley, 1994.

[9] C. W. H. Lam. «The Search for a Finite Projective Plane of Order 10». En: *The American Mathematical Monthly* 98.4 (1991), págs. 305-318.

[10] J. W. Moon. *Topics on Tournaments*. New York: Holt, Rinehart y Winston, 1968.

[11] Roger Penrose. *El camino a la realidad: Una guía completa a las leyes del universo*. Editorial Debate, 2006.

[12] Burkard Polster. «The Intersection Game». En: *Math Horizons* 22.4 (2015), págs. 8-11.

[13] F.S. Roberts y B. Tesman. *Applied Combinatorics*. Pearson/Prentice Hall, 2005.

[14] D. Sengupta. *A Mathematical Analysis of Spot It!* URL: https://www.mathteacherscircle.org/assets/legacy/resources/materials/DSenguptaSpotIt.pdf.

[15] James Singer. «A Theorem in Finite Projective Geometry and Some Applications to Number Theory». En: *Transactions of the American Mathematical Society* 43.3 (1938), págs. 377-385.