

Física



Vicente Fernández
Fernández



BAÍA EDICIÓN S

FÍSICA

Segundo Curso de Bacharelato

Vicente Fernández Fernández



1ª Edición Abril 2009
© 2009 Vicente Fernández Fernández

© 2009 BAÍA Edicións
 Polígono de Pocomaco, 2ª Avda.
 Parcela G18 - Nave posterior
 15190 A Coruña
 Tel.: 981 174 296
 Fax: 981 915 698
 www.baiaedicions.net

Distribúe:
Consortio Editorial Galego
pedimentos@coegal.com



O formato deste libro permite o máximo aproveitamento dos pregos de papel, o que contribúe á protección do medio ambiente

Edita: Baía Edicións

Deseño
e ilustracións: Baía Edicións

Fotografía
portada: © NASA

Impresión: Galigraf Galicia, A Coruña

ISBN: 978-84-92630-11-0

D. LEGAL: C 891-2009

índice

Tema 1. Repaso de conceptos	13
1. Erros na medida	14
1.1. Erro absoluto	14
1.2. Erro relativo	14
2. Medidas indirectas. Cálculo da medida e do seu erro.....	15
2.1. Suma e resta	15
2.2. Multiplicación e división	16
3. Compoñentes dun vector.....	17
4. Vector unitario	18
5. Produto escalar e vectorial	18
5.1. Produto escalar de dous vectores	18
5.2. Produto vectorial de dous vectores	20
6. Momento dun vector con respecto a un punto.....	23
Mapa conceptual de magnitude física	24
7. Concepto de movemento	25
7.1. Concepto de velocidade e celeridade	26
7.2. Concepto de aceleración. Os seus compoñentes intrínsecos.....	26
7.3. Clasificación dos movementos	27
7.4. Composición de movementos.....	32
Mapa conceptual do movemento	35
8. Leis de Newton	36
8.1. Primeira lei de Newton ou principio da inercia	36
8.2. Segunda lei de Newton ou principio fundamental da Dinámica	37
8.3. Terceira lei de Newton ou principio de acción e reacción....	38
8.4. Primeira e segunda lei de Newton en función da cantidade de movemento	39
8.5. As leis de Newton en sistemas non inerciais. Forzas de inercia	40
9. Concepto de traballo	41
9.1. Traballo dunha forza conservativa.....	42
9.2. Traballo dunha forza conservativa e enerxía potencial	44
9.3. Traballo e enerxía cinética	44
9.4. Conservación da enerxía mecánica	45
Mapa conceptual dos contidos do tema	47

Tema 2. Campo gravitatorio	49
1. Historia da gravitación: leis de Kepler	50
2. Campos de forzas centrais: características xerais	51
2.1. Conservación do momento angular dunha partícula que se move baixo unha forza central	52
2.2. Carácter conservativo dunha forza central	55
3. Forza que orixina o campo gravitatorio: lei da gravitación universal	56
4. Intensidade do campo gravitatorio: principio de superposición ..	58
5. Variación de g coa distancia ao centro da Terra e coa latitude...	61
6. Enerxía potencial gravitatoria e potencial gravitatorio	64
7. Relación entre a intensidade de campo gravitatorio \vec{g} , e o potencial gravitatorio V	67
8. Liñas de forza do campo gravitatorio. Concepto de fluxo	67
9. A Terra como fonte de interacción gravitatoria. Satélites artificiais.....	69
9.1. Velocidade de escape	69
9.2. Velocidade de xiro ou velocidade orbital	71
9.3. Período de revolución dun satélite	73
9.4. Enerxía de enlace dun satélite	73
9.5. Enerxía de posta en órbita	74
10. Visión actual do Universo	76
Exercicios	79
Exercicios de selectividade	89
Mapa conceptual dos contidos do tema	94
 Tema 3. Campo eléctrico	 95
1. Propiedades xerais da carga eléctrica. Conservación e cuantificación	96
2. Lei de interacción entre cargas eléctricas: lei de Coulomb	97
3. Campo eléctrico: concepto	99
4. Intensidade de campo eléctrico.....	99
5. Liñas de forza	101
6. Teorema de Gauss. Aplicacións	103
6.1. Campo eléctrico creado por unha esfera condutora, uniformemente cargada, en equilibrio electrostático	106
6.2. Campo eléctrico creado por un fío condutor (ou cilindro) indefinido, uniformemente cargado, en equilibrio electrostático	108
6.3. Campo eléctrico creado por unha lámina plana condutora e indefinida, uniformemente cargada en equilibrio electrostático	109
7. Enerxía potencial eléctrica.....	110
8. Potencial eléctrico: Concepto e sentido físico	111
9. Relación entre a intensidade de campo eléctrico \vec{E} , e o potencial eléctrico, V	113

10. Analoxías e diferenzas entre o campo gravitatorio e o campo eléctrico	117
Exercicios	119
Exercicios de selectividade	126
Mapa conceptual dos contidos do tema	129
Tema 4. Campo magnético	131
1. Magnetismo: imáns naturais e experiencia de Oersted	132
1.1. A que se debe o magnetismo?	135
2. Forza magnética sobre unha carga, Q , en movemento: lei de Lorentz e definición de \vec{B}	136
3. Forza magnética exercida sobre unha corrente eléctrica	139
4. Campo magnético creado por unha carga puntual móbil	140
5. Campo magnético creado por unha corrente eléctrica	144
5.1. Campo magnético creado por un elemento de corrente	144
5.2. Campo magnético creado por unha corrente rectilínea indefinida	145
5.3. Campo magnético creado no centro dunha espira pola corrente que a percorre	147
5.4. Campo magnético creado por unha corrente circular nun punto do seu eixe	148
6. Forzas magnéticas entre correntes eléctricas paralelas: definición de ampere	149
7. Lei de Ampère. Campo magnético creado por un solenoide	151
7.1. Lei de Ampère	151
7.2. Campo magnético creado por un solenoide recto no seu interior	152
8. Analoxías e diferenzas entre o campo eléctrico e o campo magnético	154
Exercicios	156
Exercicios de selectividade	165
Mapa conceptual dos contidos do tema	168
Tema 5. Indución electromagnética	169
1. Experiencias de Faraday e Henry de indución electromagnética	170
2. Lei de Lenz e lei de Faraday	172
3. Autoindución	176
4. Visualización da corrente continua e alterna nun osciloscopio	179
4.1. O osciloscopio	179
4.2. Visualización da corrente	179
5. Produción da corrente alterna. Xeradores	181
6. Impacto ambiental da enerxía eléctrica	186

7. Situación enerxética de Galicia	189
Exercicios	190
Exercicios de selectividade	191
Mapa conceptual dos contidos do tema	193
Tema 6. Movemento harmónico simple	195
1. Introducción	196
2. Movemento harmónico simple. Relación co movemento circular uniforme	196
3. Cinemática do movemento harmónico simple.....	198
3.1. Ecuación do movemento	198
3.2. Velocidade	199
3.3. Aceleración	201
4. Dinámica do movemento harmónico simple	202
5. Enerxía do movemento harmónico simple.....	206
5.1. Enerxía potencial.....	206
5.2. Enerxía cinética	207
5.3. Enerxía mecánica.....	207
6. Exercicio de composición de dous movementos harmónicos simples de igual frecuencia	208
Exercicios	209
Exercicios de selectividade	214
Prácticas de laboratorio:	
Determinación experimental da aceleración da gravidade, g , co péndulo simple	219
Determinación da constante elástica, k , dun resorte: Estudo estático e dinámico	224
Mapa conceptual dos contidos do tema	231
Tema 7. Movemento ondulatorio	233
1. Concepto de onda e clases de ondas	234
2. Magnitudes do movemento ondulatorio	236
3. Ondas harmónicas. Ecuación de onda unidimensional	237
4. Enerxía dunha onda harmónica	241
5. Intensidade dunha onda harmónica.....	241
5.1. Atenuación	242
5.2. Absorción	244
6. Principio de Huygens: reflexión e refracción	245
7. Estudo cualitativo dalgunhas propiedades das ondas.....	250
7.1. Interferencias.....	250
7.2. Difracción.....	254
7.3. Polarización	255
8. O son	256
9. Calidades subxectivas do son: Sonoridade, ton e timbre	257
10. O eco	260
11. O efecto Doppler	261

Exercicios	264
Exercicios de selectividade	267
Mapa conceptual dos contidos do tema	271
Tema 8. A luz e as ondas electromagnéticas	273
1. Ecuacións de Maxwell	274
2. Estudo cualitativo das ondas electromagnéticas	275
3. Espectro electromagnético	277
4. Unha controversia: as ondas electromagnéticas de baixa frecuencia e a saúde humana	278
5. Evolución das teorías acerca da natureza da luz	280
6. Experiencia de Young (da dobre abertura)	283
7. Efecto fotoeléctrico. Interpretación	284
8. Efecto Compton	288
9. Dualidade onda-corpúsculo	290
10. Principio e incerteza de Heisenberg	291
Exercicios	293
Exercicios de selectividade	295
Mapa conceptual dos contidos do tema	298
Tema 9. Óptica xeométrica	299
1. Introducción	300
2. Normas DIN	300
3. Dioptro	301
3.1. Dioptro esférico	301
3.2. Dioptro plano	309
4. Espellos	310
4.1. Espellos esféricos	311
4.2. Espellos planos	314
5. Sistemas ópticos centrados	314
5.1. Lentes delgadas	315
6. Instrumentos ópticos	320
6.1. O ollo humano	320
6.2. A lupa	322
6.3. O microscopio	322
6.4. O anteollo e o telescopio	323
7. Aberracións nos sistemas ópticos	324
7.1. Aberración esférica	324
7.2. Aberración cromática	324
7.3. Distorsión	325
Exercicios	325
Exercicios de selectividade	328
Práctica: Estudo experimental dunha lente converxente	331
Mapa conceptual dos contidos do tema	333

Tema 10. Física relativista	335
1. Sistemas de referencia	336
2. A relatividade na mecánica clásica	336
3. Experiencia de Michelson-Morley	338
4. Interpretación de Einstein. Teoría da relatividade restrinxida ou especial	340
5. Transformación de Lorentz. Consecuencias	341
5.1. Simultaneidade	342
5.2. Dilatación do tempo	343
5.3. Contracción da lonxitude	345
6. Masa e enerxía relativistas. Equivalencia	346
Exercicios	349
Exercicios de selectividade	351
Mapa conceptual dos contidos do tema	352
Tema 11. Física nuclear e partículas atómicas	353
1. O núcleo atómico	354
2. Defecto de masa nuclear	355
3. Desintegracións α , β e γ	357
4. Reaccións nucleares: fisión e fusión	360
5. Estabilidade nuclear	362
6. Decaemento exponencial e vida media	363
7. Partículas elementais e forzas fundamentais	366
Exercicios	369
Exercicios de selectividade	373
Mapa conceptual dos contidos do tema	375
Apéndices	377
1. Alfabeto grego	377
2. Datos do Sistema Solar	377
3. Nome e símbolo dalgunhas magnitudes físicas coas unidades do SI	378
4. Nome dos elementos químicos	380
5. Táboa periódica	381

presentación

O texto de Física que segue a continuación, dirixido ao alumnado de Segundo de Bacharelato, foi elaborado tendo en conta o Decreto 126/2008 de 19 de xuño (publicado no DOG número 120, do 23-06-08), que establece o “Currículo do Bacharelato na Comunidade Autónoma de Galicia”.

O desenvolvemento teórico acompáñase de exercicios resoltos, que pretenden servir de guía e axuda para o alumnado na aplicación das ideas e conceptos tratados ao longo dos distintos temas.

Co obxectivo de facer a revisión das diferentes partes de cada tema, proponse ao final dos mesmos unha serie de exercicios, que se diferencian en cuestións e “problemas”; estes últimos levan indicada a solución numérica para facilitar o traballo autónomo por parte das alumnas e alumnos. Moitos destes exercicios foron propostos nas PAAU nos últimos anos.

En varios temas desenvólvense prácticas de laboratorio que se pretende sirvan, segundo os casos, para comprobar, clarificar, deducir... unha lei, un concepto... ademais de ser, nalgúns casos, materia da proba de selectividade.

Ao final de cada tema pídeselle ao alumnado que elabore un mapa conceptual. Os que aparecen no texto deben usarse como axuda clarificadora dos conceptos adquiridos e nunca como substitutivos concentrados do texto para a súa memorización.

Desexo que o tratamento aquí dado á materia de Física de 2º de Bacharelato sexa de axuda e utilidade para quen faga uso deste libro, agradecendo de antemán todas as observacións que se indiquen para a súa mellora e incorporación en futuras edicións.

Por último quero recordar a todas as persoas que con desinterese me axudaron a mellorar neste manual as anteriores achegas e propostas didácticas que facía nos textos editados desde o ano 2003 por Baís Edicións.

Vicente Fernández Fernández

Repaso de conceptos

1. Erros na medida
2. Medidas indirectas. Cálculo da medida e do seu erro
3. Compoñentes dun vector
4. Vector unitario
5. Produto escalar e vectorial
6. Momento dun vector con respecto a un punto

Mapa conceptual de magnitude física

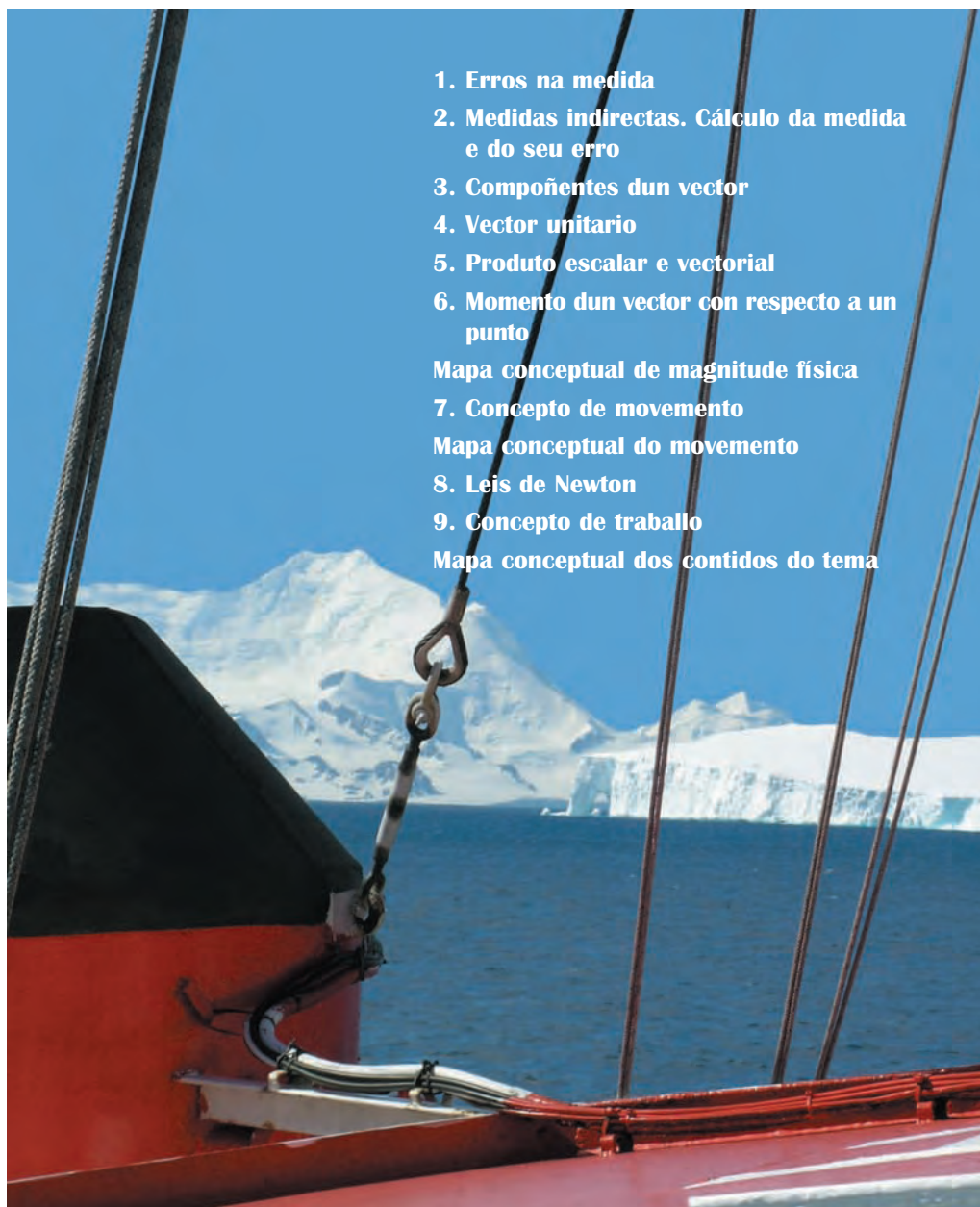
7. Concepto de movemento

Mapa conceptual do movemento

8. Leis de Newton

9. Concepto de traballo

Mapa conceptual dos contidos do tema



1. ERROS NA MEDIDA

Toda medida vai acompañada dun erro, que pode deberse a diferentes causas, como:

- Unha equivocación. A medida equivocada non se ten en conta.
- Un mal uso do aparello de medida, un mal funcionamento deste etc. Esta causa de erro coñécese como **erro sistemático** e pode eliminarse cando se utilizan aparellos que funcionan correctamente e se manipulan de forma adecuada.
- O método utilizado é a limitación dos nosos sentidos. Estas causas conducen ao **erro accidental**, que non podemos eliminar, pero si minimizar aplicando as leis da estatística a un gran número de medidas. Como a probabilidade de cometer un erro por defecto é a mesma que a de cometelo por exceso, os valores obtidos oscilarán ao redor dun **valor medio**, que é o que se toma como **valor da medida**.

1.1. Erro absoluto

Para determinar o intervalo no que está comprendido o valor real da medida, defínese o **erro absoluto** (Δ) como aquela cantidade para a que o valor verdadeiro da medida vai estar incluído no intervalo:

$$[v_{\text{medio}} - \Delta v, v_{\text{medio}} + \Delta v]$$

Podemos calculalo seguindo o criterio de:

- Calcular o valor medio das medidas, omitindo aquelas que presenten unha desviación esaxerada.
- Calcular en valor absoluto a diferenza entre o valor de cada medida e o da media aritmética.
- Facer o valor medio das diferenzas anteriores.

Tómase como erro absoluto da medida o valor que sexa maior de entre:

- O valor medio das desviacións.
- A imprecisión do aparello de medida.

A medida da magnitude exprésase da forma: **valor medio \pm erro absoluto**, dando o erro con 1 soa cifra significativa.

1.2. Erro relativo

O cociente do erro absoluto entre o valor da medida indícanos o seu grao de precisión e coñécese como **erro relativo**:

$$E_{\text{relativo}} = \frac{E_{\text{absoluto}}}{\text{valor da medida}}$$

Exprésase con 1 soa cifra significativa e xeralmente é un número pequeno, polo que é habitual expresalo en tanto por cento.

- Consideremos as seguintes medidas da masa dun corpo feitas cunha balanza: 27,756 g, 27,757 g, 27,751 g, 27,761 g, 27,755 g, 27,759 g.

Calcula:

- O valor que se tomará como masa do corpo.
- O erro absoluto da medida, dando o valor da mesma.
- O erro relativo da medida.

Solución:

$$a) \frac{27,756 + 27,757 + 27,761 + 27,755 + 27,759}{5} = 27,7576 \rightarrow 27,758 \text{ g}$$

- $|27,756 - 27,758| = 0,002$
 $|27,757 - 27,758| = 0,001$
 $|27,761 - 27,758| = 0,003$
 $|27,755 - 27,758| = 0,003$
 $|27,759 - 27,758| = 0,001$

O valor medio das desviacións é:

$$\frac{0,002 + 0,001 + 0,003 + 0,003 + 0,001}{5} = 0,002$$

A medida vai ter tres cifras decimais, tomándose como valor desta: $(27,758 \pm 0,002)$ g.

$$c) E_r = \frac{0,002}{27,758} \cdot 100 \rightarrow E_r = 0,007\%$$

2. MEDIDAS INDIRECTAS. CÁLCULO DA MEDIDA E DO SEU ERRO

Moitas veces o valor da cantidade dunha magnitude física obtense mediante operacións alxebraicas. Con cantos decimais se dá o resultado?

2.1. Suma e resta

O resultado da operación non pode ter máis cifras decimais que o valor experimental que menos decimais posúa e o erro absoluto obtense sumando os erros absolutos de cada sumando. Exemplo:

$$30,780 \text{ m} + 6,646 \text{ m} - 10,03 \text{ m} = ?$$

O número que obtemos na calculadora é 27,396 m. Pero esta suma só debe ter dúas cifras decimais debido ao terceiro sumando (10,03 m). Despois de facer o correspondente redondeo resulta: $(27,40 \pm 0,01)$ m.

2.2. Multiplicación e división

O cálculo do erro absoluto dun produto de factores pode obterse diferenciando a expresión e substituíndo despois as diferenciais polos erros absolutos correspondentes (Δ). Así, para o produto $l_1 \cdot l_2 = S$ será:

$$S = l_1 \cdot l_2 \rightarrow dS = d(l_1 \cdot l_2) = dl_1 \cdot l_2 + l_1 \cdot dl_2 \rightarrow \Delta S = \Delta l_1 \cdot l_2 + l_1 \cdot \Delta l_2$$

Tamén podemos facer este cálculo a partir do erro relativo. Este obtense sumando os erros relativos dos distintos factores:

$$E_r = \frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta(l_1 \cdot l_2)}{l_1 \cdot l_2} = \frac{\Delta l_1 \cdot l_2}{l_1 \cdot l_2} + \frac{l_1 \cdot \Delta l_2}{l_1 \cdot l_2} = \frac{\Delta l_1}{l_1} + \frac{\Delta l_2}{l_2} = E_{r \text{ de } l_1} + E_{r \text{ de } l_2}$$

Agora, recordando que: $E_r = E_{\text{absoluto}}/\text{valor da medida}$, obtemos: $E_{\text{absoluto}} = E_r \cdot \text{valor de medida}$.

Exercicio resolto

- Dado un rectángulo de dimensións: $l_1 = 5,2$ m e $l_2 = 9,23$ m, calcula a súa superficie, indicando o seu erro absoluto.

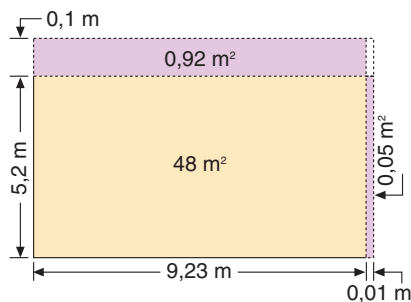
Solución:

En xeral, o resultado da operación redondearase ata que posúa o mesmo número de cifras decimais, ou de cifras significativas, que a do factor que menos teña.

$$S = 5,2 \text{ m} \times 9,23 \text{ m} = ?$$

Tendo en conta que o número que aparece na calculadora é 47,996, en principio o resultado será:

$$S = 5,2 \text{ m} \times 9,23 \text{ m} = 48,0 \text{ m}^2$$



Pero o número de cifras co que hai que expresar o resultado depende do erro absoluto, polo que procedemos ao seu cálculo.

O erro absoluto que se comete por exceso no cálculo da superficie do rectángulo é o da parte coloreada de violeta na figura (desprezamos a área do pequeno rectángulo que aparece sen pintar) e podémolo obter diferenciando a expresión $S = l_1 \cdot l_2$, substituíndo despois as diferenciais polos correspondentes erros absolutos:

$$S = l_1 \cdot l_2 \rightarrow dS = d(l_1 \cdot l_2) = dl_1 \cdot l_2 + l_1 \cdot dl_2 \rightarrow \Delta S = \Delta l_1 \cdot l_2 + l_1 \cdot \Delta l_2$$

Nos valores de $l_1 = 5,2$ m e $l_2 = 9,23$ m non se dá de forma expresa o erro absoluto das medidas, entendendo entón que este é o de 1 unidade na última cifra significativa, podendo expre-

sar as cantidades anteriores como: $l_1 = (5,2 \pm 0,1)$ m e $l_2 = (9,23 \pm 0,01)$ m. Substituíndo na ecuación anterior temos:

$$E_{\text{absoluto de } S} = \Delta S = 5,2 \text{ m} \cdot 0,01 \text{ m} + 0,1 \text{ m} \cdot 9,23 \text{ m} = 0,975 \text{ m}^2 \rightarrow 1 \text{ m}^2$$

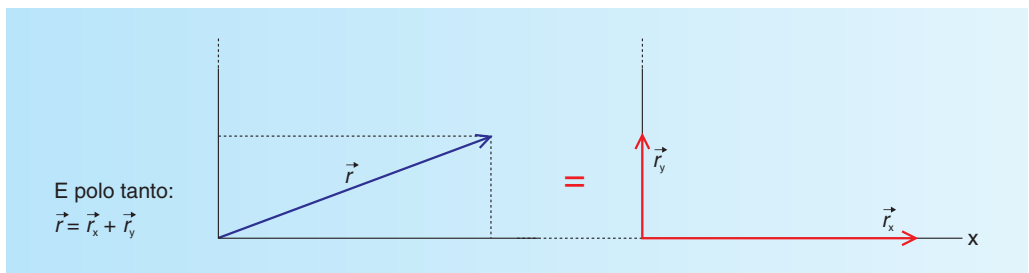
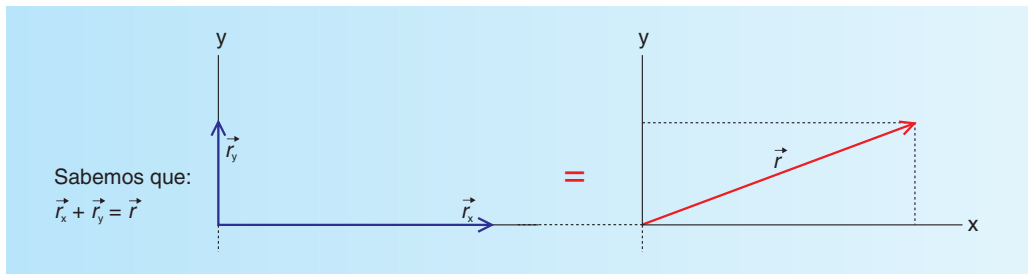
Isto indícanos que a superficie calculada está afectada dun erro nas unidades, polo que o seu valor exprésase con dúas cifras significativas: 48 m^2 ($48 \pm 1 \text{ m}^2$).

A igual resultado chegamos se calculamos o erro absoluto con axuda do erro relativo: $E_{\text{absoluto}} = E_r \cdot \text{valor de medida}$:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{0,1}{5,2} + \frac{0,01}{9,23} = 0,02 \\ E_r &= \frac{E_{\text{absoluto}}}{\text{valor de medida}} \end{aligned} \right\} \rightarrow E_{\text{absoluto}} = E_r \cdot \text{valor de medida} = 0,02 \cdot 48,0 = 0,96 \text{ m}^2 \rightarrow 1 \text{ m}^2$$

E a medida da superficie do rectángulo é: $S = (48 \pm 1) \text{ m}^2$

3. COMPOÑENTES DUN VECTOR



\vec{r}_x e \vec{r}_y son os **compoñentes** do vector \vec{r} nas direccións dos eixes x e y.

Fixémonos que $|\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$, pero $r \neq r_x + r_y$ (soamente o módulo do vector resultante será igual á suma dos módulos dos vectores compoñentes cando estes coincidan en dirección).

Isto que fixemos no plano, podemos levalo a tres dimensións, resultando:

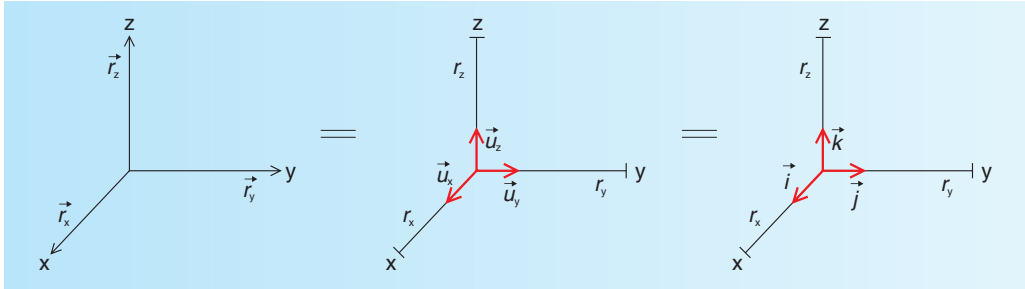
$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z \rightarrow |\vec{r}| = r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$$

4. VECTOR UNITARIO

Defínese o vector unitario¹ do vector \vec{r} como aquel vector de módulo unidade e con igual dirección e sentido que o vector \vec{r} e represéntase por \vec{u}_r , sendo $\vec{u}_r = \vec{r}/r$.

Os vectores unitarios nas direccións dos eixes de coordenadas cartesianas son: \vec{u}_x ou \vec{i} , \vec{u}_y ou \vec{j} , \vec{u}_z ou \vec{k} , podendo escribir \vec{r} da forma:

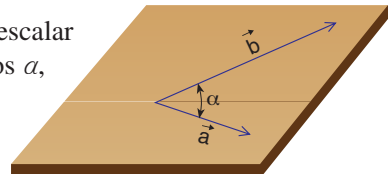
$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z = r_x \cdot \vec{u}_x + r_y \cdot \vec{u}_y + r_z \cdot \vec{u}_z = r_x \cdot \vec{i} + r_y \cdot \vec{j} + r_z \cdot \vec{k}$$



5. PRODUTO ESCALAR E VECTORIAL

5.1. Produto escalar de dous vectores

Sexan os vectores \vec{a} e \vec{b} . Representase o seu produto escalar pola expresión: $\vec{a} \cdot \vec{b}$, e defínese como: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \alpha$, sendo α o ángulo formado polos vectores \vec{a} e \vec{b} .



Da definición de produto escalar vemos que:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \text{ -xa que } \cos \alpha \text{ é igual a } \cos(-\alpha)$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \text{ -xa que } \vec{i} \cdot \vec{i} = i \cdot i \cdot \cos 0^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$$

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

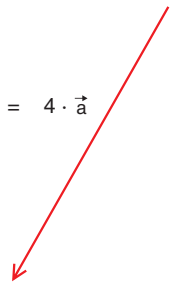
$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \text{ -xa que } \vec{i} \cdot \vec{j} = i \cdot j \cdot \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

¹ Recordando o produto dun escalar por un vector, podemos considerar todo vector como múltiplo doutro calquera da súa mesma dirección e sentido. Se ten o módulo unidade, chámalle **vector unitario**.

$$\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} + \vec{a} = 4 \cdot \vec{a}$$



O produto escalar de dous vectores en función dos seus compoñentes cartesianos é:

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \\ \vec{b} &= b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \end{aligned} \right\} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) =$$

$$a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \cdot \vec{k} + a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} +$$

$$a_y b_y \vec{j} \cdot \vec{j} + a_y b_z \vec{j} \cdot \vec{k} + a_z b_x \vec{k} \cdot \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \cdot \vec{j} +$$

$$a_z b_z \vec{k} \cdot \vec{k} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

(xa que $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ e $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$)

O produto escalar de dous vectores libres en función dos seus compoñentes cartesianos é igual á suma dos produtos dos seus compoñentes homónimos.

Exercicio resolto

- Dados os vectores: $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{b} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, expresados en unidades do sistema internacional, fai o seu produto escalar e calcula o ángulo que forman.

Solución:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 6 + 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2 = 4 \text{ unidades do SI.}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= a \cdot b \cdot \cos \alpha \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= 4 \\ a &= \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3 \\ b &= \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = 7 \end{aligned} \right\} \rightarrow 4 = 3 \cdot 7 \cdot \cos \alpha \rightarrow \alpha = 79^\circ$$

Cuestión teórica

- Comenta se se cumpren as seguintes igualdades:

a) $\vec{a} \cdot \vec{a} \neq a^2$

R: Si

b) Se $\vec{a} \neq \vec{0}$, e $\vec{b} \neq \vec{0}$, pode ocorrer que $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$?

R: Si

c) Pode cumprirse a igualdade $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b$?

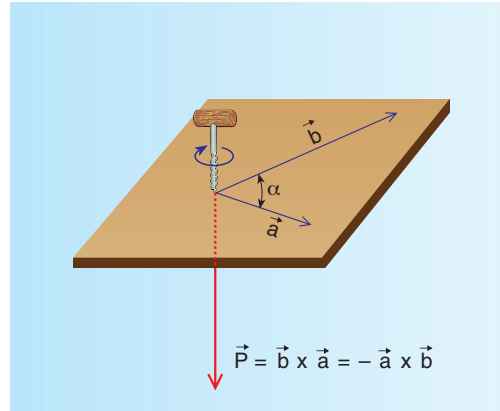
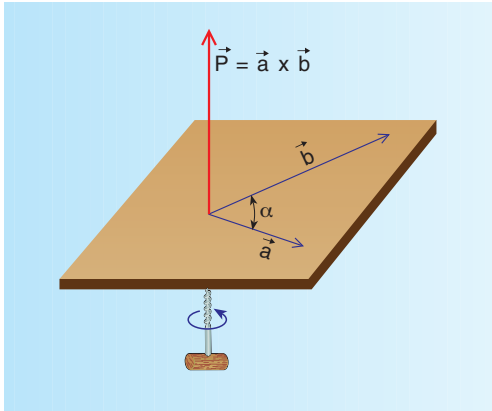
R: Si

² Estes vectores tamén se poden expresar, respectivamente, da forma: $\vec{a} = (2, 2, -1)$ e $\vec{b} = (6, -3, 2)$

5.2. Produto vectorial de dous vectores

Sexan os vectores \vec{a} e \vec{b} . Simbolízase o seu produto vectorial, \vec{P} , pola expresión: $\vec{a} \times \vec{b}$ ou $\vec{a} \wedge \vec{b}$ sendo un vector de:

- **Módulo:** $a \cdot b \cdot |\text{sen } \alpha| = P$
- **Dirección:** a perpendicular ao plano determinado polos dous vectores.
- **Sentido:** o de avance dun sacarroilas que xire levando o primeiro vector multiplicando sobre o segundo polo camiño máis curto.



Da definición de produto vectorial vemos que:

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}, \text{ xa que: } |\vec{i} \times \vec{i}| = 1 \cdot 1 \cdot \text{sen } 0 = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$$

$$\vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \text{ xa que: } \left\{ \begin{array}{l} |\vec{i} \times \vec{j}| = 1 \cdot 1 \cdot \text{sen } 90 = 1 \\ \text{Dirección: a perpendicular ao plano determinado por} \\ \vec{i} \text{ e } \vec{j}, \text{ que é a do eixe } z. \\ \text{Sentido: o de avance dun sacarroilas que leve } \vec{i} \text{ sobre } \vec{j} \\ \text{polo camiño máis curto, resultando ser o vector } \vec{k}. \end{array} \right.$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

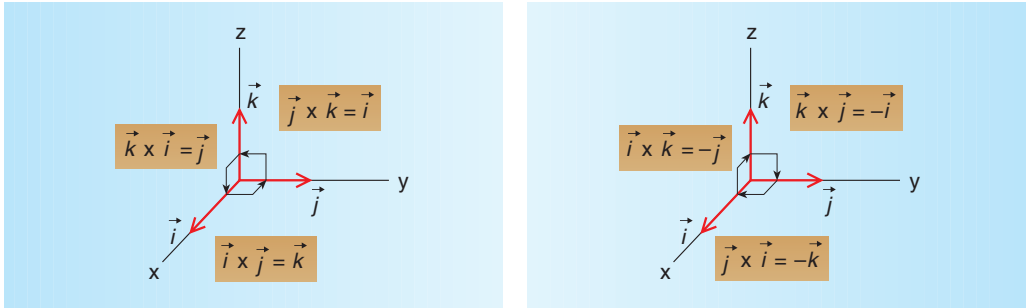
$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

$$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$

Con axuda dos seguintes gráficos recordaremos facilmente o resultado do produto vectorial de dous vectores unitarios ortogonais.



O produto vectorial de dous vectores en función dos seus compoñentes cartesianos é:

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \\ \vec{b} &= b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \end{aligned} \right\} \rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) =$$

$$a_x b_x \vec{i} \times \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \times \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \times \vec{k} + a_y b_x \vec{j} \times \vec{i} +$$

$$a_y b_y \vec{j} \times \vec{j} + a_y b_z \vec{j} \times \vec{k} + a_z b_x \vec{k} \times \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \times \vec{j} +$$

$$a_z b_z \vec{k} \times \vec{k} = a_x b_y \vec{k} + a_x b_z (-\vec{j}) + a_y b_x (-\vec{k}) +$$

$$a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} + a_z b_y (-\vec{i}) = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} +$$

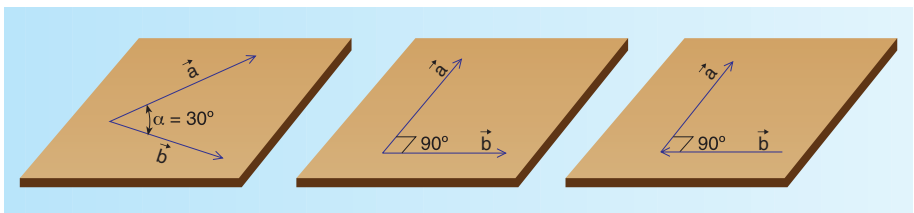
$$(a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$

Esta última expresión pódese recordar máis facilmente coa axuda dun novo operador, chamado **determinante**:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{P}$$

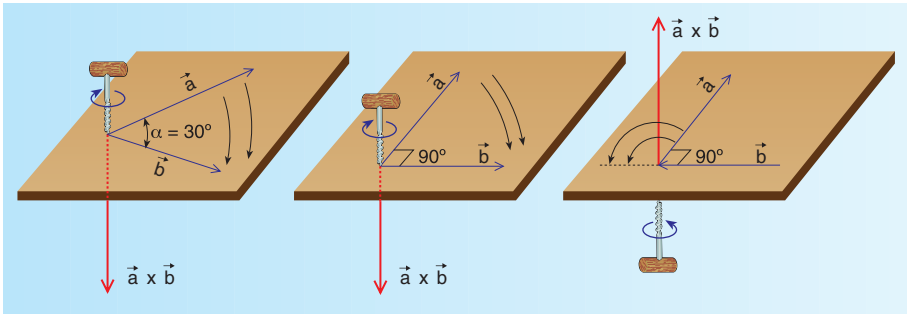
Exercicio resolto

- Di cal será a dirección e o sentido do produto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ nos seguintes casos:



Solución:

A indicada nos seguintes debuxos.



- **Primeiro caso.** Dirección: a perpendicular ao plano determinado polos vectores \vec{a} e \vec{b} . Polo tanto, a vertical ao plano do debuxo.
Sentido: o de avance dun sacarrollas que xire levando o primeiro vector multiplicando sobre o segundo vector, polo camiño máis curto. Polo tanto, cara abaixo.
- **Segundo caso.** Igual dirección e sentido que no anterior.
- **Terceiro caso.** Neste caso o vector \vec{b} vai cara á esquerda, e para levar \vec{a} sobre \vec{b} polo camiño máis curto temos que facer avanzar o sacarrollas desde abaixo cara arriba.

Exercicio resolto

► Dados os vectores: $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ e $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, calcula: a) $\vec{a} \times \vec{b}$ e b) $\vec{b} \times \vec{a}$.

Solución:

a)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (2-2)\vec{i} - (-6-2)\vec{j} + (3+1)\vec{k} \rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 8\vec{j} + 4\vec{k}$$

b) Facendo o mesmo, pero cambiando os compoñentes do vector \vec{a} polos do vector \vec{b} e os do vector \vec{b} polos do \vec{a} , chegamos a: $\vec{b} \times \vec{a} = -8\vec{j} - 4\vec{k}$, resultado que se pode prever, xa que: $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$.

Cuestión teórica

► Comenta se se cumpren as seguintes igualdades:

a) Pode ocorrer que $|\vec{a} \times \vec{a}| = a^2$?

R: Non

b) Se $\vec{a} \neq \vec{0}$ e $\vec{b} \neq \vec{0}$, pode ocorrer que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$?

R: Si

c) Pode cumprirse a igualdade: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$?

R: Non

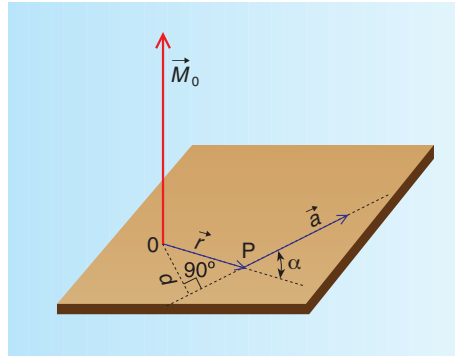
6. MOMENTO DUN VECTOR CON RESPECTO A UN PUNTO

Sexa o vector \vec{a} con orixe no punto P. Defínese o momento do vector escorregante \vec{a} con respecto ao punto O, e represéntase por \vec{M} ou \vec{M}_0 , como: $\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{a}$, sendo \vec{r} un vector que une o punto O cun punto calquera da liña de acción do vector \vec{a} .

De acordo coa definición, o momento dun vector é un novo vector que ten por:

- **Módulo:** $M_0 = r \cdot a \cdot \text{sen } \alpha = a \cdot d$, sendo d a perpendicular que vai desde o punto O até a liña de acción do vector \vec{a} .
- **Dirección:** a perpendicular ao plano determinando polo vector \vec{a} e o punto con respecto ao cal se calcula o seu momento.
- **Sentido:** o de avance dun sacarrollas que xire levando o vector de posición \vec{r} sobre o vector \vec{a} polo camiño máis curto.

Aínda que o vector momento é un vector libre, acostúmase representalo por un vector aplicado no punto O.



Exercicio resolto

- Dado o vector \vec{a} , que ten a súa orixe no punto (3,5) e o seu extremo en (5,4), calcula o seu momento con respecto á orixe de coordenadas.

Solución:

O vector \vec{a} é o indicado na figura:

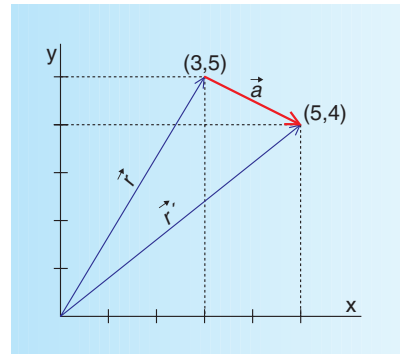
Sabemos que $\vec{r} + \vec{a} = \vec{r}'$ e, polo tanto, $\vec{a} = \vec{r}' - \vec{r}$:

$$\vec{a} = (5\vec{i} + 4\vec{j}) - (3\vec{i} + 5\vec{j})$$

E como para sumar (ou restar) vectores en función dos seus compoñentes se fai sumando (ou restando) os compoñentes homónimos, temos:

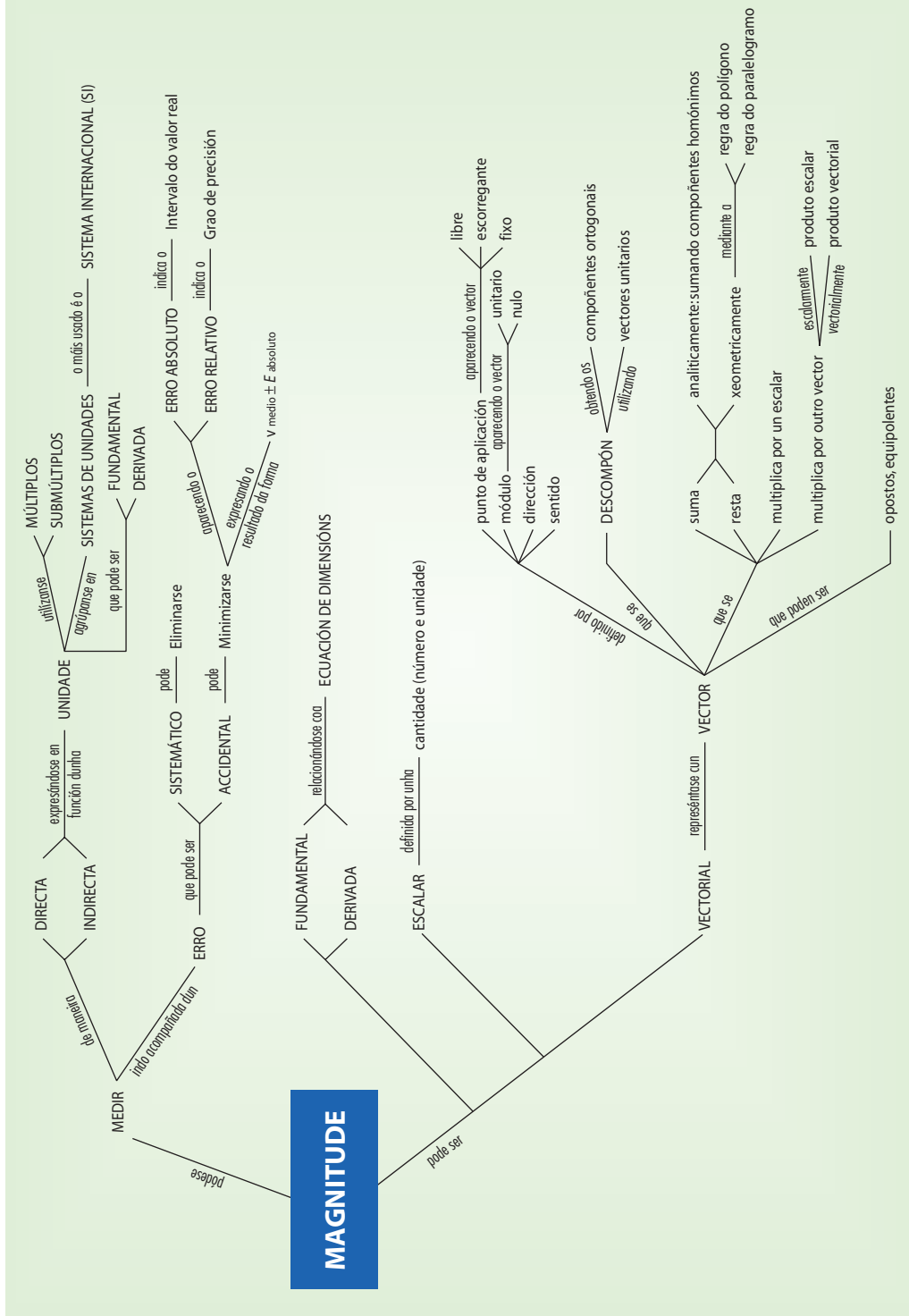
$$\vec{a} = (5 - 3)\vec{i} + (4 - 5)\vec{j} = 2\vec{i} - \vec{j}$$

Recordando o concepto de momento dun vector con respecto a un punto, resulta:



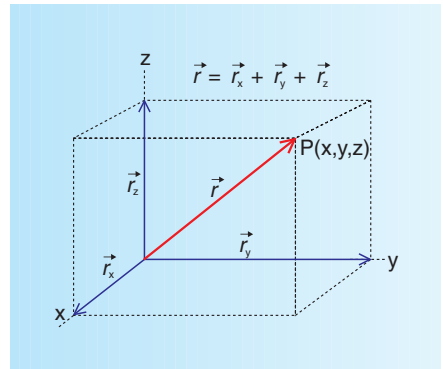
$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{a} \rightarrow \vec{M}_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -13\vec{k}$$

Mapa conceptual de magnitude física

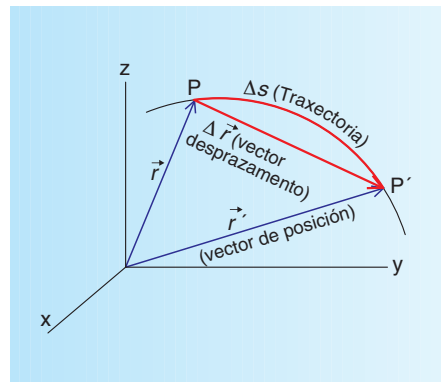


7. CONCEPTO DE MOVIMIENTO

Cando viaxamos sentados nun autobús en marcha, dicir se estamos en repouso ou en movemento existe establecer primeiramente unha referencia. Así, non cambiamos de lugar nin de posición con respecto ao noso asento; no entanto estamos distanciándonos continuamente con respecto á paraxe de subida. Utilizaremos como elementos de referencia tres eixes de coordenadas rectangulares. Neles, a posición dun corpo vén dada polo **vector de posición**, que é o vector que ten a súa orixe na orixe de coordenadas e o seu extremo no punto material.



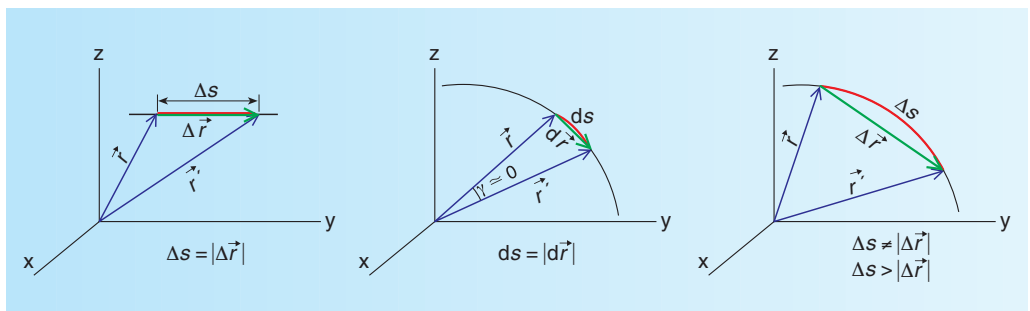
O cambio de posición do móbil podémolo dar polo vector que une o seu punto de partida co de chegada ($\Delta \vec{r}$). Vén ser a diferenza entre os vectores de posición final e inicial e coñécese como **vector desprazamento** ou simplemente **desprazamento**.



O camiño que segue o móbil no seu desprazamento chámase **traxectoria**. Segundo a traxectoria, os movementos clasifícanse en rectilíneos e curvilíneos, incluíndo nestes últimos o movemento circular, parabólico, elíptico etc., en función da forma da curva que describen.

O valor da traxectoria, ou espazo percorrido polo móbil, coincide co módulo do vector desprazamento? A resposta pode ser:

- Si, se o movemento é rectilíneo e non hai retroceso, ou se se supón un desprazamento infinitesimal (xa que neste caso a corda tende a coincidir co arco).
- Non, se non estamos nos supostos anteriores.



7.1. Concepto de velocidade e celeridade

- **Velocidade media:** $\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$. É un vector de igual dirección e sentido que o vector desprazamento.
- **Velocidade instantánea** ou simplemente **velocidade:** $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. É un vector que ten a dirección de $d\vec{r}$, que é tanxente á traxectoria no punto considerado.
- **Celeridade media** ou **velocidade media escalar:** $c_m = v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. É un escalar; é o que na linguaxe coloquial se chama velocidade.
- **Celeridade instantánea** ou **velocidade instantánea escalar:** $c = v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$. É un escalar.

Como en xeral non coincide Δs co módulo de $\Delta \vec{r}$, a celeridade media é distinta do módulo da velocidade media. No entanto: $|\vec{r}| = ds$ e $c = v = |\vec{v}|$, podendo escribir \vec{v} da forma: $\vec{v} = v \cdot \vec{u}_t$.

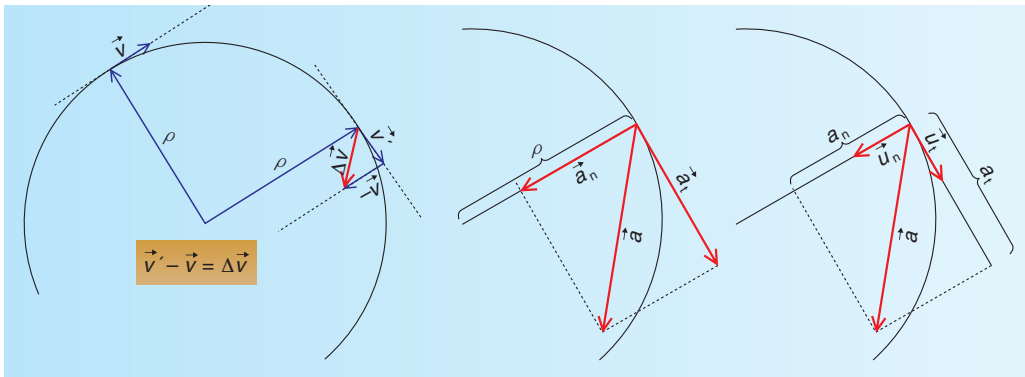
7.2. Concepto de aceleración. Os seus compoñentes intrínsecos

Aceleración media: $\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$. É un vector de igual dirección e sentido que $\Delta \vec{v}$.

Aceleración instantánea ou simplemente **aceleración:** $\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$. É un vector de

igual dirección e sentido que $d\vec{v}$ e, en xeral, non é tanxente á traxectoria, apuntando cara á parte interior da curva. Descomponse en dúas direccións (compoñentes intrínsecos): unha na tanxente á traxectoria, \vec{a}_t , chamada **aceleración lineal ou tanxencial**, e outra perpendicular á anterior, \vec{a}_n , coñecida co nome de **aceleración normal ou centrípeta**, de modo que:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = a_t \cdot \vec{u}_t + a_n \cdot \vec{u}_n$$



Cuestión resolta

- ▶ Estuda o tipo de aceleración (normal e/ou tanxencial) que posúe unha pedra que deixamos caer no baleiro.

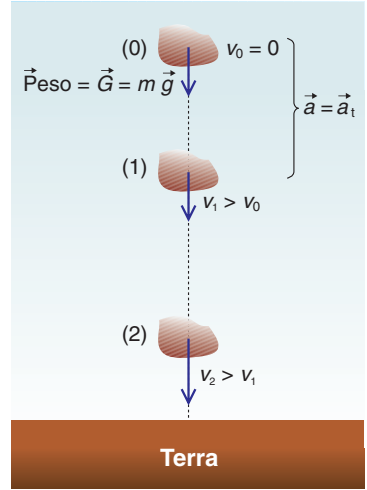
Solución:

Sabemos que $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ e que \vec{v} , como todo vector,

consta de módulo (v), dirección e sentido.

Na cuestión presentada, a dirección e o sentido da velocidade permanecen constantes (que coinciden co do vector desprazamento) pero \vec{v} varía porque aumenta o seu módulo a medida que pasa o tempo. En consecuencia, cando varía o módulo da velocidade no tempo, hai unha aceleración, cuxa dirección é tanxente á traxectoria, existindo a compoñente tanxencial da aceleración, \vec{a}_t .

$$\vec{a} = \vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_t$$



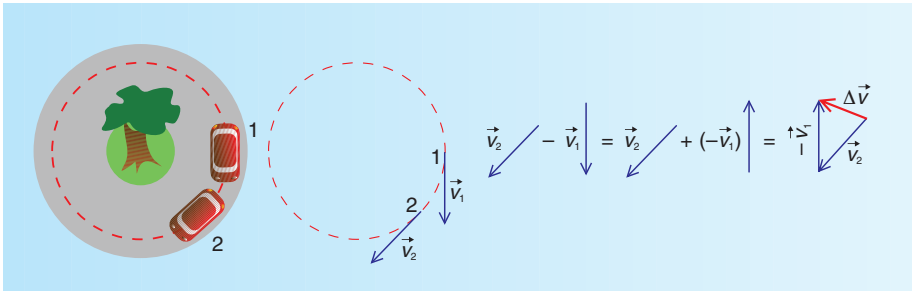
Cuestión resolta

- ▶ Un coche percorre unha praza circular de 30 m de raio coa celeridade constante de 20 km/hora. Estuda o tipo de aceleración (normal e/ou tanxencial) con que se move.

Solución:

Nesta cuestión, o módulo da velocidade permanece constante e, polo tanto, $\vec{a}_t = \vec{0}$. Pero varía a dirección da velocidade e, en consecuencia, hai aceleración: $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \vec{0} + \vec{a}_n = \vec{a}_n$. Cando varía a dirección da velocidade no tempo, a dirección da aceleración é perpendicular á traxectoria, existindo a compoñente normal da aceleración, \vec{a}_n . O seu valor calcúlase coa expresión:

$a_n = \frac{v^2}{\rho}$, sendo ρ o raio de curvatura que, para o caso dunha circunferencia, coincide co seu raio.



7.3. Clasificación dos movementos

Atendendo á súa velocidade, os **movementos clasifícanse** en:

- **Uniformes:** cando o módulo da velocidade permanece constante no tempo: $v = cte$. A fórmula a utilizar neste movemento é: $\Delta s = v \cdot t$.

Neste movemento a \vec{v} pode variar no tempo. Sucede cando varía a dirección da velocidade permanecendo constante o seu módulo, podendo haber (no movemento uniforme) aceleración xa que $\vec{a} = d\vec{v}/dt$.

- **Variados:** o módulo da velocidade varía no tempo. Cando esta variación (a_t) é constante, dise que o movemento é **uniformemente variado**. Este movemento pode ser acelerado (o sentido da aceleración tanxencial coincide co do movemento) ou decelerado (o sentido da aceleración tanxencial é contrario ao do movemento). As fórmulas a utilizar son:

$$\Delta s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_t \cdot t^2$$

$$v = v_0 + a_t \cdot t$$

Tendo en conta, simultaneamente, a velocidade e a traxectoria do móbil, podemos facer a clasificación:

- **Movemento rectilíneo uniforme:** a traxectoria é rectilínea e o módulo da velocidade constante. En consecuencia, o vector velocidade é constante: \vec{v} constante.

No estudo deste movemento pódese utilizar a fórmula: $\Delta \vec{r} = \vec{v} \cdot t$.

- **Movemento circular uniforme:** a traxectoria é a liña dunha circunferencia e o módulo da velocidade é constante. Neste movemento hai aceleración, que é normal á traxectoria en cada punto.

No estudo deste movemento, ademais da fórmula, $\Delta s = v \cdot t$, pódese utilizar a correspondente angular: $\Delta \varphi = \omega \cdot t$.

- **Movemento rectilíneo uniformemente variado:** a traxectoria é rectilínea e a variación do módulo da velocidade é constante no tempo. Neste movemento hai aceleración, que é tanxencial e constante.

No estudo deste movemento pódense utilizar as fórmulas:

$$\Delta \vec{r} = \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{a}_t \cdot t^2$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}_t \cdot t$$

Nestas magnitudes vectoriais hai que substituír o módulo e o sentido correspondentes (a dirección coincide para todas as magnitudes vectoriais por ser o movemento rectilíneo).

- **Movemento circular uniformemente variado:** a traxectoria é a liña dunha circunferencia e a variación do módulo da velocidade é constante no tempo. Neste movemento a aceleración consta do compoñente tanxencial (que é constante en módulo) e do normal (de módulo variable no tempo).

No estudo deste movemento, ademais das fórmulas $\Delta s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_t \cdot t^2$ e $v = v_0 + a_t \cdot t$ pódense utilizar as correspondentes angulares:

$$\Delta \varphi = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$$

A aceleración hai que substituíla co signo positivo ou negativo, segundo o movemento sexa, respectivamente, acelerado ou decelerado.

Exercicio resolto

- ▶ Desde unha altura de 80 m con respecto ao chan lánzase unha pedra, verticalmente e cara arriba, cunha velocidade de 12 m/s. Canto tempo tarda en chegar ao chan?

Solución:

Unha vez lanzada a pedra, a dirección da súa velocidade coincide coa dirección da aceleración á que está sometida, que é a da gravidade. Polo tanto posúe un movemento rectilíneo uniformemente variado. Por outro lado podemos ver que non coincide o módulo do vector desprazamento $|\Delta \vec{r}|$ co espazo total percorrido polo móbil ($s_1 + s_2$).

O problema podémolo enfocar de distintas maneiras. Así:

- Estudar o desprazamento efectuado pola pedra desde que se lanza até que chega ao chan. Isto é: o $\Delta \vec{r}$ do debuxo.
- Estudar o movemento do móbil desde que se lanza até que alcanza a altura máxima e desde esta altura ata que retorna ao chan.

Segundo a **primeira forma** indicada temos:

$$\Delta \vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

Tomamos unha orixe: o punto "O", e un sentido como positivo: cara abaixo, por exemplo, resultando:

$$\Delta \vec{r} \rightarrow \begin{cases} \text{Módulo } (\Delta r): 80 \text{ m.} \\ \text{Dirección: é a mesma para todas as magnitudes vectoriais que aparecen na ecuación, esquecéndoa.} \\ \text{Sentido: cara abaixo, que consideramos positivo,} \end{cases}$$

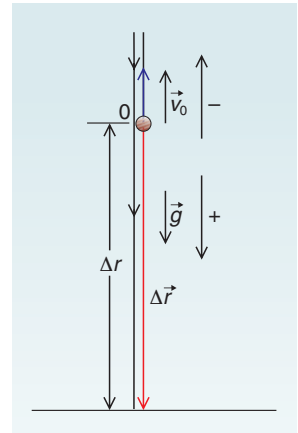
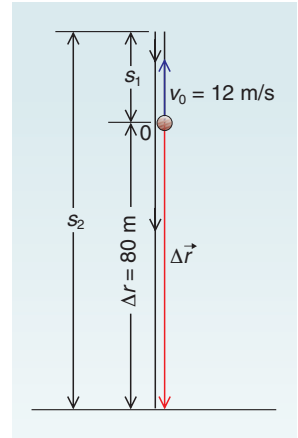
sendo $\Delta \vec{r} = + 80$ (m), con dirección vertical e cara abaixo.

$$\vec{v}_0 \rightarrow \begin{cases} v_0 = 12 \text{ m s}^{-1} \\ \vec{v}_0 = -12 \text{ (m s}^{-1}\text{), na dirección vertical e cara arriba} \end{cases}$$

$$\vec{a} = \vec{g} \rightarrow \begin{cases} a = g = 9,8 \text{ m s}^{-2} \\ \vec{a} = \vec{g} = +9,8 \text{ (m s}^{-2}\text{), na dirección vertical e cara abaixo} \end{cases}$$

$$80 = -12t + \frac{1}{2} 9,8 t^2 \rightarrow 4,9 t^2 - 12t - 80 = 0$$

$$t = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 + 4 \cdot 4,9 \cdot 80}}{2 \cdot 4,9} = \begin{cases} \rightarrow 5,4 \text{ s} \\ \rightarrow -3,0 \text{ s} \end{cases}$$



Tomamos como solución válida do problema a de 5,4 s. O resultado negativo quere dicir que tres segundos antes de empezar a contar o tempo a pedra se atopaba no chan (se o movemento fose uniformemente variado).

Outra forma:

Calculamos o tempo que tarda a pedra en ir desde “O” até “A” e desde “A” até “B”, e logo sumámoslos.

$$\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{g}t \rightarrow 0 = -12 + 9,8t \rightarrow t = 1,2 \text{ s}$$

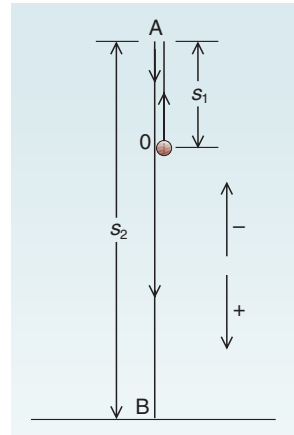
$$-s_1 = -12 \cdot 1,2 + \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot 1,2^2 = 7,3 \text{ m}$$

$$s_2 = s_1 + 80$$

$$7,3 + 80 = \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot t'^2 \rightarrow t' = \pm 4,2 \text{ s}$$

tomando como resultado o valor positivo. Ao igual que dicíamos con anterioridade, o valor negativo quere dicir que 4,2 s antes de empezar a contar o tempo a pedra estaba no punto B.

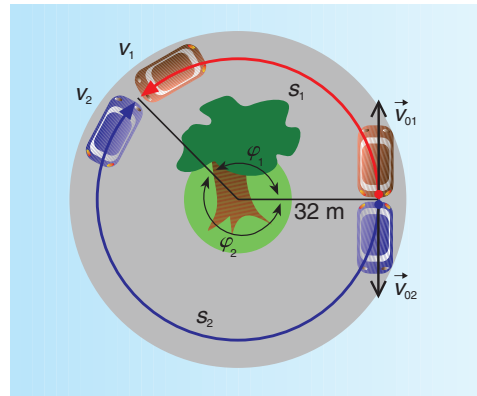
$$t = 1,2 + 4,2 \rightarrow t = 5,4 \text{ s}$$



Exercicio resolto

► Dous coches, que circulan por unha praza circular de 32 m de raio, pasan por un mesmo punto cunha velocidade de 72 km/h, en sentidos contrarios. Se un dos coches decelera cun valor constante de 2 m/s² e o outro acelera con igual valor, calcula:

- O tempo que tardan en encontrarse de novo.
- O espazo percorrido por cada coche.
- O módulo da aceleración total de cada coche no momento do encontro.



Solución:

O dato da aceleración que nos dá o problema corresponde á aceleración tanxencial dos coches.

a) Traballando con magnitudes lineais.

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= v_{01} \cdot t + \frac{1}{2} a_{t1} \cdot t^2 \rightarrow s_1 = 20t - \frac{1}{2} 2 t^2 \\ s_2 &= v_{02} \cdot t + \frac{1}{2} a_{t2} \cdot t^2 \rightarrow s_2 = 20t + \frac{1}{2} 2 t^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow s_1 + s_2 = 40t$$

$$\left. \begin{aligned} s_1 + s_2 &= 40t \\ s_1 + s_2 &= 2\pi \cdot 32 \end{aligned} \right\} \rightarrow 2\pi \cdot 32 = 40t \rightarrow t = 5,0 \text{ s}$$

Traballando con magnitudes angulares:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \\ v_0 &= \omega_0 \cdot r \\ a_t &= \alpha \cdot r \end{aligned} \right\} \rightarrow \varphi = \frac{v_0}{r} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{a_t}{r} \cdot t^2$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{20}{32} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{32} \cdot t^2 \\ \varphi_2 &= \frac{20}{32} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{32} \cdot t^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \varphi_1 + \varphi_2 = 2 \cdot \frac{20}{32} \cdot t$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 + \varphi_2 &= \frac{40}{32} \cdot t \\ \varphi_1 + \varphi_2 &= 2\pi \end{aligned} \right\} \rightarrow 2\pi = \frac{40}{32} \cdot t \rightarrow t = 5,0 \text{ s}$$

b) Traballando con magnitudes lineais: $s = v_0 \cdot t + 1/2 \cdot a_t \cdot t^2$.

$$s_1 = 20 \cdot 5,0 - 1/2 \cdot 2 \cdot 5,0^2 \rightarrow s_1 = 75,0 \text{ m}$$

$$s_2 = 20 \cdot 5,0 + 1/2 \cdot 2 \cdot 5,0^2 \rightarrow s_2 = 125,0 \text{ m}$$

Traballando con magnitudes angulares: $\varphi = \omega_0 \cdot t + 1/2 \cdot \alpha \cdot t^2 \rightarrow \varphi = v_0/r \cdot t + 1/2 \cdot a_t/r \cdot t^2$

$$\varphi_1 = \frac{20}{32} \cdot 5,0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{32} \cdot 5,0^2 \rightarrow \varphi_1 = 2,34 \text{ rad}$$

$$s_1 = \varphi_1 \cdot r = 2,34 \cdot 32 = 75,0 \text{ m}$$

$$\varphi_2 = \frac{20}{32} \cdot 5,0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{32} \cdot 5,0^2 \rightarrow \varphi_2 = 3,91 \text{ rad}$$

$$s_2 = \varphi_2 \cdot r = 3,91 \cdot 32 \rightarrow s_2 = 125,0 \text{ m}$$

c) $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = a_t \vec{u}_t + a_n \vec{u}_n \rightarrow a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \\ a_n &= \frac{v^2}{r} \end{aligned} \right\} \rightarrow a = \sqrt{a_t^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2} \rightarrow a = \sqrt{a_t^2 + \left(\frac{(v_0 + a_t \cdot t)^2}{r}\right)^2}$$

$$v = v_0 + a_t \cdot t$$

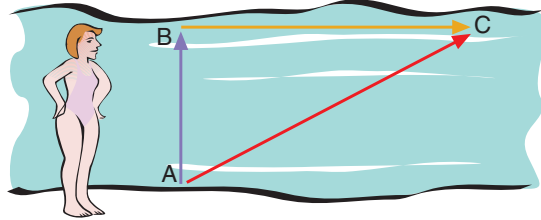
$$a_1 = \sqrt{2^2 + \left(\frac{(20 - 2 \cdot 5,0)^2}{32}\right)^2} = 3,7 \text{ m s}^{-2}$$

$$a_2 = \sqrt{2^2 + \left(\frac{(20 + 2 \cdot 5,0)^2}{32}\right)^2} = 28,2 \text{ m s}^{-2}$$

7.4. Composición de movementos

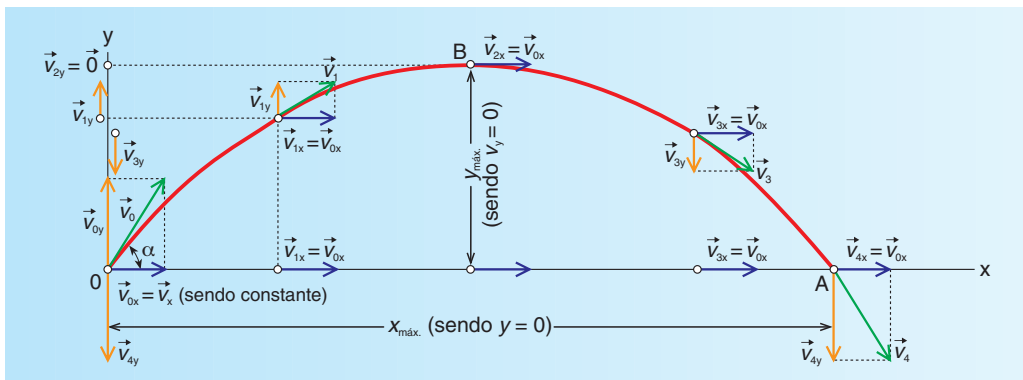
O estudo dun movemento composto podémolo realizar aplicando o principio de Galileo sobre a independencia de movementos que di: “Se un corpo está sometido, por causas distintas, a varios movementos simultáneos, o seu cambio de posición é independente de que os movementos actúen de forma sucesiva ou simultánea”.

O movemento resultante obtense ao sumar vectorialmente os movementos compoñentes. Pensemos que queremos atravesar un río. Se o facemos perpendicularmente á corrente, veremos que non chegamos nun punto situado enfrente do de partida, senón un pouco máis abaixo. Isto é debido a que estamos sometidos simultaneamente a dous movementos: ao que nós causamos nadando e ao de arrastre da corrente, dando como resultado outro movemento, consecuencia dos dous, que ten por:



- Vector de posición a suma vectorial dos vectores de posición dos movementos compoñentes: $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$.
- Velocidade a suma vectorial das velocidades dos movementos compoñentes: $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.
- Aceleración a suma vectorial das aceleracións dos movementos compoñentes: $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$.

Un caso de movemento composto é o **movemento parabólico**. Ten lugar cando un móbil se despraza con aceleración constante (en módulo, dirección e sentido) e non coincide a dirección da súa velocidade coa da aceleración. Se a aceleración é a da gravidade, ao movemento dáselle o nome de **tiro parabólico**.

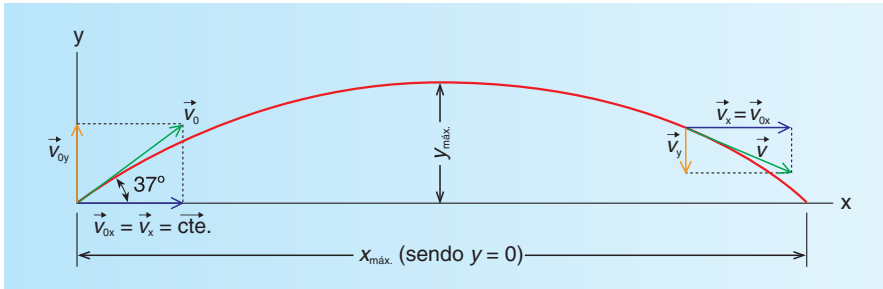


Como o movemento parabólico non é máis que a composición dun movemento rectilíneo uniforme, na dirección horizontal, e doutro rectilíneo uniformemente variado, na dirección vertical, non necesitamos para o seu estudo novos conceptos teóricos.

- Dispara-se un proxectil desde o chan horizontal cun ángulo de 37° e velocidade $v = 100$ m/s. Acha:
- O alcance máximo do proxectil.
 - A altura máxima que alcanza.
 - A ecuación da traxectoria.
 - A velocidade e a celeridade cando lle faltan 100 m para chegar ao chan e o proxectil está baixando.

Nota: Toma $g = 10$ m/s², $\text{sen } 37^\circ = 0,6$ e $\text{cos } 37^\circ = 0,8$.

Solución:



O proxectil está sometido a dous movementos simultáneos: un rectilíneo e uniforme (eixe x) e outro rectilíneo uniformemente variado (eixe y), polo que recordaremos o principio de Galileo de independencia de movementos: “O cambio de posición é independente de que os movementos actúen de forma simultánea ou separadamente”.

Tomamos como orixe o punto de saída do proxectil, considerando como sentido positivo o de cara arriba e negativo o de cara abaixo.

$$a) \vec{x}_{\text{máx}} = \vec{x}_0 + \vec{v}_{0x} \cdot t$$

$$x_{\text{máx}} = 100 \cdot \text{cos } 37^\circ \cdot t = 80 \cdot t \quad (1)$$

xa que $x_0 = 0$ ao coller como orixe o punto de lanzamento do proxectil.

Agora, para calcular t facemos uso do outro movemento que ten o proxectil. Sucede que para a situación de $x_{\text{máx}}$ o desprazamento efectuado verticalmente é nulo, de modo que:

$$\Delta \vec{y} = \vec{v}_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot t$$

$$0 = 100 \cdot \text{sen } 37^\circ \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 \rightarrow t = 12 \text{ s}$$

Substituíndo na expresión (1) resulta: $x_{\text{máx}} = 80 \cdot 12 \rightarrow x_{\text{máx}} = 960$ m

$$b) y_{\text{máx}} = 60 \cdot t - 5 \cdot t^2$$

Para calcular o tempo que tarda o proxectil en chegar á altura máxima, recordamos que $v_y = 0$. Logo, como $\vec{v}_y = \vec{v}_{0y} + \vec{a} \cdot t$, temos:

$$0 = 60 - 10 \cdot t \rightarrow t = 6 \text{ s}$$

e, daquela:

$$y_{\text{máx}} = 60 \cdot 6 - 5 \cdot 6^2 \rightarrow y_{\text{máx}} = 180 \text{ m}$$

Dada a simetría da traxectoria, a altura máxima ten lugar a unha distancia metade do alcance máximo, sendo o tempo investido en conseguir a altura máxima tamén metade do tempo correspondente ao do alcance máximo.

- c) Sabemos que as ecuacións do movemento son aquelas que nos relacionan coordenada e tempo e a **ecuación da traxectoria** obtense eliminando o tempo das ecuacións do movemento.

$$\left. \begin{aligned} x &= 80 \cdot t \rightarrow t = \frac{x}{80} \\ y &= 60 \cdot t - 5 \cdot t^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow y = \frac{60 \cdot x}{80} - \frac{5 \cdot x^2}{6400} = \frac{3 \cdot x}{4} - \frac{x^2}{1280}$$

que é a ecuación dunha **parábola** (polinomio de grao dous) con eixe paralelo ao eixe das “y” (polinomio en “x”) coas ramas cara abaixo (coeficiente en grao dous negativo) e co vértice desprazado da orixe (presenza de termos de grao menor que dous).

- d) $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$

$$v_x = 80 \text{ m s}^{-1}$$

$$\vec{v}_y = \vec{v}_{oy} + \vec{g} \cdot t \rightarrow v_y = 60 - 10 \cdot t$$

Este tempo³ “t” calculámolo con axuda da ecuación:

$$100 = 60 \cdot t - 5 \cdot t^2 \rightarrow t = \begin{cases} 10 \text{ s} \\ 2 \text{ s} \end{cases}$$

sendo a solución válida a de 10 s, pois para $t = 2$ s o proxectil aínda sobe.

$$v_y = 60 - 10 \cdot 10 = -40 \text{ m s}^{-1}$$

Resultando:

$$\vec{v} = 80 \vec{i} - 40 \vec{j} \text{ m s}^{-1}$$

A celeridade é:

$$v = \sqrt{80^2 + (-40)^2} \rightarrow v = 89,4 \text{ m s}^{-1}$$

³ Outras formas:

v_y tamén a podemos calcular coa seguinte expresión: $v_y = 0 + 10 t'$, sendo t' o tempo que tarda o proxectil en percorrer os 80 m (180–100) que hai desde a altura máxima até o punto que está a 100 m do chan. Este tempo calcúlase coa expresión:

$$\Delta \vec{r} = \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{g} \cdot t^2 \rightarrow 80 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t'^2 \rightarrow t' = 4 \text{ s}$$

Polo que: $v_y = 10 \cdot 4 = 40 \text{ m/s}$.

Tamén se pode calcular este tempo restándolle a 6 s (que é o tempo que tarda o proxectil en ir desde a altura máxima ata o chan) o tempo investido en ir desde o chan até a altura de 100 m (ou desde a altura de 100 m até o chan). Desta forma será:

$$100 = 100 \cdot 0,6 \cdot t'' - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t''^2 \rightarrow t'' = \begin{cases} 10 \text{ s} \\ 2 \text{ s} \end{cases}$$

2 segundos é o tempo investido en ir desde o punto de lanzamento até a altura de 100 m, cando sobe, e 10 s é o que tarda en ir desde o punto de lanzamento até a altura de 100 m, cando baixa. Polo tanto, o tempo investido en ir desde a altura máxima até 100 m antes de chegar ao chan son 4 s.

8. LEIS DE NEWTON

A súa validez está limitada:

- Ao tamaño da partícula e á súa velocidade. Son aplicábeis desde tamaños astronómicos (estrelas, planetas, ...) até a dos átomos e para velocidades sensibelmente inferiores á da luz. Para tamaños atómicos e subatómicos e velocidades próximas á da luz hai que adaptalas ás ideas da Mecánica Cuántica e Relativista.
- A sistemas de referencia inerciais. Isto é: un sistema de referencia fixo ou con movemento rectilíneo e uniforme: os sistemas de referencia ligados á Terra⁴, considerámoslos inerciais debido a que o valor da súa aceleración é moi pequeno (a Terra está rotando e trasladándose ao redor do Sol).
- Imos facer referencia á dinámica dunha partícula, é dicir, á dun punto material de masa m e de dimensións desprezábais. Os resultados obtidos son aplicábeis a calquera corpo ríxido se o seu movemento é de traslación (isto significa que todos os seus puntos se trasladan con igual velocidade en módulo, dirección e sentido).

8.1. Primeira lei de Newton ou principio da inercia

Experimentalmente obsérvase que se a resultante das forzas que actúan sobre un corpo é nula, este pode encontrarse en repouso ou en m.r.u.

$$\text{Se } \vec{F}_{\text{neta}} = \vec{0} \begin{cases} \rightarrow \text{repouso} \\ \rightarrow \text{m.r.u.} \end{cases}$$

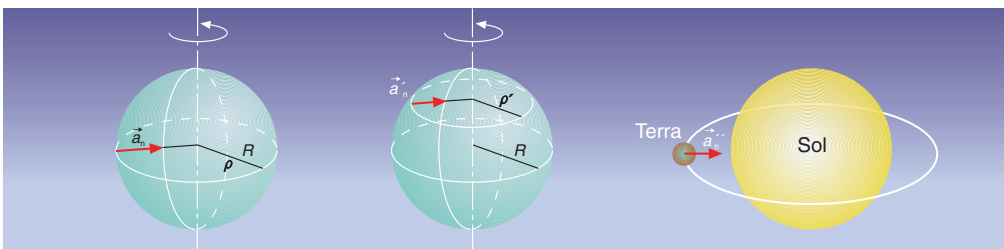
En consecuencia, se a situación dun corpo é a de repouso ou a de movemento rectilíneo e uniforme, a resultante das forzas que actúan sobre el é nula.

⁴ A aceleración que produce o movemento de rotación da Terra nun punto situado no seu Ecuador é:

$$\left. \begin{aligned} v = \text{cte} \rightarrow \vec{a}_t = \vec{0} \\ \vec{v} \neq \text{cte} \rightarrow \vec{a} \neq \vec{0} \\ \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} \vec{a} = \vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{u}_n \rightarrow a_n = \frac{v^2}{\rho} \\ v = \omega \cdot \rho \end{aligned} \right\} \rightarrow a_n = \omega^2 \cdot \rho$$

$$a_n = \omega^2 \cdot \rho = \frac{(2\pi)^2}{(24 \cdot 60 \cdot 60)^2} \cdot 6,4 \cdot 10^6 = 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$$

Para outro punto da superficie da Terra que non sexa o Ecuador, a a_n é menor que $3,4 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$ xa que ρ (radio de curvatura) é menor, chegando a ser cero nos Polos.



A aceleración da Terra a causa do seu movemento orbital ao redor do Sol é:

$$a_n = \left(\frac{2 \cdot \pi}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} \right)^2 \cdot 1,5 \cdot 10^{11} = 6,0 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$$

8.2. Segunda lei de Newton ou principio fundamental da Dinámica

Se abandonamos no aire (mellor no baleiro) unha pedra de masa m , vemos que se pon en movemento, variando o seu estado inicial de repouso, aparecendo unha velocidade \vec{v} que aumenta no tempo e, en consecuencia, posúe unha aceleración.

Por outro lado temos que sobre a pedra actúa a forza gravitatoria do peso, \vec{G} . Que relación hai entre a forza aplicada á pedra e a aceleración que esta adquire? A resposta a esta pregunta constitúe a segunda lei de Newton, que nos di que “a forza \vec{F} aplicada a un corpo e a aceleración \vec{a} que este adquire son directamente proporcionais, coincidindo esta constante de proporcionalidade coa masa m do corpo”:

$$\frac{\vec{F}}{a} = m \rightarrow \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Esta ecuación dá resposta ás preguntas da Dinámica. Así:

Que clase de forza produce un m.r.u.?

Neste movemento a aceleración é nula xa que a velocidade é constante: $\vec{v} = \vec{c}te$. Polo tanto, a resultante das forzas é nula: $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

Que clase de forza produce un m.r.u.v.?

Este movemento caracterízase por ser de aceleración (\vec{a}) constante. Como a masa dun corpo tamén a consideramos cte., temos que: $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = cte \cdot cte = cte$: a resultante das forzas aplicadas ten que ser constante en módulo, dirección e sentido.

Que clase de forza produce un m.c.u.?

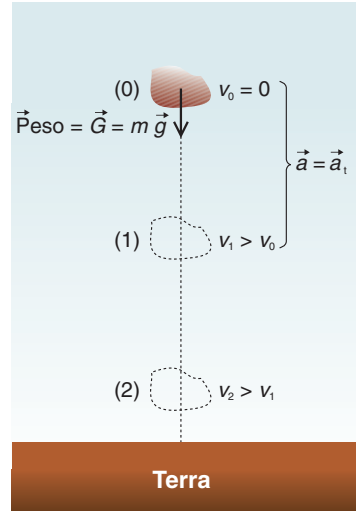
Un móbil con m.c.u. ten unha velocidade que é de módulo constante e de dirección variábel, que en todo momento é tanxente á circunferencia que describe. Esta variación de velocidade é causada por unha aceleración de compoñente tanxencial nulo ($a_t = \Delta v/t = 0$) e compoñente normal non nulo ($a_n = v^2/\rho$), de módulo constante e de dirección variábel:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{u}_n.$$

En consecuencia, a resultante das forzas que causan un m.c.u. é de módulo constante e de dirección

variábel, apuntando en todo momento cara ao centro da circunferencia que se describe:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{u}_n = cte \cdot \vec{u}_n$$



8.3. Terceira lei de Newton ou principio de acción e reacción

Se estando sobre uns patíns empuxamos unha parede, observamos que nos poñemos en movemento, variando o noso estado de repouso. En consecuencia, sobre nós actúa unha forza; forza que é exercida pola parede como reacción á que nós lle aplicamos. Estas dúas forzas posúen as características de ser:

- De igual módulo.
- De igual dirección.
- De sentido contrario.
- Exercidas entre os mesmos corpos,

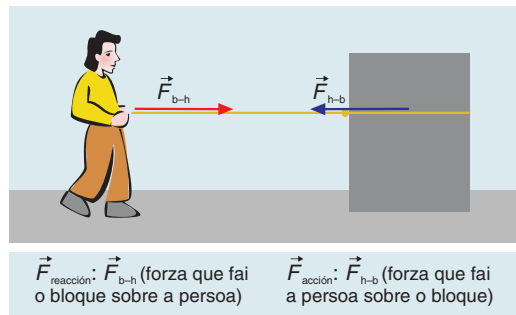
e coñécense como **forzas de acción e reacción**. En consecuencia, as forzas aparecen por parellas e teñen as características antes enunciadas. Isto constitúe a **terceira lei de Newton** e pode enunciarse da forma: “se un corpo A exerce unha forza sobre outro B (chamada acción), este responde sobre o primeiro con outra forza de igual módulo e dirección, pero de sentido contrario (chamada reacción)”:

$$-\vec{F}_{BA} = \vec{F}_{AB}$$

Á primeira vista parece que as forzas de acción e reacción deberían anularse entre si. No entanto isto non ocorre nunca, xa que os puntos de aplicación de ambas forzas son distintos, actuando sobre corpos distintos. Para aclaralo imos comentar uns exemplos:

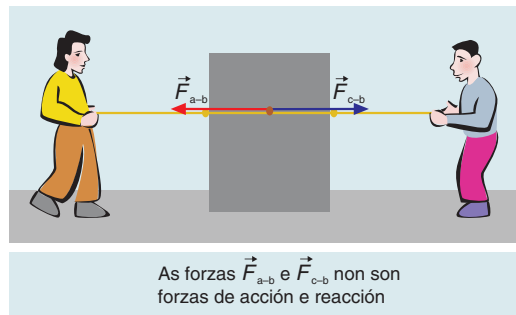
Unha persoa (h), que permanece fixa, tira dun bloque (b), poñéndoo en movemento.

A forza de acción é a que fai a persoa sobre o bloque, \vec{F}_{h-b} , e como esta forza é maior que a de rozamento á que está sometido o bloque, a resultante das forzas que actúan sobre este é distinta de cero, adquirindo unha aceleración. A forza de reacción á que fai a persoa é a que exerce o bloque sobre ela, \vec{F}_{b-h} , que se anula coa forza de rozamento que actúa sobre a persoa.

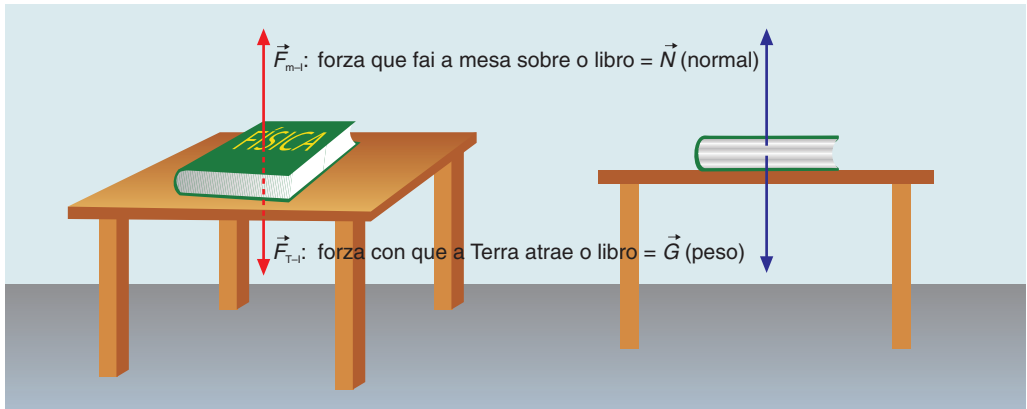


Dúas persoas (a e c) tiran con igual forza (módulo), dirección e sentido contrario sobre un mesmo bloque (b), sen movelo.

Estas dúas forzas ao estar aplicadas nun mesmo punto dan unha resultante nula, pero non son de acción e reacción: Non son exercidas entre os mesmos corpos.



Pensemos agora no libro de Física que temos encima da mesa. Que forzas actúan sobre el? Teñen igual módulo, dirección e sentido contrario? Son de acción e reacción?



O libro está en repouso e, segundo a 1ª lei de Newton, a resultante das forzas que actúan sobre el ten que ser cero; o que significa que se trata de dúas forzas de igual módulo, dirección e sentido contrario. Porén non son de acción e reacción, xa que:

- Non son exercidas entre os mesmos corpos (non teñen os mesmos subíndices).
- Teñen o mesmo punto de aplicación.

Cales son as forzas de acción e reacción das debuxadas anteriormente?

8.4. Primeira e segunda lei de Newton en función da cantidade de movemento

Sabemos que se damos un mesmo impulso a unha bóla de madeira e a outra de ferro de igual volume, a de madeira lanzámola máis lonxe que a de ferro. Isto indícanos que o cambio na velocidade dun corpo non só depende da forza que se exerza sobre el, senón tamén do “masivo” que sexa.

Defínese unha nova magnitude (que relaciona masa e velocidade), chamada **cantidade de movemento** ou **momento lineal**, \vec{p} , como: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$.

Pensemos nunha partícula de masa constante m , que posúe a velocidade \vec{v}_0 e cantidade de movemento $\vec{p}_0 = m \cdot \vec{v}_0$. Se unha forza \vec{F} actúa sobre a partícula durante o tempo Δt , esta pasa a ter a velocidade \vec{v} e a cantidade de movemento $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$.

A relación que existe entre a variación da cantidade de movemento, $\Delta\vec{p}$, da partícula e a forza, \vec{F} , que actúa durante o tempo Δt é:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

Ao termo $\vec{F} \cdot \Delta t$ chámasele **impulso mecánico**.

A expresión anterior podémola escribir como: $\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$, que cando o intervalo de tempo é

moi pequeno ($\Delta t \rightarrow 0$) toma a forma diferencial: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$.

A esta expresión tamén chegamos estudando a variación da cantidade de movemento da partícula de masa constante m no tempo:

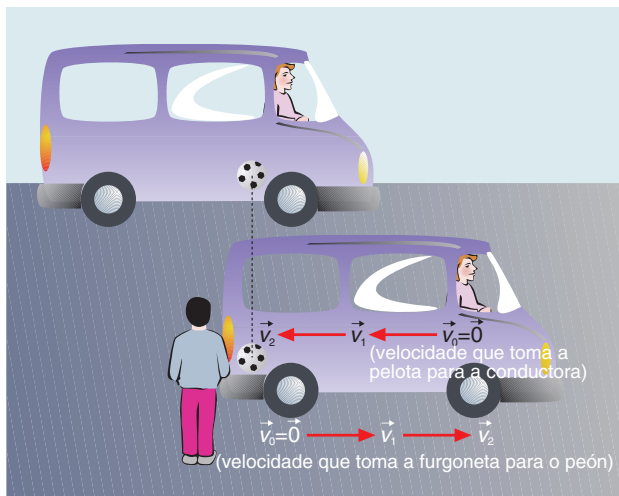
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

co que a expresión matemática da 2ª lei de Newton pode enunciarse como: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$: “a forza aplicada a unha partícula é igual á variación temporal da súa cantidade de movemento”.

Se \vec{F} é nula, a variación temporal da cantidade de movemento é igual a cero: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$, e \vec{p} é constante: $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 = \vec{p}_3 = \dots$. Isto constitúe o **principio de conservación da cantidade de movemento**, que pode enunciarse dicindo que “se a resultante das forzas que actúan sobre unha partícula é nula, o seu momento lineal permanece constante”. Esta é outra forma de enunciar a primeira lei de Newton:

$$\text{Se } \vec{F}_{\text{neta}} = \vec{0} \begin{cases} \rightarrow \text{repouso ou m.r.u.} \\ \rightarrow \vec{p} \text{ constante} \end{cases}$$

8.5. As leis de Newton en sistemas non inerciais. Forzas de inercia



Pensa nunha furgoneta na que hai unha pelota que se pode mover polo chan, sen rozamento ningún (é como se imaxináramos a furgoneta sen teito e a pelota colgada dun fío desde un guinche). Cando a furgoneta arranca, a resultante das forzas que actúan sobre a pelota é nula e para un observador situado nun sistema inercial (un home na beirarrúa) verá que a pelota non se move: a furgoneta avanza cunha aceleración \vec{a} e a pelota permanece en repouso fronte a el).

Pero para un observador que viaxa na furgoneta (sistema non inercial), ve como a pelota se vai cara atrás. Para este, a pelota non está en repouso. Segundo a leis de Newton, se á pelota que estaba en repouso non se lle aplica ningunha forza, continuará en repouso. No entanto, a persoa da furgoneta ve como a pelota vai cara atrás, poñéndose en movemento cunha aceleración \vec{a}_i , de modo que para ela non se cumpren as leis de Newton. Para que sigan sendo válidas as leis de Newton, o observador non inercial ten que introducir unha forza, chamada **forza de inercia**, que é de igual módulo e dirección, pero e de sentido contrario ao produto da masa do corpo, m , pola aceleración, \vec{a} , do sistema non inercial: $\vec{F}_i = m \cdot \vec{a}_i = -m \cdot \vec{a}$.

Resumindo, diremos que as características das forzas de inercia son:

- Ser introducidas polo observador non inercial, sendo “misteriosas” para este observador.
- Ser ficticias ou irreais desde a perspectiva do observador inercial.
- Ser iguais a: $m \cdot \vec{a}_i$, sendo m a masa do corpo e \vec{a}_i a aceleración do sistema non inercial, sendo $\vec{a}_i = -\vec{a}$.

Nun sistema non inercial non se cumpren as leis de Newton, xa que:

1. A pelota, sobre a que non actúa ningunha forza e inicialmente está en repouso, cando a furgoneta arranca, ponse en movemento (para o observador non inercial). Segundo a 1ª lei de Newton debería continuar en repouso xa que $\vec{F}_{\text{neto}} = \vec{0}$. Este observador, para xustificar o observado, ten que introducir a forza de inercia.
2. Continuando co exemplo, a pelota adquire unha velocidade e , en consecuencia, hai unha aceleración. Polo tanto, por unha banda $\vec{F}_{\text{neto}} = \vec{0}$ e, por outra, $\vec{a} \neq \vec{0}$, non cumpríndose a segunda lei de Newton. O observador non inercial ten que introducir a forza de inercia para que lle pareza que se cumpre a ecuación fundamental.
3. As forzas de inercia son virtuais, ficticias, que non se deben á interacción entre corpos, senón á aceleración do sistema non inercial de referencia, non cumpríndose a 3ª lei de Newton.

9. CONCEPTO DE TRABAJO

A lei fundamental da Dinámica en calquera das súas dúas formas: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$; $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, constitúe a base para a resolución dos problemas dinámicos. Calquera das magnitudes que aparecen nelas: forza, aceleración, cantidade de movemento etc, poden ser unha incógnita en función das outras como datos.

O cálculo de \vec{p} mediante a ecuación anterior esixe coñecer \vec{F} en función do tempo:

$$d\vec{p} = \vec{F} \cdot dt \rightarrow \vec{p} = \int \vec{F}(t) \cdot dt$$

En moitos casos a \vec{F} que actúa sobre unha partícula é función da posición, \vec{r} , caso das interaccións gravitatorias, electrostáticas etc., e non do tempo, polo que resulta conveniente definir unha nova magnitude que relacione forza e posición.

Cando unha forza \vec{F} se despraza ao longo dun elemento de traxectoria ds (na figura AA', estando A e A' o suficientemente próximos de modo que podemos considerar $ds = |d\vec{r}|$), defínese o traballo efectuado pola forza \vec{F} ao longo dese desprazamento infinitesimal ds como:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

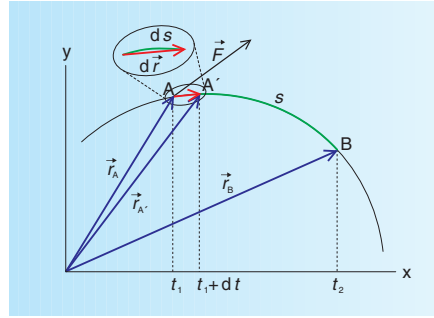
Se a forza percorre unha serie de elementos infinitesimais sucesivos, o traballo total (suma dos traballos elementais) obtémolo integrando a expresión anterior:

$$W_A^B = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_B} F \cdot \cos \alpha \cdot dr$$

Sendo α o ángulo formado entre \vec{F} e $d\vec{r}$. Se \vec{F} é constante e a traxectoria rectilínea (o que supón que F e $\cos \alpha$ sexan constantes), podemos escribir:

$$W_A^B = F \cdot \cos \alpha \int_{r_A}^{r_B} dr = F \cdot \cos \alpha (r_B - r_A)$$

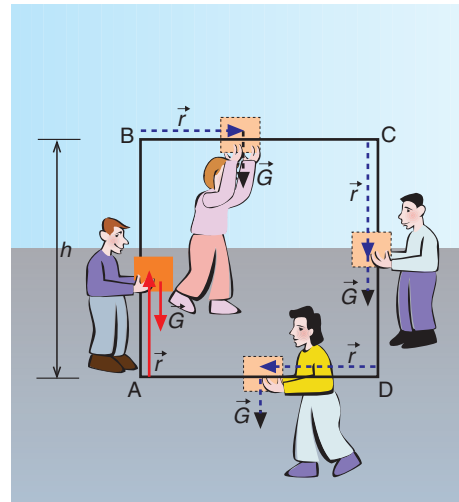
Como se ve na integral anterior, o valor do traballo depende das coordenadas do punto de orixe e destino e do camiño seguido pola forza entre eses dous puntos.



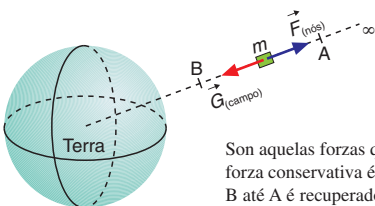
9.1. Traballo dunha forza conservativa

Hai un tipo de forzas para as que o traballo non depende do camiño percorrido por estas: son as chamadas **forzas conservativas**. Dise que unha forza é conservativa se o valor do traballo que desenvolve é independente do camiño seguido⁵. Isto supón que ao longo dunha liña pechada (ciclo) o traballo é nulo.

Un exemplo de forza conservativa é a forza gravitatoria. Para velo imos supoñer que se levanta verticalmente un corpo de masa m desde A até B; despois desprázase horizontalmente até C; logo báixase verticalmente até D e, por último, vólvese (tamén horizontalmente) ao punto de partida. O traballo feito pola forza do peso ao longo do ciclo é:



⁵



Son aquelas forzas que ao realizar un traballo en contra delas, este é totalmente recuperábel. Un caso de forza conservativa é o da forza gravitatoria: o traballo que facemos para levar un corpo de masa m desde B até A é recuperado cando este volve cara á Terra.

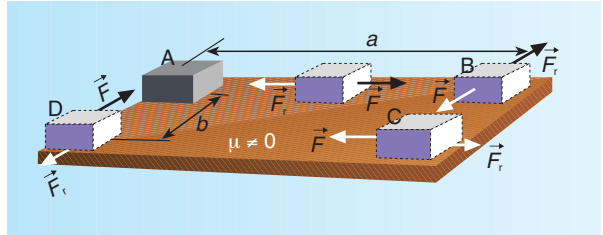
$$W_{A \rightarrow A} = W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C} + W_{C \rightarrow D} + W_{D \rightarrow A}$$

$$W_{A \rightarrow A} = \int_A^B \vec{G} \cdot d\vec{r} + \int_B^C \vec{G} \cdot d\vec{r} + \int_C^D \vec{G} \cdot d\vec{r} + \int_D^A \vec{G} \cdot d\vec{r}$$

$$W_A^A = \int_A^B G \cdot dr \cdot \cos 180^\circ + \int_B^C G \cdot dr \cdot \cos 90^\circ + \int_C^D G \cdot dr \cdot \cos 0^\circ + \int_D^A G \cdot dr \cdot \cos 90^\circ$$

$$W_{A \rightarrow A} = -G \cdot r_{AB} + 0 + G \cdot r_{CD} + 0 = 0$$

Un exemplo de forza **non conservativa** é a forza de rozamento. Para comprobalo basta ver se o traballo feito por esta forza entre dous puntos depende do camiño seguido ou se ese traballo ao longo dun ciclo é nulo.



Supoñamos que arrastramos unha masa m situada sobre unha mesa ao longo do camiño indicado na figura. O traballo feito pola forza de rozamento ao longo do ciclo é:

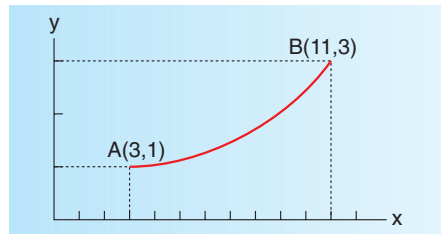
$$W_{A \rightarrow A} = W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C} + W_{C \rightarrow D} + W_{D \rightarrow A}$$

$$W_{A \rightarrow A} = F_r \cdot a \cdot \cos 180^\circ + F_r \cdot b \cdot \cos 180^\circ + F_r \cdot a \cdot \cos 180^\circ + F_r \cdot b \cdot \cos 180^\circ$$

$$W_{A \rightarrow A} = -2 \cdot F_r \cdot a + (-2 \cdot F_r \cdot b) \neq 0$$

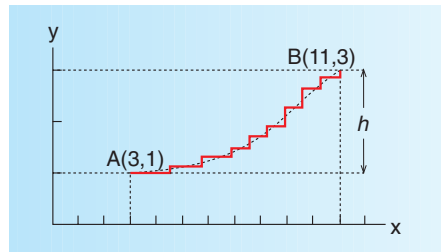
Exercicio resolto

- ▶ Subimos un corpo de 30 kg desde o punto A(3,1) até o B(11,3), expresados en metros, seguindo o camiño indicado na figura. Que traballo fai a forza do peso?



Solución:

Como a forza do peso é unha forza conservativa, o traballo que desenvolve non depende para nada do camiño seguido; só depende das posicións de partida e chegada. Isto pódese visualizar descompoñendo a traectoria curvilínea por outra en “escaleira”. Como a forza do peso é vertical, o ángulo que esta forma co desprazamento horizontal é de 90° sendo, nesta dirección, o traballo nulo.

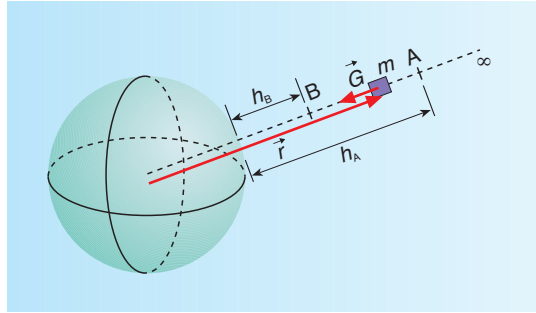


$$W_{A \rightarrow B} = \vec{G} \cdot \Delta\vec{r} = \vec{G}_y \cdot (\Delta r_x + \Delta r_y) = G_y \cdot \Delta r_x \cdot \cos 90^\circ + G_y \cdot \Delta r_y \cdot \cos 180^\circ$$

$$W_{A \rightarrow B} = m \cdot g \cdot h \cdot \cos 180^\circ = 30 \cdot 9,8 \cdot 2 \cdot \cos 180^\circ \rightarrow W_{A \rightarrow B} = -588 \text{ J}$$

9.2. Traballo dunha forza conservativa e enerxía potencial

O traballo feito por unha forza conservativa, como por exemplo o traballo da forza do peso cando unha masa m vai desde o infinito até un punto A, é independente do camiño seguido e correspóndelle un único valor. A este valor de traballo, cambiado de signo, dásele o nome de **enerxía potencial** de A: $W_{\infty}^A = -E_{pA}$. Fixémonos en que:



- $W_{\infty \rightarrow A} > 0$: a forza do peso e o desprazamento teñen o mesmo sentido.
- $E_{pA} < 0$: debido á posición, o corpo ten menos capacidade de realizar traballo (enerxía) en A que no infinito, e se por convenio se toma $E_{p\infty} = 0$ resulta que $E_{pA} < 0$.

De aí que apareza o signo menos que temos na igualdade: $W_{\infty \rightarrow A} = -E_{pA}$.

Para outro punto B temos: $W_{\infty \rightarrow B} = -E_{pB}$.

O traballo feito pola forza do peso entre A e B podémolo calcular como a diferenza entre os traballos anteriores: $W_{A \rightarrow B} = W_{\infty \rightarrow B} - W_{\infty \rightarrow A}$.

En termos de enerxía potencial escribimos: $W_{A \rightarrow B} = (-E_{pB}) - (-E_{pA}) = -(E_{pB} - E_{pA}) = -\Delta E_p$.

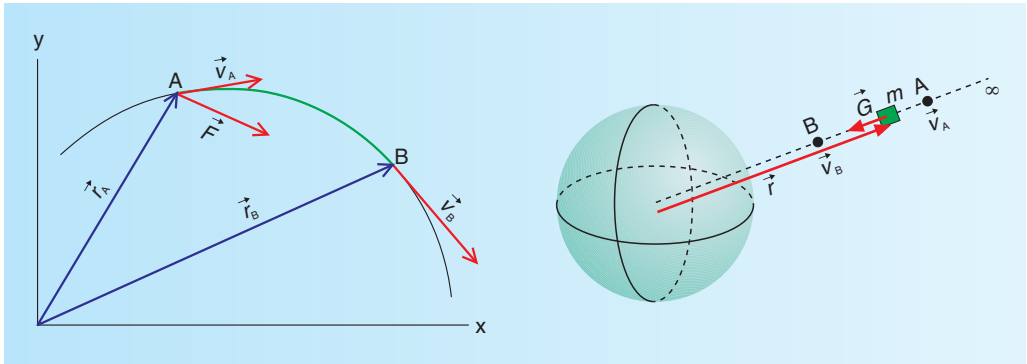
Esta expresión dinos que a diferenza de enerxía potencial dunha partícula entre dous puntos A e B dun campo de forzas conservativo é igual ao traballo, con signo negativo, que realizan as forzas do campo para levar a esta partícula desde o punto A até o B.

9.3. Traballo e enerxía cinética

En xeral, para saber o traballo que unha forza fai, é necesario coñecer a forza en función da posición: $W = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Cando non temos esta información podemos relacionar o traballo coa variación da enerxía cinética.

Todos sabemos que un corpo que se move cunha velocidade \vec{v} pode realizar un traballo: pode desprazar ou deformar a outro corpo. Por outro lado pensemos nun amigo, ao que non lle arranca a moto: empuxámolo cunha forza \vec{F} ao longo dun percorrido realizando un traballo. En ambos casos se produce:

- Unha variación da velocidade ($\Delta \vec{v}$).
- Un traballo (W).



Estas magnitudes deben de estar relacionadas, xa que son aspectos diferentes dunha mesma interacción. A relación que hai entre traballo e velocidade é:

$$W_A^B = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

Á expresión $\frac{1}{2} m v^2$ chámasele **enerxía cinética**, E_k , e con esta simboloxía podemos escribir:

$$W_A^B = E_{k_B} - E_{k_A} = \Delta E_k$$

A variación de enerxía cinética que unha partícula de masa m experimenta cando sobre ela actúa unha forza \vec{F} vains permitir coñecer o traballo que esta forza desenvolve.

Recordemos que a igualdade anterior se cumpre para as forzas conservativas e non conservativas. Pensemos nunha pedra que lanzamos verticalmente cara arriba dentro do campo gravitatorio terrestre. Se se ten en conta o rozamento co aire, as forzas que actúan sobre o corpo son: a forza do peso e a forza de rozamento, sendo o $W_{\text{total}} = W_{\text{peso}} + W_{F_{\text{rozamento}}} = \Delta E_k$. Como o $W_{F_{\text{conservativa}}} = -\Delta E_p$ resulta que: $W_{\text{total}} = -\Delta E_p + W_{F_{\text{non conservativa}}} = \Delta E_k \rightarrow W_{F_{\text{non conservativa}}} = \Delta E_k + \Delta E_p = \Delta E_{\text{mecánica}}$: O traballo feito polas forzas non conservativas é igual á variación da enerxía mecánica.

Ao longo dun ciclo, cando a pedra regresa ao punto de partida, o $W_{\text{total}} = W_{F_{\text{non conservativa}}} = \Delta E_k < 0$ (a velocidade final no punto de lanzamento é menor que a inicial: a forza de rozamento oponse ao movemento, sendo o seu traballo negativo).

9.4. Conservación da enerxía mecánica

A suma da enerxía cinética e da enerxía potencial recibe o nome de **enerxía mecánica**. Cando a forza que actúa sobre unha partícula é conservativa, podemos obter o traballo feito entre dous puntos como a variación da enerxía cinética ou como a variación da enerxía potencial:

$$\left. \begin{aligned} W_A^B &= \Delta E_k = E_{k_B} - E_{k_A} \\ W_A^B &= -\Delta E_p = -(E_{p_B} - E_{p_A}) \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} E_{k_B} - E_{k_A} &= -(E_{p_B} - E_{p_A}) \\ E_{k_B} - E_{k_A} &= -E_{p_B} + E_{p_A} \\ E_{k_B} + E_{p_B} &= E_{k_A} + E_{p_A} = \text{cte.} \end{aligned}$$

Segundo a expresión anterior temos que, cando as forzas son conservativas, a enerxía mecánica dunha partícula permanece constante.

Exercicio resolto

- ▶ Lanzamos verticalmente e cara arriba unha pedra de 2 kg cunha velocidade de 6 m/s, retornando ao punto de partida cunha velocidade de 4 m/s. Calcula: a) o traballo da forza do peso e b) o traballo da forza de rozamento.

Solución:

a)
$$W_A^A = W_A^B + W_B^A = \int_A^B \vec{G} \cdot d\vec{r} + \int_B^A \vec{G} \cdot d\vec{r}$$

$$W_A^B = \int_A^B \vec{G} \cdot d\vec{r} - \int_A^B \vec{G} \cdot d\vec{r} = 0$$

A forza do peso é unha forza conservativa e o traballo dunha forza conservativa ao longo dun ciclo é nulo: $W_{\text{peso}} = 0 \text{ J}$.

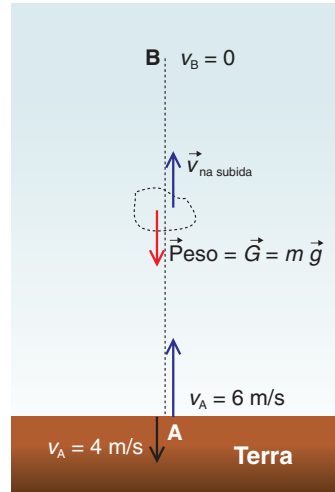
- b) O traballo total podémolo relacionar coa variación de enerxía cinética:

$$W_{\text{total}} = \Delta E_k = E_{k_f} - E_{k_o} \rightarrow W_{\text{total}} = 1/2 \cdot 2 \cdot 4^2 - 1/2 \cdot 2 \cdot 6^2 \rightarrow W_{\text{total}} = -20 \text{ J}$$

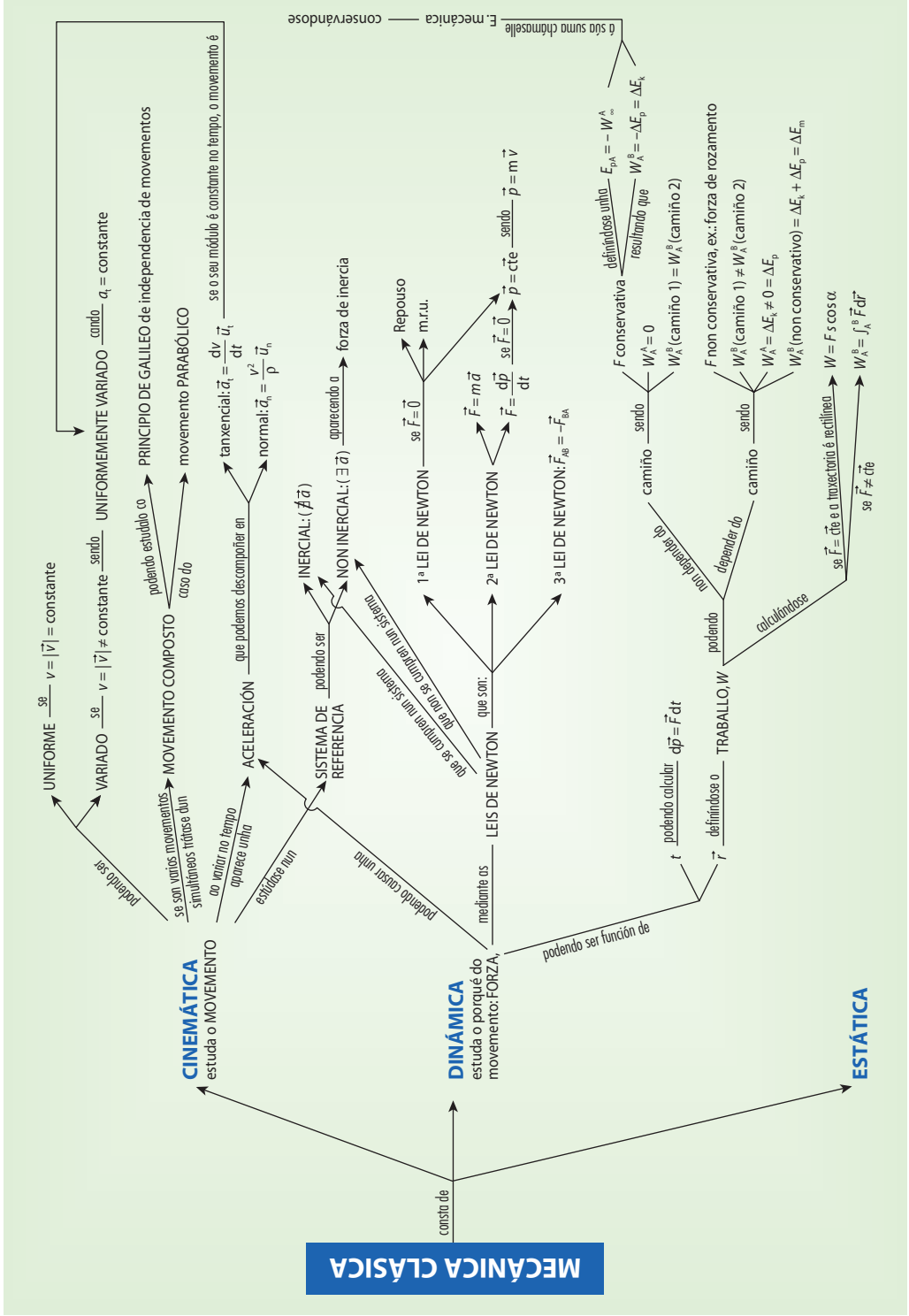
Por outra banda, o traballo total é igual á suma do traballo desenvolto polas forzas conservativas e non conservativas, co que podemos escribir:

$$\left. \begin{aligned} W_{\text{total}} &= W_{F \text{ conservativa}} + W_{F \text{ non conservativa}} \\ W_{F \text{ conservativa}} &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow W_{F \text{ non conservativa}} = W_{F \text{ rozamento}} = W_{\text{total}} = -20 \text{ J}$$

O traballo é negativo porque a forza de rozamento se opón ao movemento, diminuíndo a enerxía mecánica da pedra.



Mapa conceptual do Tema 1



é a súa suma chamámoselle E. mecánica — conservándose



1. Historia da gravitación: Leis de Kepler
2. Campos de forzas centrais: características xerais
3. Forza que orixina o campo gravitatorio. Lei da Gravitación Universal
4. Intensidade do campo gravitatorio: principio de superposición
5. Variación de g coa distancia ao centro da Terra e coa latitude
6. Enerxía potencial gravitatoria e potencial gravitatorio
7. Liñas de forza do campo gravitatorio. Concepto de fluxo
8. Relación entre a intensidade de campo gravitatorio, \vec{g} , e o potencial gravitatorio, V
9. A Terra como fonte de interacción gravitatoria. Satélites artificiais
10. Visión actual do Universo

Exercicios

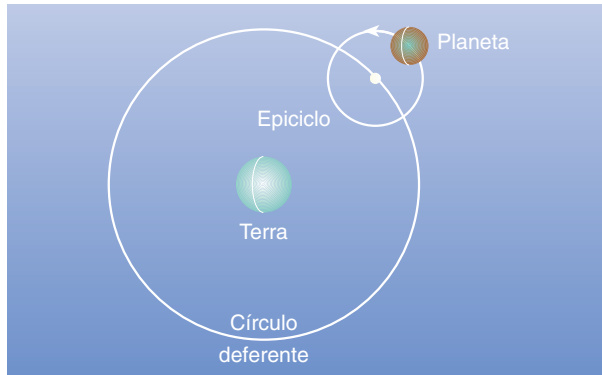
Exercicios de selectividade

Mapa conceptual dos contidos do tema

1. HISTORIA DA GRAVITACIÓN: LEIS DE KEPLER

Varias foron as teorías que se sucederon ao longo do tempo acerca do Sistema Solar. Así:

Ptolomeo de Alexandria (100-170): O pensamento grego de que o Sol e os planetas están describindo órbitas circulares ao redor da Terra, que permanece fixa, foi modificado no século II por Ptolomeo, supoñendo que os planetas se movían nun círculo, coñecido como **epiciclo**, e o centro do epiciclo, á súa vez, movíase sobre un círculo máis grande, coñecido como **deferente**¹, que tiña por centro o centro da Terra. Esta teoría xeocéntrica² tivo vixencia até o século XVI.

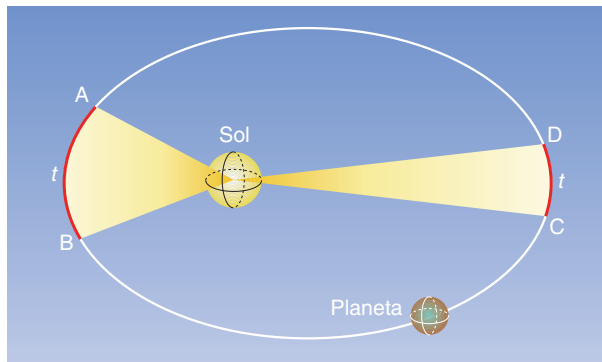


Copérnico (1473-1543): A Terra e os demais planetas están xirando ao redor do Sol en órbitas circulares (igual que Ptolomeo, intercambiando a posición do Sol pola da Terra). Mantén os epiciclos de Ptolomeo para os movementos planetarios. Esta teoría estaba en contra da Biblia polo que a súa defensa tivo serios problemas coa Igrexa romana³.

Tycho Brahe (1546-1601): Fai un gran número de medidas astronómicas con gran precisión que evidencian que o movemento orbital dos planetas non é circular.

Kepler (1571-1630): Fai un gran número de medidas astronómicas e aproveita as realizadas por Tycho Brahe, mantendo a idea heliocéntrica⁴ de Copérnico coa salvidade de órbitas elípticas en lugar de circulares ao redor do Sol. Ademais enunciou de forma empírica (obtidas experimentalmente) tres leis, que explicaban esta configuración do sistema solar:

1. Todos os planetas se moven en órbitas elípticas, estando o Sol nun dos focos da elipse (ano 1609).
2. O vector de posición, tamén chamado raio vector, que une o centro do Sol co planeta varre áreas



¹ Xa no século II a.C., Hiparco de Nicea estudou o movemento do Sol arredor da Terra e observou que a súa velocidade non é sempre a mesma; e para xustificar este feito xa propuxo o modelo do círculo deferente e do epiciclo.

² O **xeo** (que vén do grego: "xe" significa **Terra**) é o centro do Universo.

³ Este sistema Solar foi confirmado en 1609 (máis de medio século despois da morte de Copérnico) por Galileo coas observacións telescópicas que fixo. Isto tróuxolle (a Galileo) o ser acusado pola Inquisición de herexe, obrigándoo a desdicirse (ano 1633). No ano 1992, Galileo foi exonerado pola Igrexa católica.

⁴ O "**helios**" (que vén do grego e significa **sol**) é o centro do Universo. O elemento He onde primeiro se detectou foi na atmosfera solar, recibindo o nome deste astro.

iguais en tempos iguais (ano 1609). Isto vén significar que, se o tempo que lle leva ao planeta en ir de A a B é o mesmo que o de ir de C a D, cando o planeta está máis **preto** do Sol (**perihelio**) vai máis á présa que cando está máis **afastado** del (**afelio**).

3. O cociente entre o cadrado do tempo que emprega un planeta en dar unha volta completa ao redor do Sol (período, T) e o cubo do semieixe maior da súa órbita, r , é o mesmo para todos os planetas: $T^2/r^3 = k$ (ano 1619). Isto significa que os planetas máis próximos ao Sol se moven máis de présa que os que están máis afastados.

A táboa de períodos e raios orbitais dos planetas ao redor do Sol confeccionada por Kepler, e que deu lugar á súa terceira lei, non se diferenciaba moito da seguinte, que son os datos actuais:

PLANETA	RAIO DA ÓRBITA/m	PERÍODO ORBITAL/S
Mercurio	$5,79 \cdot 10^{10}$	$7,60 \cdot 10^6$
Venus	$1,08 \cdot 10^{11}$	$1,94 \cdot 10^7$
Terra	$1,49 \cdot 10^{11}$	$3,16 \cdot 10^7$
Marte	$2,28 \cdot 10^{11}$	$5,94 \cdot 10^7$
Xúpiter	$7,78 \cdot 10^{11}$	$3,74 \cdot 10^8$
Saturno	$1,43 \cdot 10^{12}$	$9,29 \cdot 10^8$
Urano	$2,87 \cdot 10^{12}$	$2,64 \cdot 10^9$
Neptuno	$4,50 \cdot 10^{12}$	$5,17 \cdot 10^9$

Exercicio resolto

- A Terra dista do Sol (raio medio da órbita) $1,49 \cdot 10^{11}$ m e o seu período de revolución é de 365 días. Cal será o período de revolución de Marte que describe unha órbita circular ao redor do Sol de $2,28 \cdot 10^{11}$ m?

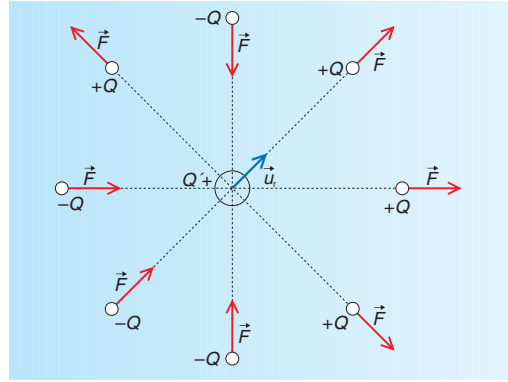
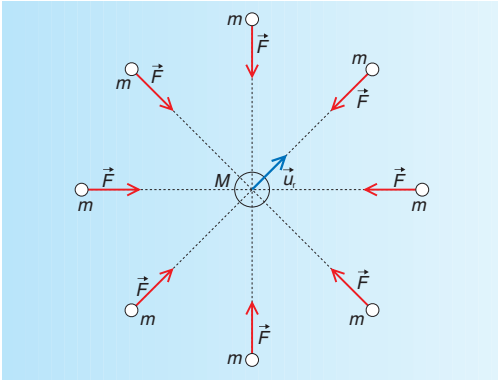
Solución:

Recordando a terceira lei de Kepler escribimos: $\frac{T_{\text{Terra}}^2}{r_{\text{Terra}}^3} = \frac{T_{\text{Marte}}^2}{r_{\text{Marte}}^3}$

Substituíndo na expresión anterior: $\frac{365^2}{(1,49 \cdot 10^{11})^3} = \frac{T_{\text{Marte}}^2}{(2,28 \cdot 10^{11})^3} \rightarrow T_{\text{Marte}} = 690,9$ días.

2. CAMPOS DE FORZAS CENTRAIS: CARACTERÍSTICAS XERAIS

Reciben o nome de **forzas centrais** aquelas forzas das que a súa liña de acción pasa sempre por un mesmo punto fixo, chamado **centro de forzas**. A forza \vec{F} e o vector de posición \vec{r} , con respecto ao centro de forzas, teñen a mesma dirección. As forzas de atracción gravitatoria debidas a unha masa puntual e as forzas electrostáticas (atractivas ou repulsivas), debidas a unha carga puntual en repouso, constitúen exemplos deste tipo de forzas.



En ambos casos, \vec{F} e \vec{r} teñen a mesma dirección, sendo os seus sentidos iguais ou opostos, segundo a forza sexa repulsiva ou atractiva, respectivamente. O módulo destas forzas non depende da súa dirección, pero si da distancia entre o centro orixe da forza e o punto sobre o cal actúan. Son do tipo: $\vec{F} = f(r) \cdot \vec{u}_r$.

No caso da forza gravitatoria e electrostática, a súa dependencia coa distancia é da forma:

$F = \frac{k}{r^2}$. En forma vectorial é:

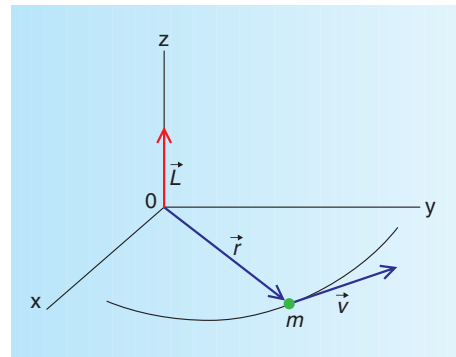
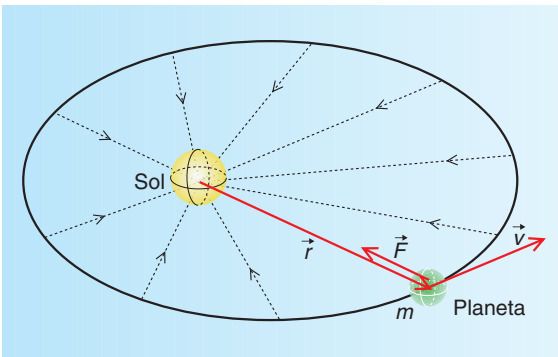
$$\vec{F} = + \frac{k}{r^2} \vec{u}_r \text{ (para forzas repulsivas)}$$

$$\vec{F} = - \frac{k}{r^2} \vec{u}_r \text{ (para forzas atractivas)}$$

onde k é unha constante e \vec{u}_r o vector unitario na dirección radial.

2.1. Conservación do momento angular dunha partícula que se move baixo unha forza central

Imos ver que o momento angular dunha partícula de masa m que se move cunha velocidade \vec{v} debido a unha forza central, con respecto ao centro de forzas, é constante.



Defínese o **momento angular**, tamén chamado **momento cinético**, dunha partícula de masa m , que se move cunha velocidade \vec{v} , respecto a un punto O, como “o momento da cantidade de movemento con respecto a ese punto O. Isto é: o produto vectorial do vector de posición da partícula con respecto a O, \vec{r} , pola cantidade de movemento, \vec{p} , da mesma”:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

sendo, no SI, a súa ecuación de dimensións: $[L] = ML^2T^{-1}$ e tendo por unidade: $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$.

Imos ver como varía o momento angular co tempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Recordando que $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ e que $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ resulta: $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{0}$ ao tratarse do produto vec-

torial de dous vectores paralelos. E como $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ resulta:

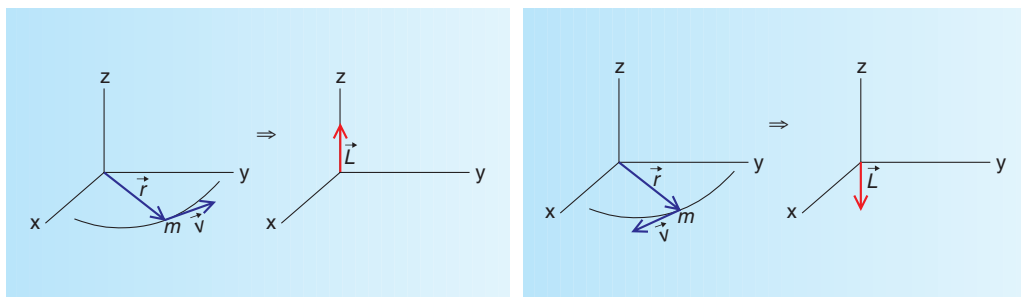
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_F$$

Se a forza exterior \vec{F} que actúa sobre a partícula é central, \vec{r} e \vec{F} teñen a mesma dirección e o seu produto vectorial é nulo: $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$, co que se obtén o **principio de conservación do momento angular**:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = \vec{cte}$$

As consecuencias que extraemos do feito de que \vec{L} é constante son:

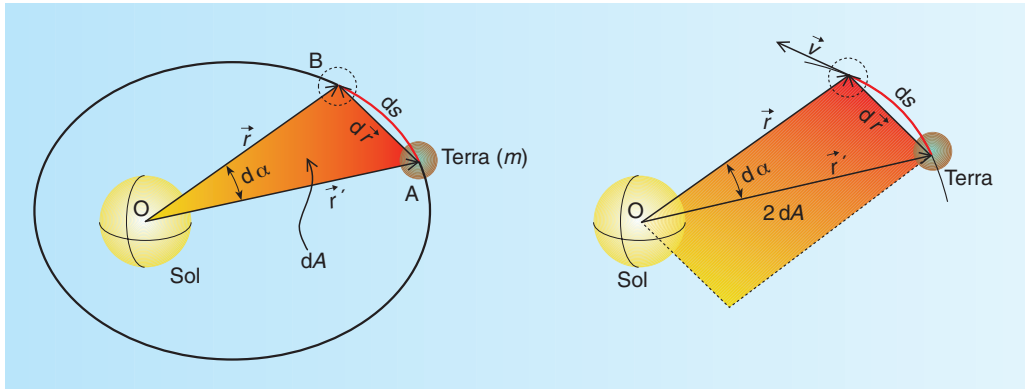
- Dirección de \vec{L} constante \Rightarrow A partícula (planeta) ten unha traxectoria plana, xa que senón \vec{L} cambiaría de dirección ao ser perpendicular ao plano determinado por \vec{v} e \vec{r} .
- Sentido de \vec{L} constante \Rightarrow A partícula (planeta) xira sempre no mesmo sentido, xa que se cambia o sentido de xiro cambia tamén o sentido de \vec{L} .



- $|\vec{L}|$ constante \Rightarrow Segunda lei de Kepler: As áreas varridas polo raio vector que une o Sol co planeta son iguais en tempos iguais. Vexámolo:

Nun tempo dt o raio vector \vec{r} varre a área dA que, sen moito erro, pode relacionarse coa do triángulo OAB, de base $AB = ds = dr$ e altura r , sendo:

$$dA = 1/2 r ds \sin \varphi, \text{ onde } \varphi \text{ é o ángulo formado polos vectores } \vec{r} \text{ e } d\vec{r}.$$



Por outro lado, o módulo do momento angular do planeta de masa m que xira coa velocidade \vec{v} é:

$$L = r m v \sin \varphi = r m \frac{ds}{dt} \sin \varphi$$

Comparando as dúas últimas expresións temos:

$L = m \frac{2 dA}{dt} \rightarrow \frac{L}{2 m} = \frac{dA}{dt} = \text{constante}$, xa que a masa do planeta e o seu momento angular son constantes.

dA/dt é a chamada **velocidade areolar** e representa a área que varre o raio vector e o tempo que tarda en varrela.

A igual resultado chegamos se recordamos que, numericamente, o produto vectorial de dous vectores concorrentes representa a área do paralelogramo que determinan eses dous vectores, que é o dobre da área que varre o raio vector:

$$\left. \begin{aligned} |\vec{L}| = |\vec{r} \times m \vec{v}| \rightarrow \frac{L}{m} = |\vec{r} \times \vec{v}| = \left| \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \\ \left| \vec{r} \times d\vec{r} \right| = 2 dA \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{L}{m} = \frac{2 dA}{dt} \rightarrow \frac{L}{2 m} = \frac{dA}{dt} = \text{constante}$$

Esta expresión dinos que a área varrida polo raio vector \vec{r} é proporcional ao tempo empregado en ser varrida (**lei das áreas**). De aquí dedúcese que os planetas no seu movemento en

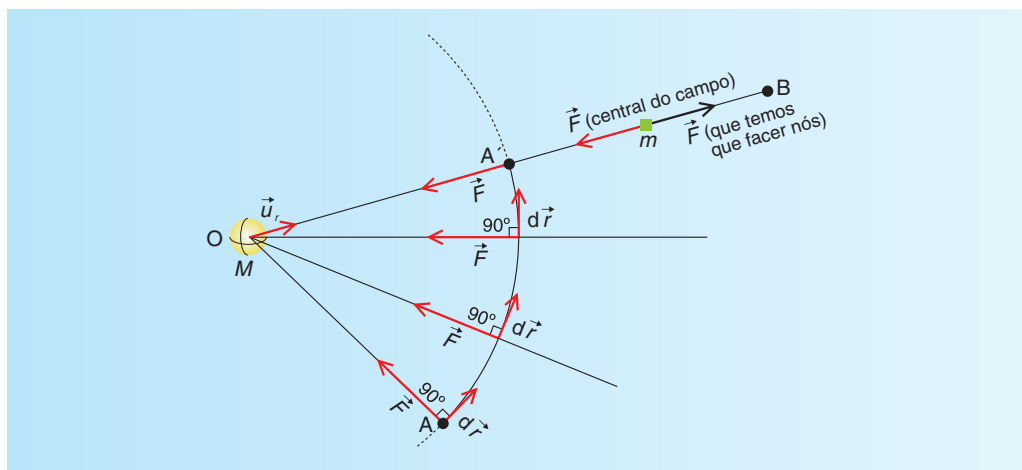
torno ao Sol levan máis velocidade na zona próxima ao Sol (perihelio) que na parte máis afastada del (afelio).

Consérvase o momento angular dunha partícula m que se move con velocidade \vec{v} constante?

2.2. Carácter conservativo dunha forza central

Para saber se unha forza central é conservativa imos ver cal é o traballo feito pola forza gravitatoria do campo creado por unha masa M cando unha partícula de masa m vai desde A até B . Como o traballo dunha forza conservativa non depende do camiño, imos supoñer que a partícula segue o camiño $AA'B$ sendo AA' un arco de circunferencia, como se indica na figura, resultando que:

$$W_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow A'} + W_{A' \rightarrow B}$$



$W_{A \rightarrow A'} = 0$, xa que as forzas son radiais e, polo tanto, perpendiculares ao arco, co que o produto: $\vec{F} \cdot d\vec{r} = F dr \cos 90^\circ = 0$ ⁵.

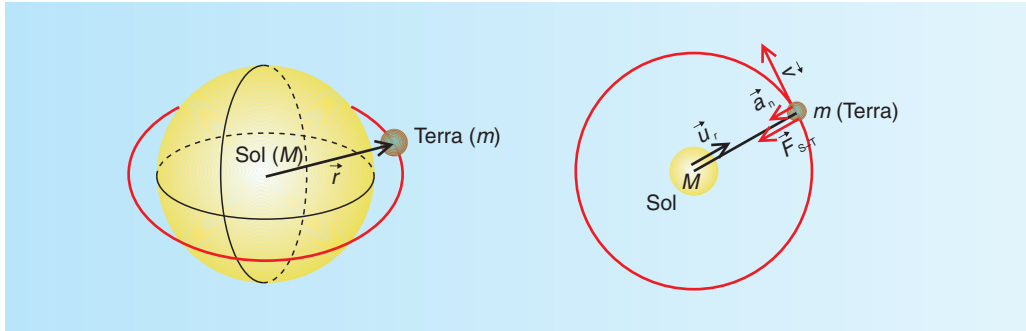
$$W_{A' \rightarrow B} = \int_{r_{A'}}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_{A'}}^{r_B} F dr \cos 180^\circ = - \int_{r_{A'}}^{r_B} \frac{k}{r^2} dr =$$

$$- \left[-\frac{k}{r} \right]_{r_{A'}}^{r_B} = - \left[-\frac{k}{r_B} - \left(-\frac{k}{r_{A'}} \right) \right] = - \left[-\frac{k}{r_B} - \left(-\frac{k}{r_A} \right) \right] = W_{A \rightarrow B}$$

Nesta expresión vemos que o traballo só depende da posición de A e de B e non do camiño seguido pola partícula: non depende para nada da forma en que varíe a forza coa posición. Polo tanto, queda demostrado que un sistema de forzas centrais é tamén un sistema de forzas conservativo.

⁵ 90° xa que a forza do campo apunta cara a M e $d\vec{r} = \vec{r}_{\text{final}} - \vec{r}_{\text{inicial}}$, cando imos de $A \rightarrow A'$ é tanxente ao arco da circunferencia e perpendicular a \vec{F} .

3. FORZA QUE ORIXINA O CAMPO GRAVITATORIO: LEI DA GRAVITACIÓN UNIVERSAL



Baseándose nas leis de Kepler, Newton demostrou que a forza que rexía o movemento planetario é unha forza central, que chamou gravitatoria. Imos achar a forza que o Sol exerce sobre un planeta (a Terra) que se move arredor do Sol describindo unha órbita, que consideramos por razón de brevidade no cálculo, circular (a simplificación feita non supón gran erro debido á pequena excentricidade da elipse). Polo tanto, o movemento que posúe a Terra é circular uniforme (recordemos a 2ª lei de Kepler). Isto supón:

$$\left. \begin{aligned} v = \text{cte} &\rightarrow a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \\ \vec{v} \neq \text{cte} &\rightarrow \vec{a} \neq \vec{0} \\ \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \end{aligned} \right\} \rightarrow a = a_n = \frac{v^2}{r} = \text{cte, xa que } v \text{ e } r \text{ son constantes}$$

Existe unha aceleración normal dirixida cara ao centro do Sol, que é consecuencia da forza que este exerce sobre a Terra.

$$F_{S-T} = m \cdot a = m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \frac{\omega^2 \cdot r^2}{r} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2}$$

Multiplicando e dividindo por r^2 , temos:

$$F_{S-T} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} \cdot \frac{r^2}{r^2}$$

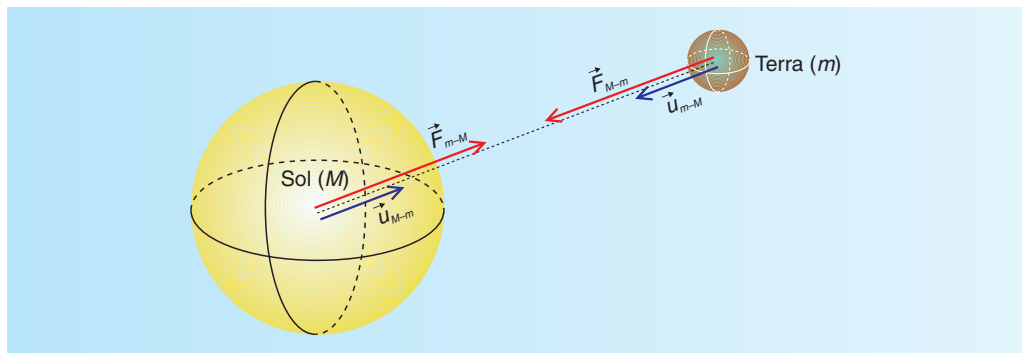
Recordando a 3ª lei de Kepler, o cociente r^3/T^2 é constante e independente da masa do planeta, polo que é a mesma para calquera planeta que xire ao redor do Sol.

$$F_{S-T} = K_1 \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m}{r^2} = K_1' \frac{m}{r^2} \quad (1)$$

Pola terceira lei de Newton, a Terra exerce sobre o Sol outra forza de igual módulo e dirección e de sentido contrario, sendo:

$$F_{T-S} = K_2 \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot M}{r^2} = K_2' \frac{M}{r^2} \quad (2)$$

Onde M é a masa do Sol e K_2' outra constante.



Igualando as dúas últimas expresións:

$$K_1' \cdot m = K_2' \cdot M \rightarrow \frac{K_1'}{M} = \frac{K_2'}{m} = G \text{ (cte)} \rightarrow \begin{cases} K_1' = G \cdot M \\ K_2' = G \cdot m \end{cases}$$

Se substituímos, respectivamente, estas dúas igualdades nas expresións (1) e (2), temos:

$$F = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2}$$

Onde G é a chamada constante de gravitación universal, de ecuación de dimensións:

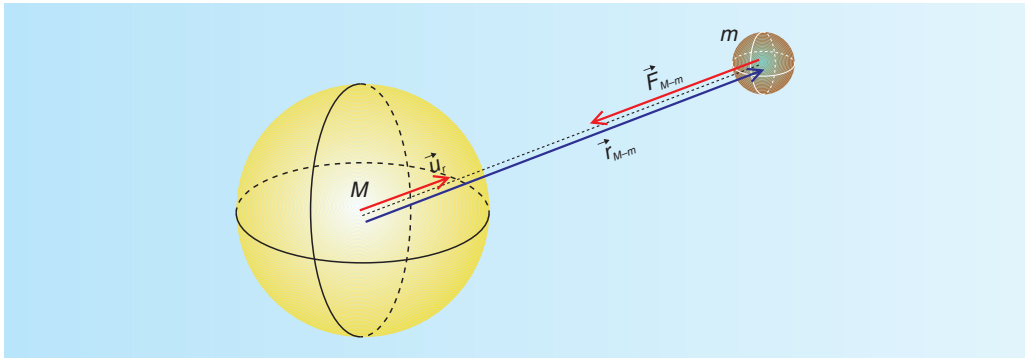
$$[G] = \left[\frac{F r^2}{M m} \right] = M L^3 T^{-2} M^{-2} = M^{-1} L^3 T^{-2}$$

correspondéndolle a unidade: $\text{kg}^{-1} \text{m}^3 \text{s}^{-2}$ (SI). O seu valor foi calculado experimentalmente en 1798 por Cavendish, utilizando grandes masas de laboratorio e un sistema de medición de forzas moi sensíbel: a balanza de torsión, sendo de $6,67 \cdot 10^{-11} \text{N m}^2 \text{kg}^{-2}$.

A expresión $F = G \frac{M m}{r^2}$ constitúe a lei da gravitación universal, que se cumpre para masas puntuais ou de forma esférica, con densidade uniforme. Estabelece que dous corpos se atraen cunha forza que é directamente proporcional ao produto das súas masas e inversamente proporcional ao cadrado da distancia que as separa. A súa expresión vectorial é:

$$\vec{F} = -G \frac{M m}{r^2} \vec{u}_r$$

O signo menos indica que \vec{F} e \vec{r} son de sentido contrario.



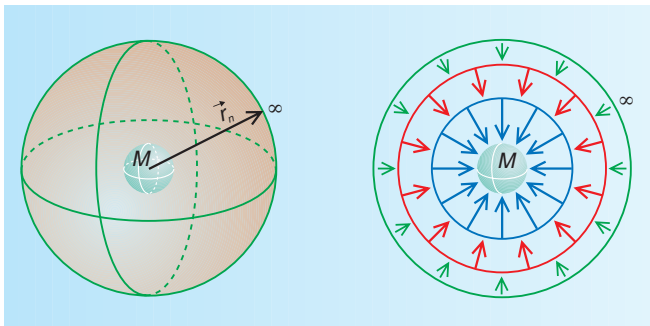
Cando se trata dun corpo de masa m situado na superficie da Terra de masa M e raio r , a lei da gravitación universal toma a forma: $F = m g = \text{peso do corpo}$, onde a $g = G M/r^2$ lle corresponde aproximadamente o valor de $9,8 \text{ m/s}^2$.

4. INTENSIDADE DO CAMPO GRAVITATORIO: PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Imos empezar dicindo qué é o que se entende por campo gravitatorio. Sexa unha masa M (por exemplo, a Terra) e nas súas proximidades outra masa m (unha pedra). A masa m é atraída pola outra M cunha forza que vén dada pola expresión: $F_{M-m} = (G M m)/r_1^2$. Se afastamos a masa m até unha distancia r_2 (maior que r_1) a forza con que M atrae a m é menor. Para outra distancia r_3 maior, F_{M-m} é máis pequena, chegando a ser practicamente cero para un determinado valor de r_n . A partir desta distancia M non exerce forza atractiva sobre m : dise que m está no infinito e á rexión do espazo onde M manifesta os seus efectos chámase **campo gravitatorio**. Se M é a masa da Terra, trátase do **campo gravitatorio terrestre**.

O **campo gravitatorio terrestre**, como todo campo de forzas, vén determinado por tres elementos que o definen, que son:

- A intensidade.
- O potencial.
- As liñas de forza –que nos permiten visualizalo–.



En cada punto do campo gravitatorio creado pola masa M (zona marrón) pode asociarse un vector de tal forma que a forza gravitatoria exercida sobre calquera outra masa m colocada nese punto se obteña multiplicando m polo correspondente vector. Este vector é o coñecido como **intensidade de campo gravitatorio**.

A lei de Newton da gravitación universal permítenos calcular a forza \vec{F} con que un corpo de masa M atrae a outro de masa m , sendo: $F = G \frac{M m}{r^2}$, onde G é a constante da gravitación universal e r a distancia que separa as dúas masas. Se a masa m é a unidade (1 kg no SI), a expresión anterior queda da forma: $F = G \frac{M \cdot 1}{r^2}$. Esta é a forza exercida pola masa M sobre a unidade de masa situada á distancia r .

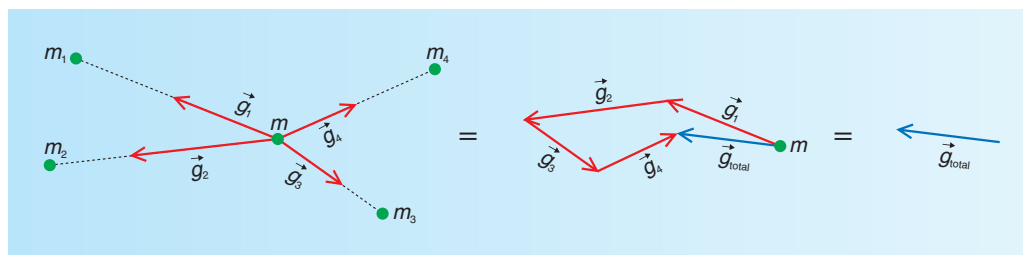
Defínese a **intensidade de campo gravitatorio**, \vec{g} , (tamén chamada vector campo gravitatorio ou, simplemente, campo gravitatorio) nun punto como “a forza que a masa creadora do campo exerce sobre a unidade de masa colocada nese punto”⁶: $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}_r$.

Vemos que é unha magnitude vectorial, de igual dirección (vertical) e sentido (cara ao centro da masa creadora do campo) que a forza; o signo menos, $-$, indica que \vec{g} e \vec{u}_r teñen sentido contrario. A súa ecuación de dimensións é: $[g] = L T^{-2}$, e a súa unidade no SI: $m s^{-2}$.

A intensidade de campo gravitatorio terrestre na superficie da Terra toma o valor de:

$$g = G \frac{M_{\text{Terra}}}{r_{\text{Terra}}^2} \approx 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \text{ que tamén se coñece co nome de aceleración da gravidade terrestre (a súa unidade é a dunha aceleración).}$$

Se son varias as masas creadoras de campo, a \vec{g} total é: $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 + \dots$ Esta expresión dinos que a intensidade de campo gravitatorio total nun punto creada por varias masas puntuais é igual á suma vectorial das intensidades que cada masa individualmente crea no punto considerado. Isto coñécese como **principio de superposición**.



Intensidade de campo gravitatorio resultante de varias masas.

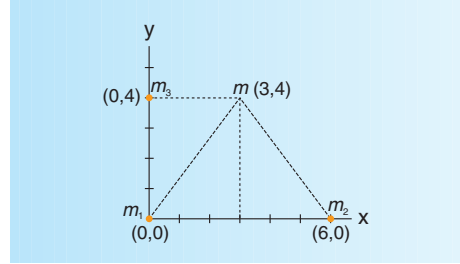
Exer. resollo

- ▶ Tres masas puntuais, $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 4$ kg e $m_3 = 6$ kg, están situadas, respectivamente, nos puntos (0,0), (6,0) e (0,4). Calcula:
 - a) A forza gravitatoria que estas masas exercen sobre outra masa de 8 kg situada no punto (3,4).
 - b) A intensidade de campo gravitatorio creada polas masas m_1 , m_2 e m_3 no punto anterior (3,4).
 Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$; as coordenadas están dadas en metros.

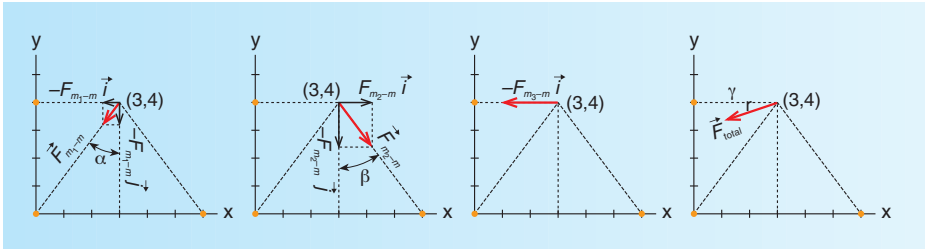
⁶ Nesta fórmula \vec{g} é a intensidade de campo gravitatorio producida por unha masa M calquera. Non debe confundirse coa aceleración da gravidade terrestre, que é a intensidade do campo gravitatorio terrestre.

Solución:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } F_{m_1-m} &= \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 8}{(\sqrt{3^2 + 4^2})^2} = 4,3 \cdot 10^{-11} \text{ N} \\
 F_{m_2-m} &= \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 4 \cdot 8}{(\sqrt{3^2 + 4^2})^2} = 8,5 \cdot 10^{-11} \text{ N} \\
 F_{m_3-m} &= \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 8}{3^2} = 35,6 \cdot 10^{-11} \text{ N}
 \end{aligned}$$



Descompoñemos estas forzas en dúas direccións perpendiculares: a horizontal e a vertical.



$$\begin{aligned}
 (F_{m_1-m})_x &= 4,3 \cdot 10^{-11} \cdot \sin \alpha = 4,3 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{3}{5} = 2,6 \cdot 10^{-11} \text{ N} \rightarrow (\vec{F}_{m_1-m})_x = -2,6 \cdot 10^{-11} \vec{i} \text{ (N)} \\
 (F_{m_1-m})_y &= 4,3 \cdot 10^{-11} \cdot \cos \alpha = 4,3 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{4}{5} = 3,4 \cdot 10^{-11} \text{ N} \rightarrow (\vec{F}_{m_1-m})_y = -3,4 \cdot 10^{-11} \vec{j} \text{ (N)} \\
 (F_{m_2-m})_x &= 8,5 \cdot 10^{-11} \cdot \sin \beta = 8,5 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{3}{5} = 5,1 \cdot 10^{-11} \text{ N} \rightarrow (\vec{F}_{m_2-m})_x = 5,1 \cdot 10^{-11} \vec{i} \text{ (N)} \\
 (F_{m_2-m})_y &= 8,5 \cdot 10^{-11} \cdot \cos \beta = 8,5 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{4}{5} = 6,8 \cdot 10^{-11} \text{ N} \rightarrow (\vec{F}_{m_2-m})_y = -6,8 \cdot 10^{-11} \vec{j} \text{ (N)}
 \end{aligned}$$

Agora sumamos os compoñentes que teñen a mesma dirección:

$$\begin{aligned}
 (\vec{F}_{\text{total}})_x &= (\vec{F}_{m_1-m})_x + (\vec{F}_{m_2-m})_x + (\vec{F}_{m_3-m})_x \\
 (\vec{F}_{\text{total}})_x &= -2,6 \cdot 10^{-11} \vec{i} + 5,1 \cdot 10^{-11} \vec{i} - 35,6 \cdot 10^{-11} \vec{i} = -33,1 \cdot 10^{-11} \vec{i} \text{ (N)} \\
 (\vec{F}_{\text{total}})_y &= (\vec{F}_{m_1-m})_y + (\vec{F}_{m_2-m})_y = -3,4 \cdot 10^{-11} \vec{j} - 6,8 \cdot 10^{-11} \vec{j} = -10,2 \cdot 10^{-11} \vec{j} \text{ (N)}
 \end{aligned}$$

$$F_{\text{total}} = \sqrt{(-33,1 \cdot 10^{-11})^2 + (-10,2 \cdot 10^{-11})^2} = 3,5 \cdot 10^{-10} \text{ N e } \tan \gamma = \frac{10,2 \cdot 10^{-11}}{33,1 \cdot 10^{-11}} \rightarrow \gamma = 17,1^\circ$$

A dirección é a de $17,1^\circ$ con respecto á parte positiva do eixe x e o sentido é cara ao terceiro cuadrante.

$$\vec{F}_{\text{total}} = -33,1 \cdot 10^{-11} \vec{i} - 10,2 \cdot 10^{-11} \vec{j} \text{ (N)}$$

$$\text{b) } \vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-33,1 \cdot 10^{-11} \vec{i} - 10,2 \cdot 10^{-11} \vec{j}}{8} \rightarrow \vec{g} = -4,1 \cdot 10^{-11} \vec{i} - 1,3 \cdot 10^{-11} \vec{j} \text{ (N)}$$

$$g = \sqrt{(-4,1 \cdot 10^{-11})^2 + (-1,3 \cdot 10^{-11})^2} \rightarrow g = 4,3 \cdot 10^{-11} \text{ N kg}^{-1}$$

A dirección e o sentido de \vec{g} coincide coa dirección e o sentido de \vec{F} .

5. VARIACIÓN DE g COA DISTANCIA AO CENTRO DA TERRA E COA LATITUDE

Variación de g coa distancia ao centro da Terra

Supoñamos un punto P no interior da Terra, a unha profundidade h con respecto á súa superficie.

A intensidade de campo gravitatorio no punto

P vén dada pola expresión: $g = \frac{G m}{r^2}$, sendo m a

masa da esfera que, tendo por centro ao da Terra, pasa polo punto onde queremos coñecer g .

Como a medida que r diminúe tamén diminúe o

valor de m , para saber como varía o valor de g con r imos expresar m en función de r . Con

este fin recordamos que $m = \rho \cdot V$, sendo ρ a densidade da Terra, que supoñemos

constante, e V o seu volume que, en función de r , é $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$. En consecuencia resulta:

$m = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$. Substituíndo na expresión de g temos:

$$g = \frac{G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}{r^2} \rightarrow g = G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r \rightarrow g = \text{cte} \cdot r$$

Vemos que o valor de g , para puntos interiores da Terra, aumenta de forma directamente proporcional co valor de r , correspondéndolle a representación gráfica que á marxe se indica.

Para un punto P da superficie da Terra, r coincide co raio desta e g toma o valor máximo.

Se o punto P está a unha altura h sobre a superficie da Terra, o valor da expresión de g é:

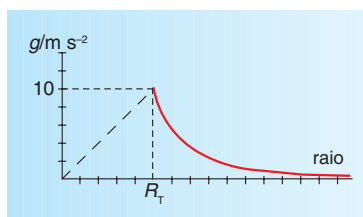
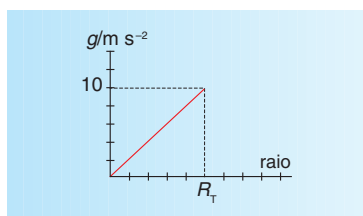
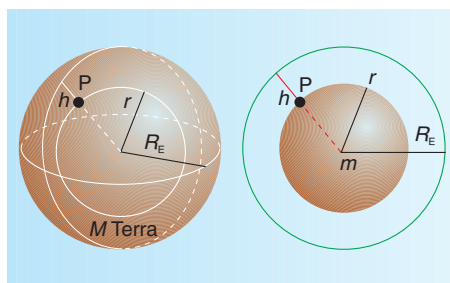
$g = \frac{G M}{r^2}$, sendo M a masa da Terra e r a distancia que hai desde o seu centro até o punto onde

calculamos o valor de g ($r = R_T + h$, sendo R_T o raio da Terra). O resultado é que g é inver-

samente proporcional ao cadrado da distancia, $g = \frac{\text{cte}}{r^2}$, e, en consecuencia, a representación

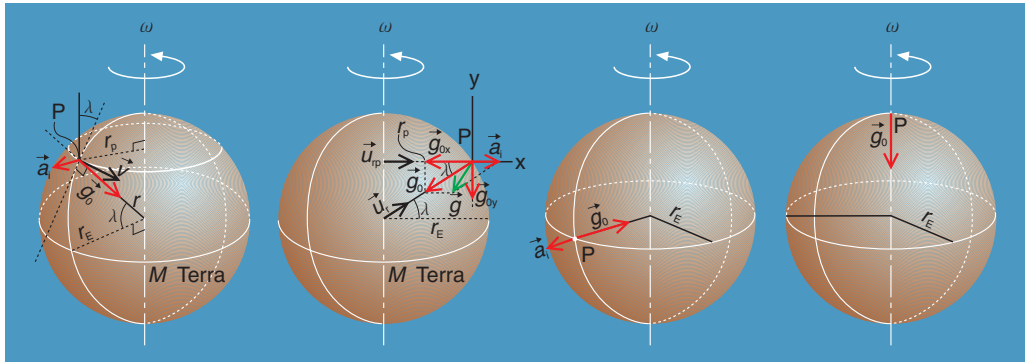
gráfica de g fronte á distancia ao centro da Terra, r , é a que á marxe se indica.

Concluimos que, con respecto á distancia ao centro da Terra, o valor de g é máximo na súa superficie.



Variación de g coa latitude

Por outro lado g tamén **varía coa latitude**: o raio da Terra diminúe a medida que imos do Ecuador cara aos Polos e, ademais, a Terra rota cunha velocidade \vec{v} , que é constante en módulo pero non en dirección, aparecendo unha aceleración normal⁷. Cal é a aceleración resultante que actúa sobre un corpo de masa m que rota solidariamente coa Terra?



Para un observador que viaxa co corpo (sistema non inercial) as forzas que actúan sobre o corpo son: a forza do peso: $\vec{F}_0 = m \cdot \vec{g}_0$, e a forza de inercia: $\vec{F}_{\text{inercia}} = m \frac{v^2}{r} \vec{u}_{\text{rp}}$, resultando:

$$\vec{F}_{\text{total}} = -m \frac{GM}{r^2} \vec{u}_r + m \frac{v^2}{r_p} \vec{u}_{\text{rp}} \rightarrow \vec{a}_{\text{total}} = -\frac{GM}{r^2} \vec{u}_r + \frac{4\pi^2}{T^2} r_p \vec{u}_{\text{rp}}$$

Para un obxecto situado nun punto de latitude λ , imos descompoñer \vec{g}_0 na dirección de \vec{a}_i e noutra perpendicular a esta, que é paralela ao eixe de rotación⁸.

$$\vec{g}_0 = -G \frac{M}{r^2} \cos \lambda \vec{i} - G \frac{M}{r^2} \text{sen } \lambda \vec{j}$$

Tamén escribimos \vec{a}_i en función do raio da Terra no punto P:

$$\vec{a}_i = \frac{4\pi^2}{T^2} r_p \vec{u}_{\text{rp}} = \frac{4\pi^2}{T^2} r \cos \lambda \vec{i}$$

En función destes compoñentes, a aceleración total nun punto de latitude λ vale:

$$\vec{g}_{\text{total}} = \vec{g} = \left(-G \frac{M}{r^2} + \frac{4\pi^2}{T^2} r \right) \cos \lambda \vec{i} - G \frac{M}{r^2} \text{sen } \lambda \vec{j}$$

⁷ Recorda que esta aceleración xa a calculamos anteriormente, cando estudabamos os sistemas de referencia, e foi desconsiderada ao ter un valor moi pequeno: $a_n = 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$. Se a temos en conta, un observador que viaxa coa Terra leva a aceleración de $3,4 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$, tratándose dun sistema non inercial. Esta aceleración é, na súa maior parte, a que explica o maior valor da aceleración da gravidade cara aos Polos con respecto ao Ecuador. O resto da variación apreciable no valor de g na superficie terrestre débese ao seu achatado cara aos Polos.

⁸ Igualmente podíamos facer a descomposición de \vec{a}_i na dirección radial (que coincide coa de \vec{g}_0) e noutra transversal, tanxente ao meridiano que pasa polo punto onde queremos coñecer a aceleración resultante.

Vemos que a aceleración da gravidade depende da latitude terrestre λ . Así:

- Para un punto do Ecuador, $\lambda = 0^\circ$, resulta:

$$\vec{g}_{\text{ecuador}} = \left(-G \frac{M}{r^2} + \frac{4\pi^2}{T^2} r \right) \cos 0^\circ \vec{i} - G \frac{M}{r^2} \sin 0^\circ \vec{j} = (-g_0 + a_i) \vec{i}$$

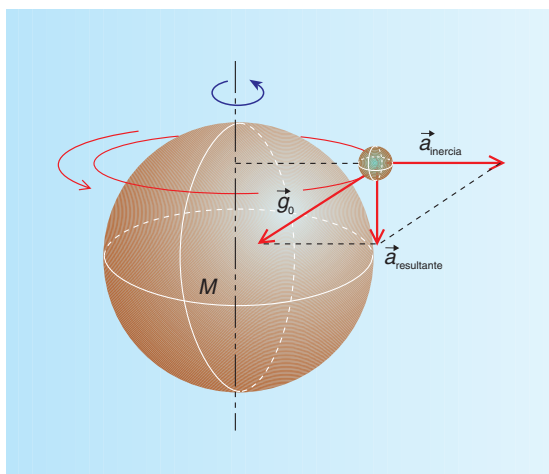
- Para o Polo, $\lambda = 90^\circ$, é:

$$\vec{g}_{\text{polo}} = \left(-G \frac{M}{r^2} + \frac{4\pi^2}{T^2} r \right) \cos 90^\circ \vec{i} - G \frac{M}{r^2} \sin 90^\circ \vec{j} = -g_0 \vec{j}$$

Resulta que na superficie da Terra a aceleración da gravidade é máxima nos Polos e vai diminuindo cara ao Ecuador, onde é mínima.

Pola variación de g coa altitude e a latitude, defínese g ao nivel do mar e a 45° de latitude.

Debido á aceleración da gravidade e á aceleración de inercia, a forza resultante que actúa sobre unha nave espacial que está xirando a unha altura h sobre a superficie da Terra, en órbitas que non teñen por centro o da Terra, está desviada do centro da Terra.



Exercicio resolto

- Calcula a aceleración da gravidade nun punto situado no Ecuador terrestre e no Polo.

Datos: $r_{\text{Ecuador}} = 6,369 \cdot 10^6$ m; $r_{\text{Polo}} = 6,366 \cdot 10^6$ m; $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻²; $M_{\text{Terra}} = 5,975 \cdot 10^{24}$ kg.

Solución:

$$g_{\text{no Ecuador}} = \frac{GM}{r_{\text{Ecuador}}^2} - \frac{v^2}{r_{\text{Ecuador}}} = \frac{GM}{r_{\text{Ecuador}}^2} - \omega^2 r_{\text{Ecuador}}$$

$$g_{\text{no Ecuador}} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,975 \cdot 10^{24}}{(6,369 \cdot 10^6)^2} - \left(\frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \right)^2 \cdot 6,369 \cdot 10^6$$

$$g_{\text{no Ecuador}} = 9,825 - 0,034 \rightarrow g_{\text{no Ecuador}} = \mathbf{9,791 \text{ m s}^{-2}}$$

$$g_{\text{no Polo}} = \frac{GM}{r_{\text{Polo}}^2} - \frac{v^2}{r_{\text{circunferencia}}} = \frac{GM}{r_{\text{Polo}}^2} - \omega^2 r_{\text{circunferencia}}$$

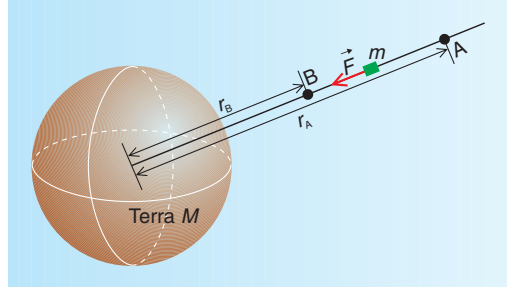
$$g_{\text{no Polo}} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,975 \cdot 10^{24}}{(6,366 \cdot 10^6)^2} - 0 \rightarrow g_{\text{no Polo}} = \mathbf{9,834 \text{ m s}^{-2}}$$

6. ENERXÍA POTENCIAL GRAVITATORIA E POTENCIAL GRAVITATORIO

Cando as forzas son conservativas, o traballo que estas forzas desenvolven só depende da posición inicial e final da partícula e a cada punto da traxectoria seguida pola partícula correspóndelle un único valor de traballo, podendo asignarlle un escalar, que se chama **enerxía potencial** (E_p), de modo que o traballo realizado pola forza conservativa sexa igual á diminución desta enerxía potencial⁹.

A **forza gravitatoria** é **central** e, polo tanto, **conservativa**, podendo definir unha **enerxía potencial gravitatoria** de modo que: $W_{B \rightarrow A} = -\Delta E_p = -(E_{pA} - E_{pB})$.

Imos agora calcular o traballo feito pola forza conservativa do peso cando levamos a partícula de masa m desde o punto B até o A, como se ve na figura.



$$W_B^A = \int_{r_B}^{r_A} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_B}^{r_A} F \cdot dr \cdot \cos 180^\circ = - \int_{r_B}^{r_A} \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} dr = - \left[-\frac{G \cdot M \cdot m}{r} \right]_{r_B}^{r_A}$$

$$W_B^A = - \left[\left(-\frac{G \cdot M \cdot m}{r_A} \right) - \left(-\frac{G \cdot M \cdot m}{r_B} \right) \right]$$

Por outro lado, temos:

$$W_B^A = - \left[\left(E_{pA} \right) - \left(E_{pB} \right) \right]$$

Comparando resulta:

$$E_{pB} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r_B} \quad \text{e} \quad E_{pA} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r_A}$$

⁹ Pensa que queremos subir unha lámpada desde o chan, h_0 , até o teito, h , con velocidade constante. Para iso necesitamos facer unha forza, de igual módulo e dirección á do peso da lámpada e de sentido contrario a esta. O traballo feito por nós é:

$$W_{h_0}^h = \int_{h_0}^h \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{h_0}^h F \cdot dr = m \cdot g \cdot \int_{h_0}^h dr = m \cdot g \cdot (h - h_0)$$

A enerxía potencial que gana a lámpada é: $\Delta E_p = m \cdot g \cdot (h - h_0)$.

De comparar as dúas últimas igualdades resulta que: $W_{h_0}^h$ (feito por nós) = ΔE_p .

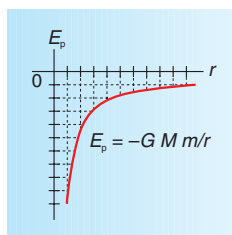
Como a forza neta que actúa sobre a lámpada é cero (\vec{v} constante), o traballo total tamén será cero: a forza do peso realiza un traballo igual e de sentido contrario ao feito por nós:

$$W_{h_0}^h = \int_{h_0}^h \vec{F}_{\text{peso}} \cdot d\vec{r} = \int_{h_0}^h F_{\text{peso}} \cdot dr \cdot \cos 180^\circ = - \int_{h_0}^h F \cdot dr = -m \cdot g \cdot \int_{h_0}^h dr = -m \cdot g \cdot (h - h_0)$$

A enerxía potencial que gana a lámpada cando sobe desde o chan até o teito xa dixemos que é: $\Delta E_p = m \cdot g \cdot (h - h_0)$.

De comparar as dúas últimas igualdades resulta: $W_{h_0}^h$ (feito polas forzas do campo) = $-\Delta E_p$.

A gráfica da enerxía potencial gravitatoria en función da distancia é unha hipérbola como a indicada na figura.



Se o punto A está no infinito: $r_A \rightarrow \infty \Rightarrow E_{pA} \rightarrow 0$ e $W_B^\infty = E_{pB}$.

Se consideramos o traballo feito polas forzas do campo para levar a masa m desde o infinito até B, o resultado é o mesmo pero cambiado de signo: $W_\infty^B = -E_{pB}$.

A enerxía potencial gravitatoria dunha masa m nun punto é o traballo feito polas forzas do campo para levar a masa m desde o infinito até ese punto, cambiado de signo: $E_{pB} = -W_\infty^B$ feito pola forza conservativa do campo. Vén sendo igual ao traballo que temos que facer nós para levar a masa m desde ese punto até o infinito¹⁰, tamén cambiado de signo: $E_{pB} = -W_B^\infty$ feito por nós.

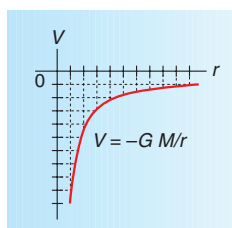
O signo menos ten a seguinte explicación: Se a enerxía potencial no infinito é cero, a medida que nos aproximamos ao centro do campo a enerxía potencial diminúe (aumenta en valor negativo)¹¹.

Se a masa m é a unidade, $m = 1$ kg, á enerxía potencial gravitatoria chámasele **potencial gravitatorio**, V , $V = \frac{E_p}{m}$. A expresión de V en función da masa M creadora de campo e da distancia r é:

$$V = \frac{-G M m}{m r} = \frac{-G M}{r}$$

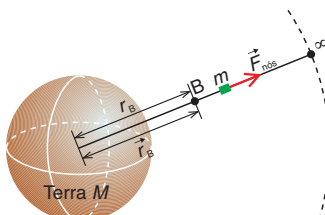
Polo tanto, nun punto P do campo gravitatorio dunha masa M , o potencial gravitatorio é unha descrición enerxética do campo.

A gráfica desta ecuación é unha hipérbola como a indicada na figura e representa o traballo –cambiado de signo– feito polas forzas do campo para levar a unidade de masa desde o infinito até o punto considerado. Equivale ao traballo que nós temos que facer para levar, con velocidade constante, a unidade de masa desde o infinito até ese punto.



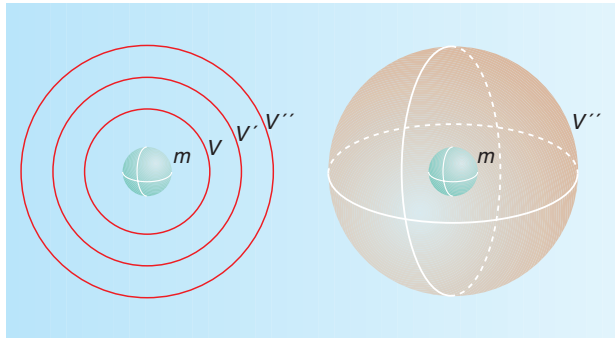
¹⁰ Se o traballo o facemos nós, o sentido da forza é o contrario ao da forza do campo, de modo que:

$$W_B^\infty = \int_{r_B}^\infty \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_B}^\infty F \cos 0^\circ dr = \int_{r_B}^\infty \frac{G M m}{r^2} dr = \left[-\frac{G M m}{r} \right]_{r_B}^\infty = 0 - \left(-\frac{G M m}{r_B} \right) = -E_{pB}$$



¹¹ A enerxía potencial pode ser positiva ou negativa: depende da orixe do sistema de referencia que se considere. Así, cando utilizamos a expresión $E_p = m \cdot g \cdot h$ para puntos situados na superficie da Terra, a enerxía potencial ten un valor positivo. Polo contrario, coa expresión $E_p = -G \cdot M \cdot m / r$, correspóndelle un valor negativo e supón a súa orixe en puntos infinitamente afastados da superficie da Terra. Pero as dúas expresións conducen ao mesmo resultado: se un corpo se afasta da Terra a súa enerxía potencial aumenta (ao aumentar r , o cociente $G \cdot M / r$ diminúe e, polo tanto, $-G \cdot M \cdot m / r$ aumenta).

Os puntos que teñen igual potencial dise que son equipotenciais. Se estes puntos determinan unha liña, trátase dunha **liña equipotencial**; se forman unha superficie aparece unha **superficie equipotencial** etc. Para o caso dunha masa puntual, m , as superficies esféricas concéntricas coa masa son superficies equipotenciais.



A superficie das esferas, que teñen por centro a masa puntual m , son superficies equipotenciais do campo gravitatorio de m .

Entre dous puntos de igual potencial, o traballo desenvolto pola forza gravitatoria para desprazar unha masa m' é nulo:

$$W_A^B = -\Delta E_p = -m' \cdot \Delta V = -m' \cdot (V_B - V_A) = -m' \cdot 0 = 0$$

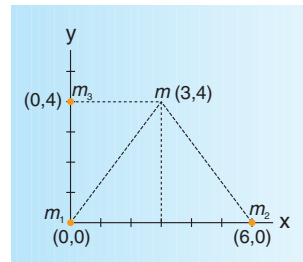
Se en lugar dunha partícula son varias, m_1, m_2, m_3, \dots , o potencial gravitatorio total, V , é a suma dos potenciais debidos a cada unha das partículas, V_1, V_2, V_3, \dots : $V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots$

Exercicio resollo

► Para o sistema de masas da figura, calcula:

- a) O potencial gravitatorio no punto (3,4).
- b) A enerxía potencial gravitatoria que adquire unha masa de 8 kg situada nese punto (3,4).
- c) O traballo feito, pola forza conservativa do campo, cando unha masa de 8 kg vai desde o infinito até o punto (3,4).

Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$; as coordenadas están dadas en metros; $m_1 = 2 \text{ kg}$; $m_2 = 4 \text{ kg}$; $m_3 = 6 \text{ kg}$.



Solución:

a) O potencial creado por un sistema de masas (neste caso tres) obtense sumando alxebricamente o potencial debido a cada unha das masas individuais: $V_{\text{total}} = \Sigma V_i$. E o potencial creado por unha masa puntual m vén dado pola expresión: $V_i = \frac{-G m_i}{r}$.

$$V_1 = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = -2,67 \cdot 10^{-11} \text{ J kg}^{-1}$$

$$V_2 = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = -5,34 \cdot 10^{-11} \text{ J kg}^{-1}$$

$$V_3 = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6}{3} = -13,34 \cdot 10^{-11} \text{ J kg}^{-1}$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = -2,67 \cdot 10^{-11} - 5,34 \cdot 10^{-11} - 13,34 \cdot 10^{-11} \rightarrow V = -21,35 \cdot 10^{-11} \text{ J kg}^{-1}$$

- b) Recordando que o potencial gravitatorio é a enerxía potencial gravitatoria por unidade de masa:

$$V = \frac{E_p}{m} \rightarrow E_p = V \cdot m, \text{ podemos escribir:}$$

$$E_p = -21,35 \cdot 10^{-11} \cdot 8 \rightarrow E_p = -1,71 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

A este mesmo resultado chegamos se sumamos as enerxías potencias de cada unha das masas: $E_{p \text{ total}} = E_{p \text{ masa 1}} + E_{p \text{ masa 2}} + E_{p \text{ masa 3}}$.

- c) Recordando que a enerxía potencial gravitatoria dunha masa m nun punto A é o traballo feito pola forza gravitatoria do campo, cambiado de signo, para levar esa masa m desde o infinito até o punto A, podemos escribir: $W_{\infty}^A = -\Delta E_p = -(E_{pA} - E_{p\infty}) = -(E_{pA} - 0) = -E_{pA}$.

$$W_{\infty}^A = -E_{pA} = -(-1,71 \cdot 10^{-9}) \rightarrow W_{\infty}^A = 1,71 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

7. RELACIÓN ENTRE A INTENSIDADE DE CAMPO GRAVITATORIO, \vec{g} , E O POTENCIAL GRAVITATORIO, V

O traballo, W , desenvolto pola forza gravitatoria podémolo relacionar coa variación da enerxía potencial, ΔE_p :

$$\left. \begin{array}{l} W_A^B = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ W_A^B = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA}) \end{array} \right\} \rightarrow \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA})$$

Se dividimos esta expresión pola masa m de proba resulta:

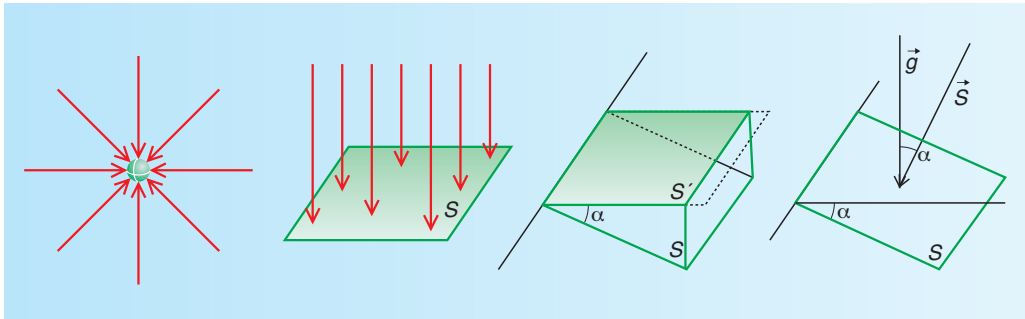
$$\left. \begin{array}{l} \int_A^B \frac{\vec{F}}{m} \cdot d\vec{r} = -\frac{\Delta E_p}{m} \\ \frac{\vec{F}}{m} = \vec{g} \\ \frac{\Delta E_p}{m} = \Delta V \end{array} \right\} \rightarrow \int_A^B \vec{g} \cdot d\vec{r} = -\Delta V, \text{ podendo expresarse en forma diferencial como:}$$

$$\vec{g} \cdot d\vec{r} = -dV \rightarrow dV = -\vec{g} \cdot d\vec{r}$$

8. LIÑAS DE FORZA DO CAMPO GRAVITATORIO. CONCEPTO DE FLUXO

O campo gravitatorio pode representarse graficamente por medio dunhas liñas imaxinarias, chamadas **liñas de forza** ou **liñas de campo**, as cales son tanxentes en cada punto á dirección do vector intensidade de campo gravitatorio, \vec{g} , asignándolles o mesmo sentido que o vector \vec{g} .

As liñas de forza do campo gravitatorio creado pola masa puntual M representan o camiño que seguiría unha partícula de masa m abandonada no campo. Este campo é radial, dirixido sempre cara a M . Se imaxinemos unha choiva sosegada, a traxectoria das gotas de auga ao caer pódennos servir de imaxe das liñas de forza do campo gravitatorio terrestre. A traxectoria de cada gota pode representar unha liña de forza, que é tanxente en cada punto á intensidade de campo gravitatorio \vec{g} .



O número de gotas que chegan a unha superficie S vai depender:

- Do tamaño da superficie.
- Do número de gotas que caen: intensidade da chuvia.
- Da posición da superficie. Se é perpendicular á dirección da caída das gotas, o número destas que chegan á superficie é máximo. Se está inclinada, ese número será menor.

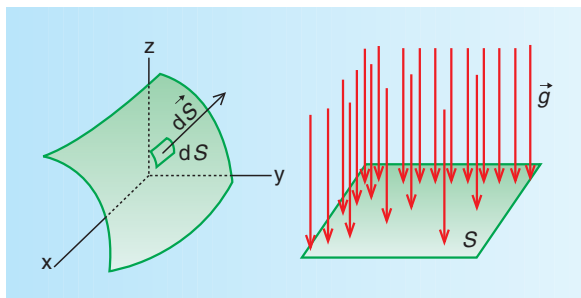
Defínese unha nova magnitude física, chamada **fluxo** (Φ), como o número de liñas de campo que atravesan a superficie considerada: $\Phi = g \cdot S'$, sendo g a intensidade de campo gravitatorio e S' a superficie eficaz, é dicir: a superficie que lle corresponde a S na dirección perpendicular ás liñas de forza. Esta expresión tamén a podemos escribir da forma:

$$\Phi = g \cdot S \cdot \cos \alpha = \vec{g} \cdot \vec{S}$$

sendo \vec{S} o vector superficie que a representa, de dirección perpendicular á mesma e de sentido arbitrario. Se a superficie é pechada, por convenio, o sentido é cara fóra.

Se o campo non é uniforme, a intensidade en cada punto da superficie non é a mesma. Neste caso, para calcular o fluxo total, dividimos a superficie en elementos de superficie, $d\vec{S}$, de modo que en cada un deles sexa uniforme. O fluxo elemental é:

$$d\Phi = \vec{g} \cdot d\vec{S}$$

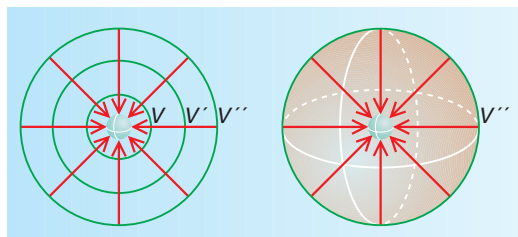


onde $d\vec{S}$ é un vector perpendicular ao elemento de superficie, que ten por módulo a súa área.

Se sumamos (integramos) todos os fluxos elementais, obtemos o fluxo total:

$$\Phi = \int_S \vec{g} \cdot d\vec{S}$$

Se a superficie é pechada, o fluxo total é positivo se as liñas de forza saen da superficie, mentres que é negativo se as liñas entran. No caso do campo gravitatorio $\Phi < 0$ xa que \vec{g} e $d\vec{S}$ forman un ángulo de 180° , sendo $\cos 180^\circ = -1$.



As circunferencias concéntricas coa masa puntual representan superficies equipotenciais (que son de forma esférica) do campo gravitatorio desta masa. As frechas son as liñas de forza que representan o campo gravitatorio e a súa dirección é perpendicular ás superficies equipotenciais.

As liñas de forza do campo gravitatorio, que en cada punto son tanxentes á intensidade de campo gravitatorio \vec{g} , son sempre perpendiculares ás superficies equipotenciais. De non selo, sempre habería unha compoñente do campo tanxente á superficie equipotencial que, no desprazamento dunha masa m' ao longo desta superficie, desenvolvería un traballo, $W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = m' \cdot \vec{g} \cdot \Delta \vec{r} \neq 0$, situación que non é posíbel.

Esta perpendicularidade tamén se pode xustificar da seguinte forma:

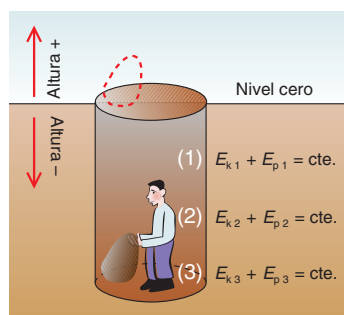
$$\left. \begin{aligned} W_A^B &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m' \cdot \vec{g} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m' \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot dr \\ W_A^B &= -m' \cdot (V_B - V_A) \xrightarrow{\text{como } V_A = V_B} W_A^B = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \int_A^B m' \cdot g \cdot dr \cdot \cos\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 90^\circ$$

Como $d\vec{r}$ é tanxente á superficie e $d\vec{r}$ e \vec{g} forman 90° , a liña de forza, que é tanxente a \vec{g} , é perpendicular á superficie equipotencial.

9. A TERRA COMO FONTE DE INTERACCIÓN GRAVITATORIA. SATÉLITES ARTIFICIAIS

9.1. Velocidade de escape

Se queremos facer unha viaxe interplanetaria, temos que darlle unha velocidade mínima (chamada **velocidade de escape**) á nave espacial para que esta escape da atracción terrestre¹². Esta velocidade significa unha enerxía mínima igual ao traballo necesario para levar a nave espacial de masa “ m ” desde a superficie terrestre até o infinito.



¹² A situación é similar á seguinte: estamos no fondo dun pozo e queremos lanzar unha pedra fóra del. Para conseguilo hai que comunicarlle unha enerxía cinética que compense o incremento de enerxía potencial correspondente á profundidade do pozo.

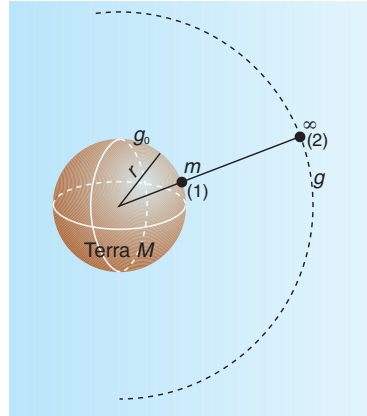
Como a forza gravitatoria é conservativa, a enerxía mecánica consérvase para calquera punto do campo gravitatorio.

$$E_{m_1} = E_{m_2}$$

$$E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2}$$

$$\frac{1}{2} m \cdot v_1^2 + \left(-\frac{G M m}{r} \right) = 0 + 0$$

$$\frac{1}{2} m \cdot v_1^2 = \frac{G M m}{r} \rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2 G M}{r}} = v_{\text{escape}}$$



onde r é o raio terrestre, M a masa da Terra e G a constante de gravitación universal. En función de g_0 (gravidade na superficie terrestre) temos:

$$\left. \begin{aligned} v_e &= \sqrt{\frac{2 G M}{r}} \\ g_0 &= \frac{G M}{r^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow v_e = \sqrt{2 g_0 r}$$

Substituíndo na fórmula anterior o valor de g_0 e de r vemos que a velocidade (ou mellor, a celeridade ou rapidez) mínima a comunicar a un obxecto que está na superficie da Terra e en repouso, para que escape do campo gravitatorio terrestre, é de 11,2 km/s, non dependendo da masa do corpo que se lanza.

Exercicio resolto

► Sabendo que a gravidade na superficie da Lúa é aproximadamente 1/6 da terrestre, calcula a velocidade (rapidez) de escape da superficie lunar. Esta velocidade depende da masa do obxecto? Dato: $r_L = 1,74 \cdot 10^6$ m.

Solución:

Neste caso temos un obxecto situado sobre a superficie lunar, de tal modo que podemos supoñer que a enerxía que posúe debe ser só a da atracción que sobre el exerce a Lúa:

$$E = -G \frac{M_L m}{r_L}$$

Se queremos que o corpo escape temos que comunicarlle unha enerxía cinética (como mínimo) que compense esa enerxía potencial.

Facemos un balance enerxético na superficie da Lúa e no infinito:

$$E_{k \text{ superficie Lúa}} + E_{p \text{ superficie Lúa}} = E_{k \infty} + E_{p \infty}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + \left(-G \frac{M_L m}{r_L} \right) = 0 \rightarrow v = \sqrt{2 G \frac{M_L}{r_L}}$$

Como G e M_L non son datos do problema, imos escribir estas magnitudes en función dos datos de que dispoñemos:

$$\left. \begin{aligned} v_e &= \sqrt{2 G \frac{M_L}{r_L}} \\ g_{0 \text{ Lúa}} &= \frac{G M}{r_L^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow v_e = \sqrt{2 g_{0 \text{ Lúa}} r_{\text{Lúa}}}$$

Substituíndo nesta expresión resulta:

$$v = \sqrt{2 \cdot \frac{9,8}{6} \cdot 1,74 \cdot 10^6} \rightarrow v = 2384 \text{ m s}^{-1}$$

Como se pode observar, **a velocidade (rapidez) de escape non depende da masa do obxecto.**

Fixémonos que tal como realizamos o cálculo, esta rapidez calculada tan só permitirá ao obxecto escapar á atracción da Lúa, de modo que quedará sometido ao campo gravitatorio terrestre.

9.2. Velocidade de xiro ou velocidade orbital

Outro problema que se nos pode presentar é o de calcular a velocidade que debe ter un satélite para manterse nunha órbita circular estacionaria a unha altura h sobre a superficie da Terra. Este satélite posúe unha velocidade que é de módulo constante e de dirección variábel,

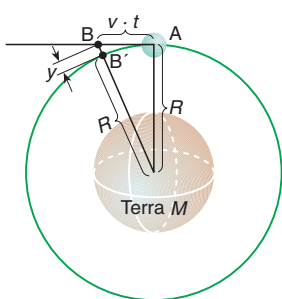
polo que ten unha aceleración que é: $\vec{a} = \vec{a}_n = \frac{v^2}{(r+h)} \vec{u}_n$.

Para un observador situado no satélite (sistema de referencia non inercial) as forzas que actúan¹³ sobre el son:

- A forza con que a Terra o atrae: $\vec{F}_{\text{peso}} = m \cdot \vec{g}$.
- A forza de inercia: $\vec{F}_{\text{inercia}} = m \cdot (-\vec{a}_n) = m \cdot \vec{a}_i = -m \cdot \frac{v^2}{(r+h)} \cdot \vec{u}_n$.

¹³ Se o estudo o fai un observador situado na Terra (sistema de referencia inercial) a única forza que actúa sobre o satélite é a forza con que a Terra o atrae, que é unha forza normal á traxectoria, estando sometido a unha aceleración normal. Ao substituír na fórmula $\vec{F}_{\text{neto}} = m \vec{a}$ temos $\vec{F}_{\text{neto}} = m \vec{a}_n$.

Cabe preguntarse como é posíbel que un satélite poida estar nunha órbita sen caerse sobre a Terra.



Acabamos de ver que a única forza que actúa sobre un satélite en órbita estacionaria é a que a Terra exerce sobre el. De non existir esta forza moveríase con movemento rectilíneo e uniforme e nun tempo t pasaría de A a B, como se indica na figura. Imsos supoñer que t é pequeno para que y sexa moito menor que R e os puntos B e B' estean sobre un mesmo raio, podendo escribir:

$$(R+y)^2 = (v \cdot t)^2 + R^2 \rightarrow R^2 + y^2 + 2 \cdot R \cdot y = v^2 \cdot t^2 + R^2$$

Como $y \ll R \Rightarrow y^2 \ll Ry$, podendo desprezar o sumando de y^2 fronte a $2Ry$, resultando:

$$2 \cdot R \cdot y = v^2 \cdot t^2 \rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{R} \cdot t^2$$

A distancia que o satélite cae no tempo t é: $\frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$. Comparando esta expresión coa anterior temos que: $a = \frac{v^2}{R}$.

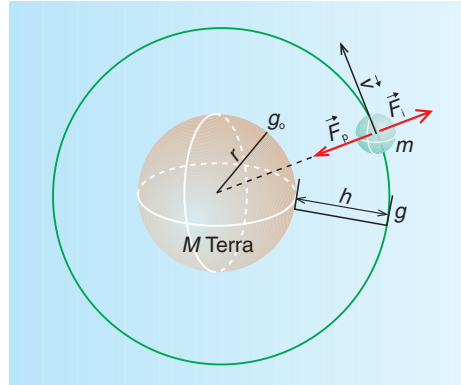
A realidade é que o satélite cae sobre a Terra pero, debido á velocidade tanxencial que posúe, non chega a alcanzala.

Por outro lado, o observador está en repouso e substituíndo na 2ª lei de Newton, $\vec{F}_{\text{neta}} = m \cdot \vec{a}$, resulta:

$$\vec{F}_{\text{peso}} + \vec{F}_{\text{inercia}} = \vec{0}$$

$$F_{\text{peso}} = F_{\text{inercia}} \rightarrow m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{r+h}$$

$$v = \sqrt{g(r+h)} = \sqrt{\frac{GM}{(r+h)^2}(r+h)} = \sqrt{\frac{GM}{r+h}}$$



onde v é a chamada **velocidade de xiro (ou mellor celeridade)**, tamén chamada **velocidade (celeridade) orbital** e g é o valor da aceleración da gravidade á altura h . O seu valor en función de g_0 (aceleración da gravidade na superficie terrestre) obtémolo recordando que

$$g_0 = \frac{GM}{r^2} :$$

$$\left. \begin{aligned} GM &= g_0 r^2 \\ v &= \sqrt{\frac{GM}{r+h}} \end{aligned} \right\} \rightarrow v = \sqrt{\frac{g_0 r^2}{r+h}}$$

Exercicio resolto

- ▶ Un satélite de 100 kg está en órbita ecuatorial ao redor da Terra a unha altura de 1000 km. Calcula a velocidade (celeridade) que posúe.

Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$; $r_{\text{Terra}} = 6370 \text{ km}$; $M_{\text{Terra}} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

Solución:

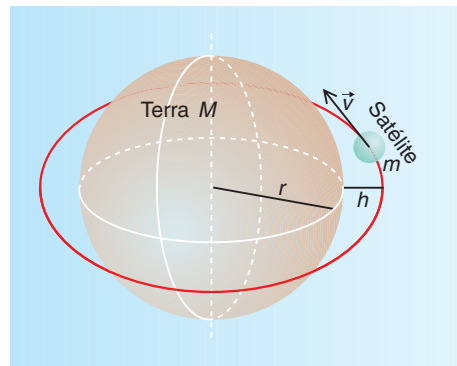
Para un observador situado no satélite (sistema non inercial), cúmprese que:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = \vec{0} \rightarrow \vec{F}_{\text{gravitatoria}} + \vec{F}_{\text{inercia}} = \vec{0} \rightarrow \vec{F}_{\text{gravitatoria}} = -\vec{F}_{\text{inercia}}$$

é dicir: $m g = \frac{m v^2}{r+h} \rightarrow m \frac{GM}{(r+h)^2} = \frac{m v^2}{r+h} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r+h}}$

Substituíndo os datos do exercicio resulta:

$$v = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{7370 \cdot 10^3}} \rightarrow v = 7356,6 \text{ m s}^{-1}$$



9.3. Período de revolución dun satélite

O **período de revolución** dun satélite é o tempo que tarda en percorrer unha órbita completa, co que para órbitas circulares temos:

$$\left. \begin{aligned} v &= \omega (r+h) \\ \omega &= \frac{2\pi}{T} \end{aligned} \right\} \rightarrow v = \frac{2\pi}{T} (r+h) \rightarrow T = \frac{2\pi}{v} (r+h) \left. \begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{g_0 r^2}{(r+h)}} \end{aligned} \right\} \rightarrow T = \frac{2\pi (r+h)}{\sqrt{\frac{g_0 r^2}{r+h}}}$$

Exercicio resolto

- No exercicio anterior calcula o tempo que tarda o satélite en pasar polo mesmo punto da vertical da Terra (tendo en conta o movemento de rotación da Terra e supoñendo que esta xira no mesmo sentido que o satélite).

Solución:

O satélite xira cunha velocidade angular que chamaremos ω_s , mentres que a Terra o fai coa velocidade angular ω_T .

Para un observador situado na Terra (que está xirando porque o di o problema), o satélite móvese cunha velocidade angular relativa ω' , que obtemos da forma: $\omega' = \omega_s - \omega_T$.

$$\begin{aligned} \omega_s &= \frac{v}{(r_T + h)} \rightarrow \omega_s = \frac{7356,6}{(6370 + 1000) \cdot 10^3} \rightarrow \omega_s = 9,98 \cdot 10^{-4} \text{ rad s}^{-1} \\ \omega_T &= \frac{2\pi}{T} \rightarrow \omega_T = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \rightarrow \omega_T = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1} \\ \omega' &= 9,98 \cdot 10^{-4} - 7,27 \cdot 10^{-5} \rightarrow \omega' = 9,25 \cdot 10^{-4} \text{ rad s}^{-1} \end{aligned}$$

Para calcular o tempo que tarda en dar unha volta, basta con recordar a definición de velocidade angular:

$$\omega = \frac{\theta}{t} \rightarrow t = \frac{\theta}{\omega} \rightarrow t = \frac{2\pi}{9,25 \cdot 10^{-4}} \rightarrow t = 6793 \text{ s} = 1,89 \text{ horas}$$

O tempo de xiro do satélite para o caso de que a Terra se considerase en repouso é:

$$t' = \frac{\theta}{\omega} \rightarrow t' = \frac{2\pi}{9,98 \cdot 10^{-4}} \rightarrow t' = 6295,8 \text{ s} = 1,75 \text{ horas}$$

9.4. Enerxía de enlace dun satélite

Con este termo coñécese a **enerxía que posúe un satélite** que está en órbita estacionaria. Obtémola sumando a súa enerxía cinética e potencial:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m v_{\text{xiro}}^2 + \left(-\frac{G M m}{r+h} \right) = \frac{1}{2} m \frac{G M}{(r+h)} - \frac{G M m}{(r+h)} = -\frac{G M m}{2(r+h)}$$

► No exercicio anterior calcula a enerxía que posúe o satélite na órbita.

Solución:

A enerxía total do satélite é a suma da enerxía cinética e potencial que posúe.

$$E_{\text{total}} = -G \frac{M m}{r+h} + \frac{1}{2} m v^2$$

Se non queremos usar como dato a velocidade de xiro obtida anteriormente escribiremos:

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{GM}{r+h}} \\ E &= -G \frac{M m}{r+h} + \frac{1}{2} m v^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow E = -\frac{1}{2} G \frac{M m}{r+h}$$

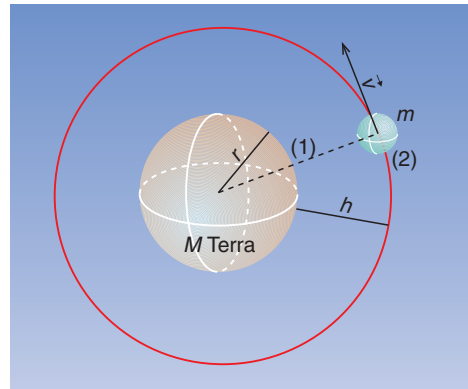
$$E = -\frac{1}{2} \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 100}{7370 \cdot 10^3} \rightarrow E = -2,71 \cdot 10^9 \text{ J}$$

O sentido negativo indica que o sistema é ligado, é dicir, o satélite non posúe suficiente enerxía para abandonar espontaneamente a Terra.

9.5. Enerxía de posta en órbita

Por último analizaremos cal é a enerxía que hai que comunicar a un satélite para poñelo en órbita a unha altura h sobre a superficie da Terra: **Enerxía de posta en órbita**. Esta vai ser igual á suma da enerxía (traballo) que se necesita para levar o satélite desde a superficie da Terra, r , até a órbita, $r+h$, en contra da atracción gravitatoria terrestre máis a enerxía cinética necesaria que o dote dunha velocidade igual á velocidade de xiro.

Para chegar á expresión da enerxía de posta en órbita, imos facelo recordando que o campo gravitatorio é conservativo, conservándose a enerxía mecánica.



$$E_{m_1} = E_{m_2} \rightarrow E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2}$$

$$E_{\text{necesaria}} + \left(-\frac{GMm}{r} \right) = \frac{1}{2} m v_{\text{xiro}}^2 + \left(-\frac{GMm}{r+h} \right)$$

$$E_{\text{necesaria}} = -\frac{GMm}{r+h} - \left(-\frac{GMm}{r} \right) + \frac{1}{2} \frac{mGM}{r+h} =$$

$$E_{\text{necesaria}} = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{r+h} + \frac{GMm}{r}$$

- Calcula a enerxía de posta en órbita dun satélite xeoestacionario de 100 kg. Dato: $r_T = 6370$ km.

Solución:

Chegaremos á expresión da enerxía de posta en órbita recordando que o campo gravitatorio é conservativo: $E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$. O resultado é:

$$E_{necesaria} = -\frac{1}{2} \frac{G M_T m_s}{r_T + h} + \frac{G M_T m_s}{r_T}$$

Como G e M_T non son datos neste exercicio, imos escribir estas magnitudes en función da aceleración da gravidade na superficie da Terra e do raio desta:

$$\left. \begin{aligned} G M_T &= g_0 r_T^2 \\ E_{necesaria} &= -\frac{1}{2} \frac{G M_T m_s}{r_T + h} + \frac{G M_T m_s}{r_T} \end{aligned} \right\} \rightarrow E_{necesaria} = -\frac{1}{2} \frac{g_0 r_T^2 m_s}{r_T + h} + g_0 r_T m_s \quad (1)$$

Que un satélite estea en órbita estábel significa que, para un observador que viaxa no satélite, a forza do peso e a de inercia serán de igual módulo e dirección, e de sentido contrario:

$$\vec{F}_{\text{peso}} + \vec{F}_{\text{inercia}} = \vec{0} \rightarrow m g = \frac{m v^2}{r_T + h}$$

Para coñecer a altura á que vai orbitar o satélite recordamos o concepto de órbita xeoestacionaria. Enténdese por tal aquela órbita ecuatorial para a que o satélite está sempre situado na vertical dun mesmo lugar do Ecuador terrestre. Isto significa que a velocidade angular de rotación do satélite e da Terra en torno ao seu propio eixe, (ou o que é o mesmo, os seus respectivos períodos de revolución), son iguais, isto é: $T_{\text{satélite}} = T_{\text{Terra}} = 86400$ s.

$$\left. \begin{aligned} v &= \omega \cdot (r_T + h) \\ \omega &= \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \\ m g &= \frac{m v^2}{r_T + h} \\ g &= \frac{g_0 r_T^2}{(r_T + h)^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{g_0 r_T^2}{(r_T + h)^2} = \omega^2 (r_T + h) \rightarrow (r_T + h) = 4,22 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Substituíndo na expresión (1) resulta:

$$E_{necesaria} = -\frac{1}{2} \frac{9,8 \cdot (6370 \cdot 10^3)^2 \cdot 100}{4,22 \cdot 10^7} + 9,8 \cdot 6370 \cdot 10^3 \cdot 100 \rightarrow E_{necesaria} = 5,77 \cdot 10^9 \text{ J}$$

- Calcula a enerxía potencial gravitatoria para unha masa m sita na superficie da Terra e compara este valor co da enerxía cinética que lle corresponde debido á rotación da Terra.

Datos: $r_{\text{Terra}} = 6,37 \cdot 10^6$ m; $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻²; $M_{\text{Terra}} = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg.

Solución:

A expresión que proporciona o valor da enerxía potencial gravitatoria, E_p , dunha masa m sita na superficie da Terra de masa M e raio r é: $E_p = -G \frac{M m}{r}$.

$$E_p = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{5,98 \cdot 10^{24} \cdot m}{6,37 \cdot 10^6} = -6,26 \cdot 10^7 m \text{ J}$$

O corpo está rotando solidariamente coa Terra cunha velocidade angular, ω :

$$\omega = \frac{2 \pi}{T} = \frac{2 \pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$$

correspondéndolle unha velocidade lineal, v :

$$v = \omega \cdot r = 7,27 \cdot 10^{-5} \cdot 6,37 \cdot 10^6 = 4,63 \cdot 10^2 \text{ m s}^{-1}$$

e unha enerxía cinética, E_k :

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (4,63 \cdot 10^2)^2 = 1,07 \cdot 10^5 \cdot m \text{ J}$$

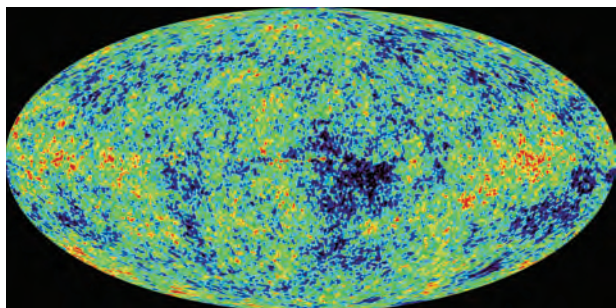
A enerxía potencial gravitatoria dunha masa m na superficie da Terra é, en valor absoluto, unhas 600 veces maior que a enerxía cinética que posúe debido á velocidade con que rota. Isto fai que, cando calculamos a enerxía a comunicar a un satélite para que escape do campo gravitatorio terrestre ou a enerxía de posta en órbita, non teñamos en conta a enerxía cinética que xa posúe.

10. VISIÓN ACTUAL DO UNIVERSO

O **Universo** é todo o que existe fisicamente: materia, enerxía, tempo,... e, sobre todo, espazo baleiro.

Observacións astronómicas indican que a idade do Universo se acerca aos 14 mil millóns de anos (segundo medidas da sonda WMAP, lanzada ao espazo pola NASA o 30 de xuño de 2001) e ten unha extensión mínima de 93 mil millóns de anos-luz.

Os astrónomos observan que hai unha relación directa entre a distancia a un obxecto remoto (como unha galaxia) e a velocidade coa que se está afastando. Se esta expansión foi continua en toda a idade do Universo, no pasado estes obxectos distantes que seguen afastándose tiveron que estar xuntos. Esta idea é a que dá orixe á teoría do **Big Bang**.



Fotografía da luminescencia residual da Grande Explosión publicada pola NASA o 11 de febreiro de 2003. Os científicos usaron a Sonda de Anisotropía de Microondas Wilkinson (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe-WMAP) para capturar esta imaxe cósmica.

Segundo esta teoría, inicialmente, toda a materia e a enerxía estaba concentrada nun punto de densidade infinita, estalando nunha explosión violenta e, desde entón, continúa expandíndose, perdendo densidade e temperatura.

O Universo está constituído fundamentalmente por **galaxias**, que están formadas por estrelas e materia interestelar (po e gas). As súas características son moi diversas: hainas grandes e pequenas, brillantes e opacas, vellas e novas; e de moi diversas formas. As galaxias máis pequenas poden ter un diámetro de 6000 anos-luz e posuír arredor de 3000 millóns de astros e as máis grandes poden superar os 160000 anos-luz e chegar a abarcar máis dun billón de estrelas.

A **Vía Láctea** é a galaxia á que pertence o sistema solar. Posúe uns 200000 millóns de estrelas (unha delas é o Sol), cun diámetro duns 100000 anos-luz. É unha das catro galaxias que son visíbeis a simple vista, podendo observar como algunhas das súas estrelas debuxan no ceo figuras recoñecíbeis que se parecen vagamente a algún animal ou a algún obxecto. De aí venlles o nome dado polos antigos: Osa Maior, Osa Menor (onde se encontra a Estrela Polar), Dragón, Triángulo etc. O nome xenérico destas agrupacións de estrelas é o de **constelación**.



Vía Láctea.

Unha **estrela** mantén o seu tamaño polo equilibrio que resulta de:

- unha altísima temperatura central, que tende a expandir a substancia estelar.
- a forza gravitatoria, que tende a contraer a estrela.

As estrelas brillan polas xigantescas reaccións nucleares que hai no seu interior: núcleos de hidróxeno fusiónanse para formar helio. Ao irse esgotando o hidróxeno e descender a temperatura interna da estrela, a forza gravitatoria supera as forzas expansivas e o núcleo da estrela contráese, podendo, en etapas posteriores, evolucionar cara a unha **anana branca** ou a unha **xigante vermella**.

Se a estrela é de pequena masa para experimentar novas reaccións nucleares, unha vez esgotado o hidróxeno que posúe, non continúa unha evolución posterior (anana branca). Se a masa da estrela é suficientemente grande, a forza da gravidade empeza a contraer o seu núcleo, aumentando considerabelmente a súa temperatura e densidade. Polo contrario, a parte máis externa da estrela expándese, dando orixe a unha xigante vermella. Cando o núcleo da xigante vermella acada unha temperatura de 10^6 K e unha densidade de 10^7 kg/m³, os núcleos de helio fusiónanse producindo carbono-12, o cal reacciona con núcleos de helio formándose osíxeno-16.

Coa produción de núcleos máis masivos, efectúase unha maior contracción gravitatoria da estrela, aparecendo no seu núcleo densidades da orde de 10^9 kg/m^3 , cun correspondente aumento da enerxía cinética dos núcleos e unha temperatura próxima a 10^9 K . En tales condicións poden aparecer novas reaccións nucleares, con formación de núcleos de elementos máis pesados até formarse Fe-56, que é o núcleo máis estábel. Agora, as estrelas de gran tamaño son inestábeis e morren por explosión, producindo un gran brillo (**supernova**) ao fusionarse os átomos das capas exteriores. Os restos desta explosión poden formar co tempo sistemas solares como o noso.



Remanente de supernova en Cassiopeia.

En certas condicións, a repulsión electrónica (non repulsión electromagnética de electróns, senón porque, ao meterlles presión, se intenta que ocupen o mesmo orbital máis electróns dos que caben) é superada pola atracción gravitatoria e de novo a estrela contráese, obrigando aos protóns e electróns a combinarse para formar neutróns, non quedando espazo entre os núcleos dos átomos, reducíndose o seu volume. Debido á grande atracción gravitatoria, os neutróns amontóanse, impedindo que a contracción continúe. A estrela convértese nunha esfera de neutróns, aparecendo o que se coñece como unha **estrela de neutróns**.

En determinadas condicións (se hai demasiada masa nun volume determinado) a resistencia da estrutura neutrónica pode ser superada pola atracción gravitatoria; os neutróns fusionaríanse e produciríase o **colapso**: o volume da estrela pode reducirse a un punto (chamado *singularidade*) e a gravidade superficial aumentar cara ao infinito. Agora, nas proximidades da singularidade, a forza gravitatoria sería tan grande que atraparía calquera obxecto¹⁴, incluída a enerxía (a luz). O corpo non emitiría luz e sería invisíbel: un **burato negro**. Este burato negro podería desenvolver forzas de atracción suficientes para devorar sistemas solares e incluso galaxias circundantes.

A medida que aumenta a distancia desde a singularidade, a influencia gravitacional do burato negro diminúe. A certa distancia, que depende da masa da singularidade, a velocidade que se necesita para escapar do burato negro é igual á velocidade da luz. Esta distancia, coñecida como **raio de Schwarzschild**, marca o “horizonte” do burato negro, que é como a súa superficie. Para calquera punto interior a esta superficie a velocidade de escape excede á velocidade da luz.

¹⁴ Para que unha masa m , que está na presenza doutra masa M , poida saír do campo gravitatorio de M , hai que comunicarlle unha velocidade v , que vén dada pola expresión: $v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$, sendo r a distancia que separa ambas masas e G a constante de gravitación universal.

Se diminúe r (sen variar M), o valor de v aumenta e, para certos valores de M e r , o seu valor pode igualar (ou superar) ao da velocidade da luz no baleiro. Como este valor de velocidade é inalcanzábel, a masa m non pode escapar do campo gravitatorio de M .

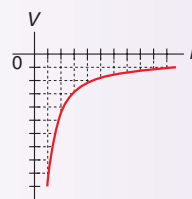
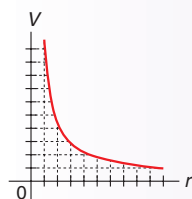
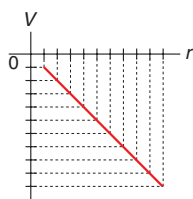
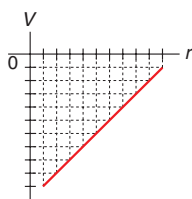
O concepto dun corpo do que nin a luz puidese escapar del xa foi descrito en 1783 por John Michell. Este xeólogo inglés calculou que na superficie dun corpo de raio 500 veces o raio do Sol, e a mesma densidade, o que supón unha masa de $125 \cdot 10^6 m_{\text{Sol}}$ ¹⁵, tería unha velocidade de escape igual á da luz¹⁶: é un **burato negro supermasivo**.

Os buratos negros supermasivos poden ter unha masa de varios millóns, ou miles de millóns, de masas solares e son os que se supón que existen no centro da maioría das galaxias (ou en todas as galaxias).



EXERCICIOS
(cuestións)

1. Mapa conceptual dos contidos do tema.
2. Di como varía a enerxía potencial gravitatoria dunha masa puntual m , que está no campo gravitatorio doutra masa puntual M , con respecto á distancia. Fai a representación gráfica correspondente.
3. Das seguintes gráficas xustifica cal representa, en función da distancia, o potencial gravitatorio creado por unha masa puntual situada en O.



4. Como é a dirección da intensidade do campo gravitatorio con relación ás superficies equipotenciais? Xustifica a resposta.
5. Unha partícula de masa m describe un movemento circular uniforme. Contesta razoadamente se o momento angular desta partícula con respecto ao centro da circunferencia que describe é constante.

¹⁵ ·

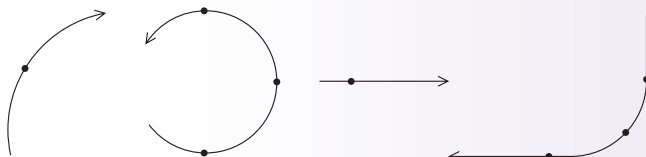
$$\left. \begin{aligned} M &= \rho \cdot V \\ \rho &= \rho_{\text{Sol}} = \frac{M_{\text{Sol}}}{V_{\text{Sol}}} \\ V &= \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \end{aligned} \right\} \rightarrow M = \frac{M_{\text{Sol}}}{\frac{4}{3} \pi \cdot r_{\text{Sol}}^3} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (500 \cdot r_{\text{Sol}})^3 \rightarrow M = 125 \cdot 10^6 \cdot M_{\text{Sol}}$$

¹⁶

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2GM}{r}} \\ G &= 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \\ M &= 125 \cdot 10^6 \cdot 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg} \\ r &= 500 \cdot 6,69 \cdot 10^8 \text{ m} \end{aligned} \right\} \rightarrow v = 3,15 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

6. Xustifica o feito de que os planetas no seu movemento orbital ao redor do Sol describan órbitas planas e sempre xiren no mesmo sentido.
7. Un corpo de masa m está na superficie dun planeta de raio r . Se o raio do planeta varía (aumentando ou diminuíndo), permanecendo constante a súa densidade, variará o peso do corpo?
8. Se a Terra fose unha esfera perfecta, o peso observado dunha masa m tería o mesmo valor en todos os puntos da súa superficie?
9. Dise que unha órbita dun satélite artificial é estábel cando esta corta á esfera terrestre nun círculo máximo. Por que non o é en caso contrario?
10. Coñecida a masa da Terra M , e o raio ecuatorial R , coa fórmula $(GM)/R^2$ obtemos para a intensidade da gravidade nun punto do Ecuador terrestre o valor de 9,821 N/kg. Realizada a medida no Ecuador por procedementos experimentais (péndulo) obtense o valor de 9,791 N/kg. Por que?
11. Queremos colocar un satélite artificial en órbita estacionaria ao redor da Terra de tal forma que sempre se encontre na vertical dun mesmo punto (satélite xeostacionario). Pode situarse un destes satélites na vertical de calquera punto? Razona a resposta.
12. Supoñamos un planeta cun período orbital de 27 anos e raio $1,34 \cdot 10^{12}$ m. Que período orbital terá outro planeta que describe unha órbita de raio metade?
13. Poden cortarse dúas liñas de forza dun campo gravitatorio?; e dúas superficies equipotenciais?
14. Unha partícula de masa m está colgada dun fío ideal de lonxitude l , describindo nun plano horizontal unha circunferencia de raio r , sendo $r < l$, cunha velocidade \vec{v} constante en módulo. Razona se o seu momento angular é constante con respecto: a) ao centro da circunferencia que describe; b) ao punto de suspensión (extremo do fío do que colga a masa m).
15. Razona se o módulo da velocidade orbital dun planeta é constante para o caso de que consideremos: a) órbita elíptica e b) órbita circular. E o valor da velocidade, \vec{v} ?
16. Se aumentara a velocidade de rotación da Terra, variaría o peso observado dunha masa, m , para un punto do Ecuador terrestre? E para un punto do Polo?
17. Temos un satélite de masa m en órbita estacionaria de raio r_1 ao redor da Terra (de masa M) e queremos pasar a unha nova órbita estacionaria de raio r_2 (maior que r_1). Obtén a expresión da velocidade que lle hai que comunicar para logralo, indicando a dirección en que se lle comunica. Nota: considera como datos g_0 e r (raio da Terra) e supón que o rozamento é nulo.
18. A segunda lei de Kepler equivale a enunciar: a) que o momento cinético dun planeta con respecto ao Sol é constante; b) que soamente o módulo do momento cinético dun planeta con respecto ao Sol é constante; c) que non nos dá ningunha información con respecto ao momento cinético.
19. Deduce a terceira lei de Kepler a partir da lei da gravitación universal, supoñendo órbitas circulares.
20. Cal é o significado físico da constante de gravitación universal?
21. Colgamos dun fío unha masa m (chumbada). A dirección do fío pasa exactamente polo centro da Terra?
22. Unha mesma masa m está situada na superficie do Sol, da Terra e da Lúa. Estuda razoadamente en que caso pesará máis. Datos: $r_{\text{Sol}} > r_{\text{Terra}} > r_{\text{Lúa}}$; $M_{\text{Sol}} > M_{\text{Terra}} > M_{\text{Lúa}}$; supón que: $\rho_{\text{Sol}} = \rho_{\text{Terra}} = \rho_{\text{Lúa}}$.

23. Considera que as liñas do gráfico representan liñas de forza dun campo conservativo. Debuxa, de forma razoada, a intensidade do campo conservativo nos puntos marcados sobre as liñas.



24. Para un satélite xeostacionario ao redor da Terra, a altura á que orbita sobre a superficie da Terra: a) ten un único valor; b) pode ter distintos valores con tal de que (na órbita na que se encontra o satélite) a forza con que a Terra o atrae sexa de igual módulo e dirección e de sentido contrario á forza de inercia; c) pode ter calquera valor con tal de que orbite sobre o Ecuador terrestre.
25. Para o caso dun satélite xeostacionario en torno á Terra, o vector de posición do satélite con respecto ao centro da Terra, en cantos puntos da súa superficie a pode cortar?
26. Dous planetas teñen a mesma densidade, pero distinto raio. A velocidade de escape será: a) igual para os dous planetas; b) maior para o planeta de maior raio; c) maior para o planeta de menor raio.
27. Un corpo de masa m e outro de masa $2m$, para escapar do campo gravitatorio terrestre, necesitan: a) maior cantidade de movemento o de masa $2m$; b) igual enerxía cinética; c) maior velocidade o de masa $2m$.
28. Se a duración de 1 día terrestre fose a de 1 h, 24 min e 25 s (en vez de 24 horas); cal sería o peso dunha masa m situada no Ecuador terrestre? Dato: $r_{\text{Ecuador}} = 6,37 \cdot 10^6$ m; $g_{\text{Ecuador}} = 9,8$ m s⁻².
29. Defínese o quilogramo peso como a forza con que a Terra atrae a masa de 1 quilogramo, situada á 45° de latitude e ao nivel do mar. Por que na definición se fai referencia á latitude e ao nivel do mar?
30. Martín di que a forza con que a Terra de masa M atrae a unha nave espacial de masa m , que está en órbita estacionaria de raio r , se calcula coa fórmula:

$$F_{M-m} = m \cdot g = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2}.$$

No entanto, María di que esta forza se calcula coa expresión:

$$F_{M-m} = m \cdot a_n = \frac{m \cdot v_{\text{xiro}}^2}{r}.$$

Comenta a veracidade destas opinións.



**EXERCICIOS
(problemas)**

1. Se un corpo pesa 100 N cando está na superficie da Terra, a que altura pesará a metade?

Nota: resolve o problema, primeiro, cos datos do apartado a) e, despois, cos dos apartado b).

a) $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻², $M_{\text{Terra}} = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg.

b) $R_{\text{Terra}} = 6,37 \cdot 10^6$ m.

R: $h = 2638,45$ km

2. A masa da Lúa é 1/81 a masa da Terra e o seu raio 1/4 do raio terrestre. Canto vale g na superficie da Lúa?

R: $g_L = 1,94 \text{ m s}^{-2}$

3. Que altura máxima alcanzará un proxectil lanzado verticalmente desde a superficie da Terra cunha velocidade de 20 m s^{-1} ? E se se lanza con esa mesma velocidade desde a superficie do Sol, que altura alcanzará? Datos: $M_{\text{Sol}} = 324440 \cdot M_{\text{Terra}}$; $R_{\text{Sol}} = 108 \cdot R_{\text{Terra}}$.

R: $h_T = 20,4 \text{ m}$; $h_S = 0,73 \text{ m}$

4. Que altura máxima alcanzará, prescindindo da presenza da atmosfera, un “proxectil” lanzado verticalmente cunha velocidade de 10 km/s . Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$; $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $r_T = 6370 \text{ km}$.

Solución: Cando a velocidade con que se lanza un proxectil e, en consecuencia, a altura que alcanza é pequena, a aceleración da gravidade é constante, podendo utilizar as ecuacións do movemento rectilíneo uniformemente variado. Esta situación non ten lugar no enunciado do problema.

O campo gravitatorio no que se move o proxectil é conservativo, podendo establecer o principio de conservación da enerxía mecánica:

$$E_{m1} = E_{m2} \rightarrow E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2}$$

A enerxía inicial que posúe o proxectil de masa m ao ser lanzado cunha velocidade $v = 10 \text{ km/s}$ é a suma da súa enerxía cinética e potencial.

$$E_{m1} = \frac{1}{2} m v^2 + \left(- \frac{G M m}{r} \right)$$

sendo G a constante de gravitación universal, M a masa da Terra, r o seu raio e m a masa do corpo que se lanza.

A medida que o proxectil ascende, a súa velocidade diminúe, sendo nula a unha certa altura h , na que se detén. Nese momento a súa enerxía será só potencial, de valor:

$$E_{m2} = - \frac{G M m}{r + h}$$

A conservación da enerxía mecánica permítenos escribir a seguinte igualdade:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M m}{r} = - \frac{G M m}{r + h}$$

Despexando a altura h temos:

$$\frac{v^2 r - 2 G M}{2r} = - \frac{G M}{r + h} \rightarrow r + h = \frac{-2 r G M}{v^2 r - 2 G M} \rightarrow h = - \frac{2 r G M}{v^2 r - 2 G M} - r$$

$$h = \frac{-2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 6370 \cdot 10^3}{(10 \cdot 10^3)^2 \cdot 6370 \cdot 10^3 - (2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24})} - 6370 \cdot 10^3 \rightarrow h = 2,52 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Se a velocidade fose maior á velocidade de escape ($11,2 \text{ km/s}$), o proxectil sairía do campo gravitatorio terrestre e non retornaría á Terra e a altura que se obtería por aplicación do principio de conservación da enerxía mecánica sería negativa: un resultado sen sentido.

5. A masa da Lúa é 0,0123 veces a masa da Terra e o seu raio 0,25 o raio terrestre. Que masa habería que colocar na Lúa para que pesase o mesmo que pesa na Terra un corpo de 500 g?

R: $m = 2,54 \text{ kg}$

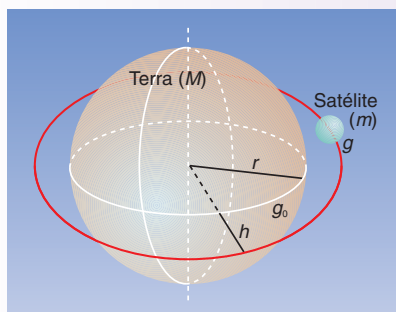
6. Con que forza atrae a Terra unha masa de $6,7 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ situada a 100 m de altura? E con que forza atrae a Terra a Lúa? Datos: $M_{\text{Lúa}} = 6,7 \cdot 10^{22} \text{ kg}$; $r_{\text{medio da órbita da Lúa arredores á Terra}} = 3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$; $r_{\text{Terra}} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$.

R: $F = 6,57 \cdot 10^{23} \text{ N}$; $F = 1,8 \cdot 10^{20} \text{ N}$

7. Cal será o período de oscilación dun péndulo simple na superficie lunar se o seu período de oscilación na Terra é un segundo? Dato: $g_{\text{Lúa}} = 1,94 \text{ m/s}^2$.

R: $T = 2,25 \text{ s}$

8. Lánzase un satélite co propósito de colocalo nunha órbita xeostacionaria. Calcula: a) o valor da altura da órbita onde evoluciona o satélite e b) o módulo da velocidade do satélite nesa órbita. Datos: $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$; $r_T = 6370 \text{ km}$.



Solución:

- a) Dado que o satélite se quere colocar nunha órbita xeostacionaria, ademais de ser estábel, o que significa: $F_{\text{peso}} = F_{\text{inercia}}$, o seu período de revolución, $T_{\text{satélite}}$, coincide co da Terra, T_{Terra} : $T_{\text{satélite}} = T_{\text{Terra}} = 86400 \text{ s}$.

$$\left. \begin{aligned} \frac{m v^2}{r+h} &= m g \\ v &= \omega (r+h) \\ g &= \frac{GM}{(r+h)^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{[\omega (r+h)]^2}{r+h} &= \frac{GM}{(r+h)^2} \\ g_0 &= \frac{GM}{r^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{[\omega (r+h)]^2}{r+h} = \frac{g_0 r^2}{(r+h)^2}$$

$$\frac{[4 \pi^2 (r+h)]}{86400^2} = \frac{9,8 (6370 \cdot 10^3)^2}{(r+h)^2} \rightarrow r+h = 4,22 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$h = 4,22 \cdot 10^7 - r = 4,22 \cdot 10^7 - 6370 \cdot 10^3 \rightarrow h = 3,58 \cdot 10^7 \text{ m}$$

b) $v = \omega (r+h) \rightarrow v = \frac{2 \pi (r+h)}{T} \rightarrow v = \frac{2 \pi \cdot 4,22 \cdot 10^7}{86400} \rightarrow v = 3,07 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$

9. Determina a velocidade orbital dunha cápsula situada a unha altura de 350 km sobre a superficie terrestre. Cal é o seu período de revolución? Compárese o valor da súa aceleración centrípeta co valor de g a esa distancia da Terra. Que consecuencias se poden extraer deste resultado?

Datos: $r_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$; $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$.

R: $v = 7,70 \cdot 10^3 \text{ m/s}$; $T = 5,48 \cdot 10^3 \text{ s}$; $a_n = 8,82 \text{ m/s}^2$; $g = 8,82 \text{ m/s}^2$, situación de ingravidez, razoando en termos de forzas de inercia diremos que o peso aparente no interior é 0.

10. Unha pedra de 40 kg, que inicialmente se encontra en repouso, déixase caer sobre a superficie da Terra desde unha altura de a) 50 m e b) $6,37 \cdot 10^6$ m. Calcula a velocidade que terá ao chegar á superficie da Terra se non se ten en conta o efecto de freado da atmosfera. Dato: $r_{\text{Terra}} = 6,37 \cdot 10^6$ m.

R: a) $v = 31,4 \text{ m s}^{-1}$; b) $v = 7,9 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$

11. Un satélite de 100 kg xira ao redor da Terra nunha órbita circular a unha altura de 3200 km. Sabendo que a esa altura o valor da aceleración da gravidade é 4/9 do valor que ten na superficie terrestre, calcula: a) a velocidade e a enerxía cinética do satélite e b) o período no satélite dun péndulo que bate segundos ($T = 2$ s) na superficie terrestre. Datos: $r_T = 6370$ km; $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

R: a) $v = 6,46 \cdot 10^3 \text{ m/s}$; $E_k = 2,1 \cdot 10^9 \text{ J}$; b) $T = 3$ s, á altura de 3200 km da Terra, xa que no interior do satélite é ∞ .

12. Cal é, como mínimo, a velocidade que é preciso comunicar a un obxecto situado a 1000 km de altura sobre a superficie da Terra para que escape do seu campo gravitatorio? Cal debe ser a dirección da velocidade? Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$; $M_T = 5,99 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $r_T = 6370$ km.

Solución: Escapar do campo gravitatorio terrestre equivale a desprazar o corpo ao infinito. Supoñendo que o obxecto estea en repouso, como a forza gravitatoria é conservativa, temos:

$$E_{K_1} + E_{p_1} = E_{K_2} + E_{p_2} \rightarrow \frac{1}{2} m v_1^2 + \left(-\frac{G M m}{r + h_1} \right) = 0 + 0$$

$$v = \sqrt{\frac{2 G M}{r + h_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,99 \cdot 10^{24}}{(6,37 + 1) \cdot 10^6}} \rightarrow v = 10,4 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$$

No entanto, o máis razoábel é que o obxecto se encontre en órbita, de modo que será necesario comunicarlle unha velocidade adicional ($v_{\text{adicional}}$) á que xa posúe (v_{xiro}) para que alcance en total unha enerxía cinética igual ao traballo necesario para levar o satélite desde a altura $r+h$ até o infinito $W_{r+h \rightarrow \infty}$. A velocidade total, $\vec{v}_{\text{necesaria}}$ será:

$$\vec{v}_{\text{necesaria}} = \vec{v}_{\text{orbital}} + \vec{v}_{\text{adicional}}$$

O módulo da $\vec{v}_{\text{adicional}}$ depende da súa dirección. Supoñamos que as velocidades adicional e orbital son perpendiculares. En tal caso:

$$v_{\text{necesaria}}^2 = v_{\text{orbital}}^2 + v_{\text{adicional}}^2 \rightarrow (10,4 \cdot 10^3)^2 = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,99 \cdot 10^{24}}{7370000} + v_{\text{adicional}}^2$$

$$v_{\text{adicional}} = 7,35 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$$

Se a enerxía comunicada ($E_{k \text{ adicional}}$) a calculamos como diferenza da enerxía necesaria ($E_{k \text{ necesaria}}$) e a enerxía que posúe ($E_{k \text{ orbital}}$), a velocidade a comunicar ten que ser na dirección perpendicular á velocidade orbital, xa que:

$$E_{k \text{ adicional}} = E_{k \text{ necesaria}} - E_{k \text{ orbital}}$$

$$\frac{1}{2} m v_{\text{adicional}}^2 = \frac{1}{2} m v_{\text{necesaria}}^2 - \frac{1}{2} m v_{\text{orbital}}^2$$

$$v_{\text{adicional}}^2 = v_{\text{necesaria}}^2 - v_{\text{orbital}}^2 \rightarrow v_{\text{necesaria}}^2 = v_{\text{adicional}}^2 + v_{\text{orbital}}^2$$

Esta igualdade só se cumpre se a $\vec{v}_{\text{adicional}}$ e a \vec{v}_{orbital} son perpendiculares. Como a \vec{v}_{orbital} é tanxente á traectoria, a $\vec{v}_{\text{adicional}}$ que temos que comunicar vai ter unha dirección radial (perpendicular á órbita do satélite) e cara fóra.

Se a velocidade adicional a aplicamos na dirección da velocidade de xiro, e co sentido desta, o seu valor calculámolo da forma:

$$v_{\text{adicional}} = v_{\text{necesaria}} - v_{\text{orbital}} \rightarrow v_{\text{adicional}} = 10,4 \cdot 10^3 - 7,4 \cdot 10^3 = 3,0 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$$

$$\text{xa que } v_{\text{orbital}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,99 \cdot 10^{24}}{7370 \cdot 10^3}} = 7,4 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$$

13. En que punto da liña recta que une a Terra e a Lúa se equilibran as atraccións que exercen sobre un corpo? Distancia entre os centros dos dous astros: 384400 km. Dato: $M_{\text{Terra}} = 81$ veces a masa da Lúa.
R: 345960 km do centro da Terra e 38440 km do centro da Lúa.
14. Calcula a masa do Sol sabendo que a Terra describe unha órbita circular ao seu arredor, sendo a distancia entre o Sol e a Terra $1,495 \cdot 10^8$ km. Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.
R: $M_{\text{Sol}} = 19866 \cdot 10^{26} \text{ kg}$
15. A distancia Terra-Lúa é aproximadamente $60 R_T$. Calcula: a) a velocidade lineal da Lúa na súa rotación arredor da Terra; b) o período de rotación (en días) da Lúa. Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$; $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_T = 6400 \text{ km}$. (*Selectividade COU; set. 02*).
R: a) $v = 1019,2 \text{ m s}^{-1}$; b) $T = 2366091,1 \text{ s} = 27,4$ días
16. Tritón é un dos satélites coñecidos de Neptuno e ten a particularidade de ser o único de todo o sistema solar que gravita en sentido retrógrado. Describe unha órbita circular de raio $r = 3,55 \cdot 10^5 \text{ km}$ e tarda 5 días e 21 horas en completar unha volta. Determina: a) a masa de Neptuno; b) a distancia que percorrerá en 5 s un corpo que, partindo do repouso, cae libremente na proximidade da súa superficie. Datos: Raio de Neptuno, $R_N = 24000 \text{ km}$; $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$. (*Selectividade COU; xuño 01*).
R: a) $M = 1,03 \cdot 10^{26} \text{ kg}$; b) $h = 148,8 \text{ m}$
17. Un satélite de masa 200 kg encóntrase en órbita circular de raio r ao redor do centro da Terra. Se a enerxía potencial a esa distancia é de $-2 \cdot 10^9 \text{ J}$, a) determina o raio e b) calcula a velocidade do satélite. Datos: gravidade terrestre $g = 10 \text{ m s}^{-2}$; $R_T = 6400 \text{ km}$. (*Selectividade COU; set. 00*).
R: a) $r = 4,1 \cdot 10^7 \text{ m}$; b) $v = 3,2 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$
18. Un satélite xira en órbita circular ao redor da Terra a 40000 km de distancia do seu centro. Se houbose outro satélite xirando tamén en órbita circular, coa mesma velocidade como a anterior, pero ao redor da Lúa, a) a que distancia do centro da Lúa estaría situado? e b) cal dos dous xiraría con maior período? Dato: a masa da Lúa é 0,0123 veces a da Terra. (*Selectividade COU; xuño 00*).
R: a) $r_L + h = 4,92 \cdot 10^5 \text{ m}$; b) $T_{\text{do satélite ao redor da Terra}} > T_{\text{do satélite ao redor da Lúa}}$
19. O laboratorio espacial MIR, de 18600 kg, describe unha órbita circular case rasante, a unha altura de 360 km sobre a superficie terrestre. Calcula: a) o número de voltas que dá ao redor da Terra en 1 día, b) a súa enerxía mecánica. Datos: $r_T = 6400 \text{ km}$; $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$. (*Selectividade COU; Set. 99*).
R: a) $n = 15,6$ voltas; b) $E_m = -5,5 \cdot 10^{11} \text{ J}$

20. A masa da Lúa é 0,0123 veces a masa da Terra e o seu raio é 0,25 veces o raio terrestre. a) Que masa haberá que colocar na Lúa para que pese o mesmo que pesa na Terra unha masa de 500 g? b) Se a velocidade de escape na Terra é de $11,2 \text{ km s}^{-1}$, cal será o seu valor na Lúa? ($g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$). (*Selectividade COU; Xuño 99*).

R: a) $m_L = 2,54 \text{ kg}$; b) $v_e = 2,48 \text{ km s}^{-1}$

21. Un satélite artificial describe unha órbita circular ao redor da Terra, a unha altura sobre a superficie terrestre de 3185 km. Calcula: a) a velocidade de traslación do satélite e b) o período de revolución. Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$, $r_T = 6370 \text{ km}$, $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. (*Selectividade COU; Xuño 98*).

R: a) $v = 6461 \text{ m/s}$; b) $T = 9287 \text{ s}$

22. Tres masas puntuais de 10^3 kg cada unha, están fixas nos vértices dun triángulo equilátero de 1 m de lado. Acha: a) a forza que actúa sobre unha calquera delas; b) se se deixa en liberdade unha das masas, que velocidade terá cando pase polo punto medio das outras dúas?

Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$. (*Selectividade COU; Set. 97*).

R: a) $F = 1,16 \cdot 10^{-4} \text{ N}$; b) $v = 5,16 \cdot 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$

23. Os NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration) son unha familia de satélites meteorolóxicos norteamericanos que orbitan a Terra pasando sobre os Polos, cun período aproximado de 5 horas. Calcula: a) a altura á que orbitan sobre a superficie da Terra; b) a velocidade coa que o fan. Datos: Masa da Terra: $M_T = 5,96 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. Raio da Terra $r_T = 6370 \text{ km}$. Constante de gravitación universal: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$. (*Selectividade COU; xuño 96*).

R: a) $h = 8,47 \cdot 10^6 \text{ m}$; b) $v = 5,18 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$

24. Un satélite de comunicacións de 1 t describe órbitas circulares ao redor da Terra cun período de 90 min. Calcula: a) a altura á que se atopa sobre a Terra e b) a súa enerxía total. Datos: Raio da Terra, $r_T = 6400 \text{ km}$; masa da Terra, $M_T = 5,96 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; constante de gravitación universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$. (*Selectividade COU; set. 95*).

R: a) $h = 248,8 \text{ km}$; b) $E_T = -2,99 \cdot 10^{10} \text{ J}$

25. A Lúa ten unha masa aproximada de $6,7 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ e o seu raio é de $16 \cdot 10^5 \text{ m}$. Acha: a) a distancia que percorrerá en 5 segundos un corpo que cae libremente na proximidade da súa superficie e b) o período de oscilación na superficie lunar dun péndulo que ten un período na Terra de 2 segundos. Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$. (*Selectividade COU; xuño 94*).

R: a) $s = 21,8 \text{ m}$; b) $T = 4,75 \text{ s}$

26. Cando se envía un satélite á Lúa, é situado nunha órbita que corta á recta que une os centros da Terra e da Lúa por un punto tal que as dúas forzas que experimenta o satélite pola atracción dos dous astros son iguais. Cando o satélite se encontra neste punto, calcula: a) a distancia á que está do centro da Terra e b) a relación entre as enerxías potencias do satélite, debida á Terra e á Lúa. Datos: A masa da Terra é 81 veces a da Lúa e a distancia do centro da Terra ao da Lúa é de $384 \cdot 10^6 \text{ m}$. (*Selectividade COU; Xuño 93*).

R: a) $s_{\text{á Terra}} = 345,16 \cdot 10^6 \text{ m}$; b) $E_{\text{pt}}/E_{\text{pl}} = 9$

27. Un satélite de 2000 kg de masa xira arredor da Terra cunha órbita circular de raio $6,6 \cdot 10^6$ m. O raio medio da Terra é $6,4 \cdot 10^6$ m e a súa masa é $5,98 \cdot 10^{24}$ kg. a) determina o período do satélite. b) cal é a enerxía total mínima que debe aplicarse ao satélite para levalo a unha distancia “infinita” da Terra? Nota: Toma $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻² (*Selectividade COU; set. 92*).

R: a) $T = 5,33 \cdot 10^3$ s; b) $E_{k \text{ aplicada}} = 6,06 \cdot 10^{10}$ J, aplicada na dirección perpendicular á \vec{v}_{xiro} , ou $E_{k \text{ aplicada}} = 1,04 \cdot 10^{10}$ J, aplicada na dirección da \vec{v}_{xiro} e co sentido desta.

28. Supoñendo que a Lúa xira ao redor da Terra cun período de 27 días a unha distancia de $3,8 \cdot 10^8$ m, calcula: a) a masa da Terra e b) a enerxía que cómpre para afastar unha distancia infinita á Lúa da Terra, se a masa da Lúa é $M_L = 7,34 \cdot 10^{22}$ kg. Nota: Constante de Gravitación Universal $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻². (*Selectividade COU; xuño 92*).

R: a) $M_T = 5,96 \cdot 10^{24}$ kg; b) $E_{a \text{ comunicar}} = 3,84 \cdot 10^{28}$ J (na dirección radial, que é a perpendicular á \vec{v}_{xiro}), ou $E_{a \text{ comunicar}} = 6,60 \cdot 10^{27}$ J, na dirección da \vec{v}_{xiro} e co seu sentido.

29. Sabendo que a masa da Lúa é aproximadamente $6,7 \cdot 10^{22}$ kg e o seu raio $16 \cdot 10^5$ m, calcula: a) a distancia que percorrerá en 1 segundo un corpo que se deixa caer cunha velocidade inicial nula nun punto próximo á superficie da Lúa e b) o período de oscilación, na superficie lunar, dun péndulo que ten na Terra un período de 1 segundo.

Nota: Constante de Gravitación Universal $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻². (*Selectividade COU; xuño 92*).

R: a) $s = 0,88$ m; b) $T = 2,37$ s

30. Un corpo en caída libre presenta unha aceleración de $5,85$ m s⁻² sobre a superficie dun planeta cun raio de 0,27 veces o raio terrestre. Calcula: a) a relación de masa deste planeta á da Terra e b) a velocidade, en m s⁻¹, e o período, en segundos, que debería posuír un satélite dese planeta para describir unha órbita circular de raio igual a 10 raios terrestres.

Nota: Toma: $g_{\text{na superficie da Terra}} = 9,81$ m s⁻². $r_{\text{da Terra}} = 6371$ km. (*Selectividade COU; xuño 91*).

R: a) $M_p/M_T = 4,35 \cdot 10^{-2}$; b) $v = 521,2$ m/s, $T = 767649$ s

31. Un péndulo ideal ten un período de oscilación de $T = 1$ s na superficie terrestre. O mesmo péndulo tarda $t = 16,4$ s en dar 10 oscilacións na superficie do planeta Marte. Se a masa de Marte é $M = 0,65 \cdot 10^{24}$ kg, calcula: a) o raio r de Marte supoñendo que é un planeta esférico e b) a relación que debe existir entre as lonxitudes de dous péndulos, l_M/l_T , para que teñan o mesmo período de oscilación. Nota: l_M = lonxitude do péndulo en Marte; l_T = lonxitude do péndulo na Terra; toma na superficie terrestre $g_T = 10$ m s⁻²; a constante de Gravitación Universal $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻². (*Selectividade COU; set. 90*).

R: a) $r_{\text{Marte}} = 3,4 \cdot 10^6$ m; b) $l_M/l_T = 0,37$

32. Un satélite artificial describe órbitas estacionarias circulares arredor da Terra a unha distancia de 300 km da superficie terrestre. Calcula: a) a velocidade do satélite en m s⁻¹ e b) o tempo que tarda o satélite (en minutos) en dar unha volta completa arredor da Terra. Toma: Raio da Terra, $r = 6370$ km; na superficie terrestre, $g_0 = 9,8$ m s⁻². (*Selectividade COU; xuño 90*).

R: a) $v_{\text{xiro}} = 7721$ m s⁻¹; b) $T = 90,4$ minutos

33. Sabendo que a masa da Terra é 81 veces a masa da Lúa e a aceleración da gravidade na superficie terrestre é 6 veces superior á aceleración da gravidade na superficie lunar, calcula: a) a velocidade dun satélite que se move nunha órbita circular estábel en torno á Lúa a unha altura de 3200 km da súa superficie e b) o peso do satélite nesa órbita se a súa masa é 10000 kg.

Datos: Raio da Terra = 6370km; $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$; $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$. (*Selectividade COU; set. 89*).

R: a) $v = 997 \text{ m s}^{-1}$; b) $G = 2019 \text{ N}$

34. Calcula o traballo feito pola forza gravitatoria dunha masa $m_1 = 4 \cdot 10^4 \text{ kg}$ sita no punto (0,0) cando outra masa $m_2 = 2 \cdot 10^3 \text{ kg}$ vai desde o punto (20,0) até o punto (0,50). Nota: As coordenadas danse en metros. Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.

R: $W_{(20,0) \rightarrow (0,50)} = -1,6 \cdot 10^{-4} \text{ J}$

35. Catro masas iguais de 20 g cada unha están situadas nos vértices dun cadrado de 8 m de lado. Calcula a intensidade de campo gravitatorio creada por estas masas no centro do cadrado.

R: $\vec{g} = \vec{0}$ (N kg^{-1})

36. Para o caso do problema anterior, calcula, no centro do cadrado, o valor do potencial gravitatorio. Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.

R: $V = -9,4 \cdot 10^{-13} \text{ J kg}^{-1}$

37. No problema anterior, canto vale o traballo feito pola forza do campo cando unha masa de 200 g vai desde o centro do cadrado até o infinito? Este traballo é feito pola forza do campo de forma espontánea?

R: W_A^∞ (feito pola forza gravitatoria) = $-1,88 \cdot 10^{-13} \text{ J}$; non

38. Dúas masas: $m_1 = 600 \text{ kg}$ e $m_2 = 500 \text{ kg}$, están situadas, respectivamente, nos puntos (5,0) e (0,3), coordenadas que veñen dadas en unidades de quilómetros. Calcula:

a) A intensidade de campo gravitatorio no punto (0,0).

b) A forza gravitacional que actúa sobre unha terceira masa $m_3 = 300 \text{ kg}$ situada no punto (0,0).

Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.

R: a) $\vec{g} = 1,6 \cdot 10^{-15} \vec{i} + 3,7 \cdot 10^{-15} \vec{j}$ (N kg^{-1}); $g = 4,0 \cdot 10^{-15} \text{ N kg}^{-1}$; b) $\vec{F} = 4,8 \cdot 10^{-13} \vec{i} + 11,1 \cdot 10^{-13} \vec{j}$ (N); $F = 1,2 \cdot 10^{-12} \text{ N}$, con igual dirección e sentido que \vec{g} .

39. Calcula, para as masas do problema anterior, o potencial gravitatorio no punto (0,0) e a enerxía potencial que adquire unha masa de 300 kg sita no punto (0,0).

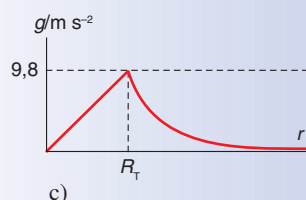
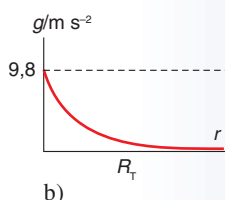
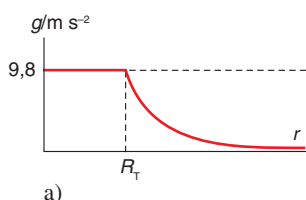
R: $V = -1,9 \cdot 10^{-11} \text{ J kg}^{-1}$; $E_p = -5,70 \cdot 10^{-9} \text{ J}$



Razona as respostas ás seguintes cuestións:

- ❖ O traballo realizado por unha forza conservativa: a) diminúe a enerxía potencial; b) diminúe a enerxía cinética; c) aumenta a enerxía mecánica. (*Xuño 08*).
- ❖ En relación coa gravidade terrestre, unha masa m : a) pesa máis na superficie que a 100 km de altura; b) pesa menos; c) pesa igual. (*Xuño 08*).

- ❖ Supoñendo a Terra como unha esfera perfecta, homoxénea de raio R_T , cal é a gráfica que mellor representa a variación da gravidade, g , coa distancia ao centro da Terra. (*Setembro 07*).



- ❖ Se dous planetas distan do Sol R e $4R$, respectivamente, os seus períodos de revolución son: a) T e $4T$; b) T e $T/4$; c) T e $8T$. (*Setembro 07*).
- ❖ Se por unha causa interna, a Terra sufrise un colapso gravitatorio e reducise o seu raio á metade mantendo constante a masa, o seu período de revolución arredor do Sol sería: a) o mesmo; b) 2 anos; c) 0,5 anos. (*Xuño 07*).
- ❖ Dous satélites de comunicación A e B con diferentes masas ($m_A > m_B$) xiran arredor da Terra con órbitas estables de diferente raio, sendo $r_A < r_B$: a) A xira con maior velocidade lineal; b) B ten menor período de revolución; c) os dous teñen a mesma enerxía mecánica. (*Xuño 07*).
- ❖ No campo gravitatorio: a) o traballo realizado pola forza gravitacional depende da traxectoria; b) as liñas de campo pódense cortar; c) consérvase a enerxía mecánica. (*Setembro 06*).
- ❖ Se a unha altura de 500 m sobre a superficie da Terra se colocan dous obxectos, un de masa m e outro de masa $2m$, e se deixan caer libremente (en ausencia de rozamentos e empuxes), cal chegará antes ao chan?: a) o de masa m ; b) o de masa $2m$; c) os dous ao mesmo tempo. (*Xuño 06*).
- ❖ Como varía g desde o centro da Terra até a superficie (supoñendo a densidade constante)?: a) é constante: $g = (G M_T)/R_T^2$; b) aumenta linealmente coa distancia r desde o centro da Terra: $g = (g_0 r)/R_T$; c) varía coa distancia r desde o centro da Terra segundo a expresión: $g = (G M_T)/(R_T + r)^2$. (*Setembro 05*).
- ❖ Dous satélites artificiais A e B de masas m_A e m_B , ($m_A = 2m_B$), xiran arredor da Terra nunha órbita circular de raio R : a) teñen a mesma velocidade de escape; b) teñen diferente período de rotación; c) teñen a mesma enerxía mecánica. (*Xuño 05*).
- ❖ No movemento da Terra arredor do Sol: a) consérvanse o momento angular e o momento lineal; b) consérvanse o momento lineal e o momento da forza que os une; c) varía o momento lineal e consérvase o angular. (*Setembro 04*).
- ❖ Arredor do Sol xiran dous planetas cuxos períodos de revolución son, respectivamente, $3,66 \cdot 10^2$ días e $4,32 \cdot 10^3$ días. Se o raio da órbita do primeiro é $1,49 \cdot 10^{11}$ m, a órbita do segundo é: a) a mesma; b) menor; c) maior. (*Xuño 04*).

- Para un satélite xeostacionario o raio da súa órbita obtense mediante a expresión:
a) $R = (T^2 G M / 4 \pi^2)^{1/3}$; b) $R = (T^2 g_0 R_T / 4 \pi^2)^{1/2}$; c) $R = (T G M^2 / 4 \pi^2)^{1/3}$. (Xuño 04).
- Cando un satélite artificial a causa da fricción coa atmosfera reduce a súa altura con respecto á Terra, a súa velocidade lineal: a) aumenta; b) diminúe; c) permanece constante. (Setembro 03).
- Un satélite xira arredor dun planeta describindo unha órbita elíptica; cal das seguintes magnitudes permanece constante?: a) momento angular; b) momento lineal; c) enerxía potencial. (Xuño 03).
- Unha partícula móvese nun campo de forzas centrais. O seu momento angular con respecto ao centro de forzas: a) aumenta indefinidamente; b) é cero; c) permanece constante. (Setembro 02).
- A velocidade de escape que se debe comunicar a un corpo inicialmente en repouso na superficie da Terra de masa M e raio R_0 para que "escape" fóra da atracción gravitatoria é:
a) maior que $\left[\frac{2 G M}{R_0} \right]^{1/2}$; b) menor que $\left[\frac{2 G M}{R_0} \right]^{1/2}$; c) igual a $\left[\frac{g_0}{R_0} \right]^{1/2}$. (Xuño 02).
- Verías algunha vez en TV os astronautas flotando dentro da súa nave. Isto é debido a: a) que non hai gravidade; b) á falta de atmosfera; c) que a forza gravitatoria é igual á forza centrípeta. (Setembro 01).
- En cal destes tres puntos é maior a gravidade terrestre: a) nunha sima a 4 km de profundidade; b) no Ecuador; c) no alto do monte Everest. (Xuño 01).
- Dadas dúas masas m e $2m$ separadas unha distancia d , xustifica se hai algún punto intermedio da recta de unión que cumpra: a) campo nulo e potencial positivo; b) campo nulo e potencial negativo; c) campo e potencial positivos. (Setembro 00).
- A ingravidez dos astronautas dentro dunha nave espacial débese a: a) a que non hai gravidade; b) a que a nave e o astronauta son atraídos pola Terra coa mesma aceleración; c) a que non hai atmosfera. (Setembro 99).
- Cando un satélite que está xirando arredor da Terra perde parte da súa enerxía por fricción, o raio da súa órbita é: a) maior; b) menor; c) mantense constante. (Xuño 99).
- Un satélite de masa m describe unha traxectoria circular de raio r ao xirar ao redor dun planeta de masa M . A enerxía mecánica do satélite é numericamente: a) igual á metade da súa enerxía potencial; b) igual á súa enerxía potencial; c) igual ao dobre da súa enerxía potencial. (Setembro 98).
- Unha masa desprázase nun campo gravitatorio desde un lugar no que a súa enerxía potencial vale -200 J até outro onde vale -400 J. Cal é o traballo realizado por ou contra o campo? a) -200 J, b) 200 J, c) -600 J. (Xuño 98).
- Cando sobre un corpo actúa unha forza, a aceleración que adquire é: a) proporcional á masa, b) inversamente proporcional á masa, c) só depende da forza. (Setembro 97).
- Un móbil describe un movemento circular plano, co módulo da súa velocidade constante. a) Existe necesariamente unha aceleración, b) existe só se o plano non é horizontal, c) non existe por ser v constante. (Xuño 97).
- Considérese un corpo sobre a superficie terrestre, a) a súa masa e o seu peso son os mesmos en todos os puntos da superficie, b) a súa masa, pero non o seu peso, é a mesma en todos os puntos da superficie, c) o seu peso, pero non a súa masa, é o mesmo en todos os puntos da superficie. (Setembro 96).

- ❖ O traballo realizado por unha forza depende só dos puntos inicial e final da traxectoria, a) se as forzas son conservativas; b) independentemente do tipo de forza; c) cando non existen forzas de tipo electromagnético. (Xuño 96).



- ❖ Os satélites Meteosat son satélites xeostacionarios (situados sobre o Ecuador terrestre e cun período orbital dun día). Calcula: a) a altura á que se atopan con respecto á superficie terrestre; b) a forza exercida sobre o satélite; c) a enerxía mecánica. (Datos: $R_T = 6,38 \cdot 10^6$ m; $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg; $m_{\text{satélite}} = 8 \cdot 10^2$ kg; $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻²). (Setembro 08).

R: a) $h = 3,60 \cdot 10^7$ m; b) $F_G = 179$ N; c) $E_m = -3,78 \cdot 10^9$ J

- ❖ Dúas masas de 50 kg están situadas en A(-30,0) e B(30,0), respectivamente (coordenadas en metros). Calcula: a) o campo gravitatorio en P(0,40) e en D(0,0); b) o potencial gravitatorio en P e en D; c) para unha masa m , onde é maior a enerxía potencial gravitatoria, en P ou en D? (Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻²). (Setembro 08).

R: a) $\vec{g}_P = -2,13 \cdot 10^{-12} \vec{j}$ (N kg⁻¹); $\vec{g}_D = \vec{0}$ (N kg⁻¹); b) $V_P = -1,33 \cdot 10^{-10}$ J/kg; $V_D = -2,22 \cdot 10^{-10}$ J/kg; c) $E_{pP} > E_{pD}$.

- ❖ Un satélite artificial de 100 kg describe órbitas circulares a unha altura de 6000 km sobre a superficie da Terra. Calcula: a) o tempo que tarda en dar unha volta completa; b) o peso do satélite a esa altura. Datos: $g_0 = 9,80$ m/s²; $R_T = 6400$ km. (Xuño 06).

R: a) $T = 1,37 \cdot 10^4$ s; b) $G = 261$ N.

- ❖ O período de rotación da Terra arredor do Sol é un ano e o raio da órbita é $1,5 \cdot 10^{11}$ m. Se Xúpiter ten un período de aproximadamente 12 anos e se o raio da órbita de Neptuno é de $4,5 \cdot 10^{12}$ m, calcula: a) o raio da órbita de Xúpiter; b) o período do movemento orbital de Neptuno. (Setembro 05).

R: a) $r_{\text{Xúpiter}} = 7,86 \cdot 10^{11}$ m; b) $T_{\text{Neptuno}} = 164,3$ anos.

- ❖ Un satélite artificial de 64,5 kg xira arredor da Terra nunha órbita circular de raio $R = 2,32 R_T$. Calcula: a) o período de rotación do satélite; b) o peso do satélite na órbita. Datos: $R_T = 6370$ km; $g_0 = 9,80$ m/s². (Xuño 05).

R: a) $T = 17900,6$ s; b) $G = 117,4$ N.

- ❖ A masa da Lúa con respecto á Terra é $0,0112 M_T$ e o seu raio é $R_T/4$. Dado un corpo cuxo peso na Terra é 980 N ($g_0 = 9,80$ m/s²), calcula: a) a masa e o peso do corpo na Lúa; b) a velocidade coa que o corpo chega á superficie lunar se cae desde unha altura de 100 m. (Setembro 04).

R: a) $m = 100$ kg; $G_{0L} = 176$ N; b) $v = 18,76$ m/s.

- ❖ En cada un dos tres vértices dun cadrado de 2 m de lado hai unha masa de 10 kg. Calcula: a) o campo e potencial gravitatorios creados por esas masas no vértice baleiro; b) a enerxía empregada para trasladar unha cuarta masa de 1 kg desde o infinito ao centro do cadrado.

Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻²; as masas considéranse puntuais. (Setembro 03).

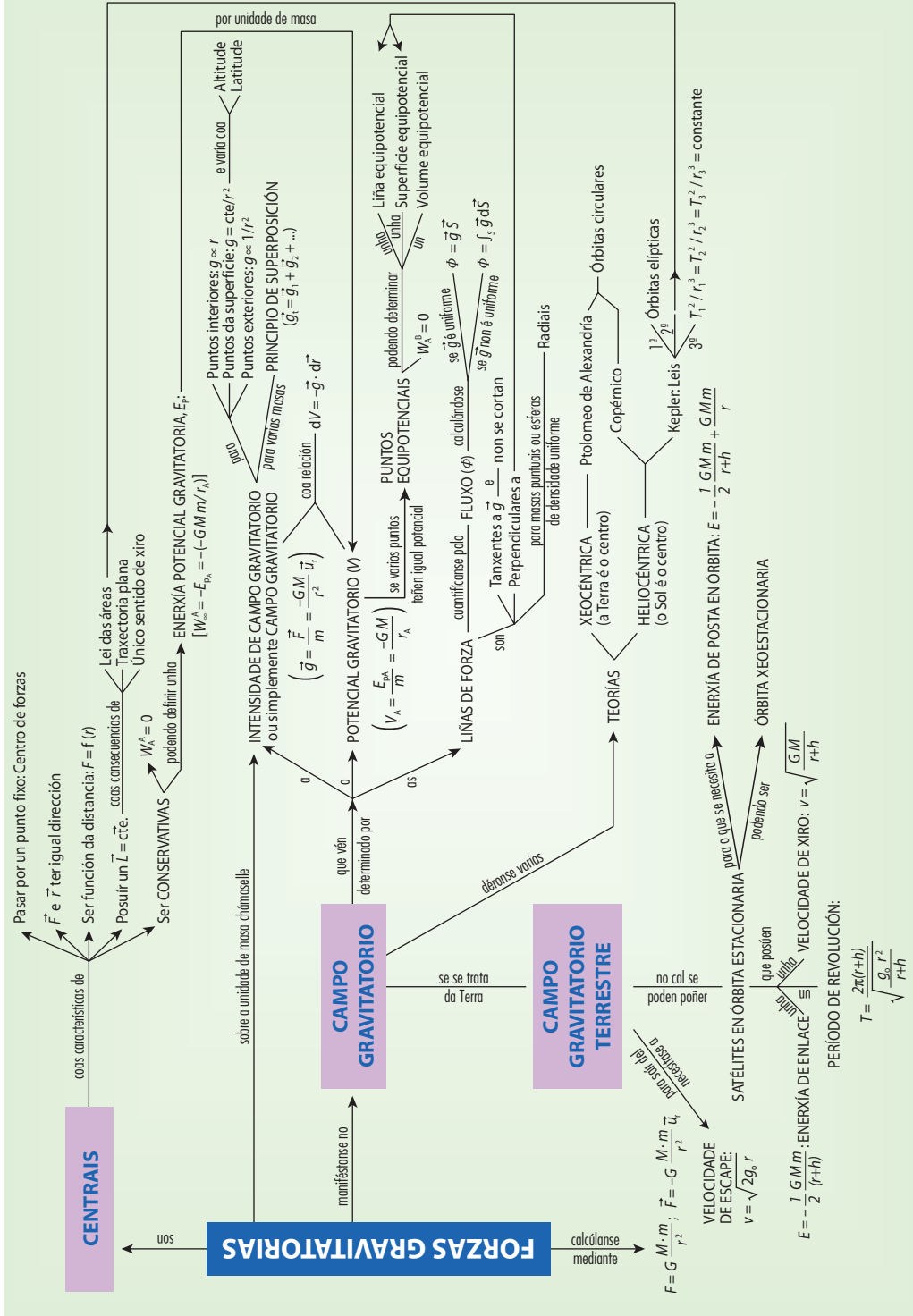
R: a) $\vec{g} = -2,26 \cdot 10^{-10} \vec{i} - 2,26 \cdot 10^{-10} \vec{j}$ (N kg⁻¹), segundo a orixe escollida; $V = -9,04 \cdot 10^{-10}$ J/kg; b) $W = 1,41 \cdot 10^{-9}$ J.

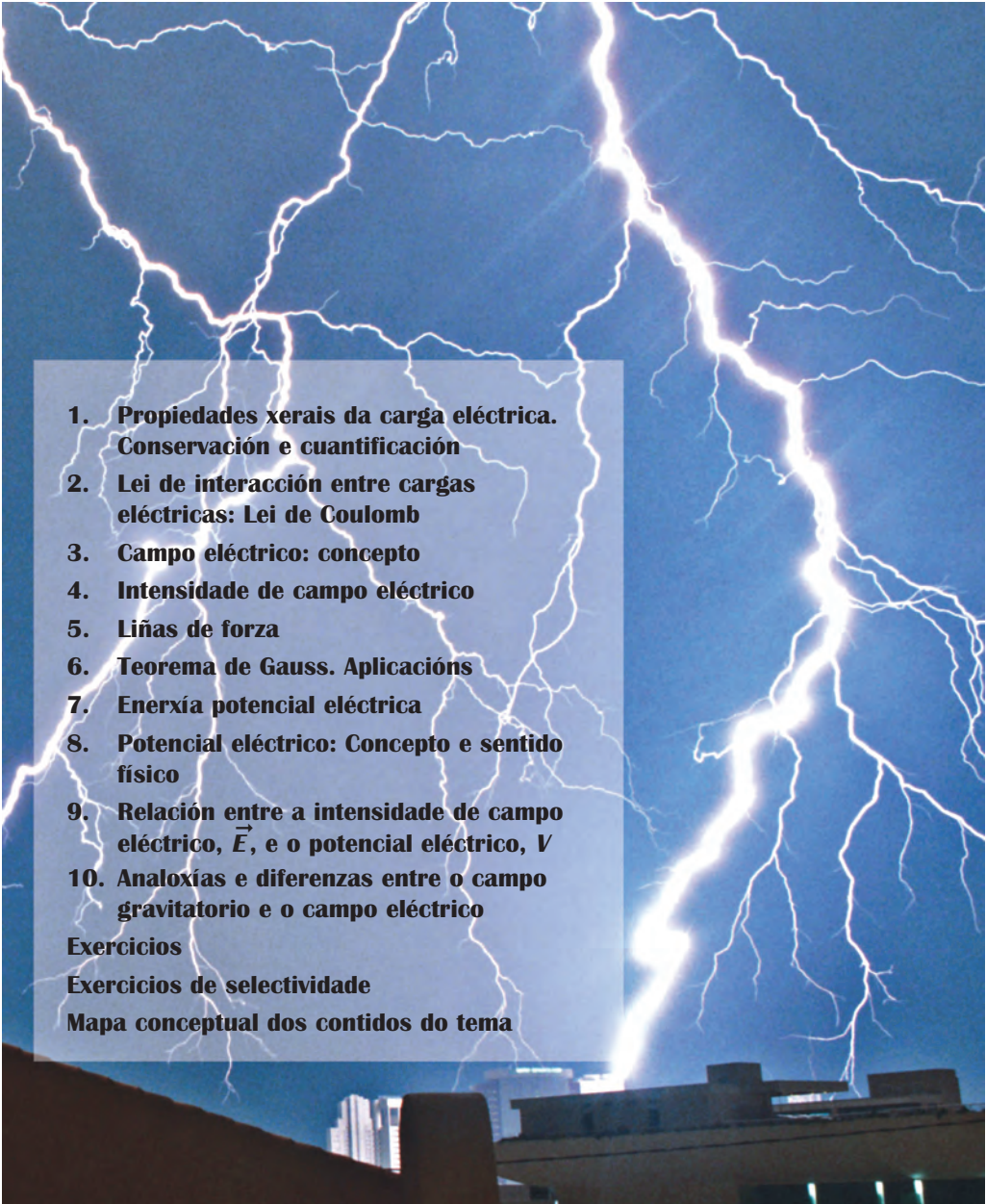
- Un satélite artificial de 300 kg xira arredor da Terra nunha órbita circular de 36378 km de raio. Calcula: a) a velocidade do satélite na órbita; b) a enerxía total do satélite na órbita.
 Datos: $R_T = 6378 \text{ km}$; $g_0 = 9,80 \text{ m/s}^2$. (Xuño 03).
R: a) $v = 3310,4 \text{ m/s}$; b) $E = -1,6 \cdot 10^9 \text{ J}$.
- Un astronauta de 75 kg xira arredor da Terra (dentro dun satélite artificial) nunha órbita situada a 10000 km sobre a superficie da Terra. Calcula: a) a velocidade orbital e o período de rotación; b) o peso do astronauta. Datos: $g_0 = 9,80 \text{ m s}^{-1}$; $R_{\text{Terra}} = 6400 \text{ km}$. (Setembro 02).
R: a) $v = 4947,3 \text{ m s}^{-1}$, $T = 20828,4 \text{ s}$; b) $G_{\text{do astronauta á altura do satélite}} = 112,5 \text{ N}$.
- Un satélite artificial describe unha órbita circular de raio $2 \cdot R_T$ en torno á Terra. Calcula: a) a velocidade orbital; b) o peso do satélite na órbita se na superficie da Terra pesa 5000 N (debuxa as forzas que actúan sobre o satélite). Datos: $R_T = 6400 \text{ km}$; $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$; $g_0 = 9,8 \text{ m s}^{-2}$. (Xuño 02).
R: a) $v = 5600 \text{ m s}^{-1}$; b) $G_{\text{do satélite na órbita}} = 1249,5 \text{ N}$
- Un satélite artificial cunha masa de 200 kg móvese nunha órbita circular arredor da Terra cunha velocidade constante de 10800 km/h. a) Calcula a que altura está situado; b) fai un gráfico indicando que forzas actúan sobre o satélite e calcula a enerxía total. Datos: $g_0 = 9,8 \text{ m s}^{-2}$; $R_T = 6370 \text{ km}$. (Set. 01).
R: a) $h = 37813736 \text{ m}$; b) $E_m = -9,0 \cdot 10^8 \text{ J}$
- Lánzase un proxectil verticalmente desde a superficie da Terra, cunha velocidade inicial de 3 km s^{-1} . Calcula: a) que altura máxima alcanzará; b) a velocidade orbital que é preciso comunicarlle a esa altura para que describa unha órbita circular.
 Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$; $R_T = 6378 \text{ km}$; $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. (Xuño 01).
R: a) $h = 4,95 \cdot 10^5 \text{ m}$; b) $v = 7,62 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$
- Deséxase pór en órbita un satélite xeostacionario de 25 kg. Calcule: a) o raio da órbita; b) as enerxías cinética, potencial e total do satélite na órbita. (Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$, $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$). (Setembro 00).
R: a) $r \text{ órbita} = 4,23 \cdot 10^7 \text{ m}$; b) $E_k = 1,2 \cdot 10^8 \text{ J}$; $E_p = -2,4 \cdot 10^8 \text{ J}$; $E_m = -1,2 \cdot 10^8 \text{ J}$.
- Un satélite artificial cunha masa de 200 kg móvese nunha órbita circular a $5 \cdot 10^7 \text{ m}$ por encima da superficie terrestre. a) Que forza gravitatoria actúa sobre o satélite?; b) cal é o período de rotación do satélite? (Datos: $g_0 = 9,81 \text{ m s}^{-2}$; $R_T = 6370 \text{ km}$). (Xuño 00).
R: a) $F = 25,05 \text{ N}$; b) $T = 133234 \text{ s}$
- Dúas masas puntuais de 10 kg cada unha están en posicións (5,0) e (-5,0) (en metros). Unha terceira masa de 0,1 kg déixase en liberdade e con velocidade nula no punto (0,10). Calcula: a) a aceleración que actúa sobre a masa de 0,1 kg nas posicións (0,10) e (0,0); b) a velocidade da masa de 0,1 kg en (0,0). (Dato: $G=6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$). (Setembro 99).
R: a) $a_{(0,10)} = 9,55 \cdot 10^{-13} \text{ m s}^{-2}$; $a_{(0,0)} = 0 \text{ m s}^{-2}$, b) $v_{(0,0)} = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ m s}^{-1}$
- Deséxase poñer en órbita un satélite artificial a unha altura de 300 km sobre a superficie terrestre. Calcula: a) a velocidade orbital que se lle ten que comunicar ao satélite; b) o período de rotación: (Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$, $R_T = 6378 \text{ km}$, $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$). (Xuño 99).
R: a) $v = 7728,4 \text{ m s}^{-1}$; b) $T = 5426,5 \text{ s}$

- ❖ Dous puntos materiais de masas m e $2m$ respectivamente, atópanse a unha distancia de 1 m. Busca o punto onde unha terceira masa, a) estaría en equilibrio, b) sentiría iguais forzas (módulo, dirección e sentido) por parte das dúas primeiras. (*Setembro 98*).
R: a) $x = 0,41$ m; b) $x = 2,41$ m
- ❖ A menor velocidade de xiro dun satélite na Terra, coñecida como primeira velocidade cósmica, é a que se obtería para un raio orbital igual ao raio terrestre R_T . Calcula: a) a primeira velocidade cósmica, b) o período de revolución correspondente. Datos $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻², $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg, $R_T = 6,38 \cdot 10^6$ m. (*Xuño 98*).
R: a) $v = 7906,8$ m s⁻¹; b) $T = 5067,3$ s
- ❖ Europa, satélite de Xúpiter, foi descuberto por Galileo en 1610. Sabendo que o raio da órbita que describe é de $6,7 \cdot 10^5$ km e o seu período de 3 días, 13 horas e 13 minutos, calcula: a) a velocidade de Europa relativa a Xúpiter, b) a masa de Xúpiter. Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻². (*Setembro 97*).
R: a) $v = 13715,4$ m s⁻¹; b) $M = 1,89 \cdot 10^{27}$ kg
- ❖ a) Calcula o raio que debería ter a Terra conservando a súa masa, para que a velocidade de escape fose igual á da luz, $c = 300000$ km s⁻¹ (extraño furado negro!). b) Ante un colapso deste tipo, variará o período de rotación da Lúa ao redor da Terra? Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻²; $R_T = 6,38 \cdot 10^6$ m; $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg. (*Xuño 97*).
R: a) $r = 8,9 \cdot 10^{-3}$ m; b) Non
- ❖ A distancia Terra-Lúa é aproximadamente $60 R_T$, sendo R_T o raio da Terra, igual a 6400 km. Calcula: a) a velocidade lineal da Lúa no seu movemento ao redor da Terra e b) o correspondente período de rotación en días. Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻², $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg. (*Setembro 96*).
R: a) $v = 1019,2$ m s⁻¹; b) $T = 27,4$ días
- ❖ Nun planeta que ten a metade do raio terrestre, a aceleración da gravidade na súa superficie vale 5 m s⁻². Calcula: a) a relación entre as masas do planeta e a Terra, e b) a altura á que é necesario deixar caer desde o repouso un obxecto no planeta para que chegue á súa superficie coa mesma velocidade con que o fai na Terra, cando cae desde unha altura de 100 m. (Na Terra: $g = 10$ m s⁻²). (*Xuño 96*).

R: a) $\frac{M_{\text{planeta}}}{M_{\text{Terra}}} = \frac{1}{8}$; b) $y = 200$ m

Mapa conceptual do Tema 2



- 
1. **Propiedades xerais da carga eléctrica. Conservación e cuantificación**
 2. **Lei de interacción entre cargas eléctricas: Lei de Coulomb**
 3. **Campo eléctrico: concepto**
 4. **Intensidade de campo eléctrico**
 5. **Liñas de forza**
 6. **Teorema de Gauss. Aplicacións**
 7. **Energía potencial eléctrica**
 8. **Potencial eléctrico: Concepto e sentido físico**
 9. **Relación entre a intensidade de campo eléctrico, \vec{E} , e o potencial eléctrico, V**
 10. **Analogías e diferenzas entre o campo gravitatorio e o campo eléctrico**

Exercicios

Exercicios de selectividade

Mapa conceptual dos contidos do tema

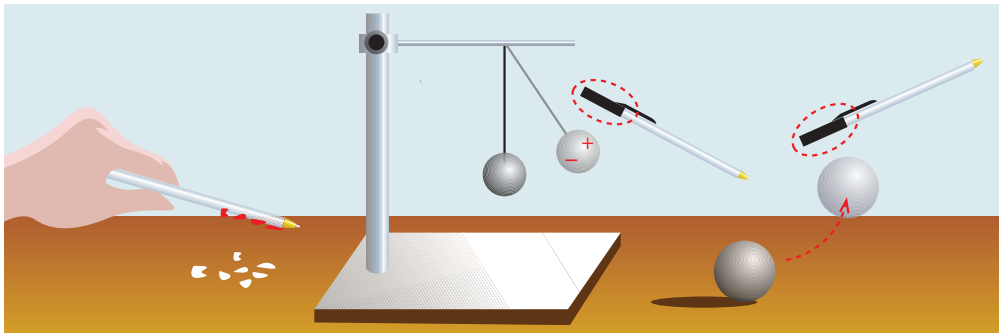
1. PROPIEDADES XERAIS DA CARGA ELÉCTRICA. CONSERVACIÓN E CUANTIFICACIÓN

Propiedades da carga eléctrica son:

- Experimentalmente compróbase que existen dous tipos de carga, que desde hai tempo se chaman **positiva e negativa**. Todas as cargas dunha clase repélense entre si, mentres que atraen ás da outra clase¹.
- A carga consérvase. A carga total (suma alxébrica das positivas e negativas) dun sistema illado non varía. Nun proceso de electrización non hai creación de carga eléctrica, simplemente hai transición da carga eléctrica dun corpo a outro.
- A carga está cuantizada. Calquera valor da carga é múltiplo dunha carga elemental: a do electrón (e^-) ou a do protón, sendo estas iguais en valor absoluto²: $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

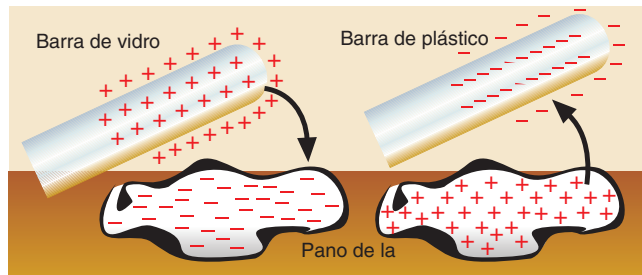
É posíbel que a carga eléctrica dunha partícula sexa $4,8 \cdot 10^{-19} \text{ C}$? E $16 \cdot 10^{-24} \text{ C}$?

¹ Da sinxela experiencia de fregar un plástico, unha barra de vidro, ..., vemos como podemos atraer pequenos anacos de corpos lixeiros (papel, porexpán, ...). Dise que o material fregado adquiriu unha **carga eléctrica**, que se electrizou.



Se dun fío colgamos un bolígrafo de plástico e lle acercamos outro, ambos fregados co mesmo pano, observamos unha **repulsión**. Se lle acercamos unha barra de vidro fregada, vemos unha **atracción**. Estes feitos explícanse admitindo que hai dúas clases de **electricidade: positiva e negativa**, observándose que corpos electrizados co mesmo signo **se repelen** e con signo distinto **se atraen**.

Franklin, á carga eléctrica que adquire o vidro fregado cun pano de lã, chamoulle positiva: nome que se segue mantendo.



² A cuantización da carga non se pon de manifesto nas experiencias de electrostática, nas que se manexan cargas da orde do nanoculombio, 10^{-9} C , o que significa un número arredores de 10^{10} electróns. En correntes eléctricas (cargas en movemento) é normal manexar cargas da orde do coulombio, 10^{18} electróns. Así, polo filamento dunha lámpada de 220 V e 100 W circula cerca de medio coulombio por segundo. Resulta, pois, razoábel considerar a carga, Q , como unha magnitude continua, podéndose falar de elementos diferenciais de carga, dQ , coa condición de que: $Q \gg dQ \gg e^-$.

Por exemplo, no caso de que Q sexa 100 nC, pode ser dQ da orde de 1 pC, o cal representa $6,25 \cdot 10^6$ electróns e deixa de ter importancia o carácter discreto ou cuantificado da carga. Polo contrario, no caso de problemas atómicos ou nucleares é fundamental esta característica.

2. LEI DE INTERACCIÓN ENTRE CARGAS ELÉCTRICAS: LEI DE COULOMB

Como xa dixemos anteriormente, experimentalmente compróbase que hai dous tipos de carga, que se coñecen como positiva e negativa, observándose que cargas de igual signo se repelen e de distinto signo se atraen. Coulomb mediu experimentalmente (coa balanza de torsión de Cavendish) estas forzas chegando, para o caso de dúas cargas puntuais, Q e Q' , separadas unha distancia r , á seguinte conclusión:

$$F = k \cdot \frac{Q \cdot Q'}{r^2}$$

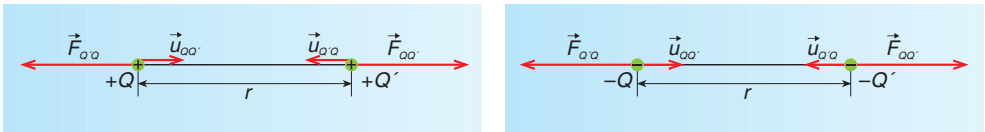
sendo k unha constante que, como máis adiante se comenta, depende do medio en que estean as cargas.

Ao calcular o módulo da forza non se debe poñer signo ás cargas, xa que o módulo dun vector representa unicamente a súa lonxitude, non sendo lóxico que esta lonxitude teña signo.

Vectorialmente³:

$$\vec{F} = k \cdot \frac{Q \cdot Q'}{r^2} \cdot \vec{u}_r \begin{cases} \vec{F} = k \cdot \frac{Q \cdot Q'}{r^2} \cdot \vec{u}_r; & \text{para cargas de igual signo, a)} \\ \vec{F} = -k \cdot \frac{|Q \cdot Q'|}{r^2} \cdot \vec{u}_r; & \text{para cargas de distinto signo, b)} \end{cases}$$

a)



Para cargas do mesmo signo, o sentido de \vec{F} coincide co de \vec{u}_r (forza repulsiva):

$$\vec{F} = k \cdot \frac{Q \cdot Q'}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

b)



Para cargas de distinto signo, o sentido de \vec{F} é o contrario ao de \vec{u}_r (forza atractiva):

$$\vec{F} = -k \cdot \frac{|Q \cdot Q'|}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

Na expresión da lei de Coulomb, \vec{F} é a forza de atracción ou de repulsión entre as cargas puntuais Q e Q' , separadas á distancia r (sempre distinta de cero: a forza \vec{F} está definida para r distinto de cero); \vec{u}_r é o vector unitario na dirección que une as cargas, co sentido

³ As magnitudes escalares Q e Q' teñen que levar na ecuación vectorial o signo correspondente á carga que representan.

que vai desde a carga que fai a forza cara á carga sobre a que a exerce e k^4 é unha constante que depende do medio en que se encontran as cargas. No baleiro esta constante ten o máximo valor e no SI vale $9 \cdot 10^9$.

A ecuación de dimensión de k no SI é:

$$[k] = \left[\frac{F \cdot r^2}{Q^2} \right] = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L^2}{I^2 \cdot T^2} = M \cdot L^3 \cdot T^{-2} \cdot I^{-2} \cdot T^{-2} = M \cdot L^3 \cdot T^{-4} \cdot I^{-2}$$

e a súa unidade: $\text{kg m}^3 \text{A}^{-2} \text{s}^{-4}$ ou $\text{N m}^2 \text{C}^{-2}$. (No SI a unidade de carga é o coulomb, C).

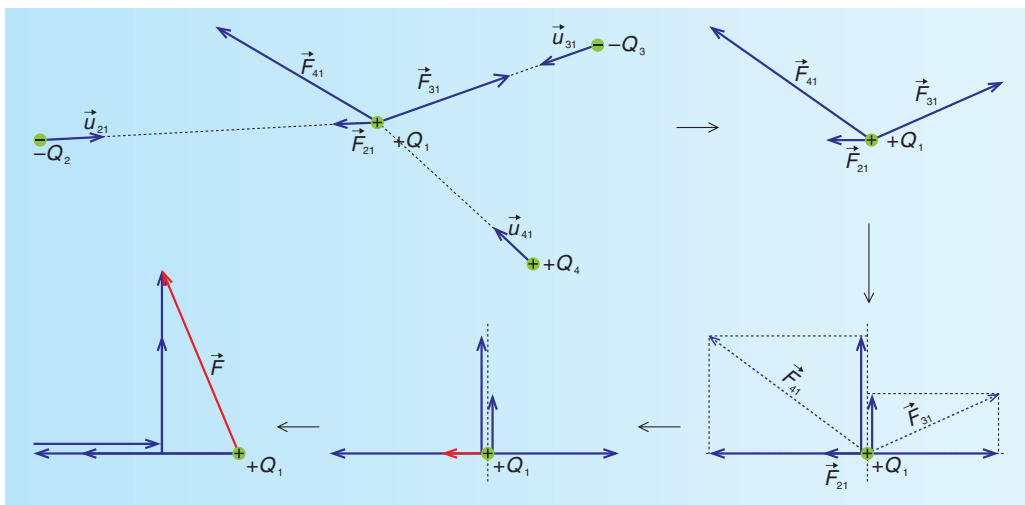
Para certas aplicacións resulta máis práctico expresar k en función dunha nova constante, ϵ , da seguinte forma:

$$k = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon}, \text{ nun medio calquera, e } k_0 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}, \text{ no baleiro.}$$

sendo ϵ a **constante dieléctrica do medio** ou **permitividade do medio** en que están as cargas e ϵ_0 a chamada **constante dieléctrica do baleiro** ou **permitividade do baleiro**. Do seu cociente aparece a permitividade relativa ϵ_r : $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$.

No aire, o valor de ϵ_r é de 1,0006 e, en consecuencia, $k_{\text{aire}} \approx k_{\text{baleiro}}$.

Se en vez de unha carga son varias as cargas puntuais (Q_2, Q_3, \dots), a forza total exercida sobre a carga puntual Q_1 obtense sumando (vectorialmente) todas as forzas individuais exercidas sobre a carga Q_1 : **principio de superposición**: $\vec{F} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41} + \dots$



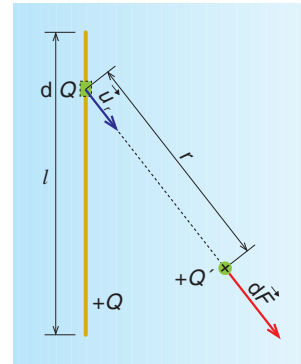
Forza eléctrica exercida por varias cargas sobre a carga Q_1 .

⁴ A constante k xoga un papel semellante a G na lei de Newton da gravitación universal, coa diferenza de que:

k depende do medio en que estean as cargas e G é independente.

Ademais, k non se obtén experimentalmente e G si. Para o baleiro déuselle o valor de $9 \cdot 10^9$ U SI. Agora, da lei de Coulomb, pódese definir a unidade de carga, que será aquela carga que colocada á distancia de 1 m doutra igual e no baleiro, a repele cunha forza de $9 \cdot 10^9$ N. A esta carga déuselle o nome de 1 C (coulomb, sistema M.K.S.C). Despois do ano 1960, o sistema aprobado internacionalmente é o M.K.S.A. O ampere defínese a partir da forza magnética entre dúas correntes eléctricas e o coulomb é unha magnitude derivada. Nos dous sistemas k segue sendo $9 \cdot 10^9$ N m² C⁻².

Como xa dixemos, a lei de Coulomb só é válida para cargas puntuais, pero o principio de superposición permítenos considerar todo obxecto cargado como composto por elementos de carga eléctrica, podendo aplicarlle a estes elementos a lei de Coulomb, obténdose a forza total exercida por un corpo cargado cunha carga Q sobre unha carga puntual Q' como a resultante de todas as forzas de Coulomb. Así, por exemplo, a forza exercida por un fío de lonxitude l cargado cunha carga total $+Q$, sobre unha carga puntual Q' , tamén positiva, calcúlase sumando (vectorialmente) as forzas elementais exercidas por cada elemento de carga dQ sobre Q' .



3. CAMPO ELÉCTRICO: CONCEPTO

Sexa unha carga Q (por exemplo, positiva) e nas súas proximidades, á distancia r_1 , outra carga Q' (negativa). A carga Q' é atraída pola outra Q cunha forza que vén dada pola expresión: $F_{Q-Q'} = k \cdot Q \cdot Q' / r_1^2$. Se afastamos a carga Q' até unha distancia r_2 (maior que r_1) a forza con que Q atrae a Q' é menor. Para outra distancia r_3 maior, $F_{Q-Q'}$ é máis pequena, chegando a ser practicamente cero para un determinado valor de r_n . A partir desta distancia, Q non exerce forza atractiva sobre Q' : dise que Q' está no infinito e á rexión do espazo onde Q manifesta os seus efectos de interacción sobre a carga Q' chámasele **campo eléctrico**.

Resumindo diremos que toda carga eléctrica exerce, na súa proximidade, forzas de atracción ou repulsión sobre outras cargas. Á rexión do espazo onde se manifestan as forzas centrais de tipo electrostático chámasele **campo eléctrico**.

O campo eléctrico, como todo campo de forzas, vén determinado por tres elementos que o definen:

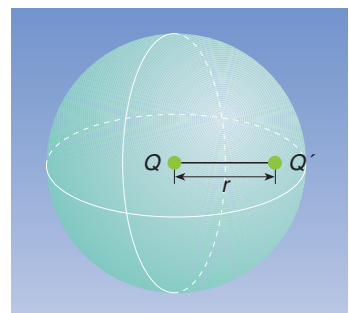
- A intensidade de campo.
- O potencial.
- As liñas de forza, que nos permite visualizalo.

4. INTENSIDADE DE CAMPO ELÉCTRICO

A lei de Coulomb permítenos calcular a forza F con que unha carga puntual Q atrae ou repele outra Q' :

$$F = k \cdot \frac{Q \cdot Q'}{r^2}$$

onde k é unha constante que depende do medio en que estean as cargas e r a distancia que separa as cargas.

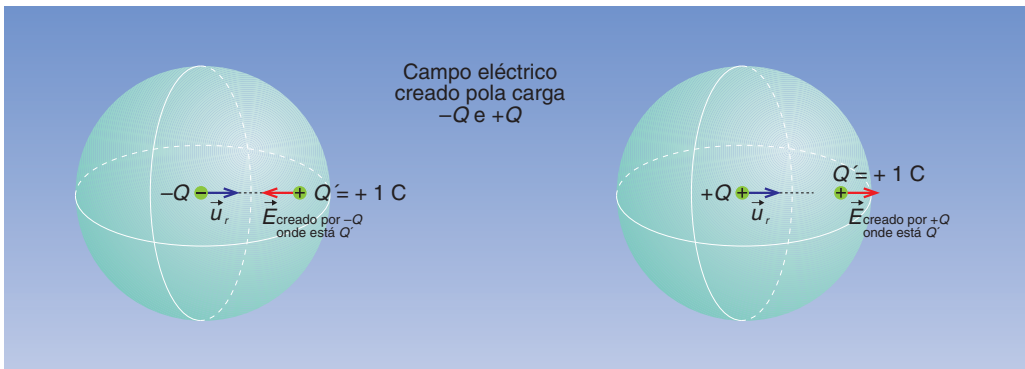


Se Q' é a unidade de carga **positiva** (1 C no SI), a expresión anterior queda da forma:

$$F = k \cdot \frac{Q \cdot 1}{r^2}$$

que por definición é o valor da **intensidade do campo eléctrico**, \vec{E} , (ás veces chamado vector campo eléctrico ou, simplemente, campo eléctrico) creada pola carga Q no punto onde se atopa a unidade de carga positiva (Q'). Polo tanto, o campo eléctrico creado por unha carga Q nun punto é a forza exercida sobre a unidade de carga positiva colocada nese punto.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q'} = \begin{cases} +k \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{u}_r; & \text{se } Q \text{ é positiva.} \\ -k \cdot \frac{|Q|}{r^2} \cdot \vec{u}_r; & \text{se } Q \text{ é negativa.} \end{cases}$$

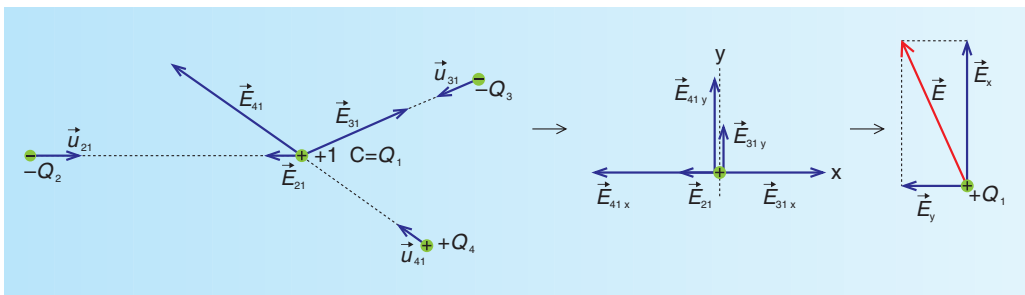


A ecuación de dimensións de E , no SI, é:

$$[E] = M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot T^{-1} \cdot I^{-1} = M \cdot L \cdot T^{-3} \cdot I^{-1}$$

coa unidade de $\text{kg m s}^{-3} \text{ A}^{-1}$ (ou N/C).

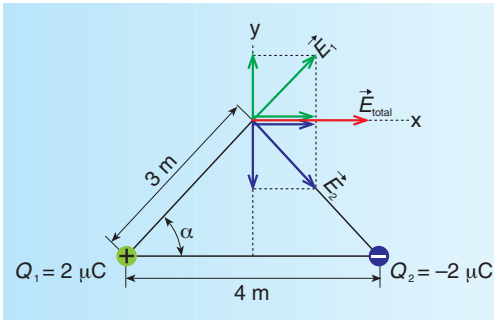
Se son varias as cargas creadoras de campo: Q_1, Q_2, \dots ; sitas á distancia r_1, r_2, \dots , dun punto P, cada carga exerce a súa intensidade: $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots$, como se estivese soa, sendo a intensidade total igual á suma vectorial das intensidades individuais: isto coñécese como **principio de superposición**:



Intensidade de campo eléctrico de varias cargas.

- Un dipolo eléctrico (que consiste en dúas cargas de igual valor numérico e de distinto signo separadas unha distancia d) está formado por cargas de $2 \mu\text{C}$ e $-2 \mu\text{C}$ distantes entre si 4 m. Calcula o valor do campo eléctrico nun punto da mediatriz do segmento que as une, distante 3 m de cada carga. Nota: O medio é o aire.

Solución:



O campo eléctrico creado por unha carga puntual Q vén dado pola expresión: $\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$. Numericamente coincide co valor da forza que esta carga exerce sobre a unidade de carga positiva colocada no punto onde queremos coñecer a intensidade de campo. A dirección e o sentido de \vec{E} coinciden coa dirección e o sentido da forza.

Se son varias as cargas creadoras do campo eléctrico (neste caso dúas) a intensidade de campo total obtense sumando vectorialmente as intensidades de campo debido a cada unha das cargas individuais.

$$E_1 = E_2 = 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-6}}{3^2} = 2 \cdot 10^3 \text{ N/C}$$

$$E_{1x} = E_{2x} = E_1 \cos \alpha = 2 \cdot 10^3 \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \cdot 10^3 \text{ N/C}$$

$$E_{1y} = E_{2y} = E_1 \sin \alpha = 2 \cdot 10^3 \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{3} \cdot 10^3 \text{ N/C}$$

$$\vec{E}_1 = E_{1x} \vec{i} + E_{1y} \vec{j} = \frac{4}{3} \cdot 10^3 \vec{i} + \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{3} \cdot 10^3 \vec{j} \text{ (N/C)}$$

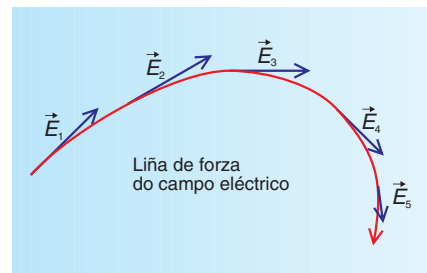
$$\vec{E}_2 = E_{2x} \vec{i} + E_{2y} \vec{j} = \frac{4}{3} \cdot 10^3 \vec{i} - \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{3} \cdot 10^3 \vec{j} \text{ (N/C)}$$

$$\vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \left(\frac{4}{3} \cdot 10^3 \vec{i} + \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{3} \cdot 10^3 \vec{j} \right) + \left(\frac{4}{3} \cdot 10^3 \vec{i} - \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{3} \cdot 10^3 \vec{j} \right) = \frac{8}{3} \cdot 10^3 \vec{i} \text{ (N/C)}$$

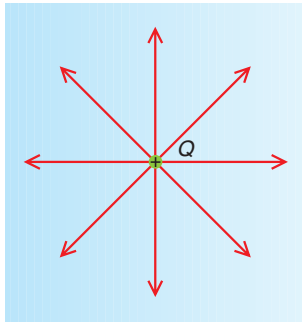
5. LIÑAS DE FORZA

O campo eléctrico pode representarse graficamente por medio dunhas liñas imaxinarias, chamadas **liñas de forza** ou **liñas de campo**, as cales son tangentes en cada punto á dirección do vector intensidade de campo eléctrico, \vec{E} , e asígnanselle o mesmo sentido que o do vector \vec{E} .

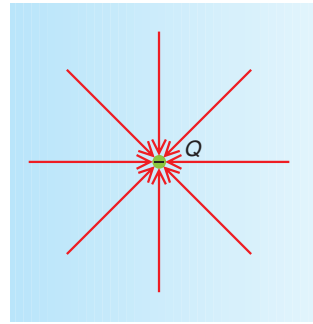
Cando o campo é creado por unha só carga puntual, as liñas de forza representan as traxectorias que se-



guirían as cargas positivas abandonadas no campo⁵, sendo radiais, xa que as forzas electrostáticas son centrais. Por convenio saen das cargas positivas (fontes) ou do infinito e terminan no infinito ou nas cargas negativas (sumidoiros). Nos debuxos da dereita representáanse as liñas de forza do campo eléctrico dunha carga puntual positiva e dunha carga negativa.

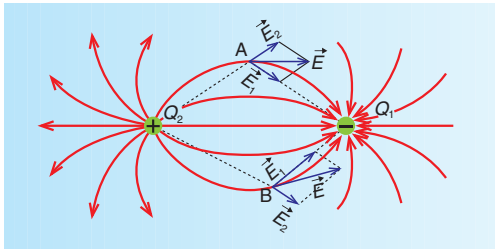


Liñas de forza do campo eléctrico dunha carga puntual positiva.

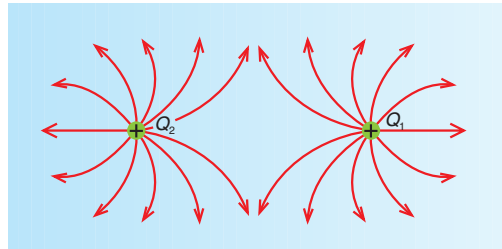


Liñas de forza do campo eléctrico dunha carga puntual negativa.

Para o caso de dúas cargas puntuais de igual valor, as liñas de forza son as indicadas a continuación⁶, segundo se trate de cargas de distinto signo ou de igual signo.

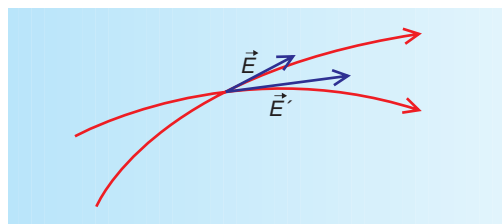
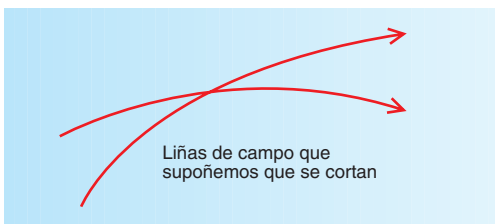


Liñas de forza do campo eléctrico de dúas cargas puntuais de igual valor e diferente signo (dipolo eléctrico).

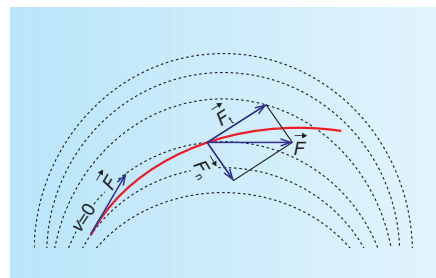


Liñas de forza do campo eléctrico de dúas cargas puntuais idénticas.

Dúas liñas de forza nunca se cortan nun punto. Se isto sucedera, no punto de intersección, o vector intensidade de campo, \vec{E} , tería que ser tanxente simultaneamente a ambas liñas, o que implica dous valores para \vec{E} , feito imposible.



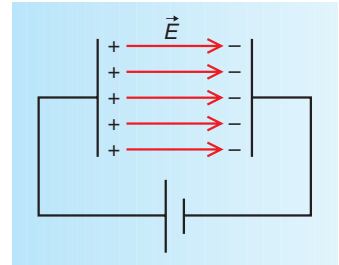
⁵ Cando as liñas de forza son curvas, unha carga abandonada no campo non se despraza ao longo das liñas de campo xa que a carga baixo a acción da forza que exerce o campo eléctrico se acelera, saíndose da liña de forza sobre a que se move. Recordemos que en todo movemento curvilíneo a forza que actúa sobre o móbil terá un compoñente normal á traxectoria (que é a que fai variar a dirección do movemento). Se a traxectoria fose unha liña do campo, non existiría este compoñente normal da forza xa que esta (a forza) é tanxente á liña: $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$.



⁶ No punto A, se as cargas Q_1 e Q_2 teñen o mesmo valor numérico, E_1 e E_2 son iguais (recorda que: $E = k \cdot Q/r^2$), pero no punto B, $E_2 < E_1$, xa que $r_2 > r_1$, resultando que as liñas de forza non teñen a forma dun arco de circunferencia.

Nos campos radiais dá a impresión de que as liñas de forza se cortan no centro. No entanto non é así, xa que no centro non hai campo eléctrico⁷, polo que este punto non pertence a ningunha das liñas de campo.

Se \vec{E} é constante en módulo, dirección e sentido en todos os puntos dunha zona do espazo, dise que o campo é **homoxéneo** ou **uniforme** nesa zona e represéntase por liñas de campo paralelas e equidistantes. Compróbase experimentalmente que un campo destas características aparece cando conectamos dúas placas metálicas, paralelas e separadas unha pequena distancia (condensador plano) a un xerador de continua. Cando \vec{E} non varía no tempo dise que o campo eléctrico é **estacionario**.



6. TEOREMA DE GAUSS. APLICACIÓNS

Na práctica, os campos eléctricos son creados por cargas distribuídas sobre superficies de corpos de tamaño finito en non por cargas puntuais. Para cargas non puntuais, o cálculo de \vec{E} hai que facelo utilizando o principio de superposición: sumatorio dos \vec{E}_i creados polos elementos de carga dQ_i . Ás veces non é fácil resolver a integral que resulta⁸. Porén, se os corpos cargados posúen algún tipo de simetría, pódese simplificar o cálculo aplicando o teorema de Gauss. Para iso empezamos recordando o concepto de **fluxo**, Φ , a través dunha superficie S : representa o número de liñas de forza que atravesan esa superficie e vén dado polas expresións:

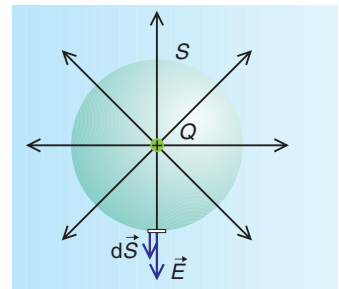
$$\Phi_S = \vec{E} \cdot \vec{S} \text{ (Se a intensidade de campo } \vec{E} \text{ é uniforme).}$$

$$\Phi_S = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \text{ (Se a intensidade de campo } \vec{E} \text{ non é uniforme en toda a superficie } S),$$

sendo \vec{E} o valor da intensidade de campo no elemento de superficie $d\vec{S}$. No caso de que a superficie S sexa pechada, a integral indícase da forma: $\Phi_S = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$.

Supoñamos unha carga puntual $+Q$. As liñas de forza saen en forma radial. Para calcular o fluxo, Φ , desta carga imaxinamos unha superficie pechada, de modo que \vec{E} sexa perpendicular á superficie en cada punto e o seu módulo sexa constante en toda ela: unha esfera con centro a propia carga. A superficie que cumpre estas condicións recibe o nome de superficie gaussiana.

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E \cdot dS$$



⁷ De cruzarse as liñas de forza no punto onde se encontra a carga puntual, significaría que nese punto habería infinitos valores de \vec{E} (xa que este é tanxente en cada punto ás liñas de forza). Concluímolo dicindo que no punto onde se encontra a carga non hai campo eléctrico e, en consecuencia, tampouco hai liñas de forza.

⁸ $\vec{E}_i = \sum \vec{E}_i = \int d\vec{E}_i$

Para o caso que estamos estudando (carga puntual situada no centro da esfera gaussiana de raio r), o módulo de \vec{E} , para calquera punto da superficie da esfera, é constante, vindo dado pola expresión: $E = k \frac{Q}{r^2}$. Polo tanto:

$$\Phi_S = E \cdot \oint_S dS = k \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \oint_S dS = \frac{k \cdot Q}{r^2} \cdot S$$

Escribindo a superficie da esfera, S , en función do seu raio, r : $S = 4 \pi r^2$, temos:

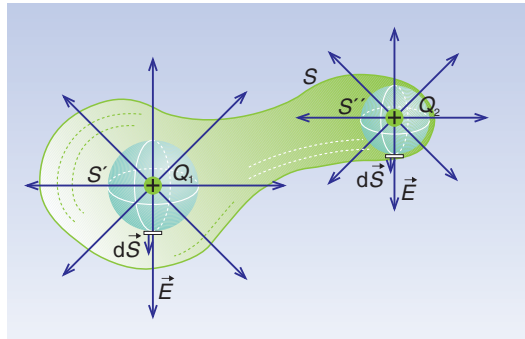
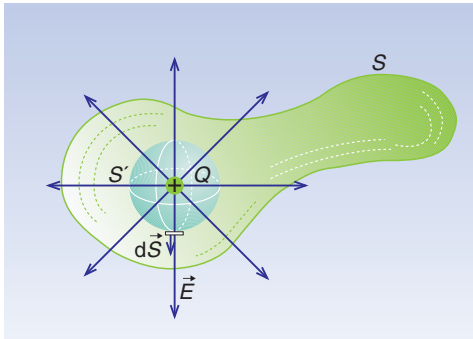
$$\Phi_S = k \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = k \cdot Q \cdot 4 \cdot \pi$$

Ao poñer k en función da constante dieléctrica do medio, $\epsilon : k = \frac{1}{4 \pi \epsilon}$, resulta:

$$\Phi_S = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot Q \cdot 4 \cdot \pi \rightarrow \Phi_S = \frac{Q}{\epsilon}$$

Se a carga puntual $+Q$ está contida nunha superficie S calquera, o fluxo que atravesa esta superficie, Φ_S , coincide co fluxo que atravesa a superficie S' , $\Phi_{S'}$, contida na superficie S e que ten por centro a carga $+Q$. Polo tanto:

$$\Phi_S = \Phi_{S'} = \frac{Q}{\epsilon}$$

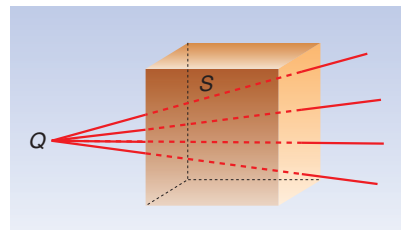


Se son varias as cargas: Q_1, Q_2, Q_3, \dots , que hai no interior da superficie S , o fluxo total é igual á suma dos fluxos correspondentes a cada unha delas:

$$\Phi_S = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon}$$

Expresión que constitúe o teorema de Gauss e que nos di que “o fluxo total do campo \vec{E} a través dunha superficie pechada calquera, \vec{S} , é igual ao cociente entre a carga total contida dentro da superficie e a permitividade do medio na que se encontran, ϵ ”.

Se a carga está fóra da superficie considerada: $\Phi = 0$.



Como símil podemos supoñer que Q é un canón que dispara proxectís cara a unha caixa que é oca. Resulta que cada proxectil que entra na caixa, tamén sae dela, non habendo produción neta de proxectís dentro da superficie S da caixa.

Exercicio resolto

- ▶ Tres cargas: $Q_1 = -8 \mu\text{C}$, $Q_2 = 2 \mu\text{C}$ e $Q_3 = 6 \mu\text{C}$, están situadas, respectivamente, nos puntos (0,0), (4,0) e (0,2), coordenadas que veñen dadas en centímetros. Calcula:
 - a) O campo eléctrico no punto ocupado pola carga Q_3 .
 - b) O fluxo do campo eléctrico a través dunha esfera con centro a carga Q_1 e 3 cm de raio. Cal sería o fluxo para unha esfera con igual centro e de 5 cm de raio?
 - c) O fluxo do campo eléctrico a través dunha esfera de 2,5 cm de raio e que ten por centro a carga Q_3 .

Solución:

- a) No punto (0,2), lugar onde está situada a carga Q_3 , a intensidade de campo eléctrico é a suma vectorial das intensidades de campo que nese punto crean as cargas Q_1 e Q_2 .

A intensidade de campo eléctrico creada pola carga Q_1 vale:

$$E_1 = k \frac{Q_1}{r_1^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{8 \cdot 10^{-6}}{(2 \cdot 10^{-2})^2} = 18 \cdot 10^7 \text{ N C}^{-1}$$

que expresada en forma vectorial queda: $\vec{E}_1 = -18 \cdot 10^7 \vec{j} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$

A intensidade de campo eléctrico creada pola carga Q_2 é:

$$E_2 = k \frac{Q_2}{r_2^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-6}}{(\sqrt{(16+4)} \cdot 10^{-2})^2} = 9 \cdot 10^6 \text{ N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_2 = 9 \cdot 10^6 (-\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}), \text{ onde: } \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{20}} \text{ e } \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{20}}$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{18}{\sqrt{5}} \cdot 10^6 \cdot 2 \vec{i} + \frac{18}{\sqrt{20}} \cdot 10^6 \vec{j} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -18 \cdot 10^7 \vec{j} + \left(-\frac{18}{\sqrt{20}} \cdot 10^6 \cdot 2 \right) \vec{i} + \frac{18}{\sqrt{20}} \cdot 10^6 \vec{j} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$

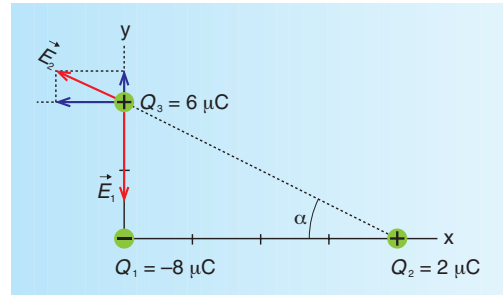
$$\vec{E}_T = -\frac{18}{\sqrt{5}} \cdot 10^6 \vec{i} + \left(\frac{9}{\sqrt{5}} - 180 \right) \cdot 10^6 \vec{j} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$

- b) A esfera de 3 cm de raio, con centro en Q_1 , contén no seu interior as cargas Q_1 e Q_3 , de modo que a carga neta no seu interior é: $Q_{\text{neta}} = -2 \mu\text{C} = -2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$.

Aplicando o teorema de Gauss, podemos coñecer o fluxo a través desta esfera:

$$\Phi_{\text{total}} = \frac{Q_{\text{total}}}{\epsilon_0} = 4 \cdot \pi \cdot k_0 \cdot Q = 4 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot (-2 \cdot 10^{-6}) \rightarrow \Phi_{\text{total}} = -72 \cdot \pi \cdot 10^3 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-1}$$

O signo menos indica que entran pola superficie da esfera máis liñas de forza das que saen.



Se a esfera é de 5 cm de raio, as tres cargas estarían pechadas no seu interior, sendo a $Q_{\text{total}} = 0$, saíndo pola superficie da esfera o mesmo número de liñas de forza que entran, resultando un fluxo nulo.

- c) A carga encerrada por esta nova superficie coincide coa carga encerrada pola esfera de 3 cm de raio e con centro a carga Q_1 . Aplicando o teorema de Gauss, $\Phi_{S_{\text{total}}} = \Phi_1 + \Phi_3 = \frac{Q_{\text{total}}}{\epsilon_0}$, resulta o mesmo valor de fluxo que o obtido para a esfera de 3 cm de raio: $\Phi_{\text{total}} = -72 \cdot \pi \cdot 10^3 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-1}$.

6.1. Campo eléctrico creado por unha esfera condutora, uniformemente cargada, en equilibrio electrostático

a) Nun punto do seu interior

Dicimos que un condutor cargado se encontra en equilibrio electrostático cando as cargas que posúe están en repouso.

Nun condutor cargado coas cargas en equilibrio electrostático, estas están distribuídas uniformemente pola súa superficie: as cargas repélese e de estar no interior desprazaríanse até que a distancia fose máxima; isto é: até a superficie do condutor.

Ao situarse as cargas sobre a superficie do condutor, a carga encerrada por unha superficie interior é nula e recordando o concepto de fluxo e o teorema de Gauss resulta:

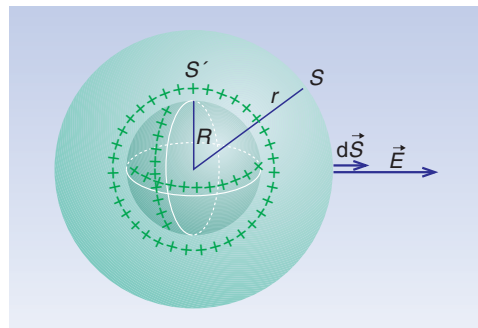
$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \oint_{S_{\text{esfera interior}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ \Phi &= \frac{Q}{\epsilon} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} \oint_{S_{\text{interior}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon} \\ Q_{\text{interior}} &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow E = 0$$

O resultado é que a intensidade de campo eléctrico no interior dun condutor en equilibrio electrostático é nula.

b) Nun punto exterior á esfera

A intensidade de campo eléctrico, \vec{E} , como todo vector, consta de módulo, dirección e sentido. Empezamos estudando o módulo, para o que:

1º: Trazamos unha superficie gaussiana, que pase polo punto onde queremos coñecer o campo \vec{E} e que en calquera punto desa superficie o seu valor numérico sexa constante: unha esfera.



2º: Calculamos o fluxo do vector \vec{E} , que atravesa a superficie anteriormente trazada:

$$\Phi = \oint_{S \text{ de Gauss}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E \, dS \cos 0^\circ = E \int_S dS = ES$$

3º: Aplicamos o teorema de Gauss:

$$\left. \begin{array}{l} \Phi = \frac{Q}{\epsilon} \\ \Phi = E \cdot S \end{array} \right\} \rightarrow E \cdot S = \frac{Q}{\epsilon} \left. \begin{array}{l} S = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \end{array} \right\} \rightarrow E = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r^2} \left. \begin{array}{l} k = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \end{array} \right\} \rightarrow E = k \frac{Q}{r^2}$$

A dirección é a do raio da esfera que teña por liña de acción a recta que pasa polo punto onde queiramos coñecer \vec{E} e o seu sentido é cara ao infinito, se a carga da esfera é positiva, ou cara ao centro da esfera se a carga é negativa.

Resulta que o campo \vec{E} creado por unha carga Q , distribuída sobre unha esfera condutora en equilibrio electrostático nun punto exterior a ela, é igual á intensidade de campo creada por esa mesma carga se fose puntual e estivese situada no centro da esfera.

c) Nun punto da súa superficie

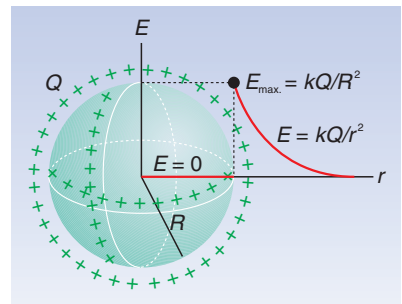
Nun punto da superficie da esfera de raio R , a distancia r toma o valor de R , e o valor de \vec{E} é: $\vec{E} = k \frac{Q}{R^2} \vec{u}_R$. Se o queremos expresar en función da densidade superficial de carga, σ , dividimos a carga Q entre a superficie S' na que está distribuída, obtendo a carga por unidade de superficie, chamada densidad superficial de carga, que se simboliza por σ : $\frac{Q}{S'} = \sigma$, resultando:

$$E = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \frac{\sigma \cdot S'}{r^2} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \frac{\sigma \cdot 4 \cdot \pi \cdot R^2}{r^2}$$

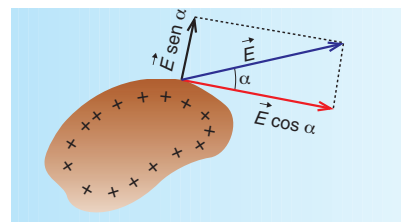
Cando estamos na superficie da esfera, R é igual a r ,

resultando: $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$.

A representación gráfica do valor da intensidade de campo eléctrico creada por unha esfera metálica cargada cunha carga Q é a que se indica na figura adxunta.



⁹ Nun punto exterior infinitesimalmente próximo á superficie dun condutor cargado en equilibrio, a intensidade de campo eléctrico é perpendicular á superficie. Se o campo non fose perpendicular, senón oblicuo, podémolo descompoñer en dous: un tanxente á superficie do condutor e outro perpendicular a ela. O primeiro faría mover as cargas sobre a superficie do condutor, en contra da hipótese inicial de que o condutor estaba en equilibrio.



- ▶ Unha esfera metálica de superficie $31,4 \text{ m}^2$ está illada e situada no baleiro; ten por centro o punto $(0,0,0)$ e posúe unha carga eléctrica $Q = 8 \text{ } \mu\text{C}$. Calcula a intensidade de campo eléctrico nos puntos $(0,3,0)$ e $(1,0,0)$. Dato: as coordenadas están dadas en metros.

Solución:

Primeiro estudamos se os puntos onde queremos coñecer \vec{E} pertencen á esfera ou son exteriores a ela.

$$S = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \rightarrow 31,4 = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \rightarrow r = 1,58 \text{ m}$$

O punto $(0,3,0)$ é exterior á esfera e o campo eléctrico creado pola carga non puntual Q calcúlase como se se tratara dunha carga puntual situada no punto centro da esfera.

$$E = \frac{k \cdot Q}{r^2} \rightarrow E = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 8 \cdot 10^{-6}}{3^2} = 8 \cdot 10^3 \text{ N C}^{-1}$$

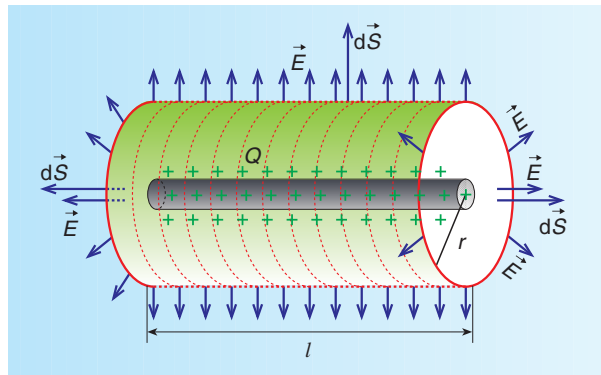
$$\vec{E} = 8 \cdot 10^3 \vec{j} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$

O punto $(1,0,0)$ pertence á esfera condutora cargada en equilibrio electrostático e a intensidade de campo eléctrico que nese punto crea a carga Q distribuída na superficie da esfera é nula: $\vec{E} = \vec{0}$.

6.2. Campo eléctrico creado por un fío condutor (ou cilindro) indefinido, uniformemente cargado, en equilibrio electrostático

Empezamos estudando o módulo do vector \vec{E} , para o que:

1º: Trazamos unha superficie gaussiana que pase polo punto onde queremos coñecer o campo, \vec{E} , e que o seu valor numérico sexa constante en todo ela: un cilindro que teña por eixe o fío (ou o eixe do cilindro).



2º: Calculamos o fluxo do vector \vec{E} :

$$\Phi = \oint_{S \text{ total}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S \text{ lateral}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S \text{ bases}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S \text{ lateral}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (10)$$

$$\Phi = \int_{S \text{ lateral}} E \cdot dS \cdot \cos 0^\circ = E \int_{S \text{ lateral}} dS = E \cdot S_{\text{lateral}}$$

¹⁰ Ao ser un fío indefinido, permite desprezar a superficie das bases fronte á lateral, e, polo tanto, o fluxo correspondente.

3º: Aplicamos o teorema de Gauss:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \frac{Q}{\epsilon} \\ \Phi &= E \cdot S_{\text{lateral}} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{Q}{\epsilon} &= E \cdot S_{\text{lateral}} \\ S_{\text{lateral}} &= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{Q}{\epsilon} = E \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l$$

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot l \cdot \epsilon} \\ \frac{Q}{l} &= \lambda \end{aligned} \right\} \rightarrow E = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \epsilon}$$

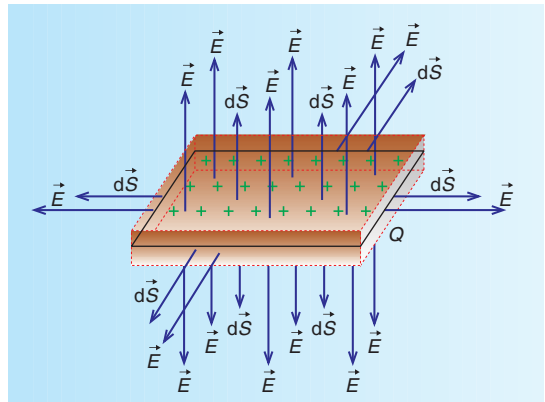
Onde λ é a chamada densidade lineal de carga e representa a carga por unidade de lonxitude. A dirección de \vec{E} é a perpendicular á superficie do fío condutor e o seu sentido é cara ao infinito, se a carga é positiva, ou cara ao fío, se a carga é negativa.

Este resultado é idéntico para un fío e para un cilindro condutor indefinido. Basta recordar que \vec{E} no interior do cilindro cargado en equilibrio electrostático é cero.

6.3. Campo eléctrico creado por unha lámina plana condutora e indefinida, uniformemente cargada en equilibrio electrostático

Empezamos estudando o módulo de \vec{E} , para o que:

1º: Trazamos unha superficie gaussiana que pase polo punto onde queremos coñecer a intensidade de campo eléctrico \vec{E} , na que o seu valor numérico sexa constante: un paralelepípedo.



2º: Calculamos o fluxo do vector \vec{E} :

$$\Phi = \oint_{S_{\text{total}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{\text{superior}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{\text{inferior}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{\text{laterais}}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi = \int_{S_{\text{superior}}} E \cdot dS + \int_{S_{\text{inferior}}} E \cdot dS + 0 \stackrel{(11)}{=} E \cdot \int_{S_{\text{superior}}} dS + E \cdot \int_{S_{\text{inferior}}} dS = E \cdot S + E \cdot S = 2 \cdot E \cdot S$$

3º: Aplicamos o teorema de Gauss:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \frac{Q}{\epsilon} \\ \Phi &= 2 \cdot E \cdot S \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{Q}{\epsilon} = 2 \cdot E \cdot S \rightarrow E = \frac{Q}{2 \cdot S \cdot \epsilon} \left. \begin{aligned} & \\ \frac{Q}{S} &= \sigma \end{aligned} \right\} \rightarrow E = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon}$$

¹¹ Ao ser a lámina infinita, o fluxo a través das caras laterais é moi pequeno fronte ao das caras superior e inferior.

Esta última expresión dinos que E é independente da distancia que hai desde a lámina até o punto onde se calcula (sempre que \vec{E} se estude nas “proximidades” da lámina). Sigma, σ , é a densidade superficial de carga e representa a carga por unidade de superficie.

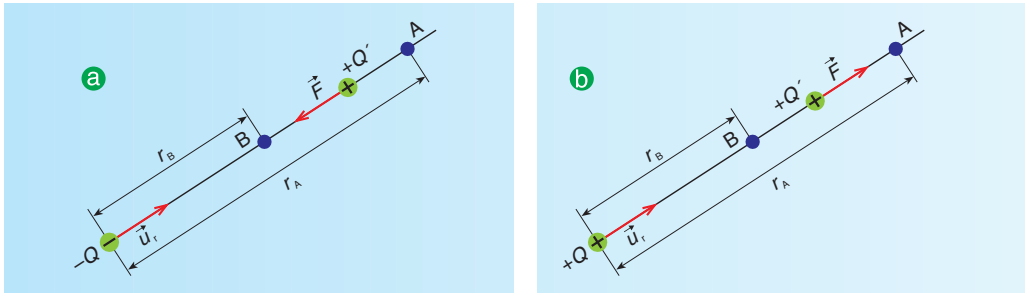
A dirección de \vec{E} é a perpendicular á lámina condutora e o seu sentido é cara ao infinito, se a carga é positiva, ou cara á lámina, se a carga é negativa.

7. ENERXÍA POTENCIAL ELÉCTRICA

Cando as forzas son conservativas, o traballo só depende da posición inicial e final da partícula e a cada punto da traxectoria seguida pola partícula pódesele asignar un escalar, chamado enerxía potencial, E_p , de modo que o traballo realizado pola forza conservativa do campo sexa igual á diminución desta enerxía potencial.

A **forza electrostática** é **central** e, polo tanto, **conservativa**, podendo definir unha **enerxía potencial eléctrica** da forma: $W_{B \rightarrow A}$, feito pola forza conservativa do campo $= -\Delta E_p = -(E_{pA} - E_{pB})$.

Supoñamos unha carga eléctrica puntual fixa Q , negativa no primeiro debuxo e positiva no segundo, que crea un campo eléctrico, e outra Q' , positiva, que se traslada de B a A. Imos calcular, para os dous casos, o traballo feito pola forza do campo cando a carga Q' se traslada de B a A. Para iso facemos uso da expresión: $W_B^A = \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r}$.



Para cargas de distinto signo, que é o caso a) da figura, temos:

$$\begin{aligned}
 W_B^A &= \int_B^A F \cdot dr \cdot \cos 180^\circ = -\int_B^A F \cdot dr = -\int_B^A k \cdot \frac{Q \cdot Q'}{r^2} \cdot dr = \\
 &= -k \cdot Q \cdot Q' \int_B^A \frac{dr}{r^2} = -k \cdot Q \cdot Q' \cdot \left[-\frac{1}{r} \right]_B^A = -\left[\left(-k \cdot \frac{Q \cdot Q'}{r_A} \right) - \left(-k \cdot \frac{Q \cdot Q'}{r_B} \right) \right] \\
 W_B^A &= \dots \dots \dots = -\left[\left(E_{pA} \right) - \left(E_{pB} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Para cargas de igual signo, que é o caso b) da figura, temos:

$$\begin{aligned}
 W_B^A &= \int_B^A F \cdot dr \cdot \cos 0^\circ = \int_B^A F \cdot dr = \int_B^A k \cdot \frac{Q \cdot Q'}{r^2} \cdot dr = \\
 &= k \cdot Q \cdot Q' \int_B^A \frac{dr}{r^2} = k \cdot Q \cdot Q' \cdot \left[-\frac{1}{r} \right]_B^A = -\left[\left(+k \cdot \frac{Q \cdot Q'}{r_A} \right) - \left(+k \cdot \frac{Q \cdot Q'}{r_B} \right) \right] \\
 W_B^A &= \dots \dots \dots = -\left[\left(E_{pA} \right) - \left(E_{pB} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Por comparación das últimas igualdades, concluímos que:

$$E_{pB} = -k \cdot \frac{|Q \cdot Q'|}{r_B} \quad \text{e} \quad E_{pA} = -k \cdot \frac{|Q \cdot Q'|}{r_A}, \quad \text{para cargas de distinto signo.}$$

$$E_{pB} = +k \cdot \frac{|Q \cdot Q'|}{r_B} \quad \text{e} \quad E_{pA} = +k \cdot \frac{|Q \cdot Q'|}{r_A}, \quad \text{para cargas de igual signo.}$$

Vemos que se a forza \vec{F} é de repulsión (Q e Q' do mesmo signo) a enerxía potencial é positiva, mentres que se a forza é atractiva (Q e Q' de distinto signo) a enerxía potencial é negativa.

$$\text{Se } r_A \rightarrow \infty: W_B^\infty = \begin{cases} - \left[(0) - \left(-\frac{k \cdot |Q \cdot Q'|}{r_B} \right) \right] = + \left(-k \cdot \frac{|Q \cdot Q'|}{r_B} \right) = E_{pB}, \quad \text{para cargas de } \neq \text{ signo.} \\ - \left[(0) - \left(+\frac{k \cdot Q \cdot Q'}{r_B} \right) \right] = + \left(+k \cdot \frac{Q \cdot Q'}{r_B} \right) = E_{pB}, \quad \text{para cargas de } = \text{ signo.} \end{cases}$$

Estas igualdades veñen dicirnos que a enerxía potencial eléctrica nun punto é o traballo feito pola forza conservativa do campo eléctrico cando a carga Q' se despraza desde ese punto até o infinito.

Recordando que $W_\infty^B = -W_B^\infty$, podemos escribir:

$$\text{Se } r_A \rightarrow \infty: W_\infty^B = \begin{cases} + \left[(0) - \left(-\frac{k \cdot |Q \cdot Q'|}{r_B} \right) \right] = - \left(-k \cdot \frac{|Q \cdot Q'|}{r_B} \right) = -E_{pB}, \quad \text{para cargas de } \neq \text{ signo.} \\ + \left[(0) - \left(+\frac{k \cdot Q \cdot Q'}{r_B} \right) \right] = - \left(+k \cdot \frac{Q \cdot Q'}{r_B} \right) = -E_{pB}, \quad \text{para cargas de } = \text{ signo.} \end{cases}$$

Esta é outra forma de enunciar a enerxía potencial eléctrica: a enerxía potencial eléctrica nun punto é o traballo, cambiado de signo, feito pola forza conservativa do campo eléctrico cando a carga Q' se despraza desde o infinito até ese punto.

8. POTENCIAL ELÉCTRICO: CONCEPTO E SENTIDO FÍSICO

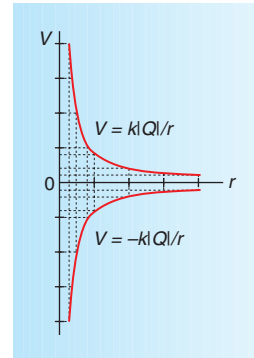
Se Q' é a unidade de carga positiva, 1 C no SI, a enerxía potencial electrostática no punto onde esta carga se encontra é:

$$E_{pB} = -k \cdot \frac{|Q| \cdot 1}{r_B}, \quad \text{para cargas de distinto signo; isto é: se } Q \text{ é negativa}$$

$$E_{pB} = +k \cdot \frac{Q \cdot 1}{r_B}, \quad \text{para cargas de igual signo; isto é: se } Q \text{ é positiva,}$$

que por definición é o valor do potencial eléctrico, V , creado pola carga Q no punto onde se atopa a unidade de carga positiva, Q' . Polo tanto, o **potencial eléctrico** creado por unha carga Q nun punto é a enerxía potencial electrostática por unidade de carga positiva colocada nese punto.

$$V_B = \frac{E_{pB}}{Q'} = \begin{cases} -k \cdot \frac{|Q|}{r_B}, & \text{se } Q \text{ é negativa} \\ +k \cdot \frac{Q}{r_B}, & \text{se } Q \text{ é positiva} \end{cases}$$



O gráfico destas ecuacións é o indicado na figura. Nela vese como aumenta o potencial creado por unha carga puntual positiva situada no punto O conforme diminúe a distancia r . Se a carga é negativa, o potencial eléctrico que crea aumenta co aumento de r , tomando o valor cero para $r = \infty$.

Fixémonos en que a enerxía potencial dunha carga Q' situada nun punto P do campo eléctrico creado por unha carga Q depende do valor de Q' , no entanto o potencial eléctrico describe desde un punto de vista enerxético o campo en cada punto.

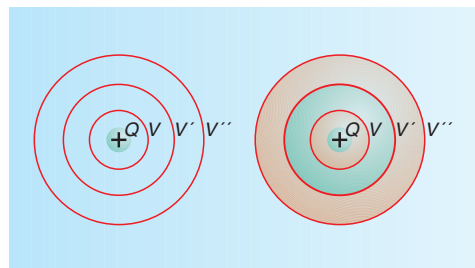
Co concepto de enerxía potencial eléctrica, $W_A^B = -(E_{pB} - E_{pA})$, e de potencial eléctrico, $V_A = E_{pA}/Q'$, podemos relacionar a diferenza de potencial eléctrico entre dous puntos co traballo feito pola forza conservativa do campo:

$$\left. \begin{aligned} W_A^B &= -\Delta E_p \\ \Delta E_p &= Q' \cdot \Delta V \end{aligned} \right\} \rightarrow W_A^B = -Q' \cdot \Delta V = -Q' \cdot (V_B - V_A)$$

Se $A \rightarrow \infty$ temos: $W_\infty^B = -Q' \cdot V_B$.

En función do traballo, o potencial eléctrico creado por unha carga Q representa o traballo –cambiado de signo– feito pola forza conservativa do campo cando a unidade de carga positiva se despraza desde o infinito até o punto considerado. Equivale ao traballo que nós temos que facer para levar con velocidade constante a unidade de carga positiva desde o infinito até ese punto.

Os puntos que teñen igual potencial dise que son **equipotenciais**. Se estes puntos determinan unha liña trátase dunha **liña equipotencial**; se se forman unha superficie aparece unha **superficie equipotencial**; se o que constitúen é un volume trátase dun **volume equipotencial**.



As circunferencias concéntricas coa carga puntual Q representan superficies equipotenciais (que son de forma esférica) do campo eléctrico desta carga.

Dúas superficies equipotenciais non se poden cortar, xa que nos puntos de corte habería dous valores de potencial.

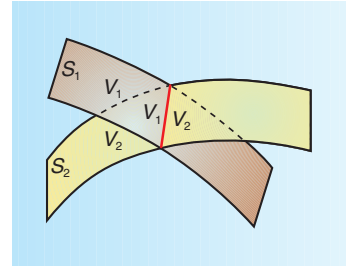
A intensidade de campo eléctrico é sempre perpendicular ás superficies equipotenciais. De non selo, sempre habería un compoñente do campo tanxente á superficie que, no desprazamento dunha carga Q' ao longo da superficie equipotencial, desenvolvería un traballo; $W = Q' \cdot \vec{E} \cdot \Delta \vec{r} \neq 0$, situación que non é posíbel, xa que: $W_A^B = -Q' \cdot \Delta V = -Q' \cdot 0 = 0$.

Se son varias as cargas puntuais creadoras de campo, cúmprese o principio de superposición: o potencial total nun punto é a suma alxébrica dos potenciais creados neste punto por cada unha das cargas de forma individual: $V_{\text{total}} = V_1 + V_2 + \dots$

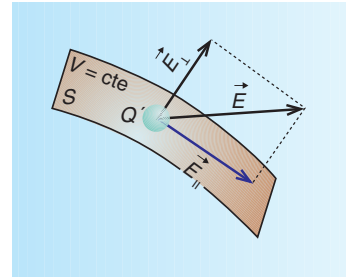
A ecuación de dimensións de V no SI é:

$$[V] = \left[\frac{E_p}{Q} \right] = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L}{I \cdot T} = M \cdot L^2 \cdot T^{-3} \cdot I^{-1}, \text{ tendo por}$$

unidade o J/C, chamada voltio (V).



Superficies equipotenciais, que de cortarse ao longo da liña vermella, os puntos que lle pertencen terían, á vez, dous valores distintos de potencial.



De non ser a intensidade de campo eléctrico \vec{E} perpendicular á superficie equipotencial sempre haberá un compoñente de \vec{E} paralelo á devandita superficie: \vec{E}_{\parallel} .

9. RELACIÓN ENTRE A INTENSIDADE DE CAMPO ELÉCTRICO, \vec{E} , E O POTENCIAL ELÉCTRICO, V

Sabemos que o traballo, W , desenvolto pola forza electrostática podémolo relacionar coa variación da enerxía potencial eléctrica, ΔE_p :

$$\left. \begin{aligned} W_A^B &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ W_A^B &= -\Delta E_p \end{aligned} \right\} \rightarrow \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\Delta E_p$$

Se dividimos esta expresión pola carga de proba Q' resulta:

$$\left. \begin{aligned} \int_A^B \frac{\vec{F}}{Q'} \cdot d\vec{r} &= -\frac{\Delta E_p}{Q'} \\ \frac{\vec{F}}{Q'} &= \vec{E} \\ \frac{\Delta E_p}{Q'} &= \Delta V \end{aligned} \right\} \rightarrow \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\Delta V$$

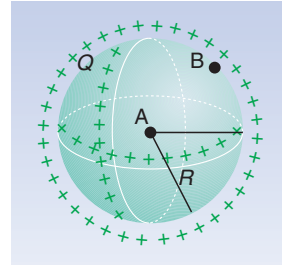
Esta última expresión pode expresarse en forma diferencial como:

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = -dV \rightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

O signo menos que aparece indica que \vec{E} ten o sentido de potenciais decrecentes.

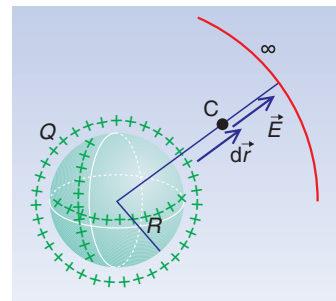
Desta última expresión deducimos que se a intensidade de campo eléctrico \vec{E} é nula, o potencial V non pode variar, $\Delta V = 0$, tendo un valor constante en todos os puntos. É o que ocorre no interior dunha esfera condutora cargada en equilibrio electrostático, tratándose dun volume equipotencial:

$$\left. \begin{aligned} \int_A^B dV &= -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ \vec{E} &= \vec{0} \end{aligned} \right\} \rightarrow \int_A^B dV = 0 \rightarrow V_B - V_A = 0 \rightarrow V_B = V_A$$



A e B son dous puntos calquera pertencentes á esfera condutora; para o caso do debuxo, A está no centro da esfera e B está infinitamente próximo á súa superficie.

Coñecendo \vec{E} en función de \vec{r} , $\vec{E} = E(\vec{r})$, podemos obter a expresión do potencial. Como aplicación imos calcular o potencial creado por unha carga $+Q$, distribuída uniformemente nunha esfera condutora, en equilibrio electrostático, nun punto C exterior á mesma.



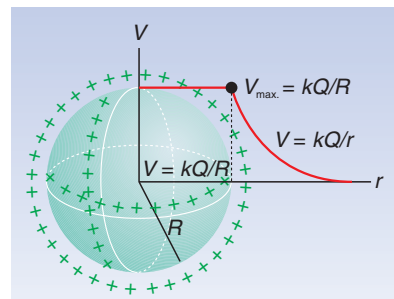
$$\left. \begin{aligned} \int_C^\infty dV &= -\int_C^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} \rightarrow V_C = \int_C^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_C^\infty E \cdot dr \\ E &= \frac{k \cdot Q}{r^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow V_C = \int_C^\infty \frac{k \cdot Q}{r^2} dr = \left[-\frac{k \cdot Q}{r} \right]_C^\infty = \frac{k \cdot Q}{r_C}$$

Se C está na superficie da esfera, r_C toma o valor do raio da esfera, R , e a expresión do potencial é: $V = \frac{k \cdot Q}{R}$.

Resulta que o potencial eléctrico creado por unha carga Q distribuída nunha esfera condutora en equilibrio electrostático nun punto da súa superficie ou nun punto exterior a ela, é igual ao potencial creado por esa mesma carga se fose puntual e estivera situada no centro da esfera.

Cal é a expresión de V para un punto interior á esfera condutora cargada en equilibrio electrostático?

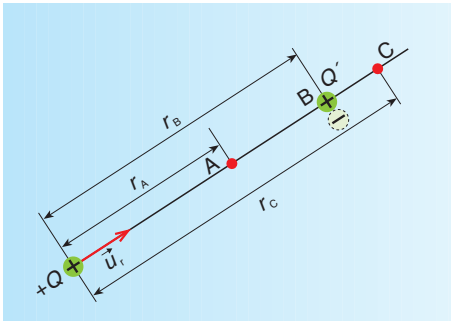
Anteriormente vimos que o potencial nun punto interior da esfera é constante e como, ademais, o potencial é continuo, o seu valor coincide co potencial dun punto da superficie da esfera, sendo: $V_{\text{interior}} = k Q/R$.



Exercicio resolto

- ▶ Se A, B e C son puntos que se encontran no campo eléctrico creado por unha carga puntual positiva, $+Q$; en cal destes puntos será maior o potencial que esta carga crea sabendo que $r_A < r_B < r_C$?
Se abandonamos no punto B, sito entre A e C, unha segunda carga, tamén puntual e positiva, $+Q'$, que camiño, no sentido de potencial crecente ou decrecente, segue de forma espontánea? E se a carga abandonada fose negativa?

Solución:



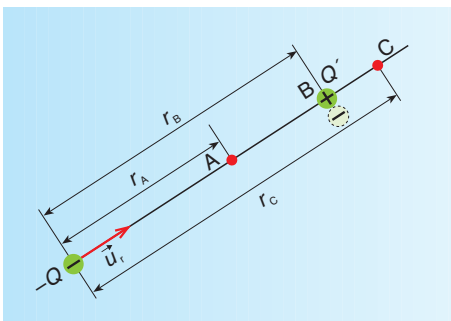
$$\left. \begin{aligned} V_A &= k \frac{Q}{r_A} \\ V_B &= k \frac{Q}{r_B} \\ V_C &= k \frac{Q}{r_C} \\ r_A &< r_B < r_C \end{aligned} \right\} \rightarrow V_A > V_B > V_C$$

A carga positiva Q' abandonada en B segue de forma espontánea o camiño de B a C. Isto é: **vai desde as zonas de máis potencial ás de menos potencial**. De ser **negativa**, a carga Q' toma o sentido de B a A, indo desde a zona de **menos potencial cara á de máis potencial**.

Exercicio resolto

- ▶ Responde ás preguntas do exercicio anterior para o caso de que a carga creadora de campo sexa negativa.

Solución:



$$\left. \begin{aligned} V_A &= -k \frac{Q}{r_A} \\ V_B &= -k \frac{Q}{r_B} \\ V_C &= -k \frac{Q}{r_C} \\ r_A &< r_B < r_C \end{aligned} \right\} \rightarrow V_A < V_B < V_C$$

A carga positiva Q' abandonada en B segue o camiño de B a A. Isto é: **vai desde a zona de máis potencial cara á de menos potencial**. De ser **negativa**, a carga Q' toma o sentido de B a C, indo desde a zona de **menos potencial cara á de máis potencial**.

- Unha carga de $+6 \mu\text{C}$ encóntrase na orixe de coordenadas e no baleiro. Calcula:
- O potencial que esta carga crea nos puntos $(4,0,0)$, $(0,4,0)$ e $(0,0,4)$ (as coordenadas están dadas en m).
 - Estes puntos son equipotenciais?
 - O traballo feito pola forza eléctrica cando unha carga de $2 \mu\text{C}$ vai desde o infinito até os puntos anteriores. É a propia forza do campo eléctrico ou a acción dunha forza exterior a que causa o desprazamento da carga?
 - A enerxía potencial electrostática da carga de $2 \mu\text{C}$ nos devanditos puntos.

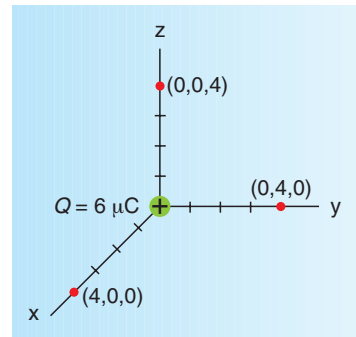
Solución:

- a) O potencial creado por unha carga puntual calcúlase coa fórmula: $V = k \cdot Q/r$

$$V = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{6 \cdot 10^{-6}}{4} \rightarrow V = 13,5 \cdot 10^3 \text{ V}$$

O potencial é o mesmo para os tres puntos.

- b) Os puntos que teñen o mesmo potencial dise que son equipotenciais. Polo tanto, os puntos $(4,0,0)$, $(0,4,0)$ e $(0,0,4)$ para o caso do exercicio si son equipotenciais.



- c) $W_{\infty}^P = -Q'(V_P - V_{\infty}) = -2 \cdot 10^{-6} \cdot (13,5 \cdot 10^3 - 0) \rightarrow W_{\infty}^P = -27 \cdot 10^{-3} \text{ J}$

(Onde P pode ser o punto $(4,0,0)$, $(0,4,0)$ ou $(0,0,4)$).

Sabemos que unha carga positiva vai espontaneamente das zonas de maior potencial ás de menor potencial. Neste caso a carga de $+2 \mu\text{C}$ vai desde o infinito ($V = 0$) até o punto P ($V = 13,5 \cdot 10^3 \text{ V}$). Isto é: desde unha zona de menos potencial a outra de máis potencial e, polo tanto, a carga desprázase por acción dunha forza exterior.

Tamén podemos basear a resposta no feito de que o traballo é Negativo: a carga non se despraza espontaneamente desde o infinito até o punto considerado, tendo que levala Nós, en contra das forzas do campo.

- d) Por definición, a enerxía potencial dunha carga Q' nun punto é o traballo (cambiado de signo) feito polas forzas do campo para levala desde o infinito até ese punto.

$$W_{\infty}^P = -\Delta E_p = -(E_{pP} - E_{p\infty}) \rightarrow -27 \cdot 10^{-3} = -(E_{pP} - 0) \rightarrow E_{pP} = 27 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

(A enerxía potencial para cargas de igual signo é positiva).

Aplicando a fórmula da enerxía potencial eléctrica: $E_p = k \cdot \frac{Q \cdot Q'}{r}$, chegamos a igual resultado:

$$E_p = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{6 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{4} \rightarrow E_p = 27 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

10. ANALOXÍAS E DIFERENZAS ENTRE O CAMPO GRAVITATORIO E O CAMPO ELÉCTRICO

As analoxías que podemos destacar entre os campos gravitatorio e eléctrico son:

- A presenza dunha masa, ou dunha carga eléctrica, dota á rexión do espazo en que se encontra de certa propiedade, creándose o campo gravitatorio/eléctrico.
- Tanto o campo gravitatorio como o campo eléctrico son campos de forzas centrais e, polo tanto, son campos conservativos.
- En ambos campos se define unha enerxía potencial gravitatoria/eléctrica e un potencial gravitatorio/eléctrico (e a variación do potencial permite obter o valor da intensidade de campo).
- Tanto a forza gravitatoria como a forza eléctrica teñen a dirección do vector intensidade de campo.
- As liñas de forza do campo gravitatorio/eléctrico son abertas, é dicir: empezan nalgún punto e terminan nalgún outro; e normais ás superficies equipotenciais.
- Tanto unha masa m , abandonada nun campo gravitatorio, como unha carga Q , abandonada nun campo eléctrico, inician o movemento na dirección do campo.
- A forza que exercen entre si dúas masas ou dúas cargas é, en ambos casos, inversamente proporcional ao cadrado da distancia que as separa.

As diferenzas que subliñamos son:

- O campo gravitatorio creado por unha masa é independente do medio que rodea a masa (a constante G é universal); o que non ocorre co campo eléctrico, xa que a constante k depende do medio: a intensidade de campo eléctrico que produce unha carga a unha distancia r pódese modificar variando o medio que rodea a carga.
- As masas son sempre positivas e as cargas eléctricas poden ser positivas ou negativas.
- As forzas gravitatorias son sempre de atracción, mentres que as forzas eléctricas poden ser tanto de atracción como de repulsión.
- O campo gravitatorio non ten fontes, mentres que no campo eléctrico pode haber fontes e sumidoiros: No campo gravitatorio as liñas de forza sempre empezan no infinito e diríxense cara á masa que crea o campo (non ten fontes); no entanto, no campo eléctrico, as liñas de forza poden dirixirse cara á carga que crea o campo, se esta é negativa (sumidoiro), ou saír da carga, se é positiva (fonte).
- Unha masa m , abandonada nun campo gravitatorio, inicia o movemento no sentido do campo. No entanto unha carga Q , abandonada nun campo eléctrico, pode iniciar o movemento no mesmo sentido que o do campo (se é positiva) ou no sentido contrario (se é negativa).
- O campo gravitatorio é pouco intenso, mentres que o eléctrico é moi intenso.

Para masas, cargas e distancias de valor unidade, a forza de interacción gravitatoria é moito menor que a eléctrica:

$$F_{\text{gravitatoria}} = G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

$$F_{\text{eléctrica}} = k = 9 \cdot 10^9 \text{ N}$$

- Unha masa, estea en repouso ou en movemento, crea un campo gravitatorio pero unha carga, se está en movemento, ademais dun campo eléctrico crea un campo magnético, como observaremos no seguinte tema.
- No campo gravitatorio, o potencial, a enerxía potencial e o fluxo a través dunha superficie pechada son negativos, mentres que no campo eléctrico poden ser positivos ou negativos.

Facemos a comparación das expresións de distintas magnitudes correspondentes a ambos campos:

MAGNITUDE	CAMPO GRAVITATORIO	CAMPO ELÉCTRICO
Forza	$\vec{F} = -G \frac{m \cdot m'}{r^2} \vec{u}_r$	$\vec{F} = k \frac{Q \cdot Q'}{r^2} \vec{u}_r$
Intensidade de campo	$\vec{g} = -G \frac{m}{r^2} \vec{u}_r$	$\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$
Enerxía potencial	$E_p = -G \frac{m \cdot m'}{r}$	$E_p = k \frac{Q \cdot Q'}{r}$
Potencial	$V = -G \frac{m}{r}$	$V = k \frac{Q}{r}$
Teorema de Gauss	$\Phi_{S \text{ pechada}} = -4\pi G m$	$\Phi_{S \text{ pechada}} = \frac{Q}{\epsilon} = 4\pi k Q$

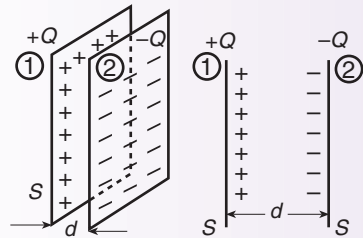

**EXERCICIOS
(cuestións)**

1. Mapa conceptual dos contidos do tema.
2. Cal é o sentido (crecente ou decrecente) de potencial que segue de forma espontánea unha carga positiva abandonada nun campo eléctrico? E se a carga abandonada é negativa?
3. Razona por que o campo electrostático é conservativo. (*Selectividade COU; setembro 99*).
4. Unha esfera maciza condutora posúe unha certa carga eléctrica: canto vale o campo e o potencial electrostático para puntos do exterior e do interior da esfera? Razona a resposta. (*Selectividade COU; setembro 98*).
5. É posíbel que nun punto do espazo a intensidade do campo eléctrico sexa nula e o potencial eléctrico teña un valor finito distinto de cero? E que os dous sexan nulos? Razona as respostas. (*Selectividade COU; xuño 98*).
6. Poden cortarse dúas liñas de forza dun campo electrostático? E dúas superficies equipotenciais? Razona as respostas. (*Selectividade COU; setembro 97*).
7. Xustifica que o potencial eléctrico, V , no interior dunha esfera condutora de raio R , cargada cunha carga Q en equilibrio electrostático, vale $V = kQ/R$.
8. Se no punto medio do segmento que une dúas cargas eléctricas puntuais e iguais, Q , colocamos unha terceira carga, Q' , tamén puntual, contesta razoadamente se para calquera valor das cargas a terceira carga estará en equilibrio. Haberá algún valor das cargas para o cal o sistema das tres cargas estea en equilibrio?
9. O electrón-voltio non é unha unidade de potencial eléctrico, senón de enerxía. Defínese como a enerxía que adquire 1 electrón cando se somete á diferenza de potencial de 1 voltio. Obtén a súa equivalencia coa unidade de enerxía no SI. Dato: $Q_e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.
10. O fluxo do campo eléctrico a través dunha superficie pechada que envolve varias cargas depende da posición que ocupen as cargas dentro da superficie considerada?
11. Estuda como é, positivo ou negativo, o traballo desenvolto pola forza eléctrica do campo cando unha carga Q se despraza espontaneamente.
12. Cando o traballo feito pola forza eléctrica do campo é negativo, a carga que se despraza faíno de forma espontánea ou por acción dunha forza exterior á do campo eléctrico?
13. Cando se separan dúas cargas do mesmo signo ou se acercan dúas cargas de signo contrario, na dirección da recta que as une, o traballo feito pola forza do campo é positivo ou negativo?
14. Se se separan dúas cargas de distinto signo ou se acercan dúas cargas de igual signo, na dirección da recta que as une, o traballo feito pola forza do campo é positivo ou negativo?
15. Tres cargas de $2 \mu\text{C}$ cada unha están situadas, respectivamente, nos puntos $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ e $(1,1,1)$, coordenadas dadas en metros. Razona como será (igual, maior ou menor) o fluxo do campo eléctrico creado por estas cargas a través dunha superficie esférica de 2 metros de raio con centro o punto $(0,0,0)$ con respecto ao fluxo que atravesa a superficie dun cubo de 5 m de aresta con centro o punto $(1,1,1)$.
16. Se o vector campo eléctrico, \vec{E} , creado por unha carga puntual Q , a unha distancia d , ten o valor de E_d ; para unha distancia de $4d$ correspóndelle o valor de: a) catro veces menos; b) oito veces menos; c) dezaseis veces menos. (Elixo razoadamente a opción que consideres correcta).

17. Se o potencial eléctrico, V , creado por unha carga puntual Q , a unha distancia d , ten o valor de V_d ; para unha distancia de $4d$ correspóndelle o valor de: a) catro veces menos; b) oito veces menos; c) dezaseis veces menos. (Elixo razoadamente a opción que consideres correcta).
18. Se dúas cargas eléctricas, Q_1 e Q_2 , sitas unha no campo eléctrico da outra, se deixan en liberdade e a velocidade que experimentan se incrementa a medida que se moven, as cargas: a) son necesariamente de igual signo; b) son necesariamente de distinto signo; c) poden ser de calquera signo. (Elixo razoadamente a opción que consideres correcta).
19. Cando unha partícula de masa m e carga Q se somete a unha diferenza de potencial de ΔV voltios, a velocidade v que adquire é: a) directamente proporcional a ΔV ; b) directamente proporcional a ΔV^2 ; c) directamente proporcional a $\sqrt{\Delta V}$ (Elixo razoadamente a opción que consideres correcta).
20. Estuda se a forza que unha carga puntual Q exerce sobre outra carga Q' , tamén puntual, depende ou non da presenza doutra terceira carga Q'' .
21. Nunha rexión do espazo hai un sistema de cargas, que, en conxunto, é electricamente neutro. En consecuencia, nesa rexión do espazo, a) non existen liñas de forza; b) as liñas de forza que entran nunha superficie pechada que envolve as cargas é igual ao número de liñas de forza que saen da devandita superficie; c) o fluxo a través dunha superficie pechada que envolve as cargas non é nulo debido a que no interior da superficie existen cargas eléctricas. (Elixo razoadamente a opción que consideres correcta).
22. Se o fluxo do campo eléctrico a través dunha superficie pechada, S , é nulo: a) non pode haber corpos cargados no seu interior; b) necesariamente ten que haber carga no interior da superficie, coincidindo a carga total positiva coa total negativa; c) non se ten información suficiente para saber se hai carga no interior da devandita superficie. (Elixo razoadamente a opción que consideres correcta).
23. Se no punto P da figura, a intensidade de campo eléctrico, \vec{E} , é nula, que se pode dicir acerca do valor numérico (maior, menor ou igual) e do signo (igual ou distinto) das cargas Q_1 e Q_2 ? Como será o potencial eléctrico (nulo, positivo ou negativo) que estas cargas crean no punto P? Razona as respostas.



24. Dúas láminas metálicas planas están colocadas de forma paralela e separadas unha pequena distancia, en comparación coas súas dimensións, tal como se indica na figura. Cando as láminas metálicas están cargadas, respectivamente, cunha carga $+Q$ e outra $-Q$, o campo eléctrico no seu interior: a) depende do punto en que se estude; b) é uniforme; c) é nulo debido a que as cargas son de distinto signo. (Elixo razoadamente a opción que consideres correcta).

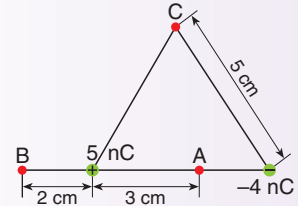


25. Estuda que dirección teñen as liñas de forza do campo eléctrico nos puntos dunha superficie equipotencial.
26. Estuda se a superficie dun condutor, que posúe unha carga Q en equilibrio electrostático, é unha superficie equipotencial.



**EXERCICIOS
(problemas)**

1. Dúas cargas, unha de 5 nC e outra de -4 nC, están situadas no baleiro nos vértices dun triángulo equilátero de 5 cm de lado.



a) Acha o potencial eléctrico nos puntos A, B e C, situados tal como se indica na figura.

b) Acha o traballo feito pola forza eléctrica do campo para trasladar unha carga puntual de +2 nC desde A até B e desde C até A.

c) A carga de 2 nC desprázase espontaneamente desde A até B e desde C até A ou desprázase por acción dunha forza exterior á do campo?

Resposta:

a) O potencial creado por un sistema deargas (neste caso dúas) obtense sumando alxebricamente

o potencial debido a cada unha das cargas individuais: $V = \sum_i V_i = k \sum_i \frac{Q_i}{r_i}$ (sendo $r_i \neq 0$).

V_i é positivo ou negativo, segundo que a carga que crea o campo sexa positiva ou negativa, respectivamente.

$$V_A = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{5 \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 10^{-2}} - \frac{4 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-2}} \right) \rightarrow V_A = -300 \text{ V}$$

$$V_B = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{5 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-2}} - \frac{4 \cdot 10^{-9}}{7 \cdot 10^{-2}} \right) \rightarrow V_B = 1736 \text{ V}$$

$$V_C = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{5 \cdot 10^{-9}}{5 \cdot 10^{-2}} - \frac{4 \cdot 10^{-9}}{5 \cdot 10^{-2}} \right) \rightarrow V_C = 180 \text{ V}$$

b) $W_A^B = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA}) = -Q'(V_B - V_A)$

$$W_A^B = -2 \cdot 10^{-9} \cdot (1736 - (-300)) \rightarrow W_A^B = -4,07 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

$$W_C^A = -Q'(V_A - V_C) = -2 \cdot 10^{-9} \cdot ((-300) - 180) \rightarrow W_C^A = 9,60 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$

c) $W_{A \rightarrow B} < 0 \Rightarrow$ o traballo feito pola forza eléctrica do campo é Negativo e a carga desprázase por acción dunha forza exterior que Nós facemos en contra da forza do campo. Tamén se pode facer esta argumentación vendo que o potencial en A ($V_A = -300 \text{ V}$) é menor que o potencial en B ($V_B = 1736 \text{ V}$) e como as cargas positivas van espontaneamente no sentido de potenciais decrecentes, para ir de A a B, a carga desprázase por acción dunha forza exterior.

$W_{C \rightarrow A} > 0 \Rightarrow$ o traballo é POSitivo e é a propia forza do campo a que fai desprazar a carga desde o punto C até o A.

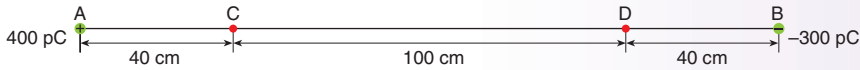
2. En dous dos vértices dun triángulo equilátero de lado $l = 6 \text{ cm}$ encóntrase unha carga $Q = 10^{-6} \text{ C}$, e no terceiro vértice unha carga $Q' = -2Q = -2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$. Considerando que o medio é o baleiro, calcula:

a) O potencial no punto medio do lado do triángulo en que están as dúas cargas Q .

b) O punto, sobre a altura do triángulo que pasa polo vértice no que está a carga Q' , no que o potencial é cero.

R: a) $V = 2,5 \cdot 10^5 \text{ V}$; b) $h = \sqrt{3} \cdot 10^{-2} \text{ m}$

3. No punto A da figura colócase unha carga de 400 pC e no punto B outra de -300 pC, sendo o medio o baleiro. Se a distancia AB é de 180 cm, calcula o traballo necesario para trasladar unha carga de 600 μC desde o punto C até o punto D. A carga desprázase espontaneamente por acción da forza do campo?



R: $W_{CD} = 6,75 \cdot 10^{-3} \text{ J}$; si

4. Unha carga de 10^{-2} C está na orixe de coordenadas cartesianas. Calcula:
 a) Os potenciais eléctricos nos puntos A(-2,4) e B(4,-5).
 b) O traballo realizado cando unha carga de 10^{-4} C vai desde A a B.
 c) A carga desprázase espontaneamente por acción da forza eléctrica do campo?

Nota: As cargas están no baleiro e as coordenadas danse en metros.

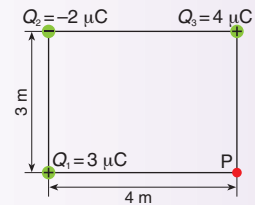
R: a) $V_A = 2,0 \cdot 10^7 \text{ V}$; $V_B = 1,4 \cdot 10^7 \text{ V}$; b) $W_{A \rightarrow B} = 600 \text{ J}$; c) si

5. Unha carga de $6 \mu\text{C}$ encóntrase na orixe de coordenadas. Cal é o potencial a unha distancia de 4 m? Que traballo fai a forza eléctrica do campo cando unha carga de $-2 \mu\text{C}$ vai desde o infinito até ese punto que dista 4 m da orixe de coordenadas? Desprázase espontaneamente por acción da forza do campo? Cal é a enerxía potencial desa carga nese punto?

R: $V = 1,35 \cdot 10^4 \text{ V}$; $W_{\infty \rightarrow p} = 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ J}$; si; $E_p = -2,7 \cdot 10^{-2} \text{ J}$

6. Tres cargas eléctricas puntuais están situadas no baleiro nos vértices dun rectángulo como se indica na figura. Calcula:

- a) O campo eléctrico creado por cada carga no vértice P.
 b) O campo total en P.
 c) O potencial en P.



R: a) $\vec{E}_1 = 1687 \vec{i} \text{ (N/C)}$; $\vec{E}_2 = -576 \vec{i} + 432 \vec{j} \text{ (N/C)}$; $\vec{E}_3 = -4000 \vec{j} \text{ (N/C)}$;

b) $\vec{E}_T = 1111 \vec{i} - 3568 \vec{j} \text{ (N/C)}$; $E_T = 3737 \text{ N/C}$; orientación: $-72,7^\circ$; c) $V = 15,15 \cdot 10^3 \text{ V}$

7. Temos un campo eléctrico uniforme dirixido verticalmente de abaixo cara arriba de intensidade 10^4 N C^{-1} . Calcula:

- a) A forza exercida por este campo sobre un electrón, comparándoa coa forza do peso do electrón.
 b) O tempo que necesita o electrón para percorrer 1 cm se parte do repouso.
 c) A velocidade que adquirirá un electrón no campo anterior cando teña percorrido 1 cm partindo do repouso.
 d) A enerxía cinética, en unidades de J e de eV, no caso anterior.

Datos: carga do $e^- = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m_{e^-} = 9,1 \cdot 10^{-28} \text{ g}$.

R: a) $F = 1,6 \cdot 10^{-15} \text{ N}$; $F/G = 1,8 \cdot 10^{14}$; b) $t = 3,4 \cdot 10^{-9} \text{ s}$; c) $v = 5,98 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1}$;

d) $E_k = 1,6 \cdot 10^{-17} \text{ J} = 100 \text{ eV}$

8. Dúas esferas de 100 mg cada unha, posúen cargas iguais, estando colgadas dun mesmo punto de sendos fíos de 30 cm de longo cada un. Se debido ás forzas electrostáticas están separadas 1,8 cm, calcula o valor da carga de cada bóla. Datos: $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$; $k = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$.
- R:** $Q = 1 \text{ nC}$
9. Unha pequena esfera de 0,5 g colga dun fío dentro dun campo eléctrico horizontal de intensidade $\vec{E} = 800 \vec{i}$ (N C⁻¹). Se a esfera está atraída polo campo até formar un ángulo de 30° coa posición vertical, calcula o valor da carga.
- R:** $Q = -3,54 \cdot 10^{-6} \text{ C}$
10. Un electrón entra nun campo eléctrico uniforme na dirección perpendicular ás liñas do campo cunha velocidade de 10^4 m/s . A intensidade do campo é $E = 10^5 \text{ V m}^{-1}$. Calcula a aceleración que experimenta o electrón. Datos: carga do $e^- = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, masa do $e^- = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.
- R:** $a = 1,76 \cdot 10^{16} \text{ m s}^{-2}$
11. Na orixe de coordenadas atópase unha carga puntual de $2 \mu\text{C}$. Calcula: a) o traballo necesario para traer unha segunda carga de $1 \mu\text{C}$ desde o infinito até unha distancia de 1 m da primeira; b) a posición do punto, sobre a recta que une as dúas cargas separadas 1 m, na que o campo eléctrico é nulo. Dato: $k = 9,00 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$. (*Selectividade COU, xuño 02*).
- R:** a) $W_{\infty}^A = -1,8 \cdot 10^{-2} \text{ J}$; b) $d = 0,6 \text{ m}$
12. Unha esfera pequena, de masa 1 g e carga 10^{-6} C , colga dun fío de 5 cm de lonxitude entre dúas placas metálicas paralelas. As placas están separadas entre si por unha distancia de 10 cm e posúen cargas iguais, pero de signo contrario. a) Que diferenza de potencial entre as placas fai que o fío forme un ángulo de 45° coa horizontal? b) Se as placas se descargan, cal será a velocidade da esfera ao pasar pola vertical? Dato: $g = 10 \text{ m s}^{-2}$. (*Selectividade COU, xuño 01*).
- R:** a) $\Delta V = 10^3 \text{ V}$; b) $v_{\text{mínima}} = 0,54 \text{ m s}^{-1}$
13. Dispóñense tres cargas no eixe x. A primeira, de $-1 \mu\text{C}$, a 1 m á esquerda da orixe; a segunda, de $1 \mu\text{C}$, na orixe; e a terceira, de $-1 \mu\text{C}$, a 1 m á dereita da orixe. Calcula: a) a forza (módulo e dirección) que as dúas primeiras cargas exercen sobre a terceira, e b) as posicións en que hai que colocar a segunda carga para que a forza que actúe sobre a terceira sexa nula. (*Selectividade COU, set. 00*).
- R:** a) $\vec{F} = -6,75 \cdot 10^{-3} \vec{i}$ (N); b) $x = -2 \text{ m}$ de Q_3 (a posición de Q_2 coincide coa de Q_1).
14. Tres cargas puntuais $Q_1 = 2 \mu\text{C}$, $Q_2 = 4 \mu\text{C}$, $Q_3 = -6 \mu\text{C}$, están situadas, respectivamente, nos puntos $P_1(0,0)$, $P_2(6,0)$, $P_3(0,8)$, estando as coordenadas en metros. Acha: a) o vector campo eléctrico no punto (6,8), b) a aceleración que experimenta unha partícula de masa 1 kg e carga $1 \mu\text{C}$ situada no punto (6,8). Dato: $k = 1/(4 \pi \epsilon_0) = 9,00 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$. (*Selectividade COU; set. 99*).
- R:** a) $\vec{E} = -1392 \vec{i} + 706,5 \vec{j}$ (N C⁻¹); b) $a = 1,56 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$; $\vec{a} = -1392 \cdot 10^{-6} \vec{i} + 706,5 \cdot 10^{-6} \vec{j}$ (m s⁻²).
15. Dúas cargas puntuais de $-5 \mu\text{C}$ cada unha, están fixas nos puntos (0,0) e (5,0). Acha: a) o vector campo electrostático no punto (10,0), e b) a velocidade coa que chega ao punto (8,0) unha partícula de masa 2 g e carga $8 \mu\text{C}$ que se abandona libremente no punto (10,0). As distancias exprésanse en metros. Dato: $k = 9,00 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$. (*Selectividade COU; set. 97*).
- R:** a) $\vec{E} = -2250 \vec{i}$ (N C⁻¹); b) $v = 7,55 \text{ m s}^{-1}$; $\vec{v} = -7,55 \vec{i}$ (m s⁻¹).

16. Dispóñense tres cargas puntuais de $1 \mu\text{C}$ no baleiro e nos vértices dun triángulo equilátero de 1 m de lado. Acha: a) o campo resultante sobre unha calquera das cargas; b) o lugar onde se debe situar unha cuarta carga, así como a súa magnitude, para que o conxunto das catro cargas estea en equilibrio. Dato: $k_0 = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$. (Selectividade COU; xuño 96).

R: a) $E_T = 15,6 \cdot 10^3 \text{ N C}^{-1}$; b) No centro do triángulo, a $0,577 \text{ m}$ do vértice, $Q = -0,58 \cdot 10^{-6} \text{ C}$.

17. En dous dos vértices dun triángulo equilátero de 5 cm de lado están situadas dúas cargas puntuais de $+5 \text{ e } -5 \mu\text{C}$, respectivamente. Acha: a) o campo eléctrico no terceiro vértice, e b) o traballo necesario para levar unha carga de $1 \mu\text{C}$ desde o terceiro vértice até o punto medio do lado oposto. Dato: $k = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$. (Selectividade COU; set. 95).

R: a) $E_{\text{Total}} = 18 \cdot 10^6 \text{ N C}^{-1}$; b) $W = 0 \text{ J}$

18. Unha partícula de carga $-2Q$ sitúase na orixe do eixe x . A 1 metro de distancia e na parte positiva do eixe, sitúase outra partícula de carga $+Q$. Calcula os puntos do eixe en que: a) se anula o potencial electrostático, e b) se anula o campo electrostático. (Selectividade COU; xuño 95).

R: a) $x = +2/3 \text{ m}$, $x = +2 \text{ m}$, desde a orixe; b) $x = +3,4 \text{ m}$ desde a orixe.

19. Sométese unha partícula de $0,1 \text{ g}$ de masa e $1 \mu\text{C}$ de carga á acción dun campo eléctrico uniforme de magnitude 200 N C^{-1} na dirección do eixe y . Inicialmente a partícula está na orixe de coordenadas movéndose cunha velocidade de 1 m s^{-1} , segundo o eixe x . Se ignoramos a acción da gravidade, acha: a) o lugar no que colisionará cunha pantalla perpendicular ao eixe x , situada a un metro da orixe, e b) a enerxía cinética que ten a partícula nese instante. (Selectividade COU; xuño 94).

R: a) $(1,1)$ en metros [ou $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, dependendo do sentido de \vec{E} e \vec{v}]; b) $E_k = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ J}$

20. Tres cargas puntuais: $+Q$, $+Q$ e $-Q$ ($Q = 1 \mu\text{C}$), dispóñense nos vértices dun triángulo equilátero de 1 m de lado. Acha: a) o campo eléctrico no centro do triángulo, b) o traballo feito pola forza eléctrica do campo cando unha carga de $1 \mu\text{C}$ se despraza desde o centro do triángulo até a metade do lado que une as dúas cargas $+Q$. Dato: $k_0 = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$. (Selectividade COU; set. 93).

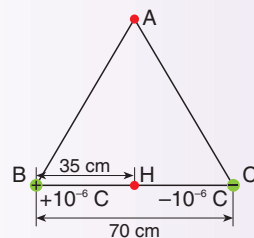
R: a) $E = 54 \cdot 10^3 \text{ N C}^{-1}$; b) $W = -0,01 \text{ J}$

21. Sitúanse dúas cargas, unha de $+10^{-6} \text{ C}$ e outra de -10^{-6} C , nos vértices dun triángulo de 70 cm de lado, como se indica na figura. Calcula:

a) O campo eléctrico no vértice A.

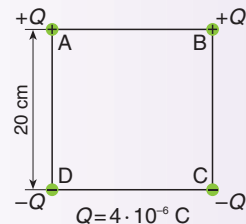
b) O traballo para mover unha carga de proba Q desde A até H (H é o punto medio entre B e C). Nota: Toma $k_0 = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$. (Selectividade COU; set. 92).

R: a) $E = 1,84 \cdot 10^4 \text{ N C}^{-1}$; $\vec{E} = 1,84 \cdot 10^4 \vec{i}$ (N C^{-1}); b) $W_{A \rightarrow H} = 0 \text{ J}$



22. Se se teñen catro cargas nos vértices dun cadrado como aparece na figura, determina: a) o campo eléctrico no centro do cadrado, e b) o traballo necesario para mover unha carga de proba de valor Q desde C até A. Nota: Toma $k_0 = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$. (Selectividade COU; xuño 92).

R: a) $\vec{E}_{\text{total}} = -5,1 \cdot 10^6 \vec{j}$ (N C^{-1}); b) $W_{C \rightarrow A} = 2,54 \cdot 10^5 Q \text{ J}$



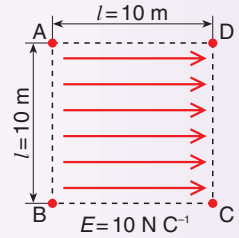
23. Nun sistema de coordenadas rectangulares colócase no baleiro unha carga de $25 \cdot 10^{-9}$ C na súa orixe de coordenadas e outra carga de $-25 \cdot 10^{-9}$ C no punto $x = 6$ m; $y = 0$ m. Determina:

a) O vector campo eléctrico no punto $x = 3$ m, $y = 4$ m.

b) O traballo necesario para mover unha carga de proba unidade desde o punto de coordenadas $x = 3$ m, $y = 4$ m até o punto $x = 6$ m, $y = 8$ m. Nota: Toma $k_0 = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ N m² C⁻². (Selectividade COU; xuño 91).

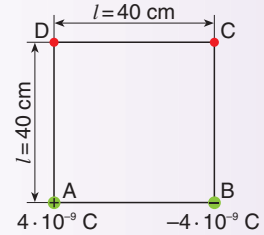
R: a) $\vec{E} = 10,8 \vec{i}$ (N C⁻¹); b) $W = 5,625$ J

24. Nunha rexión do espazo existe un campo eléctrico uniforme de intensidade $E = 10$ N C⁻¹. Determina (véxase a figura): a) a diferenza de potencial $V_D - V_B$, e b) o traballo necesario para mover unha carga de 4 C desde o punto A ao punto C. Nota: $l_{\text{lado cadrado}} = 10$ m; os lados AB e DC son perpendiculares ás liñas do campo eléctrico. (Selectividade COU; xuño 91).



R: a) $V_D - V_B = -100$ V; b) $W_A^C = 400$ J

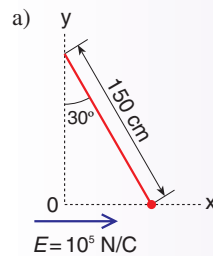
25. Dúas cargas puntuais de $4 \cdot 10^{-9}$ C e $-4 \cdot 10^{-9}$ C encóntranse situadas no baleiro en dous vértices consecutivos A e B dun cadrado de 40 cm de lado, como se indica na figura. Calcula: a) a intensidade do campo eléctrico no centro do cadrado, e b) o traballo necesario para levar unha carga de $6 \cdot 10^{-9}$ C desde o vértice C até o D. Dato: $k_0 = 1/(4\pi\epsilon_0)$, $k = 9 \cdot 10^9$ m F⁻¹. (Selectividade COU; set. 90).



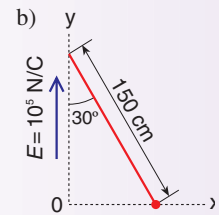
R: a) $\vec{E} = 636,4 \vec{i}$ N C⁻¹; b) $W_C^D = -3,17 \cdot 10^{-7}$ J

26. Un péndulo está constituído por unha pequena esfera metálica, de masa $m = 1$ g e dimensións despreciables, e un fío inextensible, de 150 cm de longo e sen peso apreciable. Se a esfera ten unha carga positiva Q e o péndulo se sitúa nunha rexión onde existe un campo eléctrico uniforme de intensidade $E = 10^5$ N/C, calcula:

a) O valor da carga Q da esfera sabendo que cando o campo é paralelo ao eixe x, ver figura a), alcánzase a posición de equilibrio para un ángulo de 30° do fío coa vertical.



b) O período de oscilación do péndulo cando o campo eléctrico é perpendicular ao eixe x, ver figura b), e está dirixido de abaixo cara arriba. Toma para $g = 10$ m s⁻². (Selectividade COU; xuño 90).



R: a) $Q = 10^{-7} / \sqrt{3}$ C; b) $T = 3,75$ s



EXERCICIOS DE SELECTIVIDADE (cuestións)

Razoa a resposta ás seguintes cuestións:

- Se unha carga de $1 \mu\text{C}$ se move entre dous puntos da superficie dun condutor separados 1 m (cargado e en equilibrio electrostático), cal é a variación de enerxía potencial que experimenta esta carga?: a) 9 kJ ; b) depende do potencial do condutor; c) cero. ($K = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$; $1 \mu\text{C} = 10^{-6} \text{ C}$). (Setembro 08).
- Se o fluxo do campo eléctrico a través dunha superficie gaussiana que rodea unha esfera condutora cargada e en equilibrio electrostático é Q/ϵ_0 , o campo eléctrico no exterior da esfera é: a) cero; b) $Q/(4 \pi \epsilon_0 r^2)$; c) Q/ϵ_0 . (Setembro 05).
- No interior dun condutor esférico cargado e en equilibrio electrostático cúmprese: a) o potencial e o campo aumentan desde o centro até a superficie da esfera; b) o potencial é nulo e o campo constante; c) o potencial é constante e o campo nulo. (Xuño 05).
- Nunha esfera condutora cargada e en equilibrio electrostático cúmprese que: a) o potencial eléctrico no interior é constante; b) o campo interior é función da distancia ao centro; c) a carga eléctrica distribúese uniformemente por todo o volume. (Xuño 03).
- O potencial e a intensidade de campo eléctrico dunha esfera condutora de raio a e carga Q son, respectivamente: a) nulo e constante no interior da esfera; b) constante no exterior e nulo no interior; c) constante e nulo no interior. (Setembro 99).



EXERCICIOS DE SELECTIVIDADE (problemas)

- En dous dos vértices dun triángulo equilátero de 2 cm de lado sitúanse dúas cargas puntuais de $+10 \mu\text{C}$ cada unha. Calcula: a) o campo eléctrico no terceiro vértice; b) o traballo para levar unha carga de $5 \mu\text{C}$ desde o terceiro vértice até o punto medio do lado oposto; c) xustifica porque non necesitas coñecer a traxectoria no apartado anterior. (Datos: $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$; $1 \mu\text{C} = 10^{-6} \text{ C}$). (Xuño 08).

R: a) $E = 3,9 \cdot 10^8 \text{ N C}^{-1}$; b) $W_{\text{exterior}} = -W_{\text{campo}} = 45 \text{ J}$; c) porque a forza electrostática é conservativa.

- Dadas tres cargas puntuais: $Q_1 = 10^{-3} \mu\text{C}$ en $(-8,0) \text{ m}$; $Q_2 = -10^{-3} \mu\text{C}$ en $(8,0) \text{ m}$ e $Q_3 = 2 \cdot 10^{-3} \mu\text{C}$ en $(0,8) \text{ m}$; calcula: a) o campo e o potencial eléctricos en $(0,0)$; b) a enerxía electrostática; c) xustifica que o campo electrostático é conservativo. (Datos: $1 \mu\text{C} = 10^{-6} \text{ C}$; $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$). (Setembro 07).

R: a) $\vec{E}_{(0,0)} = 0,28 \vec{i} - 0,28 \vec{j} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$; $V_{(0,0)} = 2,25 \text{ V}$; b) $E_p = -5,6 \cdot 10^{-10} \text{ J}$; c) W_A^B (camiño 1) = W_A^B (camiño 2) ou $W_A^A = 0$

- Tres cargas puntuais de $2 \mu\text{C}$ sitúanse respectivamente en $A(0,0)$, $B(1,0)$ e $C(1/2, \sqrt{3}/2)$. Calcula: a) o campo eléctrico nos puntos $D(1/2,0)$ e $F(1/2, 1/(2\sqrt{3}))$; b) o traballo para trasladar unha carga $Q' = 1 \mu\text{C}$ de D a F ; c) con este traballo, aumenta ou diminúe a enerxía electrostática do sistema? (As coordenadas danse en metros; $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$; $1 \mu\text{C} = 10^{-6} \text{ C}$). (Xuño 07).

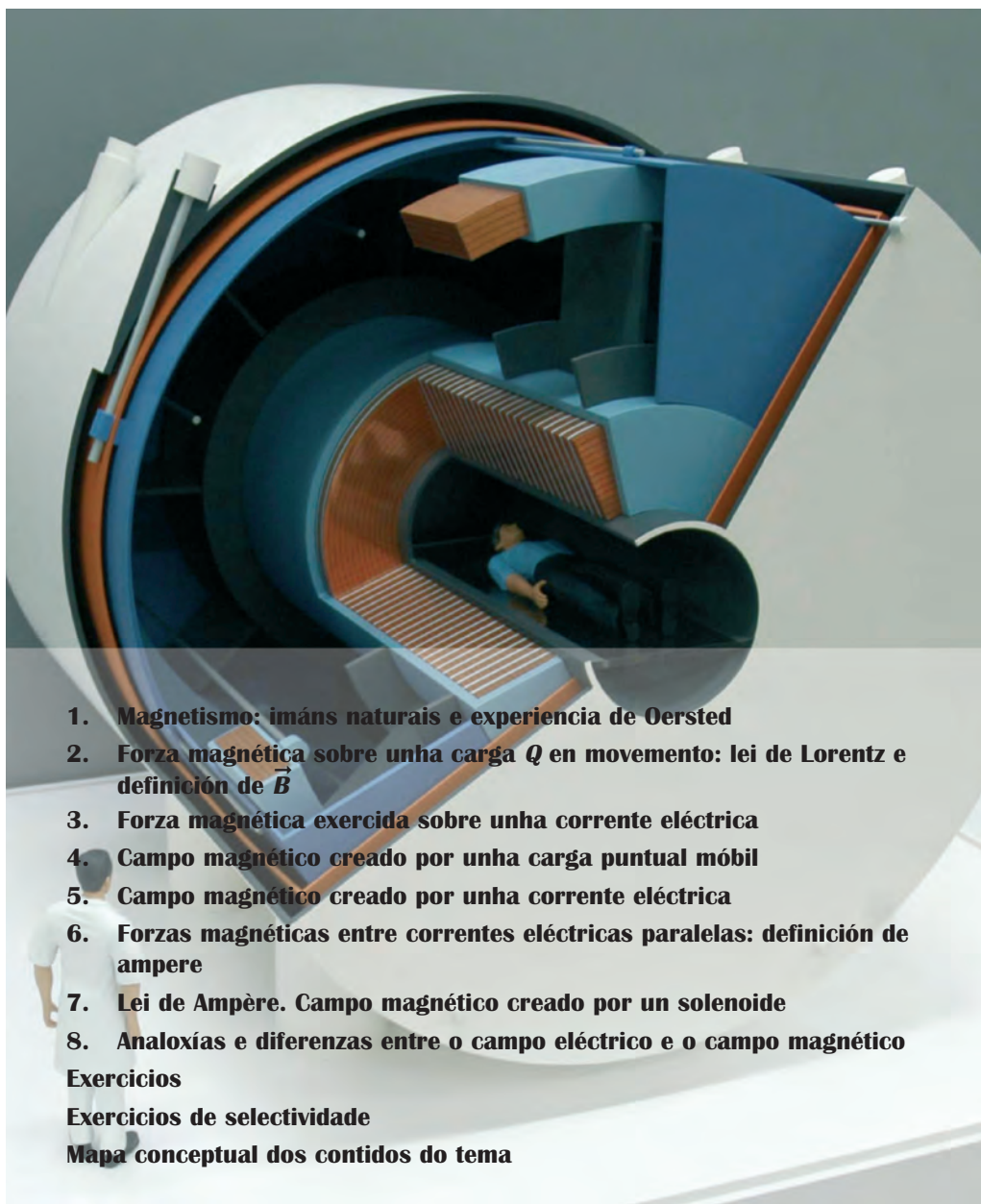
- R:** a) $\vec{E}_D = -2,4 \cdot 10^4 \vec{j}$ (N C⁻¹); $\vec{E}_F = \vec{0}$ (N C⁻¹); b) $W_{\text{exterior}} = -W_{\text{campo}} = -8 \cdot 10^{-4}$ J; c) A E_p incrementase ás costas do traballo realizado.
- ❖ Dúas cargas puntuais iguais $Q = 1 \mu\text{C}$ están situadas nos puntos A(5,0) e B(-5,0). Calcula: a) o campo eléctrico nos puntos C(8,0) e D(0,4); b) a enerxía para trasladar unha carga de $-1 \mu\text{C}$ desde C a D. Datos: $1 \mu\text{C} = 10^{-6}$ C; $k = 9 \cdot 10^9$ N m²/C²; as coordenadas están dadas en metros. (Set. 06).
- R:** a) $\vec{E}_C = 1,05 \cdot 10^3 \vec{i}$ (N C⁻¹); $\vec{E}_D = 2,74 \cdot 10^2 \vec{j}$ (N C⁻¹); b) $E_{C \rightarrow D} = -8,81 \cdot 10^{-4}$ J.
- ❖ Dúas cargas puntuais negativas iguais, de $-10^{-3} \mu\text{C}$, atópanse sobre o eixe de abscisas, separadas unha distancia de 20 cm. A unha distancia de 50 cm sobre a vertical que pasa polo punto medio da liña que as une dispónse unha terceira partícula (puntual) de carga $+10^{-3} \mu\text{C}$, e 1 g de masa, inicialmente en repouso. Calcula: a) o campo e o potencial eléctrico creado polas dúas primeiras na posición inicial da terceira; b) a velocidade da terceira carga ao chegar ao punto medio da liña de unión entre as dúas primeiras. Datos: $1 \mu\text{C} = 10^{-6}$ C; $k = 9 \cdot 10^9$ N m²/C²; soamente se considera a interacción electrostática. (Xuño 04).
- R:** a) $\vec{E} = -67,8 \vec{j}$ (N C⁻¹); $V = -35,3$ V; b) $v = 1,7 \cdot 10^{-2}$ m s⁻¹.
- ❖ Dadas dúas cargas eléctricas, $Q_1 = 100 \mu\text{C}$ situada en A(-3,0) e $Q_2 = -50 \mu\text{C}$ situada en B(3,0) (as coordenadas en metros), calcula: a) o campo e o potencial en (0,0); b) o traballo que hai que realizar para trasladar unha carga de -2 C desde o infinito até (0,0). Datos: $1 \text{C} = 10^6 \mu\text{C}$, $k = 9 \cdot 10^9$ N m² C⁻². (Xuño 02).
- R:** a) $\vec{E}_{(0,0)} = 1,5 \cdot 10^5 \vec{i}$ (N C⁻¹); $V_{(0,0)} = 1,5 \cdot 10^5$ V; b) $W_{\infty}^{(0,0)} = 3 \cdot 10^5$ J
- ❖ Unha carga puntual Q crea un campo electrostático. Ao trasladar outra carga Q' desde o punto A ao infinito realízase un traballo de 10 J e se se traslada desde o infinito a B o traballo é de -20 J. a) Que traballo se realiza para trasladar Q' de A a B? b) Se $Q' = -2$ C, cal é o signo de Q' ?; que punto está máis próximo de Q , o A ou o B? (Setembro 01).
- R:** a) $W_A^B = -10$ J; b) Q negativa ($Q < 0$); $r_B < r_A$
- ❖ Dúas cargas eléctricas puntuais de 2 e $-2 \mu\text{C}$ cada unha están situadas respectivamente en (2,0) e en (-2,0) (en metros). Calcula: a) o campo eléctrico en (0,0) e en (0,10); b) o traballo para transportar unha carga Q' de $-1 \mu\text{C}$ desde (1,0) a (-1,0). Dato: $k = 9 \cdot 10^9$ N m² C⁻². (Xuño 01).
- R:** a) $\vec{E}_{(0,0)} = -9,0 \cdot 10^3 \vec{i}$ (N C⁻¹); $\vec{E}_{(0,10)} = -67,9 \vec{i}$ (N C⁻¹); b) $W_{(1,0)}^{(-1,0)} = -2,4 \cdot 10^{-2}$ J
- ❖ Dúas cargas eléctricas puntuais de $-2 \mu\text{C}$, están situadas nos puntos A(-4,0) e B(4,0). Calcula: a) a forza sobre unha carga de $1 \mu\text{C}$, situada no punto (0,5); b) a velocidade que terá ao pasar polo punto (0,0)? (Datos $k = 9 \cdot 10^9$ N m² C⁻², masa $m = 1$ g). (Xuño 00).
- R:** a) $\vec{F} = -6,88 \cdot 10^{-4} \vec{j}$ (N); b) $v = 2,6$ m s⁻¹; $\vec{v} = -2,6 \vec{j}$ (m s⁻¹)
- ❖ Dúas cargas puntuais de $8 \mu\text{C}$ e $-5 \mu\text{C}$ están situadas respectivamente nos puntos (0,0) e (1,1). Calcula: a) a forza que actúa sobre unha terceira carga de $1 \mu\text{C}$ situada no punto (2,2), b) o traballo necesario para levar esta última carga desde o punto que ocupa até o punto (0,1). Datos: $k = 9,00 \cdot 10^9$ N m² C⁻²; as coordenadas danse en metros. (Xuño 98).
- R:** a) $\vec{F} = -9,55 \cdot 10^{-3} \vec{i} - 9,55 \cdot 10^{-3} \vec{j}$ (N); b) $W_{(2,2)}^{(0,1)} = 3,34 \cdot 10^{-2}$ J

- Nos vértices dun cadrado de 1 m de lado sitúanse catro cargas de valores -1 , $+1$, -1 e $+1$, en μC , de maneira que as de signo igual están en vértices opostos. Calcula: a) o campo eléctrico no punto medio dun calquera dos lados; b) o traballo necesario para desprazar unha quinta carga de $+1 \mu\text{C}$ desde un a outro punto medio de dous lados calquera. Dato: $k = 9,00 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$. (Setembro 97).

R: a) $\vec{E} = 6,56 \cdot 10^4 \vec{i}$ (N C^{-1}); b) $W_{\text{A}^{\text{B}}} = 0 \text{ J}$

- Dadas as cargas puntuais $Q_1 = 80 \mu\text{C}$, $Q_2 = -80 \mu\text{C}$, $Q_3 = 40 \mu\text{C}$ situadas nos puntos A($-2,0$), B($2,0$) e C($0,2$) respectivamente (coordenadas en metros). Calcula: a) a intensidade do campo electrostático no punto ($0,0$); b) o traballo necesario para traer unha carga de $1 \mu\text{C}$ desde o infinito até o punto ($0,0$). ($k = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$). (Xuño 96).

R: a) $\vec{E} = 3,6 \cdot 10^5 \vec{i} - 9,0 \cdot 10^4 \vec{j}$ (N C^{-1}); b) $W_{\infty^{\text{D}}} = -1,80 \cdot 10^{-1} \text{ J}$



1. **Magnetismo: imáns naturais e experiencia de Oersted**
2. **Forza magnética sobre unha carga Q en movemento: lei de Lorentz e definición de \vec{B}**
3. **Forza magnética exercida sobre unha corrente eléctrica**
4. **Campo magnético creado por unha carga puntual móbil**
5. **Campo magnético creado por unha corrente eléctrica**
6. **Forzas magnéticas entre correntes eléctricas paralelas: definición de ampere**
7. **Lei de Ampère. Campo magnético creado por un solenoide**
8. **Analogías e diferenzas entre o campo eléctrico e o campo magnético**

Exercicios

Exercicios de selectividade

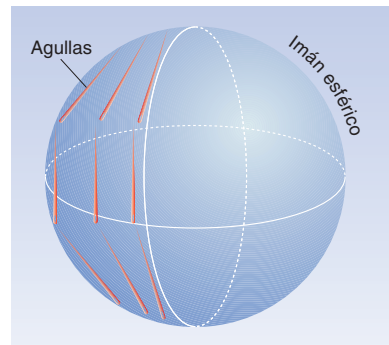
Mapa conceptual dos contidos do tema

1. MAGNETISMO: IMÁNS NATURAIS E EXPERIENCIA DE OERSTED

Hai máis de 2000 anos que os gregos encontraron na rexión de Magnesia (Asia Menor) unha pedra, agora chamada magnetita, que tiña a estraña propiedade de atraer pequenos anacos de ferro. Os materiais que teñen esta característica (de forma natural) son os chamados **imáns naturais** e esta propiedade recibe o nome de **magnetismo**.

As substancias que como o Fe, o Co, o Ni, ..., son atraídas pola magnetita poden converterse en imáns se se fregan repetidas veces coa magnetita. O seu poder magnético dura moito tempo e coñécense como **imáns artificiais permanentes**.

Cara ao ano 1269, Pierre Maricourt observou que, ao deixar en diversas posicións unha agulla sobre un imán esférico, se colocaba sempre segundo as liñas meridianas terrestres; liñas que se cortan en dous puntos, que reciben o nome de **polos** (norte e sur), debido á similitude coa Terra, e son as zonas do imán nas que a atracción é maior.



Experimentalmente tamén se comproba que:

- Un imán atrae/repele outro imán (segundo cales sexan os polos enfrontados).
- Un magnetómetro ou compás (agulla imantada con liberdade de xiro) oriéntase dunha forma determinada pola presenza doutro imán.

Concluimos dicindo que dous imáns interaccionan, repeléndose polos de igual nome e atraéndose polos de distinto nome.

Tamén observamos que:

- Un imán colocado en auga sobre unha lámina de porexpán toma, aproximadamente, a orientación Norte-Sur xeográfica.
- Se facemos oscilar un imán colgado dun fío nunha dirección calquera, termina facéndoo na dirección Norte-Sur xeográfica.
- Un magnetómetro “illado doutros imáns” ten sempre a mesma orientación (aproximadamente a Norte-Sur xeográfica).

William Gilbert (no ano 1600) pensou que a Terra é en si mesma un imán.

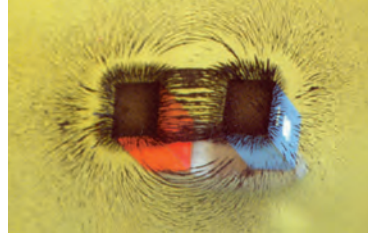
Por convenio, ao polo do imán que apunta cara ao polo Norte xeográfico (que vén sendo un polo sur magnético) chámasele norte magnético e o que apunta cara ao Sur xeográfico, sur magnético.

A igual que unha masa orixina un campo gravitatorio e unha carga eléctrica un campo eléctrico, un imán perturba o espazo que o rodea e a rexión do espazo en que se manifesta os seus efectos magnéticos chámasele **campo magnético**. Pode representarse graficamente mediante **liñas de campo**, chamadas **liñas de indución**, que poden facerse “visíbeis”

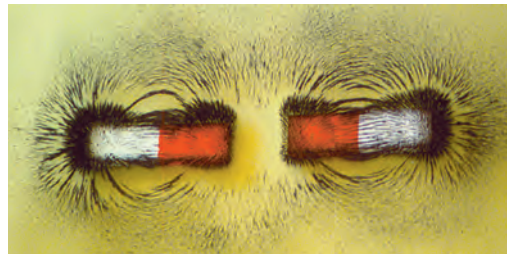
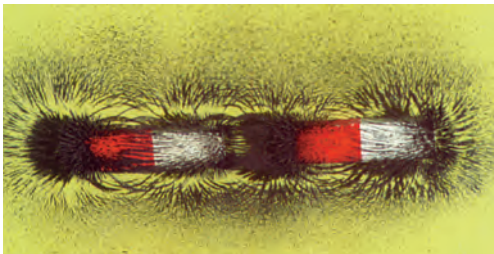
salpicando limaduras de ferro nun vidro colocado sobre un imán. As limaduras oriéntanse na dirección das liñas de indución, que son pechadas debido a que os polos dun imán non se poden separar. Por convenio van, por fóra do imán, do polo norte ao sur, pechándose no seu interior de sur a norte.



Os efectos magnéticos dun imán recto son máis intensos cara aos seus extremos, chamados polos.

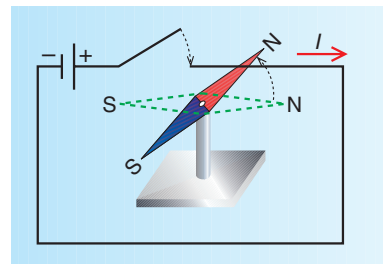
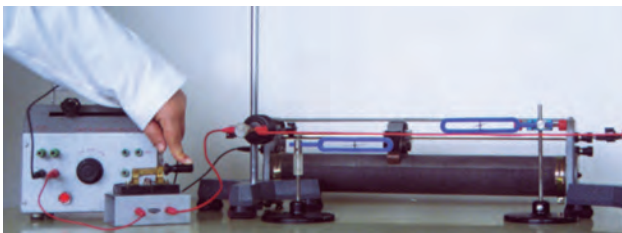


Obsérvese como nun imán en U as liñas de indución son case paralelas entre os polos e como nesta zona os efectos magnéticos son máis intensos.



As limaduras de ferro indican as liñas de indución do campo magnético creado por un imán.

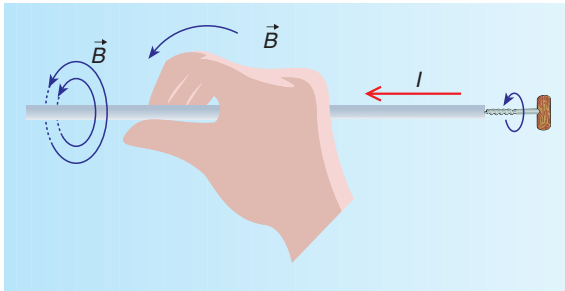
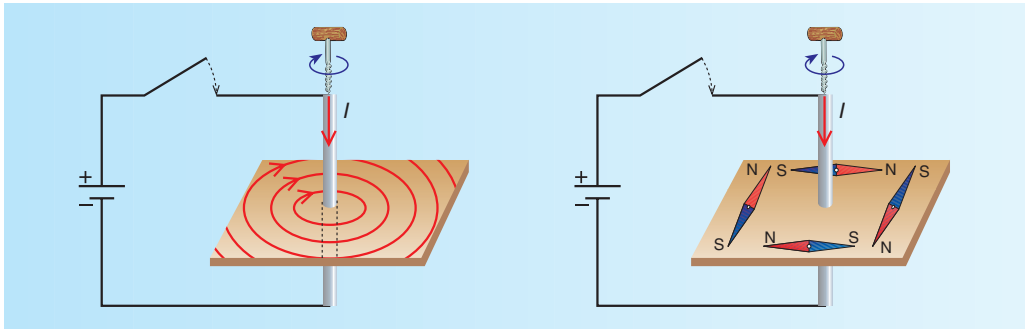
No ano 1820, Oersted observou que igual que fan os imáns, unha corrente eléctrica causa tamén a desviación da agulla dun compás, que tende a orientarse perpendicularmente á dirección da corrente. Esta desviación é tanto máis intensa canto maior sexa a intensidade da corrente utilizada.



A desviación da agulla magnética debido á corrente eléctrica indícanos que as cargas eléctricas en movemento se comportan como un imán, creando un campo magnético¹.

Pódense visualizar as liñas de indución dos campos magnéticos producidas por correntes eléctricas salpicando limaduras de ferro ou colocando compases sobre unha cartolina atravesada por unha corrente eléctrica. Esta corrente será moi grande e pode conseguirse unindo os bornes dunha batería de coche (12 V) cun cable grosso de cobre.

¹ Se cargas eléctricas en movemento crean un campo magnético, cabe a pregunta: campos magnéticos crean correntes eléctricas?

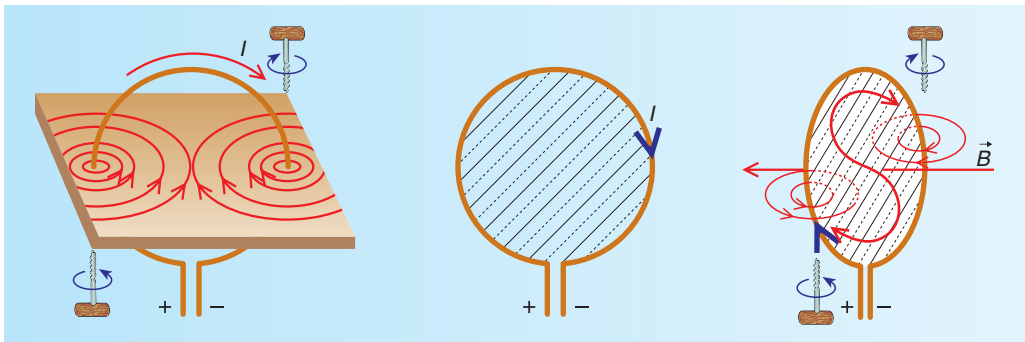


O sentido das liñas de indución podemos coñecelo vendo a orientación da agulla imantada. Este sentido vén dado polo que marca o polo norte da agulla, fácil de recoñecer se o asociamos coa man dereita ao facer as seguintes equivalencias: se ao coller o condutor coa man dereita, o dedo polgar indica a dirección e o sentido da corrente, o resto

dos dedos curvados que envolven o condutor sinalan a dirección e o sentido das liñas de indución do campo magnético creado pola corrente. Estas son liñas pechadas.

Hai quen prefire facer uso da regra do sacarrollas: se a dirección e o sentido de avance dun sacarrollas se fai coincidir coa dirección e o sentido da corrente eléctrica, o sentido de rotación do sacarrollas indícanos o sentido das liñas de indución do campo magnético creado pola corrente.

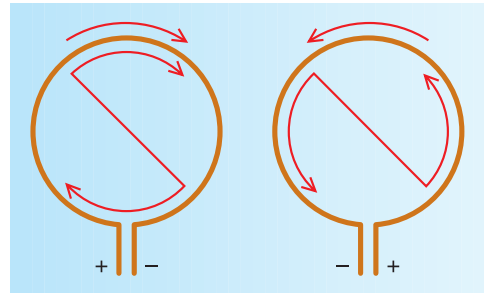
Se atravesamos unha cartolina cun arame condutor circular (espira) polo que pasa unha corrente I e salpicamos limaduras de ferro ou colocamos compases sobre a cartolina, podemos visualizar as liñas de indución do campo magnético creado pola corrente circular.



Vemos que o comportamento desta espira é como se se tratara dun imán rectilíneo² que ten por tamaño o da espira. As caras sur e norte da espira podémolas recoñecer con axuda

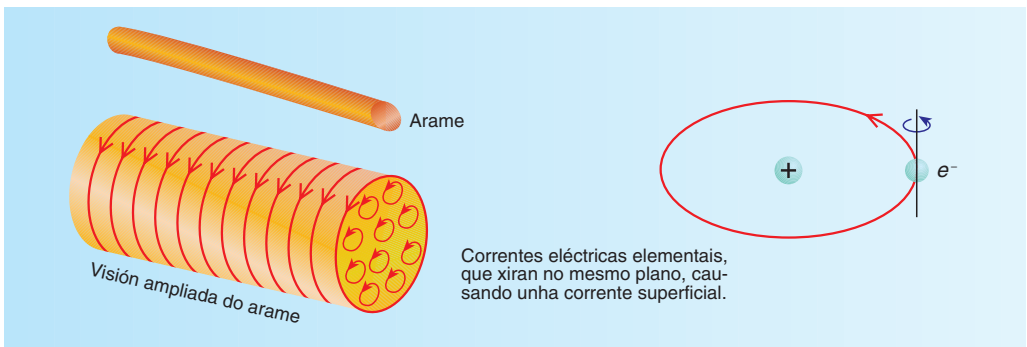
² Os efectos dunha espira aumentan cando colocamos varias espiras xuntas, isto é: unha bobina. Cando facemos circular unha corrente eléctrica por unha bobina e no seu interior colocamos un imán con liberdade de xiro, unido solidariamente a unha agulla que se despraza sobre unha escala, vemos que o sentido de movemento desta depende do sentido da corrente.

da regra da man dereita ou coa do sacarroallas, antes comentadas. Tamén podemos facer uso dunha nova regra, que consiste en inscribir na espira, seguindo o sentido da corrente, a letra S ou N, segundo sexa posíbel. A letra inscrita indícanos, nesa cara da espira, o polo do imán creado pola corrente circular.



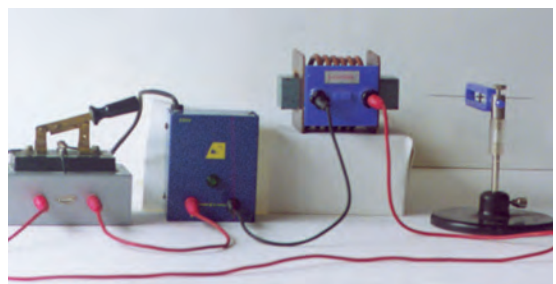
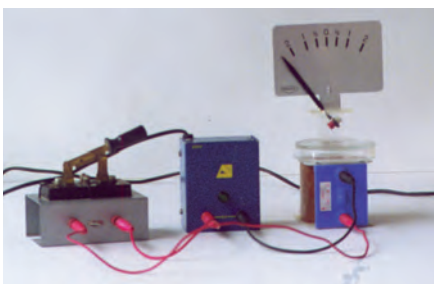
1.1. A que se debe o magnetismo?

Xa no ano 1823, Ampère pensou que o magnetismo era debido á existencia de correntes eléctricas pechadas no interior dos corpos magnéticos. En efecto, os electróns, ao xirar nas súas órbitas³ e sobre si mesmos⁴ (spin), equivalen a correntes circulares que crean un campo magnético perpendicular ao plano da órbita.



Nunha substancia non imantada, os diminutos campos magnéticos están orientados ao chou, anulándose entre si. Se orientamos estes campos magnéticos elementais (sometendo a subs-

Ao ir afastando o imán do interior da bobina, a desviación da agulla (xiro do imán) é cada vez menos intensa: isto indícanos que o campo magnético que crea a bobina diminúe coa distancia. Se queremos reforzar este campo magnético podemos colocar un núcleo de ferro no interior da bobina.



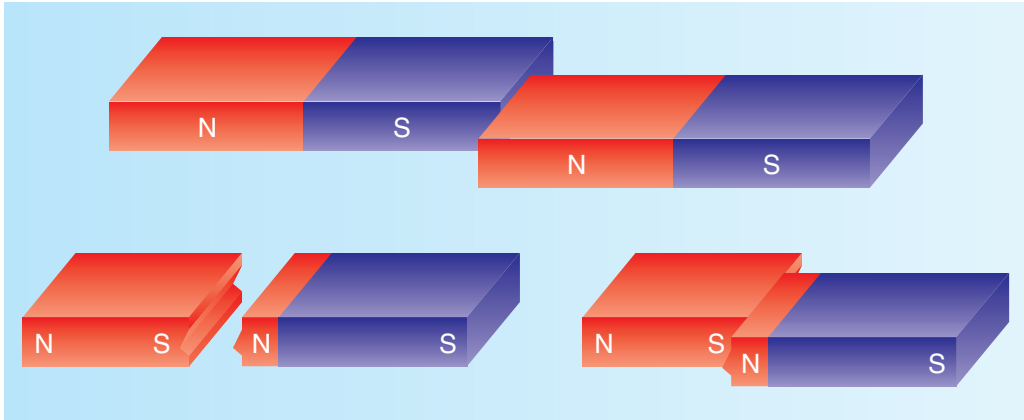
Todo isto dinos que unha espira percorrida por unha corrente, compórtase como un imán, coas súas caras norte e sur. Fixándonos no sentido da corrente que percorre a espira (bobina) e na orientación que toma a agulla magnética, coñecemos o sentido do campo magnético creado pola espira e, polo tanto, as caras norte e sur desta.

³ Caso das substancias diamagnéticas, que non teñen electróns desparellados.

⁴ Caso das substancias paramagnéticas e ferromagnéticas, que teñen electróns desparellados.

tancia a un campo magnético exterior) a substancia adquire propiedades magnéticas, aparecendo un imán artificial que pode ser permanente (se a orientación permanece ao cesar o campo exterior) ou temporal, tamén chamado electroimán (se desaparece o efecto ao cesar a causa exterior).

Por que ao romper un imán aparecen dous imáns? Por que nunca encontramos illado un polo dun imán?



2. FORZA MAGNÉTICA SOBRE UNHA CARGA Q EN MOVIMENTO: LEI DE LORENTZ E DEFINICIÓN DE \vec{B}

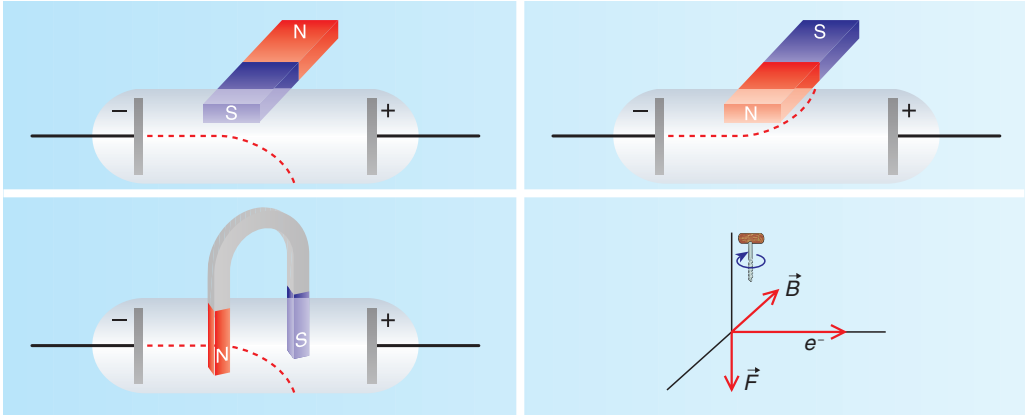
Definimos \vec{g} (intensidade de campo gravitatorio) nun punto do campo gravitatorio creado por unha masa M como a forza gravitatoria, \vec{F} , que a masa M exerce sobre a unidade de masa colocada nese punto: $\vec{g} = \vec{F}/m$.

Definimos \vec{E} (intensidade de campo eléctrico) nun punto do campo eléctrico creado por unha carga Q como a forza eléctrica, \vec{F} , que a carga Q exerce sobre a unidade de carga positiva colocada nese punto: $\vec{E} = \vec{F}/Q$.

Igualmente podemos facer para definir o vector \vec{B} , que vén representando a intensidade de campo magnético, aínda que por razóns históricas se lle chame **vector indución magnética**⁵ (ou simplemente **indución magnética**). Pódese definir \vec{B} , nun punto do espazo, como a forza magnética exercida sobre un adecuado obxecto de proba (unha carga eléctrica en movemento) colocada neste punto.

Se aproximamos un imán recto ou en ferradura a un tubo de raios catódicos, vemos como os electróns de dentro do tubo sofren unha desviación que depende do polo que se acerque e da intensidade da súa imantación. Podemos concluír dicindo que o campo magnético dun imán exerce unha forza sobre as cargas eléctricas en movemento.

⁵ Neste tema usaremos indistintamente ambos os dous termos.



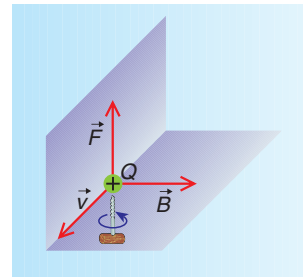
Sexa Q a carga positiva que se move cunha velocidade \vec{v} ⁶ na proximidade dun campo magnético. Aparece unha forza sobre a carga, observándose experimentalmente que o seu módulo é:

- Directamente proporcional ao valor de Q .
- Directamente proporcional ao módulo de \vec{v} .
- Directamente proporcional ao módulo de \vec{B} .
- Mínimo (cero) cando \vec{v} e \vec{B} levan a mesma dirección e máximo cando \vec{v} e \vec{B} teñen direccións perpendiculares.

En canto á dirección da forza vese que é perpendicular ao plano determinado por \vec{v} e \vec{B} e o seu sentido coincide co de avance dun sacarrollas que xire levando \vec{v} sobre \vec{B} polo camiño máis curto (se Q é positiva). Se a carga é negativa, o sentido é o contrario.

Á vista destas observacións experimentais, defínese o vector \vec{B} en cada punto como o vector que satisfai a expresión:

$$\vec{F} = Q (\vec{v} \times \vec{B})$$



sendo \vec{F} a forza exercida sobre a carga Q que se move coa velocidade \vec{v} . Esta expresión cumpre todas as observacións feitas.

O módulo do vector campo magnético \vec{B} defínese en función da forza magnética máxima que actúa sobre a carga eléctrica puntual: $B = \frac{F_{\text{máxima}}}{Q \cdot v}$.

Se Q se move nunha rexión onde ademais do campo magnético hai un campo eléctrico, a forza total sobre a carga é a suma de $Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ (forza magnética) e $Q \cdot \vec{E}$ (forza eléctrica):

$$\vec{F} = Q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Esta expresión coñécese como **forza de Lorentz xeneralizada** xa que, en sentido estrito, a **forza de Lorentz** soamente é a forza magnética.

⁶ Se a carga eléctrica está en repouso non actúa ningunha forza magnética sobre ela.

A ecuación de dimensións de B no SI é:

$$[B] = [F/(Q v)] = M L T^{-2}/(I T L T^{-1}) = M T^{-2} I^{-1}$$

e a súa unidade: $\text{kg s}^{-2} \text{A}^{-1}$ ou $\text{N A}^{-1} \text{m}^{-1}$, chamada tesla (T) ou wéber/m² (Wb/m^2).

Exercicio resolto

- ▶ Un protón que se move no baleiro dentro dun campo magnético estacionario e uniforme cunha velocidade $\vec{v} = 10^6 \vec{j}$ (m s^{-1}) encóntrase sometido a unha forza magnética $\vec{F} = 10^{-12} \vec{i}$ (N). Calcula o vector campo magnético, na dirección do eixe z, que actúa sobre o protón.

Dato: $Q_e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Solución:

Sabemos que unha partícula cargada, que se move dentro dun campo magnético, está sometida a unha forza magnética, que vén dada pola lei de Lorentz: $\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B})$.

Módulo: $F = Q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen } 90^\circ \rightarrow 10^{-12} = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^6 \cdot B \rightarrow B = 6,25 \text{ T}$

Dirección: a do eixe z.

Sentido: o da parte positiva do eixe z: \vec{k} .

$$\vec{B} = 6,25 \vec{k} \text{ (T)}$$

Exercicio resolto

- ▶ Nunha rexión do espazo, onde se move un electrón cunha velocidade $\vec{v} = 10^{12} \vec{j}$ (m s^{-1}) hai un campo magnético $\vec{B} = 10^{-3} \vec{i}$ (T) e outro eléctrico $\vec{E} = -10^8 \vec{k}$ (N C^{-1}) (ademais do campo gravitatorio). Calcula a forza total que actúa sobre o electrón. Datos: $Q_e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; $\vec{g} = -10 \vec{k}$ (m s^{-2}).

Solución :

Sobre o electrón actúan:

- A forza magnética: $\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B})$.

$$F_{\text{magnética}} = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{12} \cdot 10^{-3} \cdot \text{sen } 90^\circ = 1,6 \cdot 10^{-10} \text{ N}$$

$$\vec{F}_{\text{magnética}} = 1,6 \cdot 10^{-10} \vec{k} \text{ (N)}$$

Ou senón:

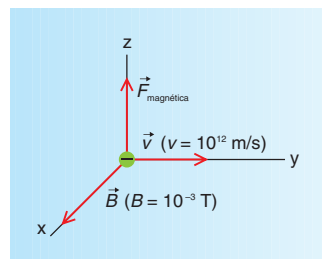
$$\vec{F}_{\text{magnética}} = Q \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \rightarrow \vec{F}_{\text{magnética}} = (-1,6 \cdot 10^{-19}) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 10^{12} & 0 \\ 10^{-3} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{F}_{\text{magnética}} = (-1,6 \cdot 10^{-19}) \cdot (-10^{-3} \cdot 10^{12} \vec{k}) \rightarrow \vec{F}_{\text{magnética}} = 1,6 \cdot 10^{-10} \vec{k} \text{ (N)}$$

- A forza eléctrica: $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$

$$F_{\text{eléctrica}} = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^8 = 1,6 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

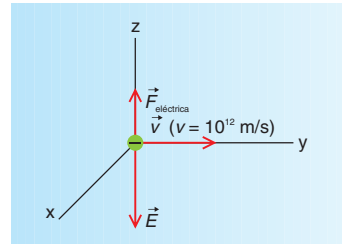
$$\vec{F}_{\text{eléctrica}} = 1,6 \cdot 10^{-11} \vec{k} \text{ (N)}$$



- A forza gravitatoria: $\vec{F}_{\text{gravitatoria}} = m \cdot \vec{g}$
 $F_{\text{gravitatoria}} = 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10 = 9,1 \cdot 10^{-30} \text{ N}$
 $\vec{F}_{\text{gravitatoria}} = -9,1 \cdot 10^{-30} \vec{k} \text{ (N)}$
 $\vec{F}_{\text{total}} = \vec{F}_{\text{magnética}} + \vec{F}_{\text{elétrica}} + \vec{F}_{\text{peso}}$

O peso do electrón é desprezável fronte á forza electro-magnética.

$$\vec{F}_{\text{total}} = \vec{F}_{\text{magnética}} + \vec{F}_{\text{elétrica}} = 1,6 \cdot 10^{-10} \vec{k} + 1,6 \cdot 10^{-11} \vec{k} \rightarrow \vec{F}_{\text{total}} = 1,76 \cdot 10^{-10} \vec{k} \text{ (N)}$$



3. FORZA MAGNÉTICA EXERCIDA SOBRE UNHA CORRENTE ELÉCTRICA

Se unha corrente eléctrica de intensidade I circula por un condutor de lonxitude l , situado dentro dun campo magnético de indución \vec{B} , os electróns en movemento están sometidos á forza de Lorentz e a forza total \vec{F} que actúa sobre o condutor é a suma de todas as forzas de Lorentz que actúan sobre cada electrón. Para estudar esta forza empezamos considerando o condutor como formado por un gran número (infinito) de condutores elementais $d\vec{l}$, coa dirección e o sentido da corrente, aos que lle corresponde a carga elemental dQ , sobre a que \vec{B} exerce a forza magnética elemental $d\vec{F}$, que se obtén coa expresión: $d\vec{F} = dQ \vec{v} \times \vec{B}$.

Para escribir esta fórmula en función da intensidade de corrente e da lonxitude elemental de condutor imos recordar que:

- A carga dQ que atravesa unha sección do condutor nun tempo dt relaciónase coa intensidade I coa expresión: $dQ = I dt$.
- A lonxitude elemental de condutor $d\vec{l}$ que percorre a carga dQ no tempo dt depende da velocidade \vec{v} coa que se desprazan as cargas: $\vec{v} = d\vec{l}/dt$, podendo escribir:

$$dQ \vec{v} = I dt \frac{d\vec{l}}{dt} = I d\vec{l}$$

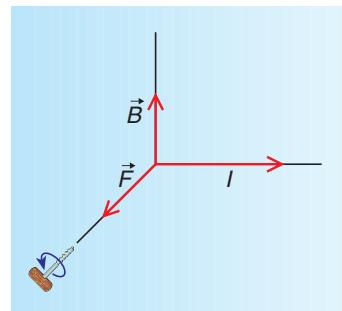
e o valor da forza elemental exercida polo campo magnético sobre o elemento de corrente $I \cdot d\vec{l}$ é:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

Sumando (que no límite equivale a unha integral) todas as forzas elementais que \vec{B} exerce sobre os distintos elementos de corrente obtemos a forza total exercida sobre o condutor:

$$\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B}$$

Se o condutor é rectilíneo e o campo magnético é estacionario (constante no tempo) e uniforme (igual dirección, sentido e intensidade en todos os puntos do espazo) resulta:

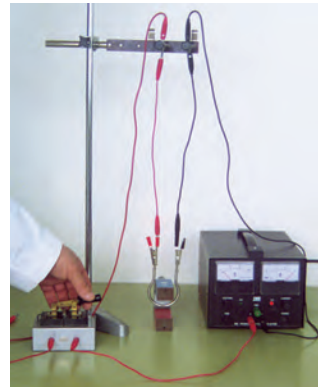


$$F = \int I dl B \sin \alpha = I B \sin \alpha \int dl = I B l \sin \alpha$$

que en forma vectorial é:

$$\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B}$$

Esta expresión pode comprobarse experimentalmente cunha montaxe como a da figura: variando a voltaxe da fonte de alimentación e utilizando imáns de distinta “potencia” e anchura, podemos comprobar cualitativamente a proporcionalidade directa de I , l e B coa F exercida sobre a corrente.



Obsérvase que:

- Se as cargas non están en movemente⁷ ($I = 0$), o campo magnético do imán non exerce ningunha forza sobre o arame condutor (fíxate na experiencia como cando o interruptor está aberto o fío condutor, que pasa entre o imán, non sofre desprazamento).
- Se as cargas están en movemento (corrente eléctrica), o módulo de \vec{F} é:
 - Directamente proporcional ao valor de I .
 - Directamente proporcional á lonxitude de condutor situado dentro de \vec{B} .
 - Directamente proporcional ao módulo de \vec{B} .
 - Se variamos as direccións do fío condutor e de \vec{B} , o valor da forza vai desde un valor cero (cando levan a mesma dirección) até un valor máximo (cando levan direccións perpendiculares).

En canto á dirección da forza, vese que é perpendicular ao plano determinado por \vec{l} e \vec{B} e o sentido coincide co de avance dun sacarrollas que xire levando \vec{l} sobre \vec{B} polo camiño máis curto⁸.

Estes feitos experimentais confirman o cumprimento da expresión: $\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B}$, sendo \vec{l} un vector de módulo a lonxitude do fío condutor situado dentro de \vec{B} , coa dirección e o sentido da corrente.

Esta expresión coñécese como **segunda lei de Laplace**.

4. CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR UNHA CARGA PUNTUAL MÓBIL

A experiencia de Oersted (ano 1820) puxo de manifesto que unha corrente eléctrica (cargas en movemento) crea un campo magnético. Nese mesmo ano, os físicos Biot e Savart estableceron experimentalmente unha expresión matemática que relacionaba a indución magnética \vec{B} nun punto coa carga que a orixina. Observaron que o valor (módulo) de \vec{B} era:

⁷ En realidade, as cargas dun condutor están en movemento (axitación térmica), pero este movemento é en todas as direccións e, en consecuencia, as forzas tamén actúan en todas as direccións e sentidos, anulándose mutuamente.

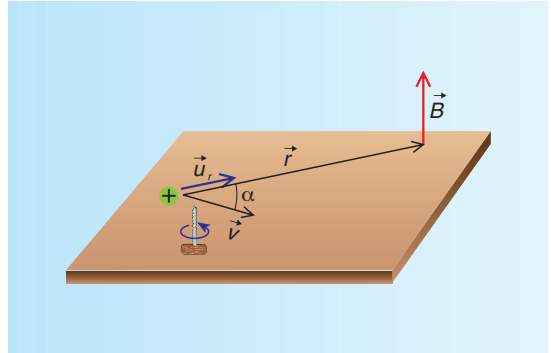
⁸ Fíxémonos que os sentidos asignados para a corrente (de + a – potencial) é como se as cargas que se desprazan fosen positivas. O sentido real dos electróns vai da zona de menos á de máis potencial. Polo tanto, cando as cargas que se moven son negativas, o sentido de \vec{F} é o contrario ao de avance dun sacarrollas que xire levando o sentido da dirección de avance das cargas sobre \vec{B} polo camiño máis curto.

- Directamente proporcional ao valor da carga Q que se move.
- Directamente proporcional ao módulo da velocidade, \vec{v} , da carga.
- Inversamente proporcional ao cadrado da distancia r que separa a carga do punto onde queremos coñecer \vec{B} .
- Mínimo (nulo) cando a dirección da velocidade \vec{v} coincide coa dirección de \vec{r} e máximo cando as direccións de \vec{v} e \vec{r} son perpendiculares (\vec{r} é o vector de posición do punto onde estudamos \vec{B} respecto á carga móbil).

En canto á dirección viron que era perpendicular ao plano determinado por \vec{v} e \vec{r} e o sentido coincide co de avance dun sacarroilas que xire levando \vec{v} sobre \vec{r} polo camiño máis curto (se Q é positiva).

A expresión que recolle as observacións experimentais é a seguinte:

$$\vec{B} = K' \frac{Q(\vec{v} \times \vec{u}_r)}{r^2}$$



onde K' , como xa se dixo anteriormente, é unha constante de proporcionalidade que depende do sistema de unidades elixido e da natureza do medio onde se cree o campo. No SI e para o baleiro: $K' = K_0' = \mu_0/4\pi$, sendo μ_0 a chamada **permeabilidade magnética do baleiro**, de valor $4\pi 10^{-7}$ en unidade do SI. Para outro medio distinto: $K' = \mu/4\pi$.

Da expresión de \vec{B} deducimos que: $K' = \frac{B r^2}{Q v \sin \alpha}$, co que a súa unidade no SI é:

$$\frac{\left(\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}\right) \text{m}^2}{\text{C} \cdot \text{m/s}} = \frac{\text{Wb}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

ou tamén, como a unidade de B é a de forza entre a de carga por velocidade, resulta:

$$\frac{\frac{\text{N}}{\text{C} \frac{\text{m}}{\text{s}}} \text{m}^2}{\text{C} \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$$

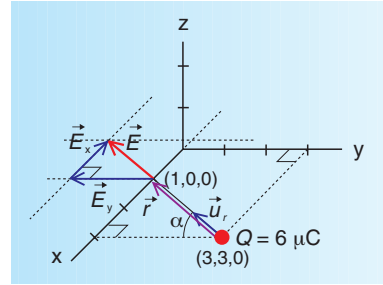
Exerc. resolto

- Calcula e debuxa as intensidades de campo eléctrico e magnético creadas no punto (1,0,0) por unha carga puntual Q de $6 \mu\text{C}$ sita no punto (3,3,0) para o caso de que:
 - a) Estea en repouso.
 - b) Se mova cunha velocidade de 13 m/s na dirección do eixe x e no sentido negativo deste.

Nota: As coordenadas están dadas en metros e a carga está no baleiro.

Solución:

a) A intensidade de campo eléctrico creada por unha carga puntual Q a unha distancia r vén dada pola expresión: $\vec{E} = \frac{k Q \vec{u}_r}{r^2}$, onde k é unha constante que depende do medio en que encontre a carga Q . No baleiro e en unidade do SI toma o valor de: $9 \cdot 10^9$.



$$\vec{r} = (1,0,0) - (3,3,0) \rightarrow \vec{r} = (-2,-3,0) = -2\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$E = \frac{k Q}{r^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{[\sqrt{2^2 + 3^2}]^2} = 4154 \text{ N/C}$$

$$\vec{E} = -4154 \text{ sen } \alpha \vec{i} - 4154 \text{ cos } \alpha \vec{j}$$

Na figura vemos que $\alpha = \text{arctg } \frac{2}{3} = 33,7^\circ$.

$$\vec{E} = -4154 \cdot \text{sen} 33,7 \vec{i} - 4154 \cdot \text{cos} 33,7 \vec{j} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$

$$\vec{E} = -2304,8 \vec{i} - 3455,9 \vec{j} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$

Como a carga Q está en repouso non crea campo magnético: $\vec{B} = \frac{K' Q \vec{v} \times \vec{u}_r}{r^2} = \vec{0}$

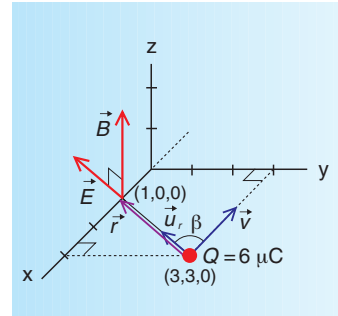
b) A intensidade de campo eléctrico \vec{E} é igual á do apartado anterior.

O vector \vec{B} calculámolo coa expresión: $\vec{B} = \frac{K' Q \vec{v} \times \vec{u}_r}{r^2}$

$$\text{Módulo: } B = \frac{K' \cdot Q \cdot v \cdot \text{sen } \beta}{r^2}$$

$$B = \frac{10^{-7} \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 13}{[\sqrt{2^2 + 3^2}]^2} \cdot \text{sen } 56,3^\circ = 5,0 \cdot 10^{-13} \text{ T}$$

$$\vec{B} = 5,0 \cdot 10^{-13} \vec{k} \text{ (T)}$$



Dirección: a perpendicular ao plano determinado por \vec{v} e \vec{r} (plano x,y). Polo tanto, a dirección é a do eixe z.

Sentido: o de avance dun sacarrollas que leve \vec{v} sobre \vec{r} polo camiño máis curto: o de \vec{k} .

Ou senón:

$$\vec{B} = \frac{K' \cdot Q}{r^2} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ u_{rx} & u_{ry} & u_{rz} \end{vmatrix} \rightarrow \vec{B} = \frac{10^{-7} \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{(\sqrt{2^2 + 3^2})^2} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -13 & 0 & 0 \\ -1 \cdot \text{sen} \alpha & -1 \cdot \text{cos} \alpha & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{B} &= \frac{10^{-7} \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{(\sqrt{2^2 + 3^2})^2} \cdot (-13 \cdot (-1 \cdot \text{cos} \alpha) \cdot \vec{k}) \\ \text{cos} \alpha &= \frac{3}{\sqrt{2^2 + 3^2}} \end{aligned} \right\} \rightarrow \vec{B} = 5,0 \cdot 10^{-13} \vec{k} \text{ (T)}$$

O vector unitario de \vec{r} , \vec{u}_r , tamén se obtén coa expresión: $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$. No caso do exercicio é:

$$\vec{u}_r = \frac{-2\vec{i} - 3\vec{j} + 0\vec{k}}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{-2\vec{i}}{\sqrt{13}} + \frac{-3\vec{j}}{\sqrt{13}} + 0\vec{k}$$

Observamos que \vec{B} e \vec{E} son perpendiculares entre si: a dirección de \vec{E} é a de \vec{u}_r e a de \vec{B} a perpendicular a \vec{u}_r (e a \vec{v}).

Como resumo podemos recordar que unha carga eléctrica Q (xa estea en repouso ou en movemento) crea un campo eléctrico, \vec{E} , mentres que se a carga se move crea ademais un campo magnético, \vec{B} , perpendicular a \vec{E} . En consecuencia, as cargas en movemento crean un \vec{E} e un \vec{B} e para describir o seu comportamento é mellor falar de campo electromagnético en vez de referirnos ao campo eléctrico e magnético por separado.

Exercicio resolto

- Calcula e debuxa a forza eléctrica e a forza magnética exercida pola carga do exercicio anterior no caso b) sobre unha carga puntual Q' de $12 \mu\text{C}$ sita no punto $(1,0,0)$ para o caso de que Q' estea: a) En repouso; b) Cunha velocidade de 20 m/s , na dirección do eixe x e no sentido negativo deste.

Solución:

a) $\vec{F}_e = Q' \cdot \vec{E} \rightarrow F_e = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 4154 = 49848 \cdot 10^{-6} \text{ N}$
 $\vec{F}_e = -49848 \cdot 10^{-6} \cdot \sin \alpha \vec{i} - 49848 \cdot 10^{-6} \cdot \cos \alpha \vec{j}$
 $\vec{F}_e = -49848 \cdot 10^{-6} \cdot \sin 33,7^\circ \vec{i} -$
 $49848 \cdot 10^{-6} \cdot \cos 33,7^\circ \vec{j} \text{ (N/C)}$
 $\vec{F}_e = -27657,9 \cdot 10^{-6} \vec{i} - 41471,2 \cdot 10^{-6} \vec{j} \text{ (N/C)}$

Como a carga Q' está en repouso, a forza magnética exercida polo campo magnético creado pola carga Q sobre a carga Q' vale cero: $\vec{F}_{\text{magnética}} = Q' \vec{v} \times \vec{B} = \vec{0}$.

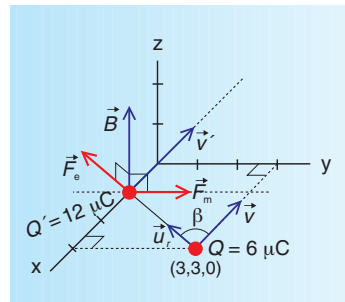
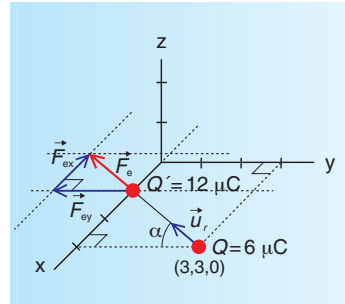
- b) A forza eléctrica coincide coa do apartado anterior. A forza magnética exercida polo \vec{B} creado pola carga Q sobre a carga Q' que se move coa velocidade \vec{v} , calculámola facendo uso da fórmula: $\vec{F}_{\text{magnética}} = Q' \vec{v} \times \vec{B}$

O módulo é:

$$F_{\text{magnética}} = Q' \cdot v \cdot B \cdot \sin 90^\circ$$

$$F_{\text{magnética}} = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot 5,0 \cdot 10^{-13} = 1,2 \cdot 10^{-16} \text{ N}$$

A dirección é a perpendicular á do plano determinado polos vectores \vec{v} e \vec{B} , e o sentido é o de avance dun sacarrollas que leve \vec{v} sobre \vec{B} polo camiño máis curto: $\vec{F}_{\text{magnético}} = 1,2 \cdot 10^{-16} \vec{j} \text{ (N)}$.



Ou senón:

$$\vec{F}_{\text{magnética}} = Q' \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \rightarrow \vec{F}_{\text{magnética}} = 12 \cdot 10^{-6} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5,0 \cdot 10^{-13} \end{vmatrix}$$

$$\vec{F}_{\text{magnética}} = 12 \cdot 10^{-6} \cdot [-(20 \cdot 5,0 \cdot 10^{-13}) \vec{j}] \rightarrow \vec{F}_{\text{magnética}} = 1,2 \cdot 10^{-16} \vec{j} \text{ (N)}$$

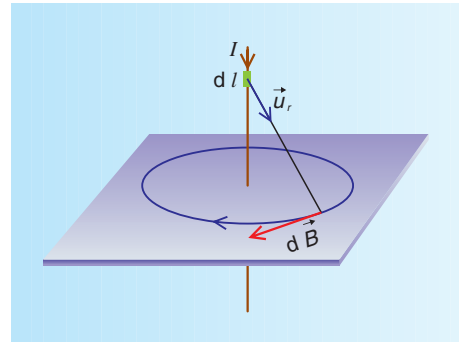
Como resumo podemos recordar que un campo eléctrico \vec{E} exerce sobre unha carga Q' (esteá en repouso ou en movemento) unha forza eléctrica, \vec{F}_e , mentres que a indución magnética \vec{B} só exerce forza sobre Q' se esta se move.

5. CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR UNHA CORRENTE ELÉCTRICA

5.1. Campo magnético creado por un elemento de corrente

Unha corrente eléctrica de intensidade I crea, nun punto do espazo, un campo magnético de indución \vec{B} . Esta \vec{B} é a suma de todos os \vec{B} elementais ($d\vec{B}$) creados polas cargas que forman a corrente. Para coñecer os $d\vec{B}$ consideramos o condutor como formado por anacos elementais, $d\vec{l}$, aos que lles corresponde a carga móbil elemental dQ , que crea a indución magnética $d\vec{B}$:

$$d\vec{B} = \frac{K' \cdot dQ \cdot \vec{v} \times \vec{u}_r}{r^2}$$



Para escribir esta fórmula en función da intensidade de corrente e da lonxitude elemental de condutor imos recordar que:

- $dQ = I \cdot dt$, sendo dQ a carga que atravesa unha sección do condutor percorrido por unha corrente I nun tempo dt .
- $\vec{v} = d\vec{l}/dt$, sendo $d\vec{l}$ a lonxitude elemental que percorren as cargas no tempo dt que se desprazan coa velocidade \vec{v} , podendo escribir:

$$dQ \cdot \vec{v} = I \cdot dt \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = I \cdot d\vec{l}$$

e o valor da indución magnética creada pola carga dQ é:

$$d\vec{B} = K' \frac{I d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

O produto $I \cdot d\vec{l}$ coñécese como elemento de corrente.

Esta fórmula é a expresión matemática da **lei de Biot e Savart** para un elemento de corrente que, ás veces, recibe o nome de **primeira lei de Laplace** por ser quen a estableceu⁹. De aí que se acordou denomíname lei de Biot-Savart-Laplace.

Vemos que \vec{B} , a igual que \vec{E} , é directamente proporcional á carga Q e inversamente proporcional ao cadrado da distancia. Pero hai unha diferenza importante en canto á dirección: \vec{E} ten unha dirección radial mentres que \vec{B} é perpendicular tanto á dirección radial como ao elemento de corrente.

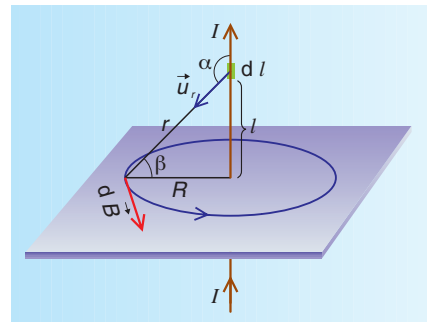
Sumando (integrando) os $d\vec{B}$ correspondentes a todos os elementos de corrente que constitúen o fío condutor obtense o \vec{B} total:

$$\int d\vec{B} = K' \int \frac{I \cdot d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2} = \vec{B}$$

Dependendo da forma xeométrica do condutor, a resolución da integral vai presentar diferente dificultade. A continuación resólvese para unha corrente rectilínea indefinida e para outra circular.

5.2. Campo magnético creado por unha corrente rectilínea indefinida

Para ter unha imaxe de como é o campo magnético creado por unha corrente rectilínea, atravesamos unha cartolina cun condutor recto e salpicamos limaduras de ferro ou colocamos compases sobre ela. O sentido de \vec{B} podemos coñecelo vendo a orientación da agulla imantada ou facendo uso da regra do sacarrollas ou da regra da man dereita.



A corrente rectilínea pode considerarse como formada por sucesivos elementos de corrente ($I \cdot d\vec{l}$). Cada un deles crea o seu propio campo, de modo

que o campo total será a suma (integral) de todos os campos elementais. Operando desta forma pódese deducir o valor de \vec{B} producido por unha corrente rectilínea indefinida (ou o que é o mesmo, nas súas proximidades) que foi medido experimentalmente por primeira vez por Biot e Savart¹⁰, en cuxa honra se coñece como lei de Biot e Savart.

O vector campo magnético debido ao elemento de corrente $I \cdot d\vec{l}$ é: $d\vec{B} = K' \frac{I \cdot d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2}$.

⁹ Experimentalmente non se pode illar unha porción de corrente estacionaria e, en consecuencia, non se pode medir directamente o campo magnético que crea. No entanto, Laplace logrou encontrar unha expresión do campo magnético creado por un elemento de corrente que, ao aplicala a todos os elementos de corrente que forman a corrente total, permite obter o valor do campo que esta crea, coincidindo co valor experimental.

¹⁰ Estes físicos, no ano 1820, publicaron os resultados da primeira investigación cuantitativa sobre un campo magnético producido por unha corrente eléctrica.

Sumando o vector campo magnético de todos os elementos de corrente temos:

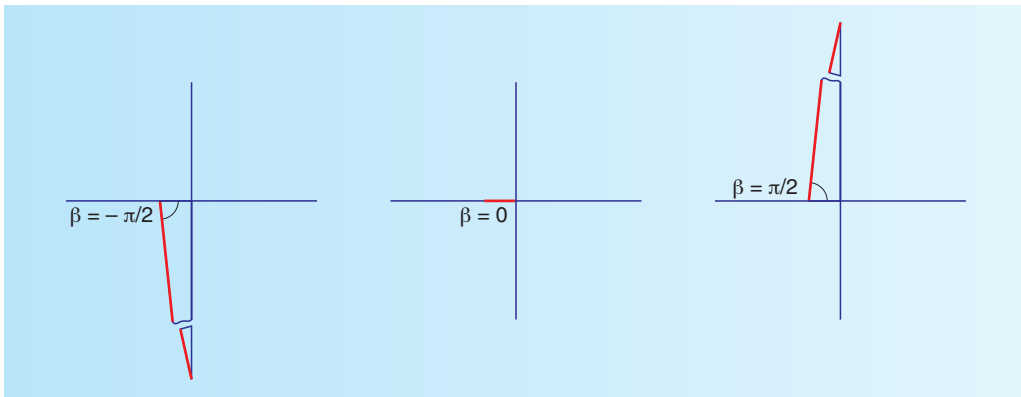
$$\int d\vec{B} = \vec{B} = \int K' \frac{I d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2} \rightarrow B = K' I \int \frac{dl \sin \alpha}{r^2} = K' I \int \frac{dl \cos \beta}{r^2}$$

Eliximos o ángulo β como variábel independente:

$$\left. \begin{aligned} \tan \beta &= \frac{l}{R} \rightarrow l = R \tan \beta \rightarrow dl = \frac{R d\beta}{\cos^2 \beta} \\ \cos \beta &= \frac{R}{r} \rightarrow \cos^2 \beta = \frac{R^2}{r^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow dl = \frac{R \cdot r^2}{R^2} d\beta$$

$$B = K' I \int \frac{R \cdot r^2 \cos \beta}{R^2 r^2} d\beta = K' \frac{I}{R} \int \cos \beta d\beta$$

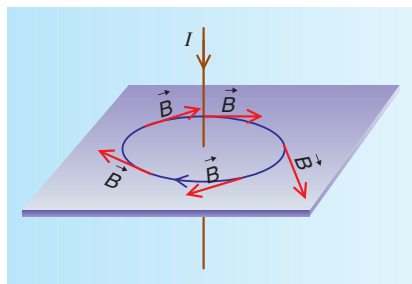
Como o fío é indefinido, β vai desde $-\pi/2$ até $+\pi/2$.



$$B = \frac{K' I}{R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \beta d\beta = \frac{K' I}{R} \left[\sin \beta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{K' I}{R} \left[\sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{2 K' I}{R}$$

Vemos que B é directamente proporcional á intensidade de corrente eléctrica I e inversamente proporcional á distancia perpendicular que vai desde o punto onde se calcula até o condutor.

A dirección de \vec{B} é a perpendicular ao plano determinado por $d\vec{l}$ e \vec{u}_r , sendo tanxente á circunferencia con centro o condutor e que pasa polo punto no que se calcula¹¹ e o sentido é o de xiro dun sacarrollas que avance co sentido da corrente.



¹¹ Fixémonos que as liñas de indución do campo magnético creado por unha corrente rectilínea indefinida son circunferencias concéntricas co fío e están situadas nun plano perpendicular a el.

- ▶ Calcula o valor do campo magnético creado por unha corrente rectilínea indefinida de intensidade $I = 5 \text{ A}$ nun punto situado a unha distancia perpendicular de 8 cm do fío condutor.

Solución:

Sabemos que: $\vec{B} = \frac{2 K'_0 I}{r} \vec{u}_B$

Calculamos o módulo de \vec{B} substituíndo datos na expresión anterior:

$$B = \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot 5}{0,08} \rightarrow B = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

A dirección de \vec{B} é a perpendicular ao plano determinado polo fío condutor e o punto onde o calculamos e o seu sentido vén dado polo sentido de xiro dun sacarrallas que facemos avanzar co sentido da corrente. Supoñamos que o fío condutor ten a dirección do eixe z e o sentido da corrente é o da parte positiva deste (k) é o campo magnético o calculamos no punto $(0, -8, 0)$; nun sistema de eixes cartesianos, a dirección do vector \vec{B} é a do eixe x e o seu sentido é o da parte positiva deste:

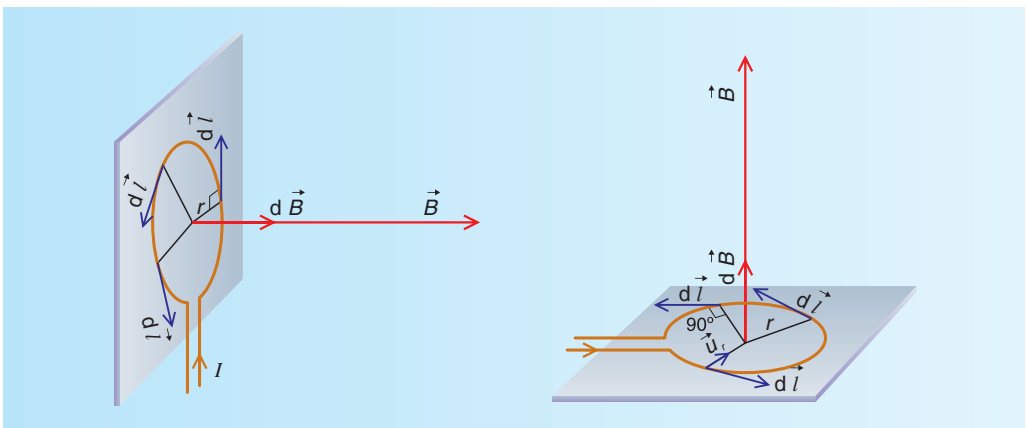
$$\vec{B} = 1,25 \cdot 10^{-5} \vec{i} \text{ (T)}$$

5.3. Campo magnético creado no centro dunha espira pola corrente que a percorre

Para calcular a indución magnética creada por unha corrente circular de intensidade I , empezamos considerando a espira formada por infinitos elementos de corrente, $I \cdot d\vec{l}$, creando, cada un deles, un campo magnético elemental, $d\vec{B}$, e o campo total obtense por suma (integración) de todos os campos elementais:

$$\vec{B} = \int \frac{K' \cdot I \cdot d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

$$B = K' I \int_0^{2\pi r} \frac{dl \sin 90^\circ}{r^2} = \frac{K' \cdot I}{r^2} [l]_0^{2\pi r} = \frac{K' \cdot I}{r^2} 2\pi r = \frac{2\pi K' I}{r}$$



Se en vez dunha espira, temos N espiras (unha bobina¹²) o campo total é:

$$B = \frac{2 \pi K' I N}{r}$$

A dirección de \vec{B} é perpendicular ao plano da espira e o sentido vén dado polo de xiro dun sacarrallas que avance no mesmo sentido que o da corrente.

Exercicio resolto

- ▶ Unha bobina circular, situada no plano yz e no baleiro, está formada por 500 espiras dun fío condutor polo que circula unha corrente de 8 A no sentido horario (cando se mira desde a parte positiva do eixe x). Calcula a intensidade de campo magnético no centro da bobina sabendo que o seu diámetro é de 30 cm e a súa lonxitude de 4 cm.

Solución:

Ao tratarse dunha bobina de $r \gg l$ aplicamos a fórmula que acabamos de obter:

$$\vec{B} = \frac{2 \pi K'_0 I N}{r} \vec{u}_B,$$

sendo \vec{u}_B o vector unitario de \vec{B} .

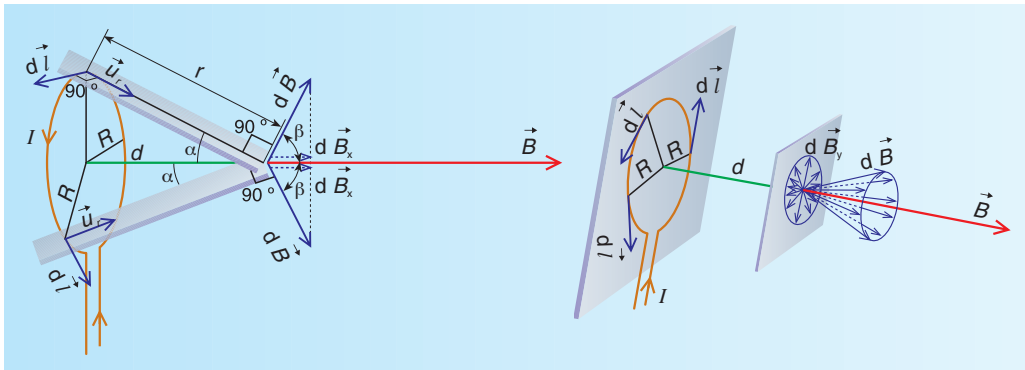
$$B = \frac{2 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 8 \cdot 500}{0,15} \rightarrow B = 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ T}$$

A dirección de \vec{B} é a do eixe x e o sentido o da parte negativa deste: $-\vec{i}$.

$$\vec{B} = -1,7 \cdot 10^{-2} \vec{i} \text{ (T)}$$

5.4. Campo magnético creado por unha corrente circular nun punto do seu eixe

Consideremos a espira formada por infinitos elementos de corrente $I \cdot d\vec{l}$. Cada elemento de corrente crea un campo magnético elemental $d\vec{B}$ e o campo total obtémolo por suma (integración) de todos os campos elementais.



¹² Unha bobina consiste en N espiras paralelas moi próximas enroladas arredor dun cilindro de lonxitude moito menor que o seu raio. Máis adiante calcularemos o \vec{B} creado no interior dun solenoide (número grande de espiras enroladas arredor dun cilindro de raio moi pequeno en comparación coa súa lonxitude). Mentres que unha bobina se comporta de forma equivalente a un conxunto de espiras iguais, un solenoide non ten este comportamento.

A dirección de $d\vec{B}$ é perpendicular ao plano determinado polo elemento de corrente $I \cdot d\vec{l}$ e u_r .

Descompoñemos $d\vec{B}$ en $d\vec{B}_x$ e $d\vec{B}_y$. Facilmente vese que os compoñentes perpendiculares ao eixe anúlanse entre si, de modo que para calcular o \vec{B}_{total} soamente se sumarán os compoñentes $d\vec{B}_x$.

Como: $dB = K' I \int \frac{dl \sin 90^\circ}{r^2}$, resulta

$$dB_x = dB \cos \beta \rightarrow B_x = B = K' I \int_0^{2\pi R} \frac{dl}{r^2} \cos \beta = \frac{K' I}{r^2} \cos \beta [l]_0^{2\pi R}$$

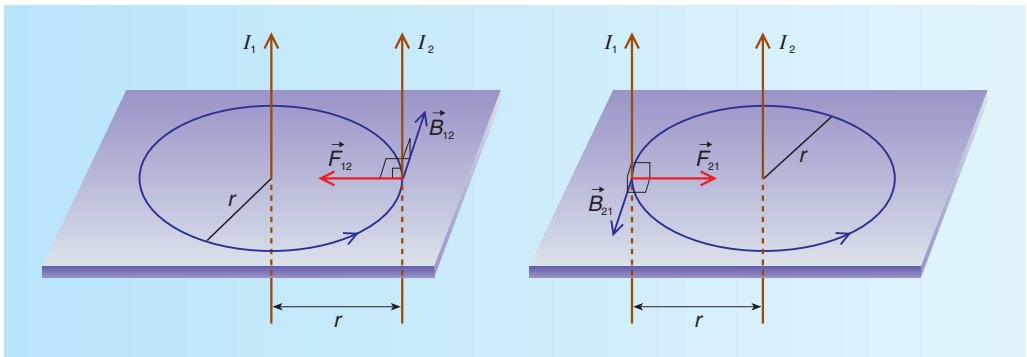
$$B = \frac{2 \pi K' I R}{r^2} \cos \beta = \frac{2 \pi K' I R}{r^2} \sin \alpha = \frac{2 \pi K' I R R}{r^2 r} = \frac{2 \pi K' I R^2}{(R^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Sendo R o raio da espira e d a distancia que vai desde o centro da espira ao punto onde calculamos \vec{B} .

A dirección do campo é a do eixe da espira e o sentido vén dado pola regra do sacarrollas ou a da man dereita.

6. FORZAS MAGNÉTICAS ENTRE CORRENTES ELÉCTRICAS PARALELAS: DEFINICIÓN DE AMPERE

Xa vimos que unha corrente eléctrica crea un campo magnético, que exerce unha forza sobre outra corrente eléctrica (cargas en movemento). Por tanto, se poñemos dous condutores rectilíneos paralelamente e separados unha distancia r , percorridos polas correntes eléctricas I_1 e I_2 , obsérvase entre eles unha forza atractiva ou repulsiva, segundo que as correntes teñan o mesmo sentido ou sentido contrario, respectivamente.



O valor da forza exercida polo primeiro condutor sobre o segundo é:

$$\vec{F}_{12} = I_2 \vec{l} \times \vec{B}_{12}$$

sendo \vec{B}_{12} o valor do campo magnético creado pola corrente I_1 onde se encontra o segundo condutor, a unha distancia r .

Como o campo magnético creado por unha corrente rectilínea indefinida I_1 á distancia r é: $B_{12} = 2 \cdot K' \cdot I_1 / r$, resulta:

$$F_{12} = \frac{2 \cdot K' \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot l}{r}$$

De igual maneira, o segundo condutor exerce outra forza sobre o primeiro, sendo de igual valor numérico e dirección e de sentido contrario.

A forza entre correntes eléctricas utilízase para definir a intensidade de corrente no SI, que é o ampere (A).

A forza por unidade de lonxitude é:

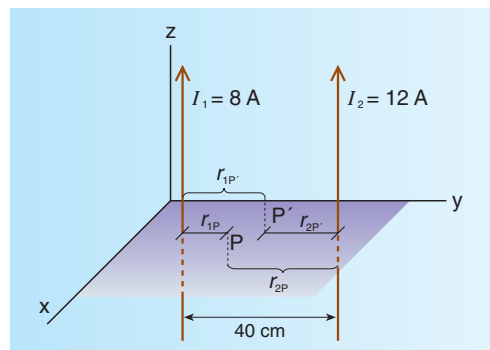
$$\frac{F}{l} = \frac{2 \cdot K' \cdot I_1 \cdot I_2}{r}$$

Se substituímos K' polo seu valor no baleiro ($K_0' = 10^{-7}$ unidade do SI) e r por 1 m, defínese o ampere da seguinte forma:

Ampere, A, é a intensidade de corrente eléctrica que, ao circular no mesmo sentido por dous condutores rectilíneos, paralelos, indefinidos, separados 1 m e situados no baleiro, se atraen cunha forza de $2 \cdot 10^{-7}$ N por metro de lonxitude.

Exercicio resolto

- Para o caso da figura calcula:
 - a) O punto P para o cal \vec{B}_{total} é nulo.
 - b) O valor de \vec{B} no punto P', equidistante dos dous condutores.
 - c) A forza magnética, que a corrente I_1 exerce sobre o condutor 2, por unidade de lonxitude.
- Nota: os condutores están no baleiro.



Solución:

- a) $\vec{B}_{\text{total}} = \vec{B}_{1P} + \vec{B}_{2P} = \vec{0} \rightarrow \vec{B}_{1P} = -\vec{B}_{2P}$

$$\left. \begin{aligned} B_{1P} &= \frac{2 K_0' I_1}{r_{1P}} \\ B_{2P} &= \frac{2 K_0' I_2}{r_{2P}} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot 8}{r_{1P}} &= \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot 12}{r_{2P}} \\ r_{1P} + r_{2P} &= 0,4 \end{aligned} \right\} \rightarrow r_{1P} = 0,16 \text{ m}$$
- b) $\vec{B}_{1P'} = \frac{2 K_0' I_1}{r_{1P'}} \vec{u}_1$, sendo \vec{u}_1 o vector unitario de $\vec{B}_{1P'}$.

$$B_{1P'} = \frac{2 K'_0 I_1}{r_{1P'}} \rightarrow B_{1P'} = \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot 8}{0,2} \rightarrow B_{1P'} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

$$\vec{B}_{1P'} = -8 \cdot 10^{-6} \vec{i} \text{ (T)}$$

$$\vec{B}_{2P'} = \frac{2 K'_0 I_2}{r_{2P'}} \vec{u}_2, \text{ sendo } \vec{u}_2 \text{ o vector unitario de } \vec{B}_{2P'}.$$

$$B_{2P'} = \frac{2 K'_0 I_2}{r_{2P'}} \rightarrow B_{2P'} = \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot 12}{0,2} \rightarrow B_{2P'} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

$$\vec{B}_{2P'} = 12 \cdot 10^{-6} \vec{i} \text{ (T)}$$

$$\vec{B}_{\text{total}} = \vec{B}_{1P'} + \vec{B}_{2P'} \rightarrow \vec{B}_{\text{total}} = -8 \cdot 10^{-6} \vec{i} + 12 \cdot 10^{-6} \vec{i} \rightarrow \vec{B}_{\text{total}} = 4 \cdot 10^{-6} \vec{i} \text{ (T)}$$

c) $\vec{F}_{1-2} = I_2 \vec{l} \times \vec{B}_{1-2}$

$$\vec{B}_{1-2} = \frac{2 K'_0 I_1}{r_{1-2}} \vec{u}_{1-2} \rightarrow \vec{B}_{1-2} = \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot 8}{0,4} (-\vec{i}) \rightarrow \vec{B}_{1-2} = -4 \cdot 10^{-6} \vec{i} \text{ (T)}$$

$$F_{1-2}/l = 12 \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot \text{sen } 90^\circ = 4,8 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

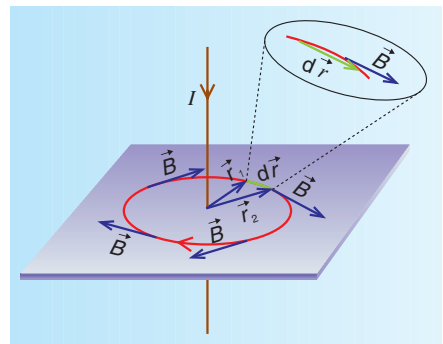
$$\vec{F}_{1-2}/l = -4,8 \cdot 10^{-5} \vec{j} \text{ (N m}^{-1}\text{)}$$

7. LEI DE AMPÈRE. CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR UN SOLENOIDE

7.1. Lei de Ampère

A circulación da indución magnética \vec{B} ao longo dunha liña pechada non é nula, como ocorre nos campos conservativos¹³. O campo magnético \vec{B} non é conservativo:

$$C = \oint \vec{B} \cdot d\vec{r}$$



¹³ Recordemos que no caso do campo eléctrico e gravitatorio estas integrais son nulas:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0; \oint \vec{g} \cdot d\vec{l} = 0$$

e o traballo só depende dos puntos entre os que se realiza. Por iso definimos unha enerxía potencial e un potencial (eléctrico e gravitatorio). No entanto no campo magnético non hai potencial magnético análogo. Outra magnitude na que se diferencia o campo eléctrico e o magnético é no fluxo. No campo eléctrico temos: $\Phi = Q/\epsilon$ (Teorema de Gauss). Porén, para o campo magnético o fluxo (Φ) a través dunha superficie pechada é cero: as liñas de campo magnético son continuas a través desta superficie –entra o mesmo número de liñas que saen.

Calculamos agora a circulación de \vec{B} , creado por unha corrente estacionaria, rectilínea e indefinida, I , ao longo dunha circunferencia de raio r , que ten por centro un punto do condutor.

\vec{B} é sempre tanxente á circunferencia elixida no punto considerado, co que o produto $\vec{B} \cdot d\vec{r}$ é igual a $B \cdot dr$. Ademais B -módulo de \vec{B} - é constante –recordemos a lei de Biot e Savart: $B = 2 \cdot K' \cdot I/r$ -, co que:

$$C = \oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \oint B \cdot dr = B \int_0^{2\pi r} dr = B \cdot [r]_0^{2\pi r} = B \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$$

resultando:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{2 K' I}{r} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = \frac{2 \frac{\mu}{4\pi} I}{r} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = \mu I$$

Esta expresión coñécese como **Lei de Ampère**. Se son varias as correntes (I_1, I_2, \dots) encerradas pola liña pechada, a lei de Ampère é:

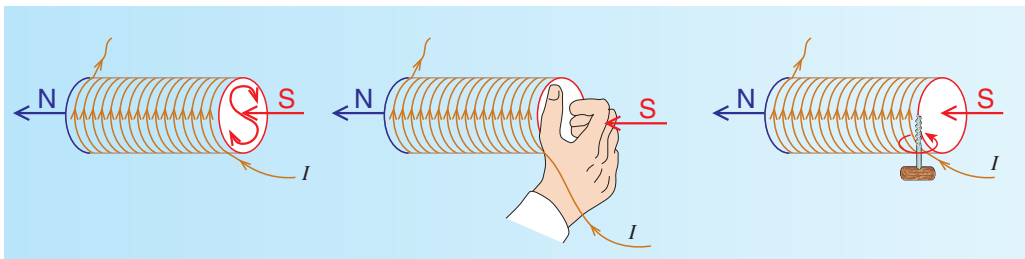
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu (I_1 + I_2 + \dots)$$

Vemos que a circulación de \vec{B} ao longo dunha liña pechada é distinta de cero, o que nos di que **o campo magnético é non conservativo**. A lei de Ampère é equivalente ao teorema de Gauss para o campo eléctrico.

7.2. Campo magnético creado por un solenoide recto no seu interior

Un solenoide consiste nun gran número de espiras moi próximas, dun fío condutor, enroladas arredor dun cilindro de raio moi pequeno en comparación coa súa lonxitude, polas que circula a mesma intensidade de corrente.

Xa sabemos que unha espira percorrida por unha corrente I se comporta como imán rectilíneo que ten por tamaño o da espira. As caras sur e norte deste imán –espira– son función do sentido da corrente, podendo recoñecelas coa regra das letras S e N.



Un solenoide recto polo que circula unha corrente eléctrica I compórtase como un imán recto co seu polo norte e sur.

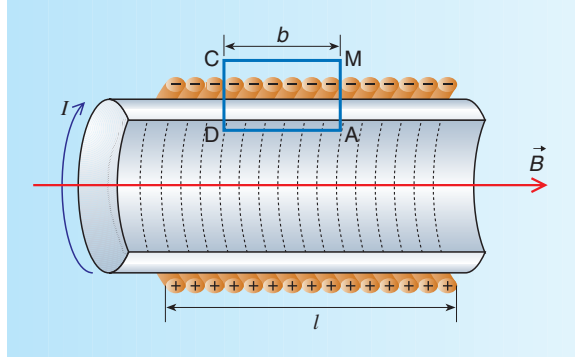
A regra da man dereita ou a do sacarrollas permítenos tamén coñecer o sentido do campo magnético creado pola corrente da espira.

No caso do solenoide, ao ter moitas espiras, súmanse os \vec{B} elementais ($d\vec{B}$) debidos a cada espira.

Para o cálculo do campo magnético no interior do solenoide aplicamos a lei de Ampère, tendo en conta que:

- O campo magnético no interior do solenoide está dirixido ao longo do seu eixe, sendo uniforme e moi intenso.
- O campo magnético fóra do solenoide é desprezábel.

Agora empezamos trazando unha liña pechada, tomando unha sección lonxitudinal do solenoide: a rectangular AMCD da figura.



Seguimos co cálculo da circulación ao longo do rectángulo trazado:

$$C = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$C = \int_A^M \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_M^C \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$C = \int_A^M B \, dl \cos 90^\circ + \int_M^C 0 \, dl + \int_C^D B \, dl \cos 90^\circ + \int_D^A B \, dl \cos 0^\circ = B [l]_D^A = B b$$

Por último, recordando a lei de Ampère: $\oint B \, dl = \mu I N'$ ¹⁴, resulta que:

$$B b = \mu I N' \rightarrow B = \frac{\mu I N'}{b}$$

Este resultado podémolo expresar en función da corrente total do solenoide. Se N é o número de espiras do solenoide e l a súa lonxitude, N/l é o número de espiras por unidade de lonxitude e Nb/l é o número de espiras na lonxitude b . Polo tanto, Nb/l é a corrente total que flúe a través das espiras encerradas no rectángulo elixido, podendo substituír esta expresión en IN' , resultando:

$$B = \frac{\mu}{b} \cdot \frac{N b I}{l} = \frac{\mu N I}{l}$$
¹⁵

expresión que nos di que o campo magnético creado no interior dun solenoide vai depender da corrente que por el circula: NI/l (número de espiras por unidade de lonxitude pola intensidade de cada espira) e do medio, μ .

¹⁴ N' é o número de espiras abarcadas polo rectángulo e I é a intensidade de cada espira, sendo, polo tanto, IN' a corrente total abarcada pola liña pechada elixida.

¹⁵ Non confundir esta fórmula: $B = \mu \cdot N \cdot I / l = 4 \cdot \pi \cdot K' \cdot I \cdot N / l$ –conseguida para un solenoide que ten un raio desprezábel fronte á súa lonxitude– coa obtida para unha espira ($B = 2 \cdot \pi \cdot K' \cdot I / r$) e, por extensión, para unha bobina ($B = 2 \cdot \pi \cdot K' \cdot I \cdot N / r$) válida cando a súa lonxitude é desprezábel fronte ao seu raio.

- Unha bobina circular, que ten a superficie das espiras situada no plano yz e no baleiro, está formada por 500 espiras dun fio condutor polo que circula unha corrente de 8 A no sentido horario, cando se observa no sentido negativo do eixe x. Calcula a intensidade de campo magnético no centro da bobina sabendo que o seu diámetro é de 3 cm e a súa lonxitude de 9 cm.

Solución:

Ao tratarse dunha bobina de $l \gg r$ aplicamos a fórmula que acabamos de obter:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{l} \vec{u}_B = \frac{4 \pi K'_0 I N}{l} \vec{u}_B$$

$$B = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 8}{0,09} = 5,6 \cdot 10^{-2} \text{ T}$$

$$\vec{B} = -5,6 \cdot 10^{-2} \vec{i} \text{ (T)}$$

8. ANALOXÍAS E DIFERENZAS ENTRE O CAMPO ELÉCTRICO E O CAMPO MAGNÉTICO

As analoxías que podemos destacar entre os campos eléctrico e magnético son:

- As partes escalares dos vectores campo eléctrico e campo magnético son inversamente proporcionais ao cadrado da distancia que separa o punto onde se calcula o campo do punto onde está o elemento que o causa.
- A intensidade da interacción depende do medio.
- Existen dipolos eléctricos e dipolos magnéticos.
- Os dipolos, xa sexan eléctricos ou magnéticos, se teñen liberdade para moverse, oriéntanse no sentido do campo.

As diferenzas que subliñamos son:

- A presenza dunha carga eléctrica (estea en repouso ou en movemento) dota á rexión do espazo en que se encontra de certa propiedade, creándose un campo eléctrico. Para que apareza un campo magnético é necesario que a carga estea en movemento.
- Unha carga eléctrica, xa estea en repouso ou en movemento, situada nun campo eléctrico está sometida a unha forza eléctrica. No entanto, para que sobre unha carga que está nun campo magnético actúe unha forza magnética é necesario que a carga estea en movemento.
- O campo eléctrico é un campo de forzas centrais. Polo contrario, o campo magnético non é central: nun punto a dirección do vector intensidade de campo non coincide coa dirección que une ese punto co elemento que o crea (a súa dirección é perpendicular á dirección radial).

- O campo eléctrico é conservativo e defínese unha enerxía potencial eléctrica e un potencial eléctrico (e a variación do potencial permite obter o valor da intensidade de campo). Estas magnitudes non se poden definir no campo magnético porque non é conservativo.
- A forza eléctrica ten a dirección do vector campo eléctrico (é radial), mentres que a forza magnética é perpendicular ao vector campo magnético.
- No campo eléctrico as liñas de campo son liñas de forza (teñen a dirección da forza eléctrica) e son abertas, é dicir: empezan nalgún punto e terminan nalgún outro. No campo magnético as liñas de campo non son liñas de forza, xa que non teñen a dirección da forza magnética; chámanse **liñas de indución** e son pechadas.
- No campo magnético o fluxo a través dunha superficie pechada é nulo, mentres que no campo eléctrico se obtén coa expresión Q/ϵ .
- No campo eléctrico a intensidade da interacción é maior no baleiro que nos medios materiais, mentres que no campo magnético, segundo o tipo de material, pode ser maior ou menor que no baleiro.
- Existen cargas eléctricas separadas (+ ou -) pero os polos magnéticos son inseparábeis.

Facemos a comparación das expresións de distintas magnitudes correspondentes a ambos campos:

MAGNITUDE	CAMPO ELÉCTRICO	CAMPO MAGNÉTICO
Forza	$\vec{F} = Q \vec{E}$	$\vec{F} = Q \vec{v} \cdot \vec{B}$
Intensidade de campo	$\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$	$\vec{B} = K \frac{Q \vec{v} \times \vec{u}_r}{r^2}$
Circulación	$C = \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$	$C = \oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu I$
Fluxo	$\Phi_{S \text{ pechada}} = \frac{Q}{\epsilon}$	$\Phi_{S \text{ pechada}} = 0$

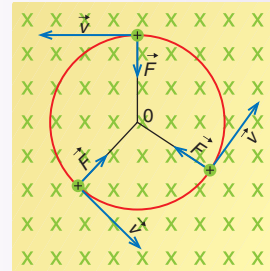
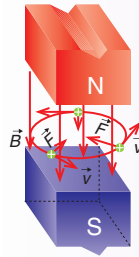


EXERCICIOS
(cuestións)

1. Mapa conceptual dos contidos do tema.
2. Que movemento tomará unha partícula de masa m e carga $+Q$ que nun instante determinado se move cunha velocidade \vec{v} perpendicularmente ás liñas de indución dun campo magnético \vec{B} , que é estacionario e uniforme¹⁶?

Resposta: Supoñamos un campo magnético uniforme no que \vec{B} é perpendicular ao plano do papel, sendo o seu sentido cara abaixo. Isto represéntase por “x”, como se víramos a parte posterior da frecha que representa o vector \vec{B} “ \times ”. Se o campo saíra cara ao lector, representaríamolo por “.”, como se víramos a punta da frecha.

A carga $+Q$, que se move perpendicularmente ao campo \vec{B} cunha velocidade \vec{v} , está sometida a unha forza magnética \vec{F} : $\vec{F} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$, de dirección perpendicular ao plano determinado por \vec{v} e \vec{B} e co sentido de avance dun sacarrrollas que xire levando \vec{v} sobre \vec{B} polo camiño máis curto, estando contida no plano do papel cara ao punto O. As forzas perpendiculares á traxectoria dunha partícula non modifican o módulo da velocidade¹⁷, unicamente fan variar a dirección do movemento. En consecuencia a partícula terá un **movemento uniforme**.



Como Q , v e B son constantes, a forza F ($F = Q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen } 90^\circ$) é constante e, en consecuencia, a aceleración a ($a = F/m$) tamén é constante e a partícula cargada toma un **movemento circular uniforme**¹⁸. O raio con que describe este movemento circular calcúlase igualando a forza magnética ($Q \cdot v \cdot B$) á forza centrípeta ($m \cdot v^2/r$):

$$Q \cdot v \cdot B = m \cdot v^2/r \quad \rightarrow \quad r = m \cdot v / Q \cdot B$$

Nesta expresión vemos que o valor do raio é directamente proporcional ao módulo da cantidade de movemento, $m \cdot v$, da partícula cargada.

¹⁶ Campo magnético estacionario, tamén chamado magnetostático, indica que é constante no tempo (pode ser diferente nos distintos puntos).

Campo magnético uniforme indica que ten a mesma intensidade, dirección e sentido en todos os puntos do espazo (pode variar no tempo).

¹⁷
$$\left. \begin{aligned} W &= \int F \cdot d r \cdot \cos 90^\circ = 0 \\ W &= \Delta E_k \end{aligned} \right\} \rightarrow 0 = \Delta E_k \rightarrow v = \text{cte.} \rightarrow \text{movemento uniforme}$$

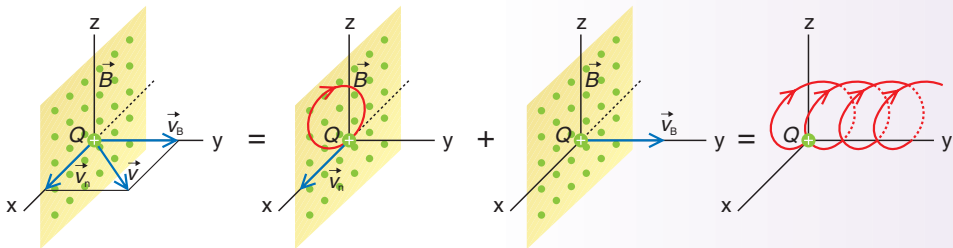
¹⁸
$$\left. \begin{aligned} v &= \text{cte.} \rightarrow \vec{a}_t = \vec{0} \\ \vec{v} &\neq \text{cte.} \rightarrow \vec{a} \neq \vec{0} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}_n = \frac{v^2}{r} \vec{u}_n \\ a &= \text{cte.} \\ v &= \text{cte.} \end{aligned} \right\} \rightarrow r = \text{cte} \rightarrow \text{circunferencia}$$

Como ademais o módulo da velocidade é constante, a partícula cargada adquire un movemento circular uniforme.

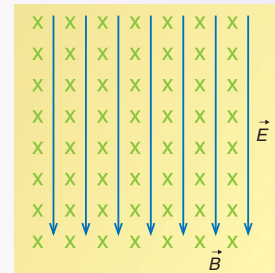
3. Que traxectoria describirá unha partícula de masa m e carga $+Q$ que nun instante determinado se move cunha velocidade \vec{v} nun campo magnético \vec{B} , que é estacionario e uniforme, formando a dirección de \vec{v} e \vec{B} un ángulo α ?

Resposta: Descompoñemos a velocidade \vec{v} da partícula cargada en dúas direccións perpendiculares: unha na dirección de \vec{B} , \vec{v}_B , e a outra na dirección perpendicular a esta, \vec{v}_n .

Como xa vimos na cuestión anterior, o campo magnético \vec{B} exerce unha forza, constante en módulo, sobre a carga Q , debido ao compoñente normal, \vec{v}_n , da velocidade \vec{v} coa que se move. Esta forza ten a dirección perpendicular á tanxente á traxectoria e cáusalle un movemento circular uniforme. No entanto, o campo magnético \vec{B} non exerce ningunha forza sobre a carga Q debido ao compoñente da velocidade que é paralelo a \vec{B} ($F = Q \cdot v \cdot \sin 0^\circ = 0$ ou $F = Q \cdot v \cdot \sin 180^\circ = 0$). Polo tanto, o compoñente da velocidade paralelo a \vec{B} é constante e nesta dirección a carga toma un movemento rectilíneo e uniforme. Como consecuencia, a carga seguirá unha **traxectoria helicoidal** con eixe o da dirección do campo.



4. Un protón entra cunha velocidade \vec{v} nunha rexión do espazo na que hai un campo magnético \vec{B} e un campo eléctrico \vec{E} , ambos estacionarios e uniformes. Os dous campos son perpendiculares entre si e á velocidade do devandito protón, tal como se pode ver na figura. Debuxa as forzas que actúan sobre o protón. Poderá atravesar o protón a rexión dos campos sen desviarse?



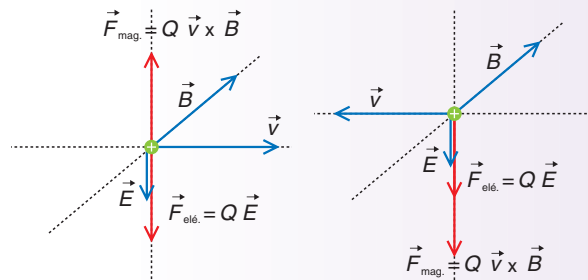
Resposta:

Cando a forza eléctrica e magnética sexan iguais en módulo e dirección, e de sentido contrario, o protón atravesará a rexión dos campos sen desviarse. Isto sucede se se cumpre que:

$$Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = -Q \cdot \vec{E}$$

Para isto é necesario que:

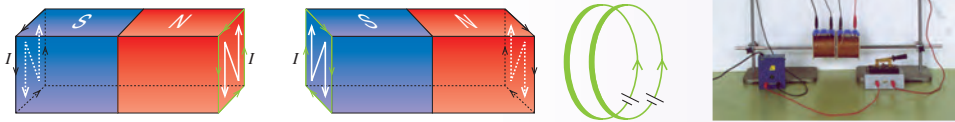
- $|Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}| = |Q \cdot \vec{E}| \rightarrow v \cdot B = E$
- A dirección de $\vec{v} \times \vec{B}$ sexa igual á de \vec{E} , feito que se cumpre.
- O sentido de $\vec{v} \times \vec{B}$ sexa contrario ao de \vec{E} . As dúas situacións posibles representáanse nas figuras. No primeiro caso, o sentido da $\vec{F}_{magnética}$ que actúa sobre o protón é contrario ao sentido da $\vec{F}_{eléctrica}$, re-



sultando, se ademais $v \cdot B = E$, que $\vec{F}_{\text{resultante}} = \vec{0}$ e o protón atravesará a rexión dos campos sen desviarse. No segundo caso, o sentido da $\vec{F}_{\text{magnética}}$ coincide co sentido da $\vec{F}_{\text{eléctrica}}$, sendo a $\vec{F}_{\text{resultante}} \neq \vec{0}$, cunha dirección que non coincide coa de \vec{v} , o que significa que o protón cambia a dirección da súa traxectoria.

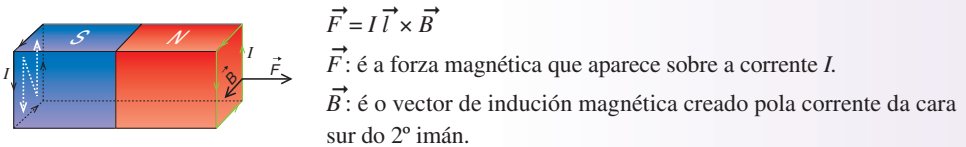
5. Razoa, en termos de correntes eléctricas, por que se atraen os polos norte e sur de dous imáns.

Resposta: A razón do magnetismo está na existencia de correntes eléctricas pechadas no interior dos corpos magnéticos. Os electróns, ao xirar nas súas órbitas ou sobre si mesmos (spin), equivalen a correntes circulares elementais que, cando xiran no mesmo plano e co mesmo sentido, causan unha corrente superficial, que crea un campo magnético perpendicular ao plano da órbita.



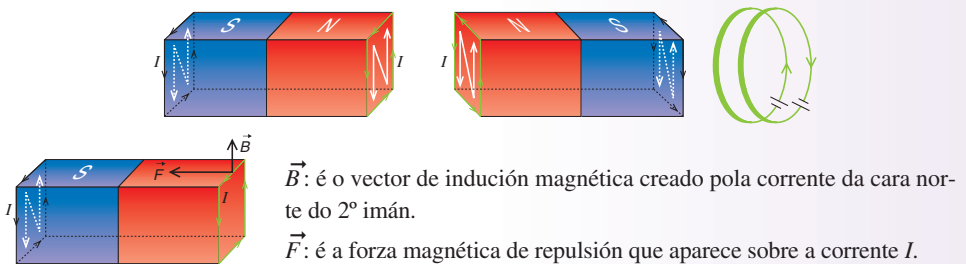
A corrente circular que aparece no polo norte é de sentido contrario á do polo sur, cando se miran os polos de fronte (ao mirar polo reverso un N escrito nun papel lese un S).

Por tanto, o efecto total de enfrontar un polo norte e un polo sur de dous imáns é como se enfrontáramos dúas espiras paralelas percorridas por correntes do mesmo sentido (cando se miran desde o mesmo lado) aparecendo entre elas forzas de atracción.



6. Ídem á anterior, pero agora a repulsión entre polos iguais de dous imáns.

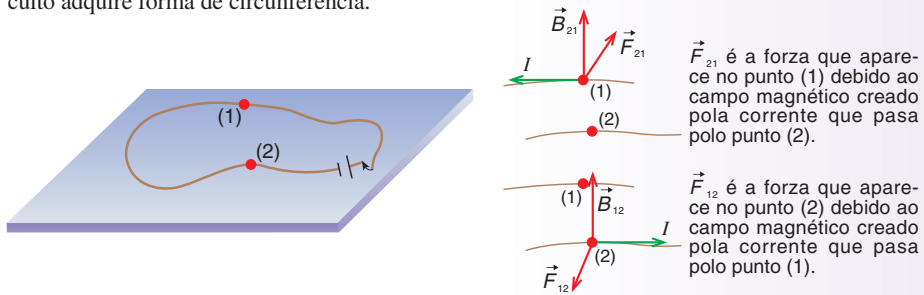
Resposta: Igual á anterior pero agora, ao enfrontar polos de igual nome, é como se enfrontáramos espiras paralelas percorridas por correntes en sentido contrario (cando se miran desde o mesmo lado).



7. Tense un circuíto formado por un condutor moi flexíbel percorrido por unha corrente de grande intensidade, situado sobre unha mesa sen rozamento; estuda como é a forza magnética (dirección

e sentido) que actúa sobre o condutor debida á corrente que percorre a dúas porcións opostas de condutor e di, como consecuencia da forza magnética, que forma xeométrica tende a tomar o condutor. (Nota: Considera cada dúas porcións opostas de circuito como dúas correntes paralelas).

Resposta: Como cada dúas porcións opostas de condutor se poden considerar como paralelas, ao circular polo fío unha corrente eléctrica é como se de dúas correntes paralelas de sentido contrario se tratara, aparecendo entre elas forzas de repulsión perpendiculares ao condutor, de maneira que o circuito adquire forma de circunferencia.

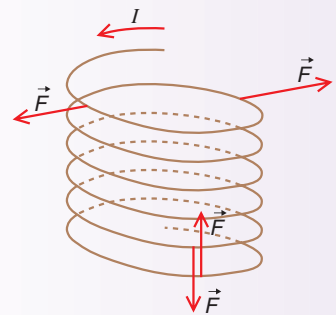


8. Igual á cuestión anterior pero agora para un resorte. (Nota: Cada dúas espiras constitúen dúas correntes paralelas).

Resposta: Cada dúas espiras consecutivas percorridas por unha corrente eléctrica constitúen dúas correntes paralelas do mesmo sentido, aparecendo forzas atractivas entre elas.

Ademais, como as correntes dentro dunha mesma espira son diametralmente opostas, actúa unha forza que as ensancha –véxase cuestión anterior–.

En resumo: o resorte encóllese e ensánchase.



9. Explica o funcionamento do galvanómetro elemental de imán móbil utilizado no laboratorio: imán móbil unido perpendicularmente a unha agulla que se despraza solidariamente –co imán– sobre unha escala, introducido nunha bobina.

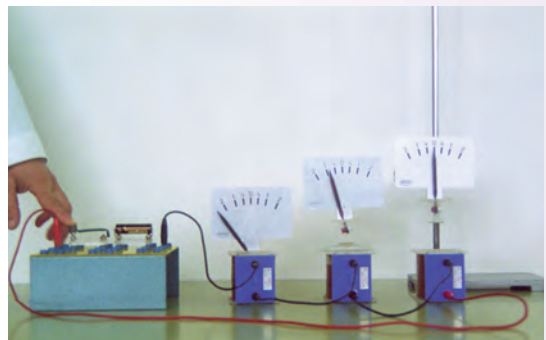
Como inflúe o número de espiras da bobina na desviación da agulla?

Por que ao afastar o imán do interior da bobina se fai máis pequena a desviación da agulla?

Resposta:

O galvanómetro do que falamos consiste nun imán móbil que pivota sobre dous apoios e leva unido unha pequena agulla cunha dirección perpendicular á da dirección N–S do imán.

En ausencia de corrente eléctrica, o imán adopta unha posición horizontal polo seu peso. Ao facer pasar unha corrente pola bobina, aparece dentro desta un campo magnético ($B \propto I$) que obriga a orientar o



imán. Orientación que é directamente proporcional ao valor do campo magnético producido pola corrente. E, como esta B é directamente proporcional á I , coa desviación da agulla medimos a intensidade I .

O número de espiras da bobina inflúe aumentando o valor de \vec{B} creado dentro dela e, como consecuencia, aumentando a desviación da agulla.

Se afastamos o imán móbil do interior da bobina, o campo magnético que o atravesa é menor e como consecuencia a agulla desvíase tamén menos.

10. Estuda o tipo de movemento que toma un electrón que abandonamos con velocidade nula nunha rexión do espazo onde hai un campo eléctrico e outro magnético, ambos uniformes, estacionarios e paralelos entre si.

R: m.r.u.a.

11. Nunha rexión do espazo, na que hai un campo magnético e outro eléctrico, ambos estacionarios, uniformes e perpendiculares entre si, abandonamos un protón ($\vec{v} = \vec{0}$); poderá o protón atravesar a rexión dos campos sen desviarse?

R: Non

12. É posíbel que unha partícula con carga eléctrica atravesese unha rexión do espazo onde existe un campo eléctrico e outro magnético sen desviarse? Razoa a resposta. (*Selectividade COU; set.01*).

R: Si

13. Unha partícula cargada penetra nunha rexión na que existe un campo magnético uniforme. A dirección da velocidade inicial é perpendicular ao campo. Que traxectoria describe a partícula?; como varía a enerxía cinética? Xustifica as respostas. (*Selectividade COU; xuño.01*).

R: m.c.u.; a E_k permanece constante.

14. Unha corrente eléctrica circula por un condutor rectilíneo, que atravesa equidistante entre os polos norte e sur dun imán dobrado en forma de U. Ponlle o sentido que queiras á corrente eléctrica, e explica que dirección e sentido ten a forza que actúa sobre o condutor. (*Selectividade COU; set. 00*).

15. Unha carga Q , que se move con velocidade constante, diríxese en dirección perpendicular cara a un condutor rectilíneo polo que circula unha intensidade de corrente constante I . Debuxa e explica a traxectoria que seguirá a carga Q . (*Selectividade COU; xuño 00*).

R: Unha traxectoria curva non circular.

16. Consideremos o campo magnético debido a dous condutores rectilíneos, paralelos e indefinidos, que transportan correntes iguais no mesmo sentido. É o campo no punto medio entre os dous condutores, no plano común aos dous, máis débil ou máis forte que o campo debido a cada un dos condutores por separado? Que ocorre se as correntes circulan en sentidos opostos? Razóese. (*Selectividade COU; set. 99*).

R: Máis débil (nulo). Máis forte (dobre).

17. Por dous condutores paralelos e próximos entre si circulan correntes eléctricas en sentidos opostos. Contesta razoadamente se os condutores se atraen, se repelen ou se non exercen ningunha forza entre si. (*Selectividade COU; xuño 99*).
- R:** Repélense.
18. Indica como se moverá un protón, inicialmente en repouso, nunha rexión do espazo con campo magnético e electrostático paralelos e uniformes. Razona a resposta. (*Selectividade COU; set. 98*).
- R:** m.r.u.a.
19. Xustifica se un electrón pode ou non moverse nun campo magnético sen desviarse. (*Selectividade COU; xuño 95*).
- R:** Si.
20. Un electrón describe órbitas circulares en presenza dun campo magnético \vec{B} uniforme perpendicular á órbita. Disipa enerxía en forma de traballo este electrón? Por que? (*Selectividade COU; set. 94*).
- R:** Non.
21. Un protón pasa por unha rexión do espazo sen sufrir desviación. Pode diso deducirse que non existen alí campos electromagnéticos? Razona a resposta. (*Selectividade COU; xuño 94*).
- R:** Non.
22. Nunha rexión do espazo está definido un campo magnético uniforme \vec{B} dirixido de arriba abaixo. Dispáranse horizontalmente dous electróns no mesmo punto do espazo e con idéntica velocidade pero en sentidos opostos. Considerando soamente a existencia do campo magnético, estuda a traxectoria que describirán. (*Selectividade COU; set. 93*).
- R:** Movemento circular uniforme de traxectoria tanxente no punto de lanzamento.
23. Poden separarse os polos dun imán? Córtanse as liñas de forza magnéticas? Xustifica as respostas. (*Selectividade COU; set. 92*).
- R:** Non. Non.
24. Que son liñas vectoriais dun campo? Como son as liñas do campo electrostático e as do magnetostático? Razona a resposta. (*Selectividade COU; xuño 92*).
25. Xustifica por que as liñas do campo magnético son pechadas. (*Selectividade COU; set. 92*).
26. Se se aproxima o polo norte dun imán á cara dunha espira percorrida por unha corrente eléctrica no sentido horario, fai a elección razoada do que lle sucede á espira de entre unha das seguintes respostas: a) repélea, b) non lle ocorre nada, c) atráena.
- R:** Atráena
27. Un electrón móvese dentro dun campo magnético describindo un movemento circular uniforme. Contesta razoadamente ás seguintes preguntas: a) o campo magnético é estacionario e uniforme?;

b) o electrón está sometido a algunha forza? (en caso afirmativo di que relación garda a dirección da forza coa da traxectoria); c) disipa enerxía o electrón?

R: a) Si; b) Si, \vec{F}_n ; c) Non.

28. Nunha rexión do espazo na que hai un campo magnético \vec{B} estacionario e uniforme, lánzase desde a orixe de coordenadas unha carga $+Q$ coa velocidade $\vec{v} = (0, v, 0)$, resultando que a carga se move con movemento rectilíneo e uniforme. Se esta carga se lanzase coa velocidade $\vec{v}' = (v, 0, 0)$, estuda que tipo de movemento adquire.

R: Movemento circular uniforme.

29. Considera un condutor rectilíneo e indefinido polo que circula unha corrente eléctrica. Estuda que lle sucede ao vector campo magnético, \vec{B} , que esta corrente crea para o caso de que: a) o seu valor se reduza á metade; b) se triplique a distancia que hai desde o punto onde se estuda \vec{B} ao condutor; c) se inverta o sentido da corrente.

R: a) $\vec{B}' = \vec{B}/2$; b) $\vec{B}' = \vec{B}/3$; c) $\vec{B}' = -\vec{B}$.

30. Unha espira condutora circular de 50 cm de raio está situada nun campo magnético, \vec{B} , estacionario e uniforme de 0,2 T. Calcula o fluxo magnético que atravesa a espira para o caso de que o plano da espira estea situado: a) perpendicularmente ao vector \vec{B} ; b) paralelamente ao vector \vec{B} .

R: a) $\Phi = 0,16$ Wb; b) $\Phi = 0,0$ Wb.

31. Considera unha espira circular de raio r , percorrida por unha corrente eléctrica de intensidade I , e situada no plano xz. Estuda que lle sucede ao vector campo magnético, \vec{B} , que esta corrente crea no centro desta espira para o caso de que: a) se duplique o valor de I ; b) se substitúa a espira por unha bobina de 200 espiras, con iguais características xeométricas; c) se cambie o sentido da corrente na espira.

R: a) $\vec{B}' = 2 \cdot \vec{B}$; b) $\vec{B}' = 200 \cdot \vec{B}$; c) $\vec{B}' = -\vec{B}$

32. Dúas partículas, unha de masa m_1 e outra de masa m_2 , posúen a mesma carga Q e penetran perpendicularmente nun mesmo campo magnético \vec{B} , describindo circunferencias de igual raio, r . Que relación existe entre as cantidades de movemento de ambas partículas?

R: $\vec{p}_1 = \vec{p}_2$.

33. Elixo razoadamente a resposta correcta nas seguintes cuestións:

- **33.1** Unha carga eléctrica crea un campo magnético \vec{B} cando esta carga está: a) en repouso; b) en movemento; c) en repouso ou en movemento; d) nunca.

R: A opción b)

- **33.2** Un campo magnético \vec{B} exerce unha forza magnética sobre unha carga Q que se move cunha velocidade \vec{v} : a) sempre; b) nunca; c) ás veces.

R: A opción c)

- **33.3** Un campo magnético \vec{B} pode exercer unha forza magnética sobre unha carga Q cando esta carga está: a) en repouso; b) en movemento; c) en repouso ou en movemento; d) en ningún caso.

R: A opción b)

- **33.4** As liñas de indución magnética indican a dirección das forzas magnéticas: a) sempre; b) nunca; c) ás veces.

R: A opción b)

- **33.5** Unha partícula cargada, que inicialmente se move cunha velocidade \vec{v} na dirección do vector campo magnético, \vec{B} , que é estacionario e uniforme, describe: a) un movemento circular e uniforme; b) un movemento circular uniformemente variado; c) un movemento rectilíneo uniformemente variado; d) un movemento rectilíneo e uniforme.

R: A opción d)

- **33.6** Un protón móvese a través da materia e, debido aos choques, vai perdendo gradualmente enerxía cinética. Se na rexión na que se move o protón hai un campo magnético, uniforme e estacionario, dirixido perpendicularmente á súa velocidade, a traxectoria que describe é: a) circular; b) rectilínea; c) en espiral.

R: A opción c)



**EXERCICIOS
(problemas)**

1. Dous condutores rectilíneos, paralelos e indefinidos están situados no plano yz, coa dirección do eixo z, separados unha distancia de 20 cm. Se por cada un deles circula unha corrente de 4 A, calcula, por unidade de lonxitude, a forza que se exercen mutuamente para o caso de que: a) as correntes teñan o mesmo sentido e b) teñan sentido contrario. Son forzas atractivas ou repulsivas? Nota: Os condutores están no baleiro.

R: a) $F/l = 1,6 \cdot 10^{-5}$ N/m, atractiva; b) $F/l = 1,6 \cdot 10^{-5}$ N/m, repulsiva.

2. No exercicio anterior, calcula, para o caso a) e b), o valor do campo magnético total creado polas dúas correntes no punto medio da distancia que as separa.

R: a) $\vec{B} = \vec{0}$ (T), b) $\vec{B} = 1,6 \cdot 10^{-5} \vec{i}$ (T), o sentido tamén pode ser negativo.

3. Un condutor rectilíneo e indefinido está situado no baleiro, ao longo do eixe x, e pasa polo punto (0,0,0), sendo percorrido por unha corrente de 12 A no sentido positivo do eixe x. Calcula o vector indución magnética nos seguintes puntos: a) (10,4,0); b) (-20,4,0); c) (10,0,-4); d) (10,0,4). Nota: As coordenadas están dadas en metros.

R: a) $\vec{B} = 6 \cdot 10^{-7} \vec{k}$ (T); b) $\vec{B} = 6 \cdot 10^{-7} \vec{k}$ (T); c) $\vec{B} = 6 \cdot 10^{-7} \vec{j}$ (T); d) $\vec{B} = -6 \cdot 10^{-7} \vec{j}$ (T).

4. Aproveitando os datos do problema anterior calcula a forza magnética exercida sobre unha carga Q de -2 C e que pasa polo punto (10,4,0) coa velocidade: a) $\vec{v}_a = 20 \vec{k}$ (m s⁻¹), b) $\vec{v}_b = 20 \vec{j}$ (m s⁻¹), c) $\vec{v}_c = -20 \vec{j}$ (m s⁻¹), d) $\vec{v}_d = 20 \vec{i}$ (m s⁻¹).

R: a) $\vec{F} = \vec{0}$ (N); b) $\vec{F} = -2,4 \cdot 10^{-5} \vec{i}$ (N); c) $\vec{F} = 2,4 \cdot 10^{-5} \vec{i}$ (N); d) $\vec{F} = 2,4 \cdot 10^{-5} \vec{j}$ (N).

5. Un electrón móvese, nunha rexión do espazo na que hai un campo magnético estacionario e uniforme, cunha velocidade $\vec{v} = 4 \cdot 10^6 \vec{i}$ (m s⁻¹). Calcula a forza magnética exercida sobre a carga para os seguintes valores de \vec{B} : a) $-80 \vec{i}$ (T); b) $-80 \vec{j}$ (T); c) $80 \vec{k}$ (T). Dato: $Q_e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

R: a) $\vec{F} = \vec{0}$ (N); b) $\vec{F} = 5,12 \cdot 10^{-11} \vec{k}$ (N); c) $\vec{F} = 5,12 \cdot 10^{-11} \vec{j}$ (N).

6. Un protón penetra nun campo magnético estacionario e uniforme $\vec{B} = 0,4 \vec{k}$ (T) cunha velocidade $\vec{v} = 10^6 \vec{j}$ (m s⁻¹). Estuda o movemento que describe e calcula: a) o raio da órbita que describe; b) o tempo que tarda en dar unha volta completa; c) o número de voltas que da en 1 s.
 Datos: $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg; $Q_p = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.
R: m.c.u. no plano xy e no sentido horario mirando no sentido contrario de \vec{B} ; a) $r = 2,6 \cdot 10^{-2}$ m; b) $T = 1,6 \cdot 10^{-7}$ s; c) $n = 6,1 \cdot 10^6$ voltas.
7. Un electrón, que inicialmente está en repouso, é sometido a unha diferenza de potencial de 200 V, adquirindo unha velocidade coa que penetra perpendicularmente nun campo magnético $\vec{B} = -5 \cdot 10^{-4} \vec{k}$ (T). Estuda o movemento que realiza, no plano en que ten lugar, o sentido en que o fai e calcula o raio da órbita que describe. Datos: $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg; $Q_e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.
R: m.c.u.; plano xy; sentido horario cando se mira no sentido de \vec{B} ; $r = 9,5 \cdot 10^{-2}$ m
8. Un protón, que posúe unha enerxía cinética de 4 MeV, móvese no plano xy e, mirando no sentido negativo do eixe z, leva o sentido horario dentro dun campo magnético estacionario e uniforme. Se o raio da circunferencia que describe é de 3 m, calcula o campo magnético, \vec{B} , que tendo a dirección do eixe z motiva o movemento do protón. Datos: $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg; $Q_p = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.
R: $\vec{B} = 9,6 \cdot 10^{-2} \vec{k}$ (T)
9. Temos tres condutores rectilíneos e indefinidos, situados no baleiro, polos que circula unha corrente eléctrica de intensidade 6 amperes, $I = 6$ A. Os tres condutores son paralelos ao eixe x pasando, un deles, polo punto (0,8,0); outro, polo punto (0,-8,0) e, o terceiro, polo punto (0,0,8). Se a corrente eléctrica ten o sentido da parte positiva do eixe x, calcula o vector campo magnético, \vec{B} , na orixe de coordenadas. Nota: As coordenadas danse en centímetros.
R: $\vec{B}_{\text{total}} = 1,5 \cdot 10^{-5} \vec{j}$ (T)



Razoa as respostas ás seguintes cuestións:

- Un fío recto e condutor de lonxitude l e corrente I , situado nun campo magnético B , sofre unha forza de módulo lIB : a) se I e B son paralelos e do mesmo sentido; b) se I e B son paralelos e de sentido contrario; c) se I e B son perpendiculares. (Setembro 08).
- As liñas do campo magnético B creado por unha bobina ideal: a) nacen na cara norte e morren na cara sur da bobina; b) son liñas cerradas sobre si mesmas que atravesan a sección da bobina; c) son liñas cerradas arredor da bobina e que nunca a atravesan. (Xuño 06).
- Dous condutores rectos, paralelos e moi longos con correntes I no mesmo sentido: a) atraense; b) repélense; c) non interaccionan. (Xuño 06).
- Un cable recto de lonxitude l e corrente i está colocado nun campo magnético uniforme \vec{B} formando con el un ángulo θ . O módulo da forza exercida sobre este cable é: a) $i l B \tan \theta$; b) $i l B \sin \theta$; c) $i l B \cos \theta$. (Setembro 05).
- Dispónse dun fío infinito recto e con corrente eléctrica I . Unha carga eléctrica $+Q$ próxima ao fío movéndose paralelamente a el e no mesmo sentido que a corrente: a) será atraída; b) será repelida; c) non experimentará ningunha forza. (Xuño 04).
- Un electrón e un protón describen órbitas circulares nun mesmo campo magnético uniforme e coa mesma enerxía cinética: a) a velocidade do protón é maior; b) o raio da órbita do protón é maior; c) os períodos de rotación son os mesmos. Dato: $m_{\text{protón}} \gg m_{\text{electrón}}$. (Xuño 03).
- Por dous condutores largos, rectos e paralelos circulan correntes I no mesmo sentido. Nun punto do plano situado entre os dous condutores o campo magnético resultante, comparado co creado por un só dos condutores é: a) maior; b) menor; c) o mesmo. (Setembro 01).
- Dous fíos paralelos moi longos con correntes eléctricas I e I' estacionarias e de sentidos contrarios situados á distancia r : a) atraense entre si; b) repélense entre si; c) non interaccionan. (Setembro 00).
- O campo magnético creado por un fío infinito e recto con corrente de I A nun punto á distancia de r m do fío: a) depende da inversa do cadrado da distancia; b) ten a dirección de liñas circulares arredor do fío; c) depende do cadrado da intensidade de corrente. (Xuño 00).
- As liñas de forza do campo magnético son: a) abertas coma as do campo eléctrico, b) sempre cerradas, c) abertas ou cerradas dependendo do imán ou bobina. (Xuño 98).
- Un positrón de carga $1,6 \cdot 10^{-19}$ C, entra nun campo magnético $\vec{B} = 0,1 \vec{j}$ T. Se a velocidade do positrón é $\vec{v} = 10^5 \vec{i}$ m s⁻¹, a forza que sofre, en Newton, é a) $1,6 \cdot 10^{-15} \vec{i}$, b) $1,6 \cdot 10^{-15} \vec{j}$, c) $1,6 \cdot 10^{-15} \vec{k}$. (Setembro 97).
- Unha partícula con carga eléctrica móvese no seno dun campo magnético uniforme, de dirección perpendicular á velocidade da partícula. A traxectoria que describe a partícula é: a) recta, b) circular, c) non hai bastantes datos para predicir a traxectoria. (Xuño 97).
- Obsérvase un chorro de electróns que atravesa unha rexión do espazo sen desviarse, a) non poden existir campos eléctricos, b) non poden existir campos magnéticos, c) poden existir campos eléctricos e magnéticos. (Setembro 96).


**EXERCICIOS DE
SELECTIVIDADE
(problemas)**

- Un electrón, que é acelerado por unha diferenza de potencial de 1000 V, entra nun campo magnético \vec{B} perpendicular á súa traxectoria e describe unha órbita circular en $T = 2 \cdot 10^{-11}$ s. Calcula: a) a velocidade do electrón; b) o campo magnético; c) que dirección debe ter un campo eléctrico \vec{E} que, aplicado xunto con \vec{B} , permita que a traxectoria sexa rectilínea? (Datos: $Q_e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg). (Xuño 08).

R: a) $v = 1,87 \cdot 10^7$ m s⁻¹; b) $B = 1,8$ T; c) perpendicular a \vec{B} .

- Unha partícula con carga $0,5 \cdot 10^{-9}$ C móvese con $\vec{v} = 4 \cdot 10^6 \vec{j}$ m/s e entra nunha zona onde existe un campo magnético $\vec{B} = 0,5 \vec{i}$ T. Calcula: a) que campo eléctrico hai que aplicar para que a carga non sufra ningunha desviación?; b) en ausencia de campo eléctrico calcula a masa, se o raio da órbita é 10^{-7} m; c) razoa se a forza eléctrica realiza algún traballo sobre a carga cando esta describe unha órbita circular. (Setembro 07).

R: a) $\vec{E} = 2,0 \cdot 10^6 \vec{k}$ (N C⁻¹); b) $m = 6,25 \cdot 10^{-24}$ kg; c) non, $W = 0$.

- Dous fíos condutores rectos moi longos e paralelos (A e B) con correntes $I_A = 5$ A e $I_B = 3$ A no mesmo sentido están separados 0,2 m; calcula: a) o campo magnético no punto medio entre os dous condutores (D); b) a forza exercida sobre un terceiro condutor C paralelo aos anteriores, de 0,5 m e con $I_C = 2$ A e que pasa por D. Dato: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ SI. (Setembro 06).

R: a) $B_D = 4,0 \cdot 10^{-6}$ T; b) $F_C = 4,0 \cdot 10^{-6}$ N.

- Un protón acelerado por unha diferenza de potencial de 5000 V penetra perpendicularmente nun campo magnético uniforme de 0,32 T; calcula: a) a velocidade do protón; b) o raio da órbita que describe e o número de voltas que dá en un segundo. Fai un debuxo do problema. Datos: $Q_p = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C, $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg. (Xuño 05).

R: a) $v = 9,79 \cdot 10^5$ m/s; b) $r = 3,2 \cdot 10^{-2}$ m; n° voltas/s = $4,87 \cdot 10^6$.

- Un protón ten unha enerxía cinética de 10^{-15} J. Segue unha traxectoria circular nun campo magnético $B = 2$ T. Calcula: a) o raio da traxectoria; b) o número de voltas que dá en un minuto. Datos: $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg; $Q_p = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C. (Setembro 03).

R: a) $r = 5,69 \cdot 10^{-3}$ m; b) n° voltas/minuto = $1,84 \cdot 10^9$.

- Un protón penetra nunha zona onde hai un campo magnético de 5 T cunha velocidade de 1000 m/s e dirección perpendicular ao campo. Calcula: a) o raio da órbita descrita; b) a intensidade e sentido dun campo eléctrico que ao aplicalo anule o efecto do campo magnético. Fai un debuxo do problema. Datos: $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg; $Q_p = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C. (Xuño 03).

R: a) $r = 2,1 \cdot 10^{-6}$ m; b) $E = 5000$ N/C, de dirección perpendicular a \vec{v} e \vec{B} e co sentido contrario ao de avance dun sacarrollas que xire levando \vec{v} sobre \vec{B} polo camiño máis curto.

- Un protón acelerado desde o repouso por unha diferenza de potencial de $2 \cdot 10^6$ V adquire unha velocidade no sentido positivo do eixe x, coa que penetra nunha rexión na que existe un campo magné-

tico uniforme $B = 0,2 \text{ T}$ no sentido positivo do eixe y . Calcula: a) o raio da órbita descrita (fai un debuxo do problema); b) o número de voltas que dá en 1 segundo. Datos: $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$; $Q_p = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. (*Setembro 02*).

R: a) $r = 1,04 \text{ m}$; b) $\nu = 3,0 \cdot 10^6 \text{ Hz}$

- Unha partícula de carga $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ e de masa $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ penetra cunha velocidade v nunha zona onde hai un campo magnético perpendicular de 5 teslas. A traxectoria é unha órbita circular de raio $15 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. Calcula: a) a velocidade da partícula; b) o número de voltas que dá en un minuto. (*Setembro 00*).

R: a) $v = 7,2 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$; b) $n = 4,6 \cdot 10^9$ voltas.

- Un electrón penetra perpendicularmente nun campo magnético de $2,7 \text{ T}$ cunha velocidade de 2000 km s^{-1} . a) Calcula o raio da órbita que describe, b) acha o número de voltas que dá en $0,05 \text{ s}$. (Datos: $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $Q_e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$). (*Xuño 00*).

R: a) $r = 4,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}$; b) $n = 3,8 \cdot 10^9$ voltas.

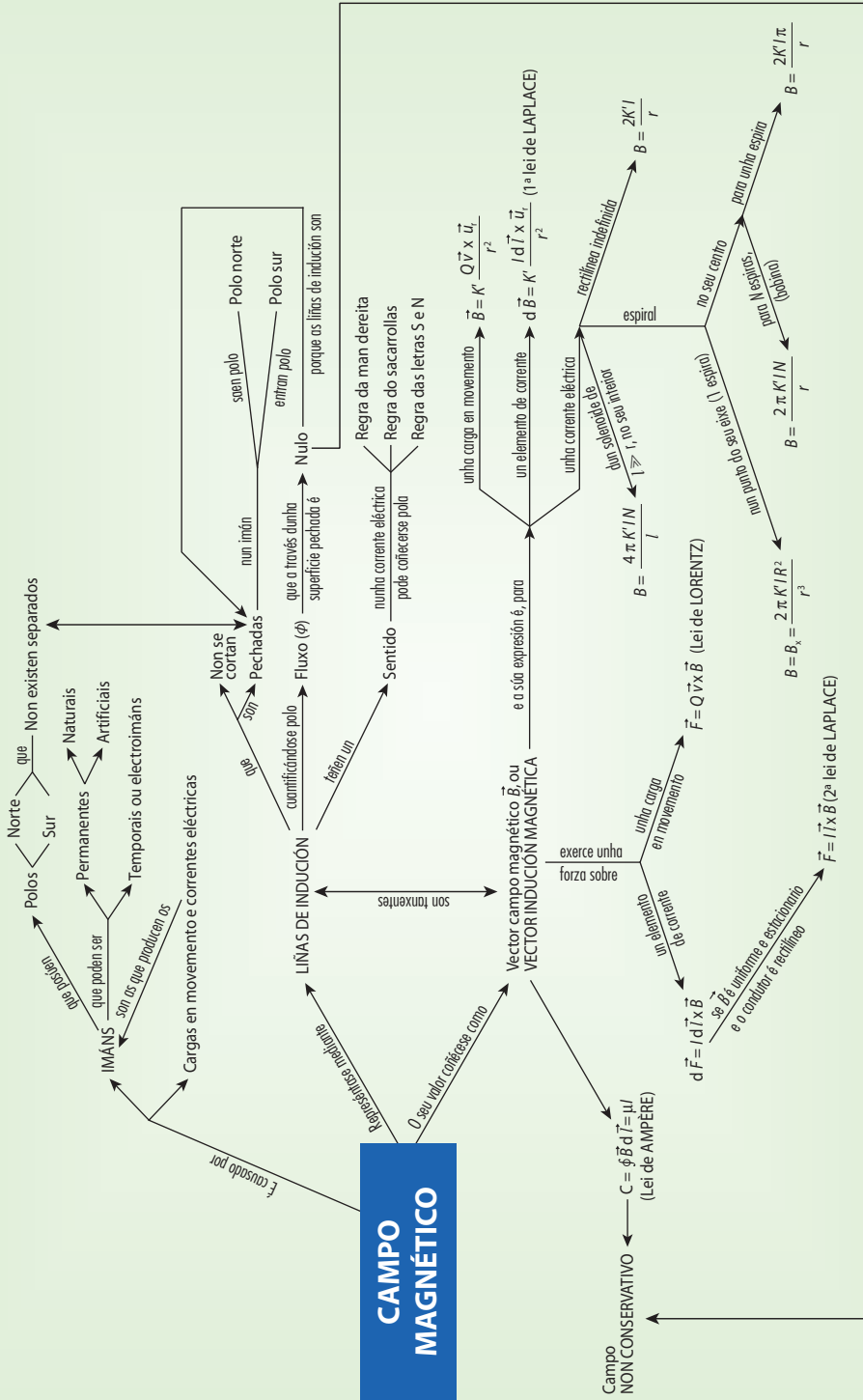
- Sobre un protón que posúe unha enerxía cinética de $4,5 \cdot 10^6 \text{ eV}$ actúa en dirección normal á súa traxectoria un campo magnético uniforme de 8 T . Determina: a) valor da forza que actúa sobre el; b) o raio da órbita descrita. Datos: $m_{\text{protón}} = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$; carga protón = $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. (*Setembro 98*).

R: a) $F = 3,7 \cdot 10^{-11} \text{ N}$; b) $r = 3,9 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

- Un electrón que se despraza con movemento rectilíneo uniforme á velocidade de $1 \cdot 10^7 \text{ m s}^{-1}$, penetra nun campo magnético uniforme de $2 \cdot 10^4 \text{ T}$, perpendicular á traxectoria do electrón. Calcula: a) a forza que actúa sobre o electrón, b) o raio da traxectoria que describe. Datos: carga do $e^- = -1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m_{e^-} = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$. (*Xuño 97*).

R: a) $F = 3,2 \cdot 10^{-8} \text{ N}$; b) $r = 2,85 \cdot 10^{-9} \text{ m}$.

Mapa conceptual do Tema 4



Tema

5

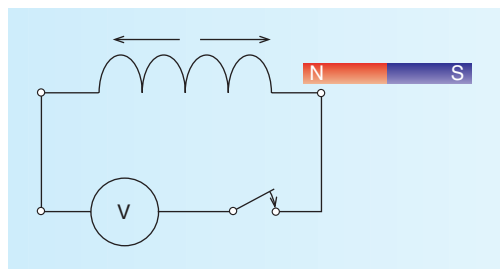
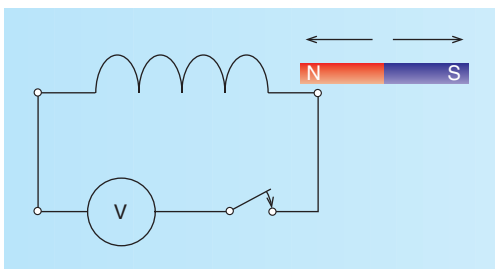
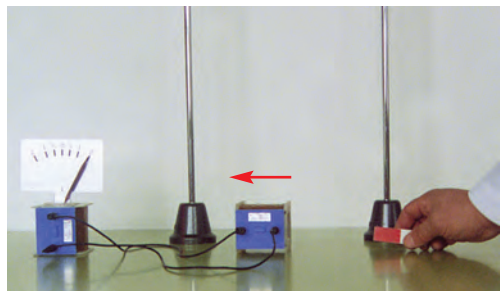
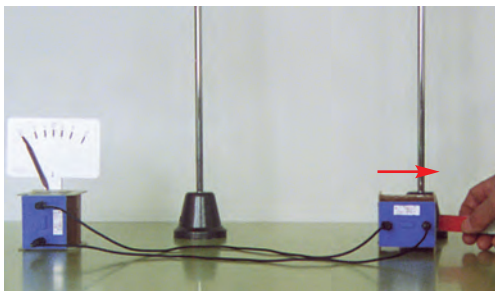
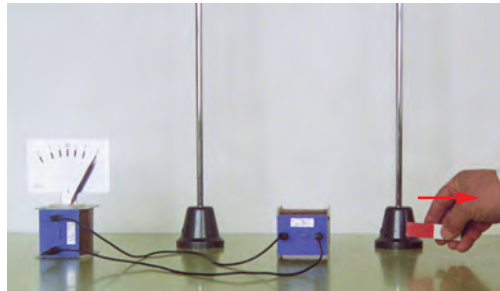
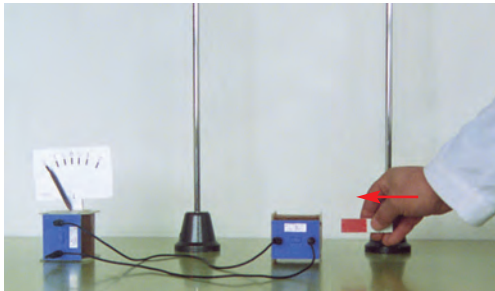
Indución electromagnética



1. Experiencias de Faraday e de Henry de indución electromagnética
 2. Lei de Lenz e lei de Faraday
 3. Autoindución
 4. Visualización da corrente continua e alterna nun osciloscopio
 5. Produción da corrente alterna. Xeradores
 6. Impacto ambiental da enerxía eléctrica
 7. A situación enerxética de Galicia
- Exercicios de selectividade
Mapa conceptual dos contidos do tema

1. EXPERIENCIAS DE FARADAY E HENRY DE INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

Sabemos que unha corrente eléctrica (cargas en movemento) crea un campo magnético (experiencia de Oersted, ano 1820). Se invertemos a frase, seguirá sendo válida? Pois si: un campo magnético variábel no tempo crea unha corrente eléctrica. Este feito, chamado **inducción electromagnética**, foi descuberto de forma independente por **Faraday** e por **Henry** no ano 1831. Algunhas das experiencias que fixeron son as seguintes:



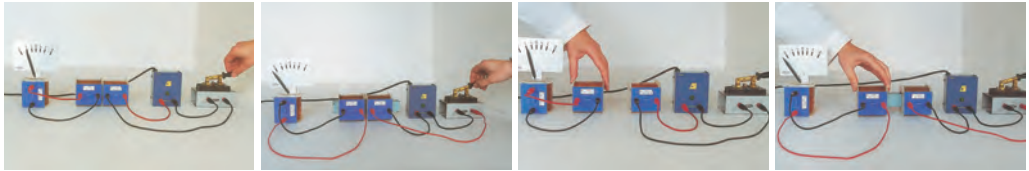
Mentres o imán ou a espira se despraza¹, o galvanómetro indica paso de corrente: prodúcese unha corrente sen que exista ningunha batería! A esta corrente chámase **corrente inducida** e é producida por unha forza electromotriz (**fem**) que recibe o nome de **fem inducida**².

¹ Cando procedemos ao acercamento entre bobina-imán, o que ten lugar é un aumento da intensidade de campo magnético (B) que atravesa a espira. Cando afastamos o imán-bobina diminúe B . Nos dous casos aparece unha corrente inducida que é tanto maior canto máis grande sexa a velocidade coa que se acercan/separan bobina e imán, polo que, en principio, parece que podemos relacionar este feito coa ΔB .

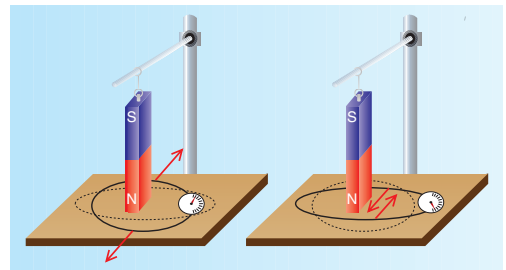
² Este termo de fem non é nada afortunado xa que non se trata de ningunha forza, senón dun traballo por unidade de carga.

Na produción de correntes inducidas distínguese o **inducido**: circuítu onde aparece a corrente; e o **indutor**: o axente produtor do fenómeno. Nos exemplos anteriores, a espira –mellor diríamos a bobina³, ao ser moitas espiras xuntas– é o inducido, e o imán o indutor.



Nos exemplos anteriores podemos substituír o imán por unha corrente eléctrica (xerador de corrente continua cunha bobina, á que lle podemos asociar en serie un reóstato).



Ao abrir-pechar o interruptor, ou ao haber un desprazamento relativo entre ambas bobinas, ou ao desprazar o cursor do reóstato⁴, obsérvanse os mesmos efectos descritos no caso de acercar-afastar o imán á bobina ou a bobina ao imán. Se facemos estas experiencias con e sen núcleo de ferro nas bobinas (indutora e inducida), observamos que a desviación da agulla do galvanómetro é moito máis intensa cando utilizamos o núcleo de ferro. A ΔI na bobina indutora ao pechar-abrir o interruptor, ao afastar-acercar as bobinas ou ao desprazar o cursor do reóstato é a mesma con e sen núcleo de ferro; no entanto a ΔB é moito maior ao usar o núcleo de ferro⁵, o que nos fai relacionar a corrente inducida coa ΔB .



Igual resultado se obtén se mantemos fixo o imán e a espira, variando a superficie desta⁶. Unha forma práctica de diminuír a superficie da espira (bobina) inducida consiste en desprazar paralelamente as bobinas das montaxes anteriores, de modo que as superficies enfrontadas se reduzan parcialmente, por exemplo, á metade. Abrindo e pechando o interruptor, observamos que a indicación do galvanómetro é menor que se as superficies das bobinas estivesen totalmente enfrontadas (para conseguir unha maior indución colocamos un núcleo de ferro laminado na bobina conectada ao aparello de medida).

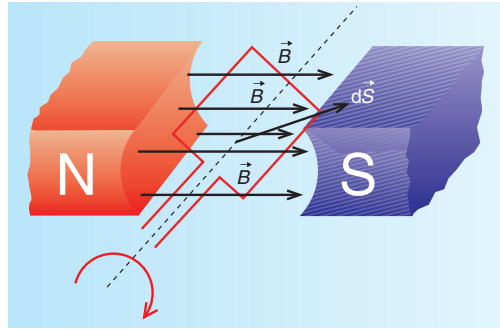
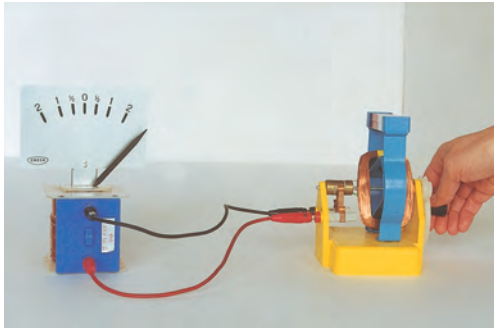
³ Recorda que unha bobina ou solenoide se representa nos circuítos polo símbolo  se o núcleo é o aire e por  se posúe un núcleo de ferro.

⁴ Ao abrir-pechar o interruptor, ou desprazar o cursor sobre o reóstato, aparece unha ΔI e, en consecuencia, unha ΔB , levándonos de novo a pensar que unha ΔB causa unha corrente inducida.

⁵ A permeabilidade magnética do ferro é 300000 veces maior que a do baleiro: μ_r do ferro = 300000.

⁶ Neste caso o que varía é a superficie, S , da espira.

Se mantemos fixa a posición do imán (ou a da bobina indutora) e facemos xirar (no interior do campo magnético que crea o imán) a espira (ou a bobina) inducida, o galvanómetro tamén indica paso de corrente⁷. Igual resultado se obtén se, desde unha posición enfrontada das superficies da bobina indutora e inducida, as xiramos un certo ángulo; por exemplo: 30°, 60° e 90°. Abrindo e pechando o interruptor para cada posición, a corrente medida no galvanómetro é menor segundo se aumenta o ángulo.



En todas estas experiencias hai algo en común: a produción de corrente eléctrica; produción que ha de ter unha mesma orixe. Vemos, como característica común, que hai unha variación de fluxo magnético a través da superficie limitada polo inducido. Recordando que o fluxo, Φ , dun campo magnético uniforme a través dunha superficie plana vén dado por: $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos \alpha$, temos que o fluxo depende de tres magnitudes: B , S e α –ángulo formado entre \vec{B} e \vec{S} –.

Nas primeiras observacións feitas, o que cambia é o valor de B , noutras cambia o valor de S e nas últimas, o que cambia, é o ángulo formado entre \vec{B} e \vec{S} .

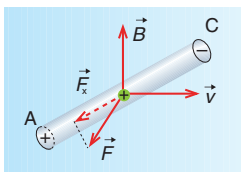
2. LEI DE LENZ E LEI DE FARADAY

As experiencias de indución electromagnética permítennos ver que unha variación de fluxo magnético causa unha fem, chamada fem inducida, ε , aparecendo unha corrente eléctrica, chamada corrente inducida⁸.

A indución electromagnética réxese por dúas leis:

⁷ Nesta experiencia B e S permanecen constantes e tamén aparecen correntes inducidas. Isto fainos suscitar a pregunta: Cal é a magnitude física que causa correntes inducidas?

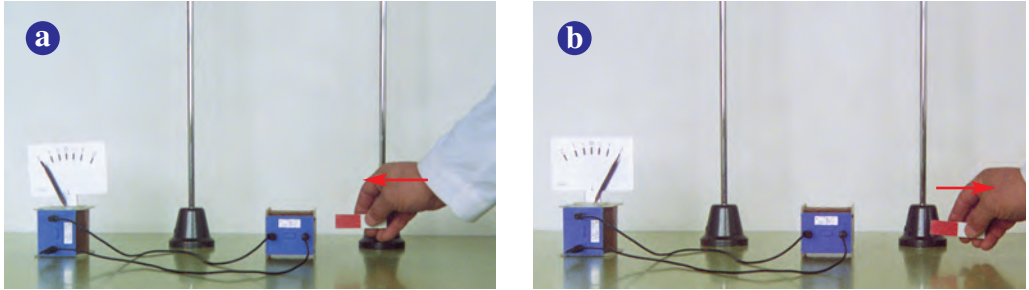
⁸ Outra forma de explicar as correntes inducidas é considerando o fenómeno da indución como consecuencia da forza exercida por un campo magnético sobre unha carga en movemento. As cargas libres (electróns) que existen nun condutor móvense cun mesmo sentido baixo a acción desta forza, orixinándose a corrente inducida.



Consideremos o movemento da varriña condutora AC cunha velocidade \vec{v} nun campo magnético \vec{B} . Toda carga Q do condutor queda sometida á forza $\vec{F} = Q \vec{v} \times \vec{B}$, e o seu compoñente na dirección da varriña tende a levar a carga negativa móbil cara a C, aparecendo unha acumulación de carga neta de signo contrario nos extremos da varriña, xerando un campo eléctrico \vec{E} ao longo do condutor. Se unimos A e C cun arame condutor pasará por este unha corrente eléctrica, xa que a varriña AC se comporta como un xerador.

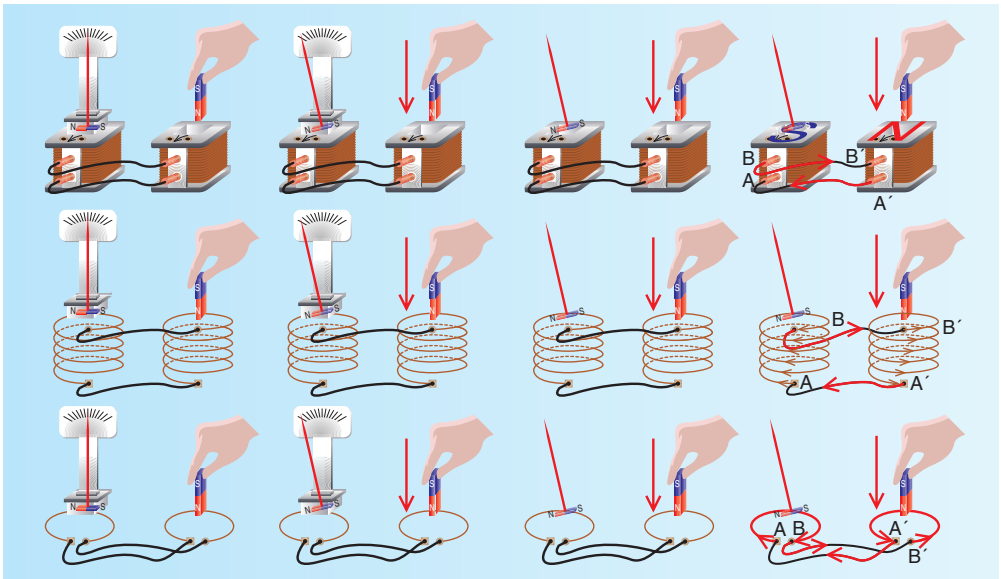
- A de Lenz, que nos dá o sentido da corrente inducida, e
- A de Faraday, que nos dá o valor da corrente inducida.


O sentido da corrente inducida é tal que se opón á causa que a produce. Este é o enunciado da **lei de Lenz** (1835). Obsérvase o seguinte:



Caso a): Ao acercar ao polo N do imán (aumentando o número de liñas de indución magnética que atravesan a espira e, en consecuencia, o fluxo) vese que na espira aparece unha corrente inducida no sentido de causar na cara enfrontada ao imán un polo norte, creando así un fluxo que se opón ao aumento de fluxo externo que atravesa a espira e, en consecuencia, ao acercamento do imán⁹.

⁹ Fixémosnos na seguinte montaxe:



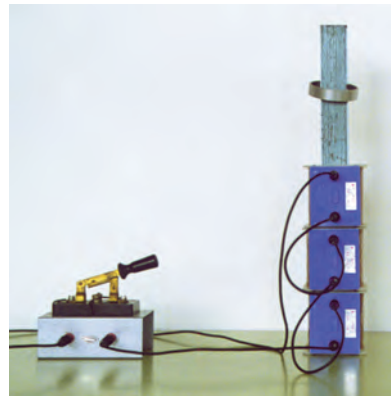
O significado do observado é: a desviación da agulla  indica que o campo magnético na bobina do galvanómetro ten o sentido de arriba-abaixo. Este campo magnético é creado por unha corrente que ha de ter o sentido horario, mirando a espira desde arriba, de modo que a corrente entra por A, vindo de A', e sae por B, indo a B'. Isto é: a corrente inducida na bobina en que se xera ten o sentido de B' a A', aparecendo a cara norte dun imán (ao mirar a espira de arriba-abaixo). Resumindo: ao acercar a cara norte dun imán a unha espira, aparece nesta unha corrente inducida que ten o sentido de crear outra cara norte na espira, opoñéndose desta forma á aproximación do imán.

Caso b): Cando se afasta o polo norte do imán (diminuindo as liñas de indución que atravesan a espira e en consecuencia o fluxo) vese que na espira aparece unha corrente inducida no sentido de causar na cara máis próxima ao imán un polo sur, que crea un fluxo magnético no mesmo sentido que o do imán, opoñéndose desta maneira á diminución do fluxo que atravesa a espira, que é a causa que produce a corrente inducida.

Que sentido ten a corrente inducida cando acercamos o polo sur dun imán? E se o afastamos?

O sentido da corrente inducida tamén pode deducirse a partir do principio de conservación da enerxía: a corrente eléctrica dá lugar a unha enerxía eléctrica no inducido como consecuencia do traballo feito desde o exterior contra as forzas do sistema; polo tanto, se, por exemplo, a causa que produce a corrente inducida é o acercamento do polo norte dun imán, o sentido da corrente inducida será tal que tenda a evitar este acercamento. Isto é, que a cara da espira máis próxima ao imán se comporte como un polo do mesmo nome. Se o sentido da corrente inducida fora o contrario, causando un polo sur, este atraería o imán e acercaría só, sen consumir traballo, o que contradí o principio de conservación da enerxía, xa que se produciría enerxía eléctrica do nada.

Unha bobina cun gran número de espiras e cun núcleo de ferro que sobresaia da mesma varios decímetros, no que colocamos un anel de aluminio que pase libremente por el, sérvenos para comprobar a lei de Lenz. Ao conectar a bobina a unha corrente alterna obsérvase como o anel “levita”. Débese á repulsión que aparece entre a bobina e o anel como consecuencia da corrente que nel se induce ao variar o fluxo magnético que o atravesa.



Tanto o anel como o núcleo (sobre todo se non é laminado) elevan a súa temperatura debido ás correntes que se inducen nas masas metálicas (correntes de Foucault).

Se a bobina se conecta a unha corrente continua, só se produce un salto no momento de pechamento do circuíto. Se a bobina, xunto ao núcleo de ferro, estivese horizontalmente e o anel colgado dun fío, veríamos como este:

- Se afasta da bobina ao pechar o interruptor (indúcese no anel unha corrente de sentido contrario ao da bobina, opoñéndose ao aumento do fluxo magnético que o atravesa, aparecendo enfrontados polos iguais).
- Se pon vertical, mantendo esta posición, ao ser a intensidade de corrente constante (non se induce corrente no anel).
- Se acerca á bobina ao abrir o interruptor (indúcese no anel unha corrente do mesmo sentido que a corrente da bobina, opoñéndose desta forma á diminución do fluxo magnético que o atravesa, aparecendo enfrontados polos distintos).

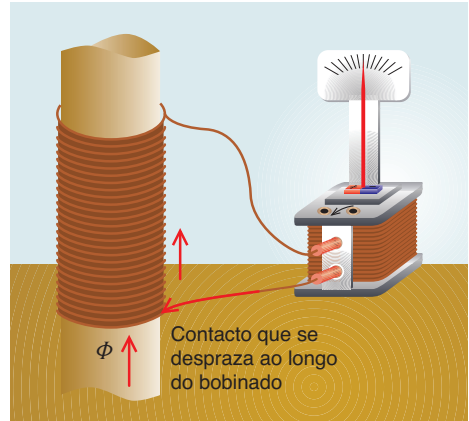
Imos expresar agora, dunha maneira cuantitativa, as observacións de Faraday e Henry que, a primeira vista, puidera ser:

$$\varepsilon = -k \frac{d\Phi}{dt} \quad (1)$$

A constante de proporcionalidade k depende do sistema de unidades utilizado e no SI é igual á unidade.

No entanto, nalgúns casos, compróbase experimentalmente que hai unha variación de fluxo magnético que atravesa a bobina sen inducirse nela fem. Vexámolo no seguinte exemplo tomado do Popovic:

Consideremos un galvanómetro conectado aos extremos dunha bobina que é atravesada por un fluxo constante Φ (por exemplo unha bobina situada perpendicularmente entre os polos norte e sur dun imán en U). Mediante un dispositivo mecánico pódese desprazar ao longo do bobinado un dos contactos do galvanómetro, permanecendo o outro fixo, como se indica na figura. Ao moverse o contacto, cambia o número de espiras, sendo N' a súa variación por unidade de tempo. Cal é a fem medida polo galvanómetro?



Aplicando a ecuación (1) temos:

$$\frac{d \Phi_{\text{total}}}{d t} = \frac{d (N \cdot \Phi)}{d t} = N \frac{d \Phi}{d t} + \Phi \frac{d N}{d t} = \Phi \cdot N'$$

xa que $\frac{d \Phi}{d t} = 0$, por ser Φ cte., e $\frac{d N}{d t} = N'$; resultando que a fem vén dada por: $\varepsilon = -\Phi \cdot N'$.

No entanto, o galvanómetro non indica valor ningún, o que quere dicir que a solución é incorrecta.

Pero, realmente, das observacións de Faraday non se deduce exactamente a expresión $\varepsilon = d\Phi/dt$. O que si podemos dicir é que: “hai corrente inducida cando a variación de fluxo enlazado polo circuíto é provocada ou por movemento de todo ou parte do circuíto dentro \vec{B} , ou por variación temporal do campo magnético, ou ambas cousas simultaneamente”. Por tanto, a expresión matemática¹⁰ correcta é:

$$\varepsilon = \left(- \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{\text{debido ao movemento da espira dentro de } \vec{B}} + \left(- \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{\text{debido á variación de } \vec{B}} \quad (2)$$

Esta expresión indica que **non** é suficiente que exista variación de fluxo de indución magnética para que se induza no circuíto unha forza electromotriz. Soamente existirá forza electromotriz inducida se a variación de fluxo se produce polas causas apuntadas. Poden existir outras causas que provoquen variación de fluxo magnético que non sexan ningunha das dúas sinaladas. Estas causas darían, de acordo coa expresión (1), unha $\varepsilon \neq 0$ e segundo a ecuación (2) unha $\varepsilon = 0$.

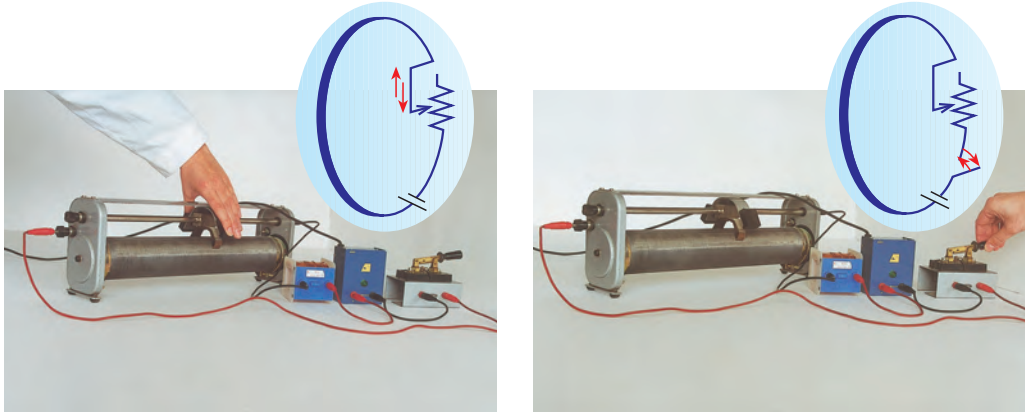
Por outra parte, se aplicamos a ecuación (2) ao exemplo de Popovic dános $\varepsilon = 0$, por non haber movemento do circuíto nin variación temporal do campo magnético.

A lei de Faraday dános a coñecer o valor da fem inducida pero non nos di nada acerca do seu sentido. O signo menos que aparece na expresión (2) débese a Lenz.

¹⁰ Esta ecuación representa unha lei experimental independente e, por tanto, non pode deducirse doutras leis experimentais.

3. AUTOINDUCIÓN

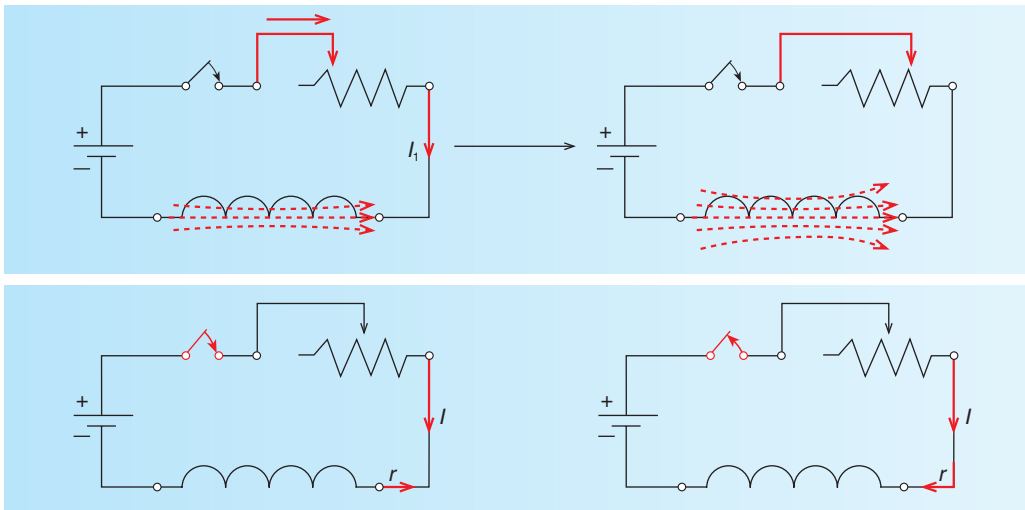
Sexa unha espira –ou unha bobina– asociada cun reóstato e unha pila. Ao abrir e pechar o interruptor, ou ao desprazar o cursor do reóstato, estamos causando unha variación de I .



Ao pechar o interruptor: a intensidade vai desde un valor cero até un valor I .

Ao abrir o interruptor: a intensidade vai desde un valor I até un valor cero.

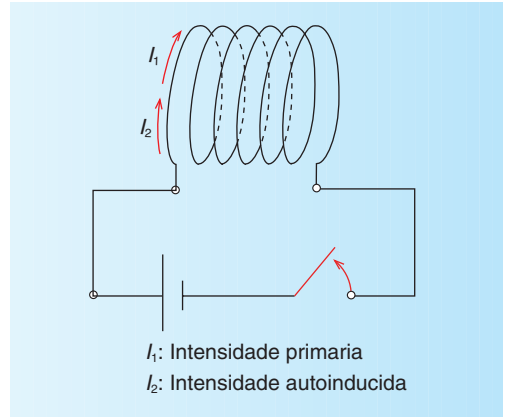
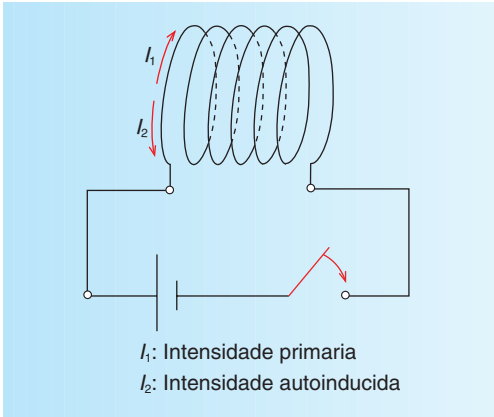
Ao desprazar o cursor, aumentando a resistencia do circuíto, a intensidade vai diminuindo de valor. Se o desprazamento do cursor se fai no sentido de diminuír a resistencia do circuíto, a intensidade aumenta.



Xa sabemos que unha I causa un \vec{B} e, polo tanto, unha ΔI causa unha $\Delta \vec{B}$. Unha $\Delta \vec{B}$ causa unha $\Delta \Phi$ e esta variación de fluxo causa unha fem inducida (que, segundo a lei de Lenz, tende a opoñerse á causa que a produce) aparecendo unha corrente inducida que, ao producirse no mesmo circuíto que a causa¹¹, se lle chama **corrente autoinducida** ou **extracorrente**.

¹¹ Indutor e inducido son unha mesma cousa.

O sentido da corrente autoinducida (que se opón á causa que a produce) é o contrario ao da corrente principal cando esta aumenta (opoñéndose a este aumento) e coincide co da corrente principal cando esta diminúe (opoñéndose a esta diminución). Desta forma, a fem inducida oponse á variación da intensidade da corrente e non á corrente mesma.

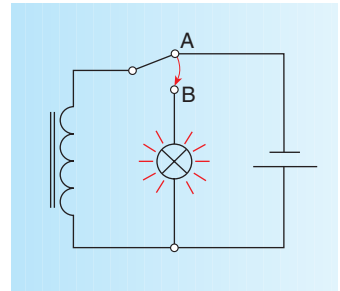
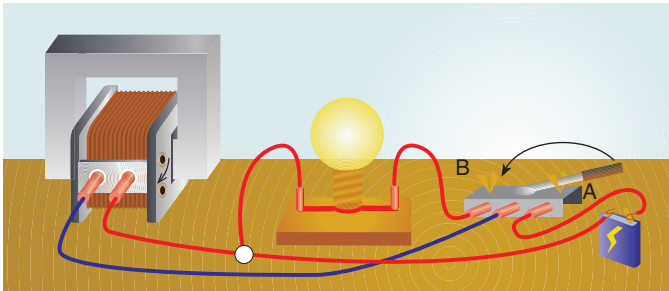


Pode demostrarse que para calquera circuío, o fluxo Φ que o atravesa é proporcional á intensidade de corrente I que por el circula¹²: $\Phi = L \cdot I$. A constante de proporcionalidade L chámase **coeficiente de autoindución, indutancia do circuío** ou simplemente **autoindución**. O seu valor depende da forma, tamaño, número de espiras e permeabilidade do núcleo da espira. A súa unidade no SI é o henry ou henrio (H).

Unha variación de intensidade de corrente no circuío causa unha variación de fluxo magnético e, polo tanto, unha fem autoinducida ε que, segundo a lei de Faraday, é:

$$\varepsilon = - \frac{d \Phi}{d t} \rightarrow \varepsilon = -L \frac{d I}{d t}$$

A existencia da fem de autoindución podemos vela coa seguinte experiencia¹³:



¹² Como xa se estudou no tema anterior, o campo magnético \vec{B} no interior dun solenoide de N espiras de superficie S e lonxitude l , polo que circula unha corrente de intensidade I , vén dado pola expresión $B = (\mu \cdot N \cdot I) / l$ e o fluxo magnético que atravesa as N espiras é: $\Phi = N \cdot B \cdot S = (\mu \cdot N^2 \cdot S \cdot I) / l$. A variación de fluxo magnético no tempo é:

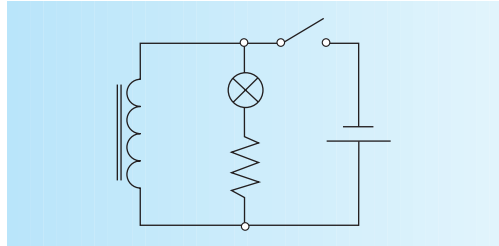
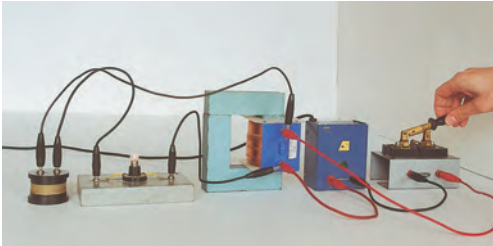
$$\varepsilon = - \frac{d \Phi}{d t} = - \frac{\mu N^2 S}{l} \frac{d I}{d t}$$

Mentres non se modifique a xeometría do solenoide, o termo: $(\mu N^2 S) / l$ permanece constante e coñécese co nome de **coeficiente de autoindución L** .

¹³ A bobina utilizada ha de ser pura (resistencia óhmica practicamente nula) e de elevada indutancia.

O interruptor está inicialmente na posición A –polo que a corrente soamente pasa pola bobina– e logo, bruscamente, cámbiase a B. A lámpada acéndese un instante a pesar de que a corrente da pila non flúe ao seu través. O cese instantáneo da corrente na bobina debido á desconexión da pila –dunha intensidade I pásase a cero– é a causa dunha forza electromotriz autoinducida que produce unha corrente instantánea a través da lámpada. Esta fem pode ser moi superior á da fonte de corrente inicial. Así, cunha pila de 1,5 V e unha bobina de elevada inductancia, pódese acender unha lámpada de 5 V.

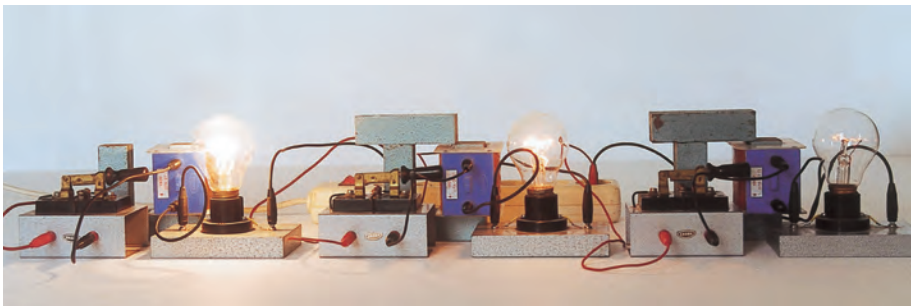
Outra montaxe equivalente á anterior, que evita o interruptor de dúas posicións, podendo substituílo por outro de unha, é a seguinte:



Ao pechar o interruptor, a corrente do xerador pasa pola bobina e pola lámpada, que se pon acesa cun certo brillo, o cal aumenta sensibelmente cando se abre o interruptor, a pesar de que a corrente do xerador non existe¹⁴. A causa está en que ao diminuír a intensidade de corrente que produce o xerador (corrente primaria) diminúe o campo magnético que esta corrente crea, autoinducíndose unha corrente secundaria, que ten o mesmo sentido que a corrente primaria, creando un novo campo magnético que reforza ao da corrente primaria.

Cuestión práctica

- Considera un circuíto eléctrico formado por unha bobina con núcleo de ferro en U (aberto) e unha lámpada de 230 V/25 W, conectados en serie, a través dun interruptor, ao enchufe da rede eléctrica (230 V). Agora vai cerrando, pouco a pouco, o núcleo de ferro e xustifica a variación de iluminación que observas na lámpada.

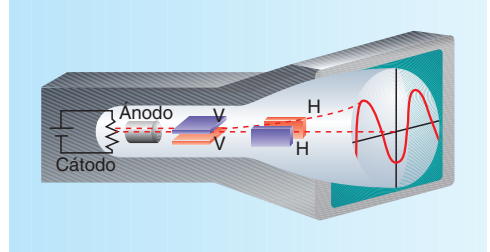


¹⁴ Nesta montaxe substitúe a lámpada de lanterna por outra de escintileo ou de neon (teñen os eléctrodos separados e no seu interior hai un pouco de gas neon) e abre e pecha o interruptor, explicando o que sucede.

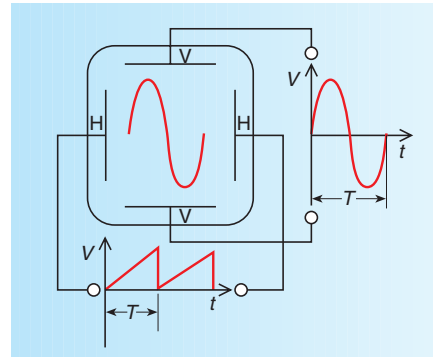
4. VISUALIZACIÓN DA CORRENTE CONTINUA E ALTERNA NUN OSCILOSCOPIO

4.1. O osciloscopio

É un aparello que imos utilizar no estudo das correntes alternas. En esencia consiste nun tubo de baleiro cunha fonte emisora de electróns que inciden sobre unha pantalla fluorescente. O chorro de electróns pode desviarse vertical e horizontalmente por medio de dous pares de placas. As dúas primeiras son horizontais e permiten obter a desviación vertical dos electróns (son as chamadas placas verticais do osciloscopio). As outras dúas son verticais e causan a desviación horizontal (son as chamadas placas horizontais).



Normalmente aplícase ás placas de desviación horizontal un potencial que aumenta linealmente co tempo e desaparece bruscamente, para iniciar de novo o crecemento ($x = k \cdot t$). É un varrido en dente de serra que manda o chorro de electróns de esquerda a dereita dun modo uniforme e cunha frecuencia que pode modificarse a vontade, usando o mando de **base de tempos**.

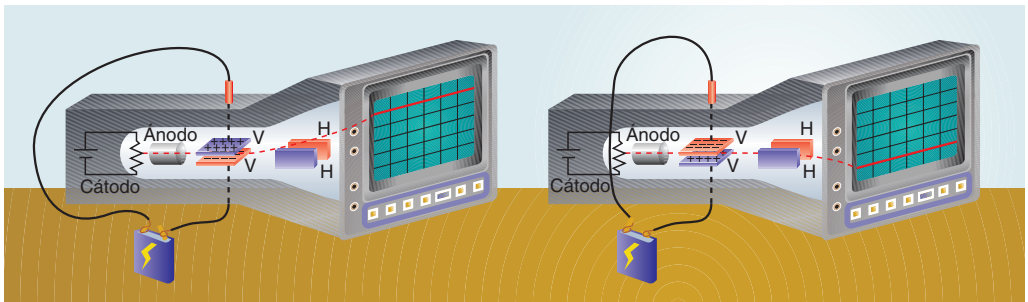


Nas placas de desviación vertical aplícase o potencial que se vai estudar $-y = f(t)$.

Ao superpoñerse as dúas desviacións sobre a pantalla do osciloscopio, débúxase un gráfico da tensión estudada en función do tempo.

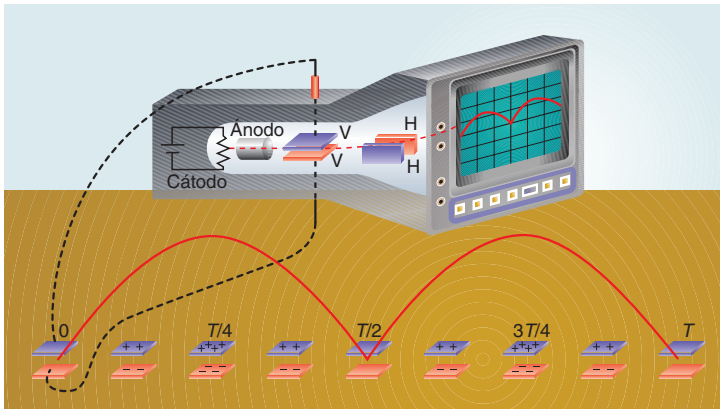
4.2. Visualización da corrente

Cando as placas “V” de desviación vertical se conectan aos bornes dunha pila, polarízanse continuamente cada unha das placas de forma constante, observándose na pantalla do osciloscopio unha liña recta horizontal desprazada verticalmente da posición inicial.



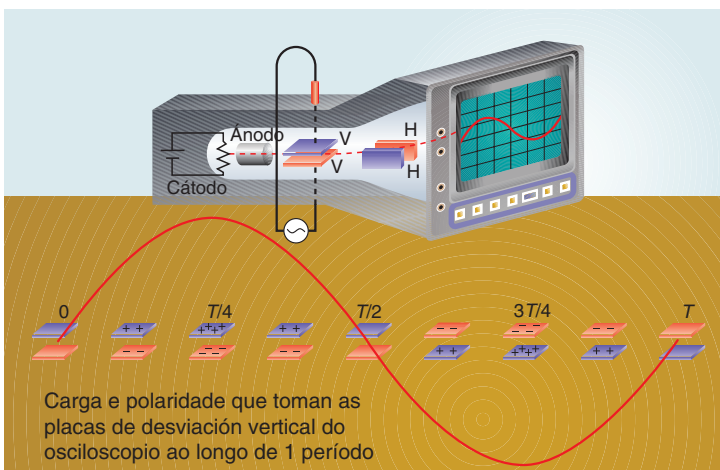
A liña recta horizontal que aparece na pantalla indícanos que a pila polariza as placas de desviación vertical do osciloscopio **continuamente** cunha carga constante, en signo e valor, creando un campo eléctrico sempre do mesmo sentido, aparecendo “continuamente” no mesmo sentido unha corrente eléctrica, chamada **corrente continua**. De aí a desviación do chorro de electróns observada na pantalla.

Se as placas de desviación vertical, V, se polarizan continuamente con cargas do mesmo signo, pero variando o seu valor; a corrente vai sempre no mesmo sentido, pero a súa intensidade non é constante. Unha corrente deste tipo é a que resulta de rectificar unha corrente sinusoidal.



O gráfico obtido fálanos de que a polaridade das placas de desviación vertical non cambia de signo, pero si de valor.

Se o campo cambia periodicamente de sentido, a corrente tamén cambia de sentido e recibe o nome de **alterna**. Se a polaridade varía sinusoidalmente no tempo, a gráfica que aparece na pantalla do osciloscopio é a indicada a continuación.



Este sinal aparece cando conectamos as placas de desviación vertical do osciloscopio ao potencial da rede eléctrica, polo que esta corrente é sinusoidal¹⁵. Simbolízase por $(\ominus\oplus)$.

Exercicio resolto

- Como se moven os electróns nun condutor de resistencia R que está sometido á diferenza de potencial dunha pila? E se a conexión está feita a un enchufe da rede eléctrica?

Solución:

Unha pila xera unha corrente contínua constante e os electróns móvense no condutor con movemento uniforme, dirixíndose cara ao borne positivo da pila.

Se a conexión se fai ao enchufe da rede eléctrica, a corrente que percorre o condutor é alterna sinusoidal e os electróns realizan un movemento vibratorio harmónico simple, sen desprazarse en conxunto.

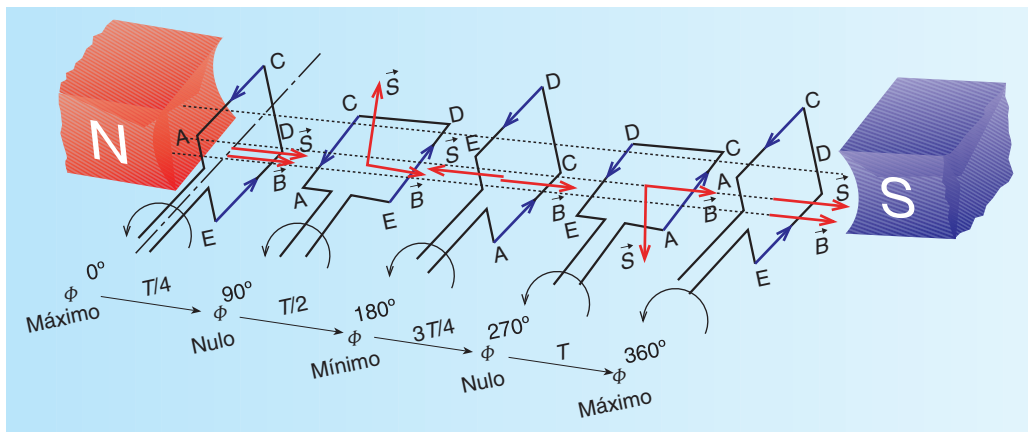
5. PRODUCCIÓN DA CORRENTE ALTERNA. XERADORES

Supoñamos unha espira de superficie constante, S , que xira cunha velocidade angular, tamén constante, ω , dentro dun campo magnético estacionario e uniforme de indución \vec{B} . A espira é atravesada por un fluxo magnético que vén dado pola expresión:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS \cos \alpha,$$

sendo α o ángulo formado entre \vec{B} e a normal ao plano da espira. A variación de fluxo a través da espira é debida ao seu cambio de orientación dentro do campo.

Na seguinte figura están representadas distintas posicións que toma a espira durante unha volta.



¹⁵ Unha analogía intuitiva pode ser a de cando movemos verticalmente un xiz sobre o encerado con movemento harmónico simple: $y = k' \cdot \text{sen}(\omega t)$, $-y = f(t)$, e, simultaneamente, nos desprazamos con movemento rectilíneo e uniforme paralelamente ao encerado ($x = k \cdot t$). O movemento resultante é a composición destes dous movementos individuais, sendo a ecuación da traectoria da forma: $y = f(x/k) = f(x)$.

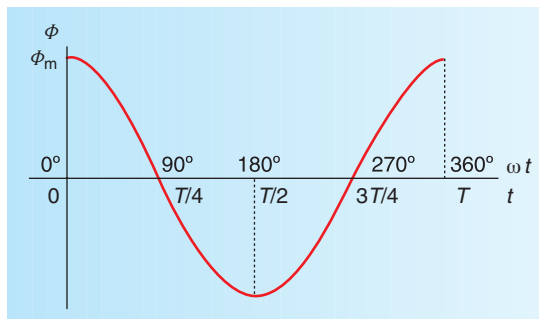
Para as posicións debuxadas da espira, imos estudar o valor do fluxo magnético que a atravesa.

- Posición 1: Supoñemos que é a inicial. É dicir, $t = 0$; $\alpha = 0$. O fluxo magnético inicial que atravesa a espira vale: $\Phi_1 = B \cdot S \cdot \cos 0^\circ = B \cdot S$.
- Posición 2: A espira xirou 1/4 de volta, de modo que $t = T/4$; $\alpha = 90^\circ$. O fluxo magnético que atravesa a espira vale: $\Phi_2 = B \cdot S \cdot \cos 90^\circ = 0$.
- Posición 3: A espira xirou media volta. Transcorreu $t = T/2$; $\alpha = 180^\circ$. O fluxo magnético que atravesa a espira vale: $\Phi_3 = B \cdot S \cdot \cos 180^\circ = -B \cdot S$.
- Posición 4: A espira xirou 3/4 de volta. Transcorreu $t = 3T/4$; $\alpha = 270^\circ$. O fluxo magnético que atravesa a espira vale: $\Phi_4 = B \cdot S \cdot \cos 270^\circ = 0$.
- Posición 5: A espira deu unha volta completa, volvendo á posición inicial. Transcorreu $t = T$; $\alpha = 360^\circ$. O fluxo magnético que atravesa a espira vale: $\Phi_5 = B \cdot S \cdot \cos 360^\circ = B \cdot S = \Phi_1$.

Ao pasar a espira da posición 1 á posición 3, o fluxo diminúe: vai desde $B \cdot S$ até $-B \cdot S$ (o condutor AC corta o fluxo baixando, mentres que o condutor DE o fai subindo). A corrente inducida circula no sentido indicado na figura anterior, xa que con este sentido crea un campo magnético que reforza, por dentro da espira, ao campo magnético exterior do imán, oponéndose desta forma á diminución do fluxo magnético que atravesa a espira. Ao pasar da posición 3 á 5, o fluxo aumenta; vai desde $-B \cdot S$ até $B \cdot S$ (o condutor AC corta o fluxo subindo e a corrente cambia de sentido). Polo tanto, a corrente inducida cambia de sentido, inducendo un campo magnético que se opón, por dentro da espira, ao campo magnético exterior do imán, oponéndose ao aumento do fluxo magnético que a atravesa. En consecuencia, durante unha volta, a corrente cambia unha vez de sentido.

Se representamos graficamente os valores que toma o fluxo durante unha volta da espira, obtense unha función sinusoidal. Desta gráfica dedúcese que:

- O fluxo varía periodicamente.
- Nun período cambia alternativamente de signo.



Imos agora encontrar a expresión matemática da fem inducida na espira que xira cunha velocidade angular constante ω , chamada **frecuencia angular** ou **pulsación**:

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha = B \cdot S \cdot \cos(\omega t)$$

E, segundo a lei de Faraday-Lenz, a fem inducida na espira é:

$$\varepsilon = - \frac{d \Phi}{d t} = - \frac{d [B \cdot S \cdot \cos(\omega t)]}{d t} = B \cdot S \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega t)$$

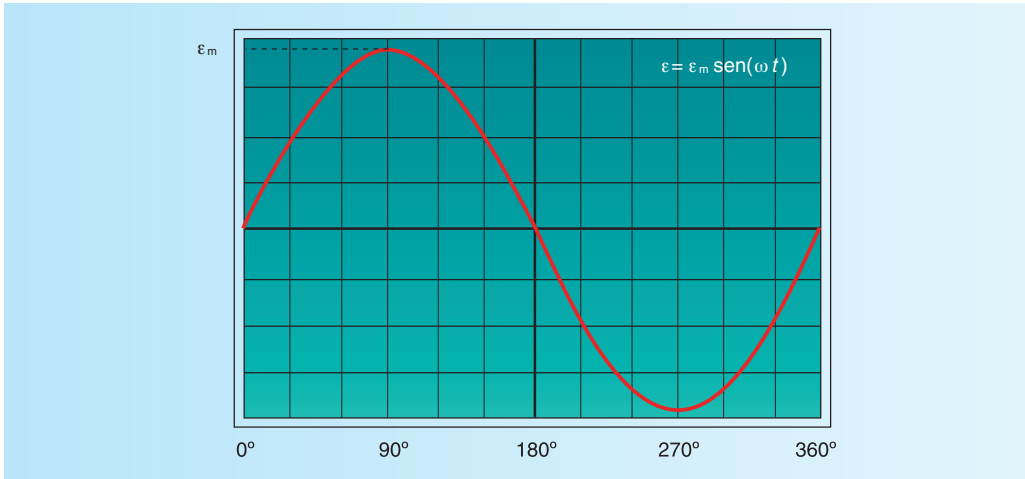
A fem que aparece na espira cambia periodicamente de polaridade.

Se en lugar dunha espira xirase unha bobina de N espiras, a fem inducida é:

$$\varepsilon = N \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega t)$$

Vemos que ε é variábel, sendo máxima cando $\sin(\omega t) = 1$, resultando:

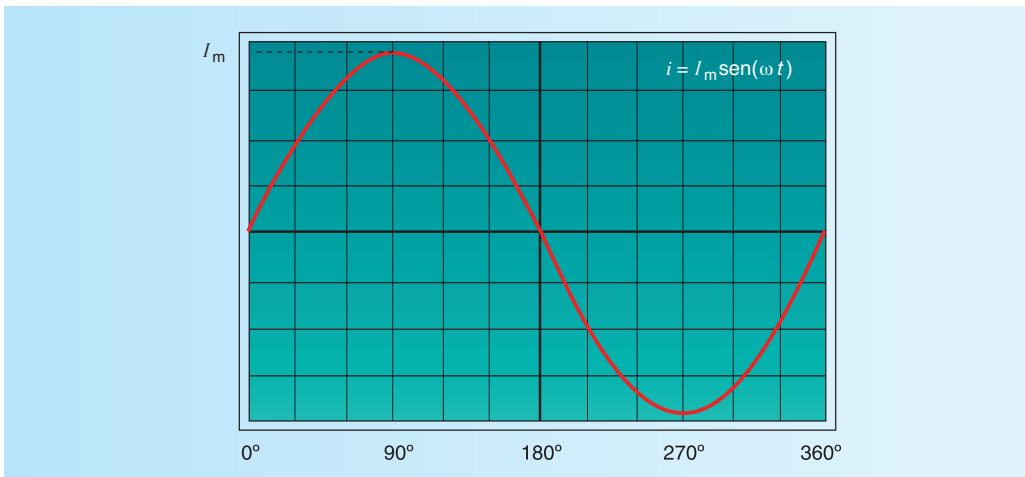
$\varepsilon_{\text{máxima}} = N \cdot B \cdot S \cdot \omega = \varepsilon_m^{16}$, co que: $\varepsilon = \varepsilon_m \sin(\omega t) = \varepsilon_m \sin(2\pi\nu t)$, sendo ν a frecuencia¹⁷.



Esta é a gráfica que vemos no osciloscopio para a fem inducida na espira (bobina).

Se a bobina que xira entre os polos do imán está unida a un circuíto cunha resistencia óhmica, R , circulará unha corrente de intensidade variábel, que en cada instante ten o valor que vén dado pola lei de Ohm:

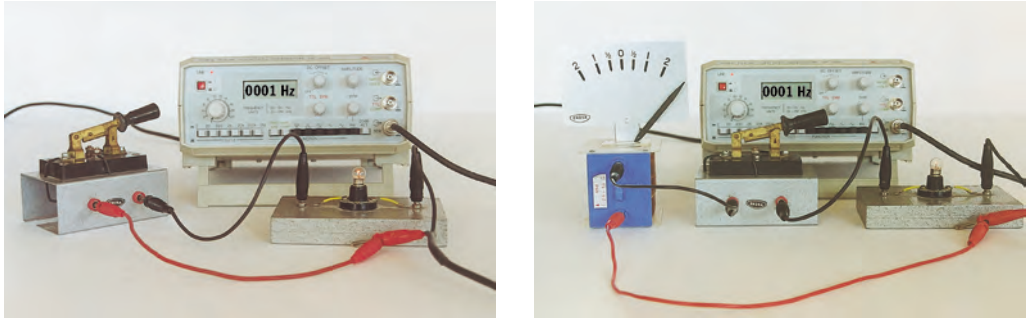
$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon_m \cdot \sin(\omega t)}{R} = \frac{\varepsilon_m}{R} \cdot \sin \omega t = I_m \cdot \sin(\omega t)$$



¹⁶ Segundo os convenios da Comisión Electrotécnica Internacional relativos a magnitudes alternas, os valores instantáneos represéntanse con letras minúsculas, os valores máximos por letras maiúsculas afectadas polo subíndice "m" e os valores eficaces por letras maiúsculas sen subíndice. Así, por exemplo, o valor instantáneo da corrente alterna será representado por i , o seu valor máximo por I_m e o seu valor eficaz por I . É frecuente ver simbolizado o valor máximo polo subíndice "0" (I_0) e o valor eficaz co subíndice "e" (I_e).

¹⁷ En Europa e Asia, a frecuencia da corrente alterna que nos subministran as compañías eléctricas é de 50 Hz. En América é de 60 Hz. En consecuencia, os electróns, máis que trasladarse, vibran.

Vemos que a intensidade de corrente é unha función sinusoidal do tempo e, en consecuencia, durante unha volta, un período, a corrente cambia unha vez de sentido. Como consecuencia, se a frecuencia con que se producen estas correntes é baixa (en torno a 1 Hz) ocorre que unha lámpada pode acenderse e apagarse, funcionando como intermitente. Para velo facemos as seguintes montaxes:



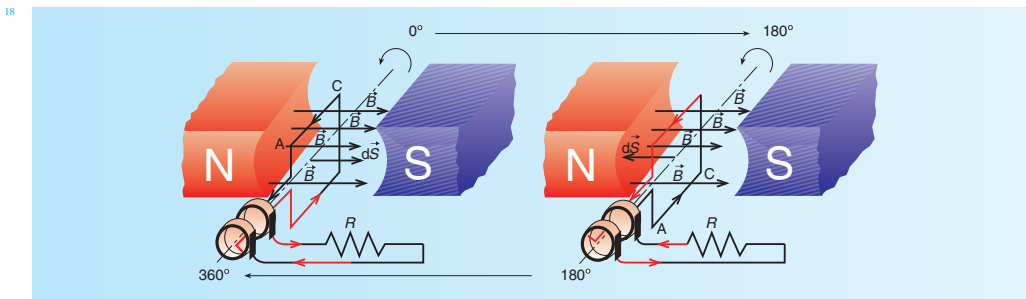
Empezamos traballando coa frecuencia da rede (50 Hz) e aumentamos, no xerador de frecuencias, a diferenza de potencial até ter a iluminación de funcionamento normal da lámpada. A continuación imos diminuíndo a frecuencia da fonte de alimentación até ver como a lámpada acende e apaga. Esta observación indícanos que hai momentos nos que a intensidade de corrente ten o valor cero.

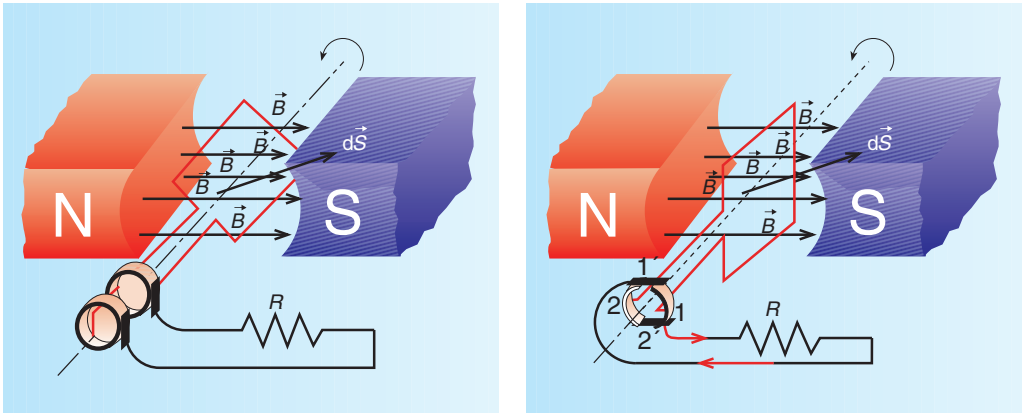
Se en serie coa lámpada montamos un galvanómetro de imán móbil co valor cero no medio da escala, vemos como a agulla se desvía alternativamente a un lado e a outro, aumentando a rapidez desta desviación co aumento da frecuencia da corrente alterna utilizada. Este vaivén da agulla débese ao cambio de sentido da corrente.

Xeradores

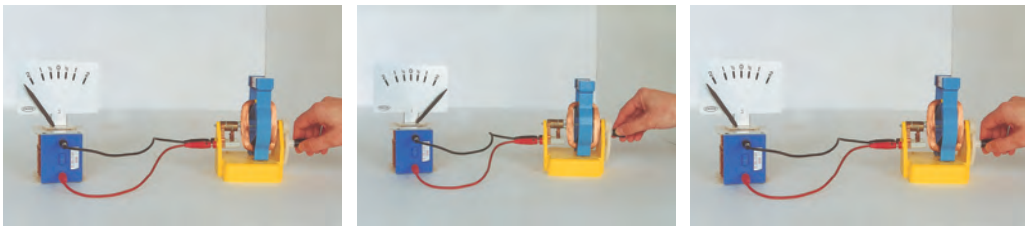
Unha forma de producir correntes eléctricas é facendo xirar unha espira dentro dun campo magnético. Se a corrente eléctrica producida é alterna, o xerador chámase **alternador**, e se é continua, **dínamo**.

Se os extremos da espira se fan terminar en cadanseus aneis metálicos, que se conectan a un circuíto exterior mediante unhas vasoiriñas, o circuíto externo está percorrido pola corrente alterna¹⁸ de intensidade $i = I_m \cdot \text{sen}(\omega t)$

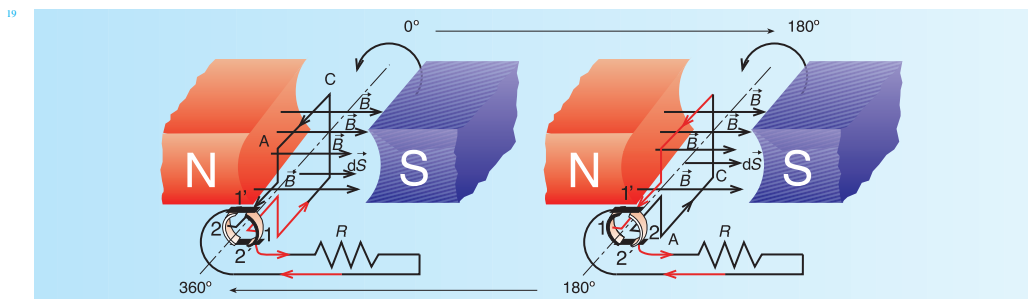


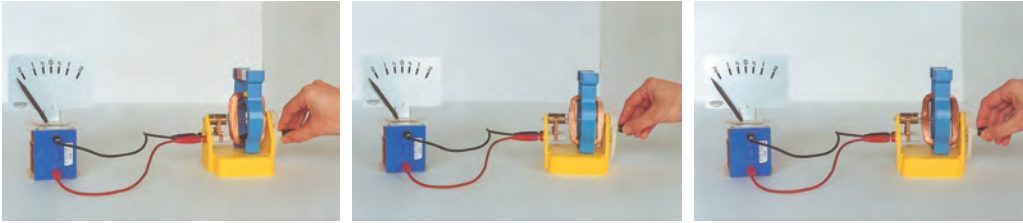


O cambio de sentido da corrente podémolo comprobar con axuda dun motor-xerador didáctico unido a un galvanómetro de agulla de imán móbil, co cero no centro da escala. Ao xirar 180° a espira do xerador obsérvase como a agulla do galvanómetro se desvía cara a un lado e ao continuar o xiro desde 180° até 360° a agulla desvíase en sentido contrario, debido ao cambio de sentido que experimenta a corrente.

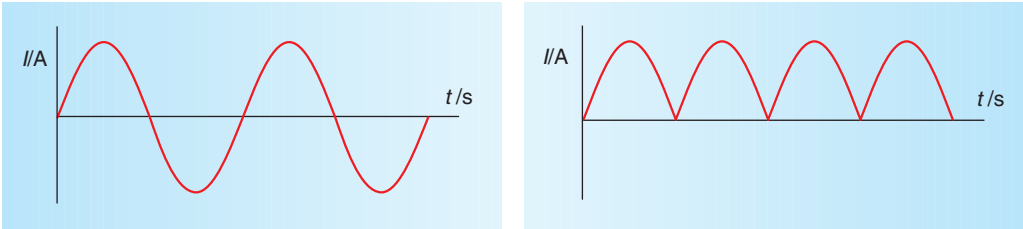


Se se substitúen os aneis do alternador por un só anel metálico partido diametralmente en dous, as vasoiriñas apoiadas nos semianeis transmiten a corrente polo circuito externo da seguinte forma: Na primeira metade de 1 período, o semianel 1 roza na vasoiriña 1' e o semianel 2 na vasoiriña 2'. Transcorrido medio período, a espira xirou 180° e a posición dos semianeis intercámbiase, de modo que o semianel 1 roza na vasoiriña 2' e o semianel 2 na 1'. Desta forma, no circuito exterior, a corrente circula ao longo de todo o período sempre no mesmo sentido, deixando de ser alterna, converténdose en corrente continua, pero de intensidade variábel¹⁹. No motor-xerador podemos ver como, para un sentido de xiro da espira, a agulla do galvanómetro se desvía sempre cara ao mesmo lado.





Estas correntes (así xeradas) son pulsatorias²⁰.



Os xeradores electromagnéticos de uso industrial son máis complicados, pero sempre teñen as mesmas partes básicas, que son:

- Indutor: é o imán ou o electroimán produtor do campo magnético.
- Inducido: é onde se produce a fem inducida.

Unha destas partes está fixa (estator) e a outra rota (rotor).

6. IMPACTO AMBIENTAL DA ENERXÍA ELÉCTRICA

A electricidade é unha forma de enerxía limpa no seu uso final; pero ha de ser previamente xerada, transformada, transportada e distribuída e estas actividades dan lugar a certos impactos sobre o medio natural. Para minimizar estes efectos é necesario facer investimentos económicos e aplicar as tecnoloxías dispoñíbeis.

Nun principio, século XIX e primeira metade do século XX, a problemática medioambiental, chamada a loita contra a contaminación, centrábase na protección do medio e, practicamente, reducíase a tres aspectos: ao aire, á auga e aos residuos, e estaba localizada nas grandes cidades e nos centros de actividade industrial.

²⁰ Pensemos nunha corrente pulsatoria. Posto que a intensidade de corrente (e a fem) alterna varía co tempo, a súa eficacia é menor que a dunha corrente continua constante que teña o valor de I_m (ou ε_m).

Pensemos nun circuíto formado por un xerador de corrente alterna e unha resistencia e supoñamos que un amperímetro térmico montado no circuíto marca 2 A. Podemos afirmar que a corrente alterna (c.a.) é, desde o punto de vista térmico, equivalente a unha corrente continua (c.c.) de 2 A. Dise que este valor de 2 A é a **intensidade eficaz** da c.a. utilizada e demostrouse experimentalmente que o valor máximo (I_m) que lle corresponde é de $2 \cdot \sqrt{2}$ A. Matematicamente defínese un valor eficaz como a raíz cadrada da altura dun rectángulo que ten por base o período e unha área igual á limitada pola curva ao longo do período, elevada ao cadrado.

A crecente demanda social de maiores cotas de benestar e calidade de vida; xunto con algúns acontecementos dramáticos, como os de Donora (Pensilvania) en 1948, os de Londres en 1952 e os das nubes oxidantes dos Ánxeles, contribuíron a aumentar o interese pola calidade do aire.

É a mediados do século pasado cando as centrais térmicas convencionais comenzaron a incorporar técnicas de tratamento de augas residuais e de eliminación de partículas emitidas.

Nos anos sesenta iníciase en España a produción de enerxía eléctrica de orixe nuclear e con ela empezouse a considerar de maneira integral os requisitos medioambientais, tanto nas fases de proxecto e construción das instalacións como na de explotación, podendo considerarse que nesta década se incorporan os criterios medioambientais ás instalacións do sector eléctrico.

Actualmente a planificación enerxética en España recóllese no Plano Enerxético Nacional, que elabora o Ministerio de Industria e Enerxía e aproba o Goberno Central. Nel, entre outras cousas, recóllense os obxectivos medioambientais da política enerxética.

Sabemos que todas as centrais eléctricas baséanse no movemento dunha turbina conectada ao rotor dun alternador. Segundo quen cause o movemento da turbina temos os distintos tipos de centrais eléctricas. Entre elas están a:

- **Central térmica clásica ou convencional:** A turbina é movida polo vapor de auga que se obtén ao queimar combustíbeis fósiles: carbón, fuel ou gas natural. A enerxía química almacenada nestes combustíbeis transfórmase en enerxía calorífica e esta en enerxía eléctrica.

Nestas centrais, o impacto no medio débese fundamentalmente á:

- Emisión de partículas que, segundo o seu tamaño, clasificamos en sedimentábeis (o seu tamaño supera os 10 microns e deposítanse de forma relativamente rápida no solo) e en suspensión (son de tamaño inferior aos 10 microns e compórtanse na atmosfera como se foran gases).
- Emisión de gases, como os óxidos de xofre (SO_2 e SO_3), os óxidos de nitróxeno (N_2O_x) e os óxidos de carbono (CO e CO_2).

- **Central térmica nuclear:** A turbina é movida polo vapor de auga que se obtén ao queimar auga coa enerxía liberada nunha reacción química nuclear. A enerxía química do combustíbel nuclear convértese en enerxía calorífica e esta en enerxía eléctrica. O seu uso encontra moito medo social e é considerada de "alto risco" polo seu posíbel impacto radiolóxico sobre o medio e os seres vivos, tanto no seu estado de funcionamento normal como no



caso de accidente. Ademais, os residuos radioactivos sólidos que se producen, onde se depositan?

- Central hidroeléctrica: A turbina é movida pola auga, convertendo a enerxía potencial almacenada na auga dun encoro en enerxía cinética e esta en enerxía eléctrica.

Nestas centrais, o impacto ambiental débese fundamentalmente ao encoro de auga que se constrúe, asolagando terreos e aparecendo unha serie de procesos físicos e bioquímicos que poden alterar a calidade da auga (sobre todo no verán, as augas estratífanse termicamente dificultando o transporte de osíxeno desde a superficie até os niveis máis profundos, podendo dar lugar á aparición de substancias tóxicas).



Cando as fontes enerxéticas se renovan na natureza de forma continua, entramos no campo coñecido como "enerxías renovábeis". Inclúen: a eólica, a solar, a maremotriz, a xeotérmica..., e a hidráulica aproveitada en minicentrais.

- Central eólica: A enerxía cinética do vento transfórmase en enerxía eléctrica, mediante os aerogeneradores. O seu impacto medioambiental é, fundamentalmente, visual e acústico.
- Central solar. Dentro deste grupo de centrais están as fotovoltaicas, nas que a enerxía luminosa se transforma directamente en enerxía eléctrica mediante as células solares ou células fotovoltaicas, e as térmicas, nas que a enerxía luminosa se transforma en enerxía calorífica e esta en enerxía eléctrica. O seu impacto medioambiental está na gran superficie que ocupan e no efecto paisaxístico que leva asociado.



A incidencia no medio natural como consecuencia da transformación, transporte e distribución da enerxía eléctrica é, en termos relativos, menor que a causada na súa produción, xa que non se realizan transformacións físicoquímicas, nin se consomen recursos naturais (excepto o do solo que ocupan), nin se producen residuos de maneira continua. A súa incidencia afecta fundamentalmente ao solo, á vexetación arbórea, á fauna, á paisaxe etc.



7. A SITUACIÓN ENERXÉTICA DE GALICIA

O consumo de enerxía aumenta e, á súa vez, é necesario reducir o impacto ambiental desa utilización masiva de enerxía. Hai que satisfacer as necesidades do presente sen poñer en perigo a capacidade das xeracións futuras.

As enerxías renovábeis poden ser unha alternativa válida para lograr un desenvolvemento sustentábel. As condicións do medio natural de Galicia poden facer que teña grandes posibilidades neste campo.



Encoro Belesar creado en 1963 para abastecer unha central hidroeléctrica.

De toda a enerxía eléctrica producida en España, o 14,3% procede de Galicia. En canto ás enerxías renovábeis, Galicia achega un 25% ao total da produción estatal (inclúese a electricidade xerada mediante as grandes centrais hidráulicas, aínda que non se considera como fonte de enerxía renovábel; o 23%, se non se ten en conta).

En decembro de 1997, a Comisión Europea publica o *Libro Branco das Enerxías Renovábeis*. Propugna que no ano 2010 o 12% do consumo de enerxía (que inclúe a xeración de electricidade, produción de calor e combustíbeis para o transporte e a industria) dos Estados membros da Unión Europea se faga con enerxías renovábeis (inclúe a gran hidráulica). Tamén marca os obxectivos para cada Estado membro de acordo co seu propio potencial e expresa a súa vontade de que no ano 2010 o 22,1% da enerxía eléctrica consumida no seu territorio sexa xerada a partir de fontes de enerxía renovábeis. Para España este obxectivo elévase ao 29,4%. De non considerar a gran hidráulica, estas porcentaxes reduciríanse, respectivamente, até o 12,5% e o 17,5%.

O *Libro Branco da Enerxía de Galicia*, elaborado polo Instituto Enerxético de Galicia (INEGA), prevé para o ano 2010 unha produción de enerxía de fontes renovábeis do 83% (con respecto ao consumo de enerxía eléctrica en Galicia). Nesta porcentaxe está considerada a gran hidráulica.

De todas as enerxías renovábeis, a enerxía eólica é a que ten un maior potencial de crecemento. No Plano Eólico de Galicia estaba previsto que no ano 2010 houbera unha potencia eólica instalada de 3000 MW, sendo esta cantidade xa superada na actualidade (ano 2009).

Galicia xa posúe 4175 MW, dos cales 3018,92 están en funcionamento; 95,05 en fase de construción; 174,89 autorizados, pero pendentes de que inicie a construción, e 886,14 admitidos a trámite. Estas cantidades, xunto aos 2325 MW que se poderán instalar proximamente coa resolución do actual concurso eólico, alcanzarán en 2012 a cifra de 6500 MW, co que nese ano se poderá conseguir que o 95% da electricidade consumida en Galicia proceda de fontes propias renovábeis.

As achegas que se prevén doutras fontes de enerxía renovábel cara ao horizonte de 2010 son: 2945 MW de hidráulica; 315 MW de minihidráulica; 93 MW de biomasa e 5 MW doutras (solar térmica, solar fotovoltaica etc).



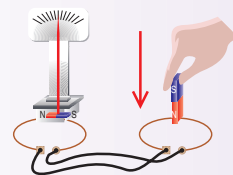
EXERCICIOS
(cuestións)

1. Mapa conceptual dos contidos do tema.
2. Unha espira condutora repousa nun plano horizontal e atrávesaa un campo magnético vertical, dirixido cara a arriba, uniforme, pero decrecente no tempo. Cal será e por que o sentido da corrente inducida na espira? (*Selectividade COU; xuño 95*).

3. Cales son as condicións para que exista forza electromotriz inducida? Describe unha montaxe experimental, indicando que se verifica algunha das condicións que citaches. (*Selectividade COU; set. 92*).
4. Acércase a unha espira, situada no plano xz, o polo norte dun imán recto cunha velocidade $\vec{v} = -2\vec{j}$ (m s⁻¹). Xustifica a corrente inducida que aparece na espira.

Se miramos a espira desde a parte positiva do eixe que é perpendicular ao plano que a contén, que sentido (horario ou antihorario) ten a corrente inducida?

5. Unha espira condutora, que está no plano xz, xira no mesmo plano en que se encontra, dentro dun campo magnético uniforme e estacionario, de valor $B\vec{j}$, cunha aceleración angular α . Estuda se aparece corrente inducida na espira.
6. Unha espira metálica está dentro dun campo magnético estacionario e uniforme, \vec{B} , sendo a dirección de \vec{B} perpendicular ao plano da espira. Estuda se se induce corrente na espira para o caso de que esta se desprace paralelamente a si mesma e no sentido do campo con: a) movemento uniforme b) movemento variado. Repite este estudo para o caso de que o campo magnético sexa: a) estacionario e non uniforme nos distintos puntos do plano en que se encontra a espira, pero si uniforme na dirección do desprazamento da espira e b) uniforme e non estacionario.
7. Estuda cara a onde xirará a agulla que está unida ao imán horizontal que aparece no interior da primeira das espiras do debuxo cando se acerca á segunda das espiras o polo norte do imán.



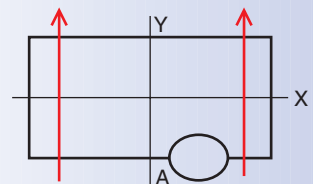
8. Comenta as frases:
 - a) Se o fluxo magnético que atravesa unha espira condutora é grande, a corrente eléctrica inducida na espira tamén é grande.
 - b) Se o vector campo magnético que atravesa unha espira condutora é grande, a corrente eléctrica inducida na espira tamén é grande.
9. A forza electromotriz (fem) inducida nun circuíto tende: a) a diminuír o fluxo magnético que atravesa o circuíto; b) a aumentar o fluxo magnético que atravesa o circuíto; c) a aumentar ou a diminuír o fluxo magnético que atravesa o circuíto, segundo diminúa ou aumenta o fluxo magnético exterior. (Elixo a/s resposta/s que consideres correcta/s).
10. Unha espira, situada perpendicularmente ao vector campo magnético \vec{B} que aparece entre os polos norte e sur dun imán en ferradura, xira arredores dun eixe que pasa polo seu centro e é perpendicular a \vec{B} cunha velocidade angular ω . Estuda que lle ocorrerá ao valor máximo e ao período da corrente eléctrica inducida na espira cando se duplica a súa velocidade angular de rotación, 2ω .
11. Unha bobina "a" está nas inmediacións doutra bobina "b". Cando varía a intensidade de corrente da bobina "a", a forza electromotriz inducida na bobina "b" é directamente proporcional: a) ao valor do vector campo magnético no seu interior; b) á súa resistencia óhmica; c) á velocidade de cambio do vector campo magnético no seu interior; d) á intensidade de corrente que percorre á bobina "a". (Elixo a/s resposta/s que consideres correcta/s).

12. Unha espira condutora está situada nun plano horizontal e, desde unha altura h por encima da espira, déixase caer un imán recto, de modo que descende segundo o eixe vertical da espira que pasa polo seu centro. Se inicialmente o polo norte do imán é o que está cara á espira, a corrente que nela se induce é, vista no sentido de movemento do imán, de: a) sentido horario; b) sentido antihorario; c) primeiro de sentido horario e, cando o centro do imán pasa polo plano da espira, de sentido antihorario; d) primeiro de sentido antihorario e, cando o centro do imán pasa polo plano da espira, de sentido horario. (Elixo a/s resposta/s que consideres correcta/s).
13. Unha espira metálica, situada no plano horizontal (x,y) , está conectada a unha pila mediante un interruptor, sendo percorrida por unha corrente eléctrica I no sentido horario cando se mira no sentido negativo do eixe z . Se a espira está atravesada por un campo magnético exterior uniforme de valor $B\vec{k}$, sendo este campo maior que o que crea a corrente I , relaciona unha frase da primeira columna con outra das que aparece na segunda columna:
- | | |
|---|--|
| a) A intensidade de corrente eléctrica na espira é constante | 1) O \vec{B} exterior aumenta no tempo |
| b) A intensidade de corrente eléctrica na espira aumenta no tempo | 2) O \vec{B} exterior diminúe no tempo |
| c) A intensidade de corrente eléctrica na espira diminúe no tempo | 3) O fluxo magnético total que atravesa a espira aumenta |
| d) No momento de abrir o interruptor | 4) A intensidade de corrente eléctrica na espira aumenta |
| e) Unha vez aberto o interruptor | 5) A intensidade de corrente eléctrica na espira é nula |
| f) Unha vez aberto o interruptor | 6) O \vec{B} exterior é estacionario |
| g) No momento de abrir o interruptor | 7) O fluxo magnético total que atravesa a espira diminúe |



Razoa a resposta das seguintes cuestións:

- Se se achega o polo norte dun imán rectilíneo ao plano dunha espira plana e circular: a) prodúcese na espira unha corrente inducida que circula en sentido antihorario; b) xérase un par de forzas que fai rotar a espira; c) a espira é atraída polo imán. (Setembro 06).
- Unha espira rectangular está situada nun campo magnético uniforme, representado polas frechas da figura. Razoa se o amperímetro indicará paso de corrente: a) se a espira xira arredor do eixe Y; b) se xira arredor do eixe X; c) se se despraza ao longo de calquera dos eixes X ou Y. (Setembro 04).



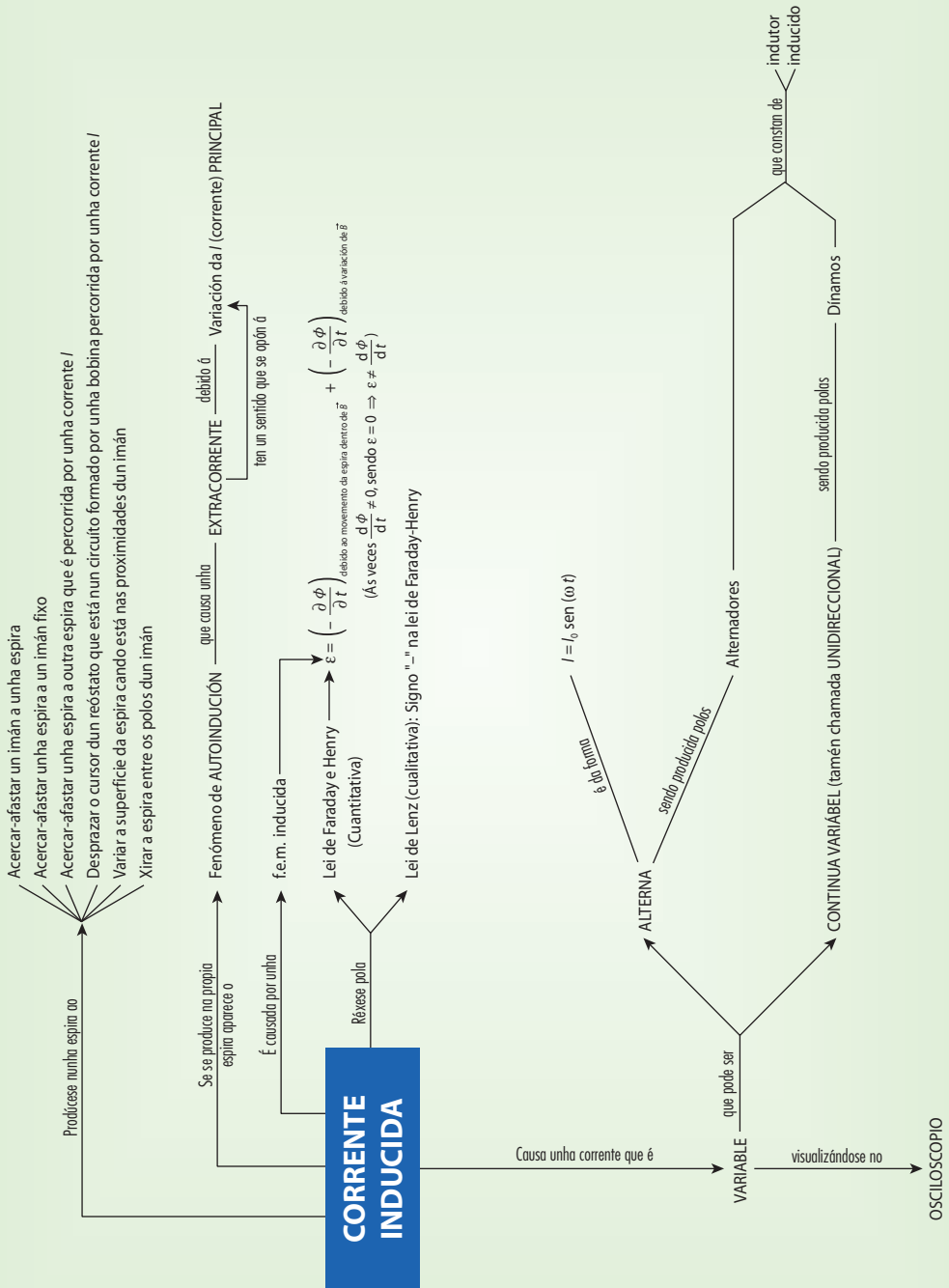
- Se se acerca bruscamente o polo norte dun imán ao plano dunha espira sen corrente, nesta prodúcese: a) fem inducida en sentido horario; b) fem inducida en sentido antihorario; c) ningunha fem porque a espira inicialmente non ten corrente. (*Xuño 02*).
- De que depende a f.e.m. inducida nun circuíto?: a) de que varíe nunha magnitude grande ou pequena o fluxo magnético que a atravesa; b) da variación de fluxo magnético “rapidez con que cambia” a través do mesmo; c) do valor do fluxo magnético que o atravesa suposto constante. (*Xuño 98*).



- Unha bobina cadrada e plana ($S = 25 \text{ cm}^2$) construída con 5 espiras está no plano XY: a) Enuncia a lei de Faraday-Lenz; b) calcula a f.e.m. inducida, se se aplica un campo magnético en dirección do eixe Z, que varía de 0,5 T a 0,2 T en 0,1 s; c) calcula a f.e.m. media inducida, se o campo permanece constante (0,5 T) e a bobina xira até colocarse no plano XZ en 0,1 s. (*Xuño 07*).

R: b) $\varepsilon = 3,75 \cdot 10^{-2} \text{ V}$; c) $\varepsilon = 6,25 \cdot 10^{-2} \text{ V}$.

Mapa conceptual do Tema 5



Tema

6

Movimiento harmónico simple

1. **Introducción**
2. **Movimiento harmónico simple. Relación co movemento circular uniforme**
3. **Cinémática do movemento harmónico simple**
4. **Dinámica do movemento harmónico simple**
5. **Energía do movemento harmónico simple**
6. **Exercicio de composición de dous movementos harmónicos simples de igual frecuencia**

Exercicios

Exercicios de selectividade

Prácticas de laboratorio

Mapa conceptual dos contidos do tema



1. INTRODUCCIÓN

Sabemos que:

- Se a traxectoria que segue un móbil no seu desprazamento é unha liña recta, dise que o movemento é rectilíneo; se o móbil segue a liña dunha circunferencia describe un movemento circular etc.
- Se o módulo da velocidade do móbil é constante no tempo, dise que o movemento é uniforme. Se o que permanece constante é a variación do módulo da velocidade ($\Delta v/\Delta t = a_t = \text{cte.}$) trátase dun movemento uniformemente variado.
- Un movemento é rectilíneo e uniforme cando o vector velocidade, \vec{v} , é constante. Dise rectilíneo uniformemente variado cando a aceleración normal é nula ($\vec{a}_n = \vec{0}$) e a aceleración tanxencial é constante ($\vec{a}_t = \text{cte.}$). Se o compoñente tanxencial da aceleración é nulo e o compoñente normal é de módulo constante o movemento é circular uniforme.

Cales son as **características do movemento harmónico simple** (m.h.s.)? Son as de:

- Ser un movemento rectilíneo.
- Ser un movemento de vaivén¹, de “ida e volta”, como sucede, por exemplo, no caso das oscilacións dunha lámina metálica suxeita por un dos seus extremos.
- Ser periódico.
- Ter por ecuación do movemento a expresión: $\vec{y} = A \text{ sen}(\omega t + \varphi_0) \vec{j}$; que vén ser unha aceleración da forma: $\vec{a}_t = -\omega^2 \cdot \vec{y}$, onde ω é unha constante. Trátase dun movemento variado non uniformemente: $a_t \neq \text{cte.}$

Se o movemento dun punto material se expresa de forma sinusoidal do tempo, dise que este punto realiza **oscilacións harmónicas**² e o sistema que realiza estas oscilacións denomínase **oscilador harmónico**.

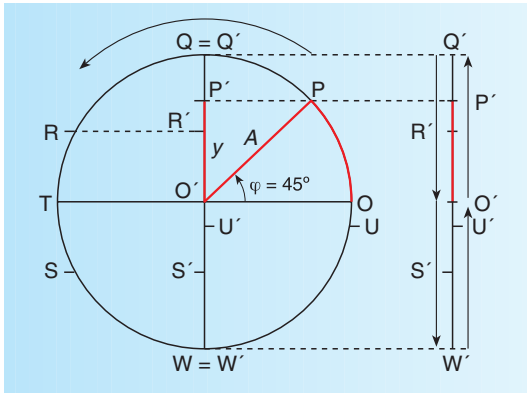
De todos os movementos oscilatorios, o máis simple é o **movemento harmónico simple**, coas ecuacións cinemáticas indicadas máis arriba.

2. MOVEMENTO HARMÓNICO SIMPLE. RELACIÓN CO MOVEMENTO CIRCULAR UNIFORME

Dentro dos movementos harmónicos, dise que un movemento harmónico é simple cando se pode expresar mediante funcións harmónicas, seno ou coseno, dunha soa variábel. De todos os movementos oscilatorios, o máis importante e, á súa vez, o máis sinxelo é o harmónico simple, xa que todo movemento periódico se pode descompoñer nunha serie de movementos harmónicos simples simultáneos.

¹ Pensemos nunha cubeta con auga na que colocamos un taco de madeira. Este afúndese un pouco até a posición de equilibrio. Se agora o prememos co dedo, ao soltalo inicia un movemento, desprazándose cara arriba e abaixo, a ambos lados da posición de equilibrio. Dicimos que a madeira **vibra** ou **oscila**.

² Polo tanto, non todo movemento periódico de vaivén (a un e outro lado da posición de equilibrio) vai ser harmónico xa que é necesario que a ecuación do movemento sexa unha función harmónica (seno ou coseno).



Pensem, por exemplo, nunha partícula de masa m que se move sobre a mesa con m.c.u. Se observamos este movemento desde o plano do movemento (mesa) pareceranos que leva un movemento rectilíneo, que é periódico, cunha velocidade que diminúe a medida que se acerca cara aos extremos e que aumenta cando vai cara ao centro (igual que sucede no movemento oscilatorio do taco de madeira comentado con anterioridade)³. Se facemos o estudo cinemático do movemento rectilíneo observado, chegamos a que

$\vec{y} = A \text{sen}(\omega t + \varphi_0) \vec{j}$ e $\vec{a}_t = -\omega^2 \cdot \vec{y}$: a aceleración é directamente proporcional á posición e de sentido contrario.

Vemos que podemos relacionar o m.h.s. con outro xa coñecido, co m.c.u.: se un punto material percorre unha circunferencia con movemento uniforme, o movemento que toma a proxección ortogonal deste punto sobre un diámetro da circunferencia é harmónico simple.

Supoñamos que no instante inicial ($t = 0$) o punto que se move sobre a circunferencia, en sentido antihorario, está no punto O e ao cabo dun tempo t se encontra en P, sendo a proxección sobre o diámetro vertical os puntos O' e P', respectivamente. A distancia que separa P' do centro da circunferencia chámase **elongación**, “ y ”, e indica a posición en que se encontra o móbil que describe o m.h.s. con respecto ao centro de oscilación (punto medio do segmento que percorre). O seu valor pode ser positivo ou negativo, segundo se encontre o móbil a un ou outro lado da posición de equilibrio (centro de oscilación). A elongación máxima recibe o nome de **amplitude**, A , e coincide co raio da circunferencia. No SI mídese en metros.

O ángulo φ descrito, que corresponde ao arco OP, recibe o nome de **fase**. No SI mídese en radiáns. Cando a diferenza de fase entre dous instantes é de $2\pi n$ radiáns, (sendo n un número enteiro que toma os valores: $n = 1, 2, 3, \dots$), dise que os instantes están en fase. Se a diferenza de fase é de $(2n-1)\pi$ radiáns, os instantes están en oposición de fase.

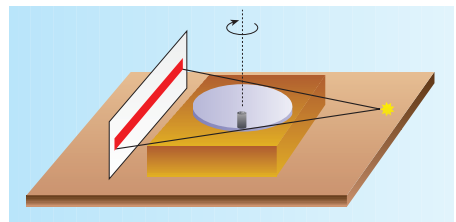
Cando o punto que se move sobre a circunferencia deu unha volta completa, a súa proxección sobre o diámetro realizou unha oscilación –ou vibración– completa, volvendo a encontrarse na mesma posición con igual velocidade. A partir deste instante, os movementos repítense. Trátase dun movemento periódico, sendo o tempo que tarda en dar unha oscilación completa un **período**, T . No SI mídese en segundos.

O número de oscilacións completas realizadas na unidade de tempo (1 s) é o que se coñece como **frecuencia** (ν^* ou f). A súa unidade no SI é s^{-1} , que se chama hertz (Hz).

Dos conceptos de período e frecuencia, dedúcese que: $T = 1/\nu$.

³ Podemos experimentalmente da seguinte forma: sobre un disco que xira con m.c.u. colocamos un obxecto cara á súa beira e iluminámolo desde o plano do disco e nunha dirección perpendicular ao eixe de xiro; ao observar nunha pantalla a sombra proxeccionada temos un m.h.s.

* Non confundir o símbolo ν (letra grega “ni”) da frecuencia, co v , da velocidade, de grafía moi semellante.



3. CINEMÁTICA DO MOVIMENTO HARMÓNICO SIMPLE

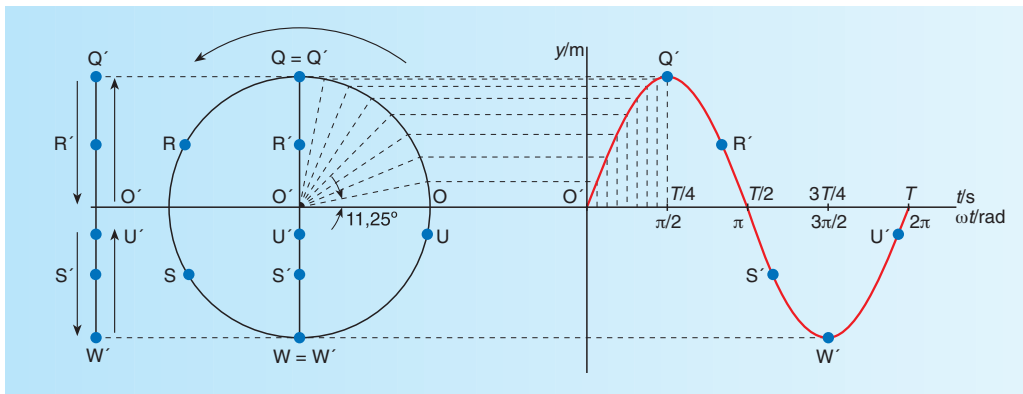
3.1. Ecuación do movemento

Faremos o estudo cinemático do m.h.s. establecendo relacións entre este movemento e o m.c.u. asociado de ecuacións xa coñecidas.

Na figura anterior vemos que a un desprazamento angular $\varphi = \omega t$ realizado sobre a circunferencia, correspóndelle outro desprazamento y sobre o diámetro⁴. A ecuación do m.h.s. (aquela que relaciona posición e tempo) é:

$$O'P' = O'P \sin \varphi \rightarrow y = A \sin(\omega \cdot t) = A \sin[(2\pi/T) \cdot t] = A \sin(2\pi \nu t)$$

onde ω é a chamada **frecuencia angular** ou **pulsación** (equivale á velocidade angular do movemento circular), correspondéndolle no SI a unidade de rad/s ou s^{-1} e $\omega \cdot t$ é a fase do movemento. A representación gráfica desta ecuación é:

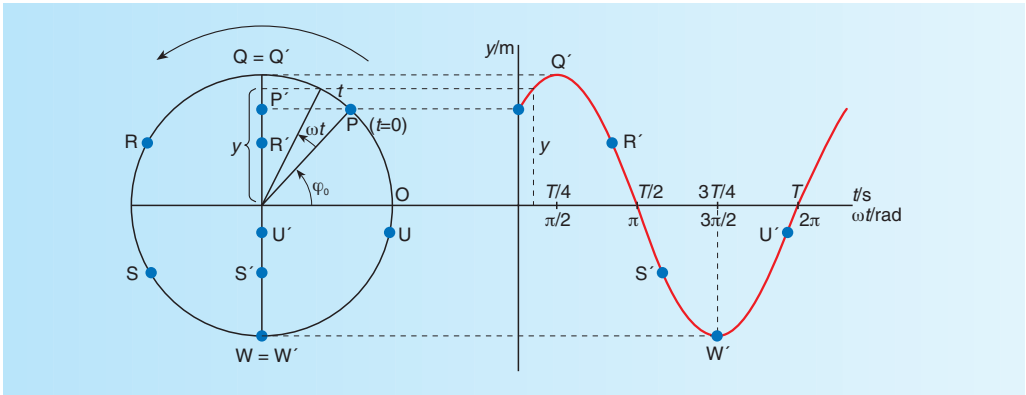


Se cando empezamos a contar o tempo, o punto material que se move sobre a circunferencia xa está no punto P, formando co raio horizontal un ángulo φ_0 , chamado **fase inicial**; ao cabo dun tempo t , o ángulo formado polo raio que une O' co punto material é: $\varphi_0 + \omega t$, e a elongación virá dada pola expresión: $y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$.

Se cando empezamos a contar o tempo, o punto material estivese en U, o ángulo inicial sería negativo ($-\varphi_0$) e $y = A \sin(\omega t - \varphi_0)$.

Tamén se pode facer a descrición do movemento mediante a función coseno.

⁴ Observa que o punto P está na metade do arco OQ e recorda que o punto material describe a circunferencia con m.c.u.: percorre espazos iguais ($OP = PQ$) en tempos iguais. No entanto, ás proxeccións deste punto sobre o diámetro da circunferencia (P' e Q' , respectivamente) correspóndenlle espazos distintos: $O'P' > P'Q'$, para iguais tempos. Tamén podemos facer a análise pensando en iguais espazos proxeccionados: estaríamos no caso do punto R' . O arco QR é maior que o RT e, polo tanto, $t_{QR} > t_{RT}$, sendo $Q'R' = R'T'$. Isto lévanos a que o móbil animado de m.h.s., a medida que se acerca ao centro, percorre espazos cada vez maiores en tempos iguais, o que nos indica que a velocidade aumenta. Porén, a medida que se afasta do centro, acercándose aos extremos (Q e W), a velocidade diminúe. En consecuencia, o movemento é acelerado desde os extremos cara ao centro e decelerado desde o centro cara aos extremos, tendo que estar causado por unha forza que tende a frear o punto móbil cando vai do centro aos extremos e a aceleralo cando vai desde os extremos ao centro, sendo, polo tanto, cara abaixo (a W') cando o móbil se move arriba (de O' a Q' e de Q' a O') e cara arriba (a Q') cando o móbil se move abaixo (entre O' e W').



Exercicio resolto

- Unha partícula de 20 g móvese verticalmente cun movemento harmónico simple, iniciando o seu percorrido no extremo superior da súa traxectoria e tarda 0,2 s en ir até o centro da mesma, percorrendo 20 cm. Calcula:
 - a) a pulsación.
 - b) a posición da partícula 2 s despois de iniciar o movemento.
 - c) a diferenza de fase no instante $t = 2$ s con respecto ao instante inicial.

Solución:

- a) Como en ir de B até C tarda 0,2 s, o tempo que tarda en repetir a mesma situación física é: $T = 4 \cdot 0,2 = 0,8$ s

Agora substituíndo na expresión $\omega = \frac{2\pi}{T}$ temos:

$$\omega = 2 \cdot \pi / 0,8 = 2,5 \cdot \pi \text{ rad/s}$$

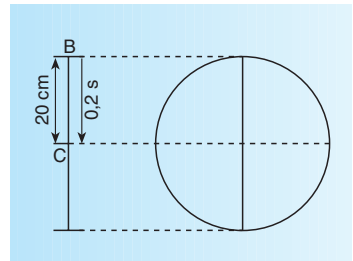
- b) A ecuación do m.h.s. escrita en función do seno é: $y = A \text{ sen}(\omega t + \varphi_0)$. Como no instante inicial, $t = 0$, a elongación é máxima e positiva, $A = 0,2$ m, escribimos:

$$\left. \begin{aligned} y &= A \text{ sen}(\omega t + \varphi_0) \\ \text{para } t = 0 \rightarrow y &= A \end{aligned} \right\} \rightarrow A = A \text{ sen}(0 + \varphi_0) \rightarrow 1 = \text{sen } \varphi_0 \rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad} = 90^\circ$$

Substituíndo na ecuación que relaciona coordenada e tempo temos:

$$y = 0,2 \text{ sen}(2,5 \cdot \pi \cdot 2 + \pi/2) = 0,2 \text{ sen}(5,5 \cdot \pi) = -0,2 \text{ m} \text{ (A partícula atópase no extremo oposto ao de partida).}$$

- c) $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_0 = (2,5 \cdot \pi \cdot 2 + \pi/2) - (2,5 \cdot \pi \cdot 0 + \pi/2) \rightarrow \Delta\varphi = 2,5 \cdot 2\pi$. Os instantes considerados están en oposición de fase.



3.2. Velocidade

A **velocidade** obtémola derivando a ecuación do movemento: $\vec{y} = A \text{ sen}(\omega t + \varphi_0) \vec{j}$

$$\left. \begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d y}{d t} \vec{u}_t = \frac{d y}{d t} \vec{j} \\ \vec{v} &= v \vec{u}_t = v \vec{j} \end{aligned} \right\} \rightarrow v = \frac{d y}{d t}, \text{ xa que o vector unitario } \vec{j} \text{ é constante.}$$

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}[A \sin(\omega t + \varphi_0)] = A \omega \cos(\omega t + \varphi_0) \text{ e } \vec{v} = A \omega \cos(\omega t + \varphi_0) \vec{j}$$

Esta expresión está dada en función do tempo. En función da posición é:

$$\left. \begin{aligned} v &= A \omega \cos(\omega t + \varphi_0) \\ 1 &= \sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0) \end{aligned} \right\} \rightarrow v = A \omega \sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0)}$$

$$v = \omega \sqrt{A^2 - A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)} = \omega \sqrt{A^2 - y^2}$$

Vemos que:

$$\begin{aligned} A & \text{---} v = 0 \text{ para: } \begin{cases} y = A \\ \omega t + \varphi_0 = 90^\circ \end{cases} \text{ (a velocidade é nula no extremo)} \\ 0 & \text{---} v = \pm A\omega \text{ para: } \begin{cases} y = 0 \\ \omega t + \varphi_0 = 0^\circ \text{ ou } 180^\circ \end{cases} \text{ (a celeridade é máxima no centro)} \\ -A & \text{---} v = 0 \text{ para: } \begin{cases} y = -A \\ \omega t + \varphi_0 = 270^\circ \end{cases} \text{ (a velocidade é nula no extremo)} \end{aligned}$$

Exercicio resolto

- ▶ Unha partícula de 200 g móvese con m.h.s. Sabendo que cando está a 4 cm da posición de equilibrio posúe unha velocidade de 12 m/s e cando está a 6 cm a súa velocidade é de 8 m/s, calcula a amplitude e a frecuencia angular.

Solución:

Escribimos a expresión da velocidade da partícula en función da súa posición: $v = \omega \sqrt{A^2 - y^2}$

$$\left. \begin{aligned} 12 &= \omega \sqrt{A^2 - (4 \cdot 10^{-2})^2} \\ 8 &= \omega \sqrt{A^2 - (6 \cdot 10^{-2})^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{12}{8} = \frac{\sqrt{A^2 - 16 \cdot 10^{-4}}}{\sqrt{A^2 - 36 \cdot 10^{-4}}} \rightarrow A = 7,2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$12 = \omega \sqrt{(7,2 \cdot 10^{-2})^2 - (4 \cdot 10^{-2})^2} \rightarrow \omega = 201,0 \text{ s}^{-1}$$

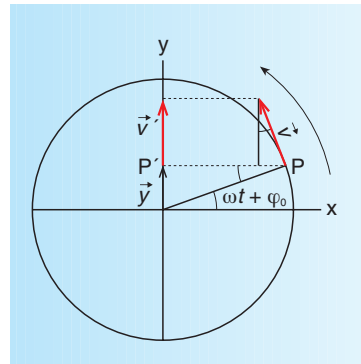
Exercicio resolto

- ▶ Proxecta a velocidade dun móbil que describe un m.c.u. sobre un diámetro da circunferencia que percorre e relaciona o resultado coa velocidade do m.h.s. asociado.

Solución:

Sexa o punto P da figura que describe a circunferencia de raio A coa velocidade angular ω constante. A velocidade lineal que posúe é de módulo constante (movemento uniforme): $v = \omega \cdot A$ e de dirección variábel: tangente á circunferencia en cada punto. A súa proxección sobre o diámetro vertical vale:

$$v' = v \cos(\omega t + \varphi_0) = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0)$$



En forma vectorial é: $\vec{v}' = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0) \vec{j}$

Esta expresión coincide coa obtida ao derivar con respecto ao tempo a expresión da elongación do m.h.s.

3.3. Aceleración

Derivando a velocidade temos a **aceleración**. Recordando que:

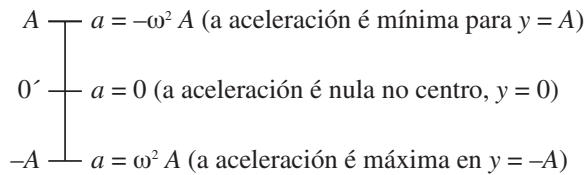
$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = a_t \vec{u}_t + a_n \vec{u}_n = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{r} \vec{u}_n$$

vemos que o único compoñente da aceleración no m.h.s. é o tanxencial, xa que no movemento rectilíneo (que é a traxectoria do m.h.s) o compoñente normal da aceleración é nulo ($r = \infty$), resultando:

$$\vec{a} = \vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_t = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{j} = \frac{d[A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)]}{dt} \cdot \vec{j}$$

$$\vec{a} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \cdot \vec{j} = -\omega^2 y \vec{j} = -\omega^2 \vec{y}$$

Para a aceleración temos que:



Exercicio resolto

► Unha partícula vibra cunha velocidade máxima de 40 m/s e unha amplitude de 5 cm. Calcula:

- a) a aceleración máxima.
- b) a velocidade da partícula cando se encontra a 1 cm da posición de equilibrio.

Solución:

a) $\vec{a} = -\omega^2 y \vec{j} \xrightarrow{\text{para } y=-A} \vec{a}_{\text{máxima}} = -\omega^2 \cdot (-A) \vec{j}$

Necesitamos calcular primeiro a frecuencia angular do movemento, ω , que facemos a partir da velocidade máxima:

$$\left. \begin{aligned} v &= A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \\ v_{\text{máx.}} &= A \cdot \omega \\ v_{\text{máx.}} &= 40 \text{ m/s} \end{aligned} \right\} \rightarrow A \cdot \omega = 40 \rightarrow \omega = \frac{40}{5 \cdot 10^{-2}} = 8 \cdot 10^2 \text{ rad/s}$$

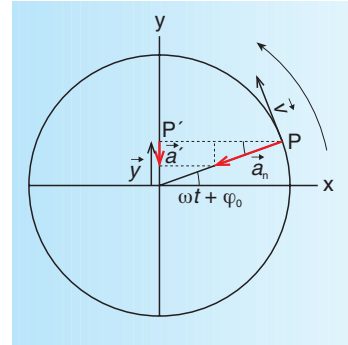
$$\vec{a}_{\text{máx.}} = -(8 \cdot 10^2)^2 \cdot (-5 \cdot 10^{-2}) \vec{j} = 320 \cdot 10^2 \vec{j} \text{ (m s}^{-2}\text{)}$$

b) $v = \omega \sqrt{A^2 - y^2} \rightarrow v = 8 \cdot 10^2 \sqrt{(5 \cdot 10^{-2})^2 - (10^{-2})^2} = 39,2 \text{ m s}^{-1}$

- Proxecta a aceleración dun móbil que describe un m.c.u. sobre un diámetro da circunferencia que percorre e relaciona o resultado coa aceleración do m.h.s. asociado.

Solución:

Sexa o punto P da figura que describe a circunferencia de radio A coa velocidade angular ω constante. A velocidade lineal \vec{v} que posúe é de módulo constante (movemento **uniforme**): $v = \omega \cdot A$, e de dirección variábel: tanxente á circunferencia en cada punto. Esta variación da dirección de \vec{v} débese a unha aceleración normal, \vec{a}_n , de módulo constante: $a_n = \frac{v^2}{A} = \frac{(\omega \cdot A)^2}{A} = \omega^2 \cdot A$ e de dirección perpendicular á tanxente á traxectoria en cada punto, con sentido cara ao centro da circunferencia. A súa proxección sobre o diámetro vertical é:



$$\left. \begin{aligned}
 \text{sen}(\omega t + \varphi_0) &= \frac{a'}{a_n} \rightarrow a' = a_n \text{sen}(\omega t + \varphi_0) \\
 a_n &= \omega^2 \cdot A
 \end{aligned} \right\} \rightarrow a' = \omega^2 A \text{sen}(\omega t + \varphi_0) \left\{ \begin{aligned}
 & \\
 y &= A \text{sen}(\omega t + \varphi_0)
 \end{aligned} \right\} \rightarrow a' = \omega^2 y$$

No punto P', proxección do punto P sobre o diámetro vertical da circunferencia, a elongación é de sentido contrario (é cara arriba) ao da aceleración (é cara abaixo), resultando:

$$\vec{a}' = -\omega^2 \vec{y}$$

Esta expresión coincide coa obtida ao derivar con respecto ao tempo a expresión da velocidade do m.h.s.

4. DINÁMICA DO MOVEMENTO HARMÓNICO SIMPLE

A Dinámica estuda o movemento tendo en conta as causas que o produce, respondendo a dúas preguntas:

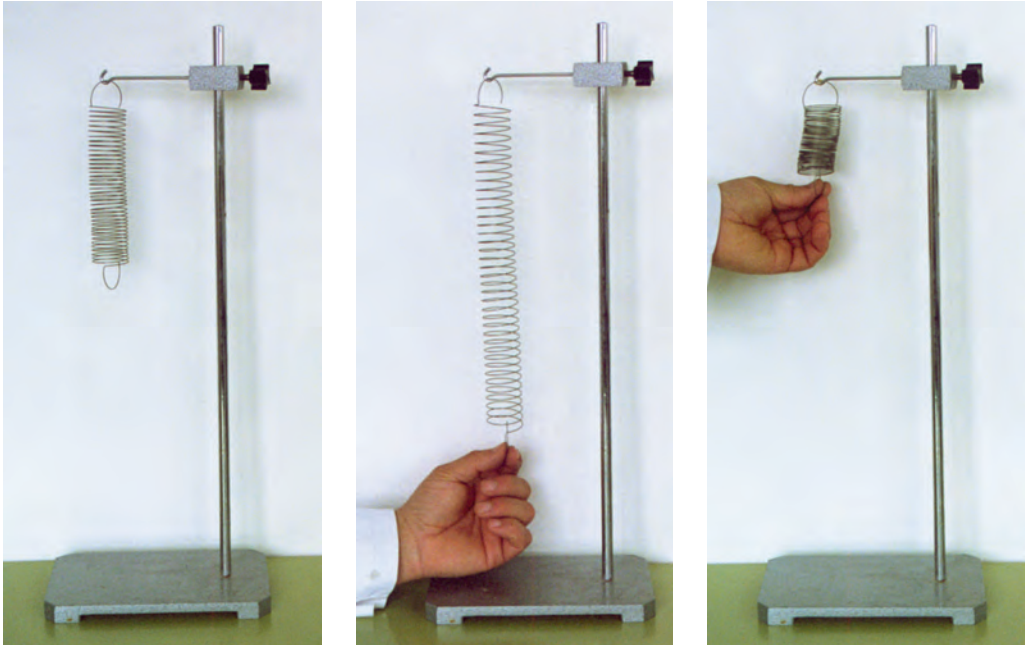
- a) Dado un movemento, que forza o causa?
- b) Aplicada unha forza a un corpo, que movemento toma?

a) Que forza \vec{F} debe actuar sobre unha partícula de masa m para causarlle un m.h.s.?

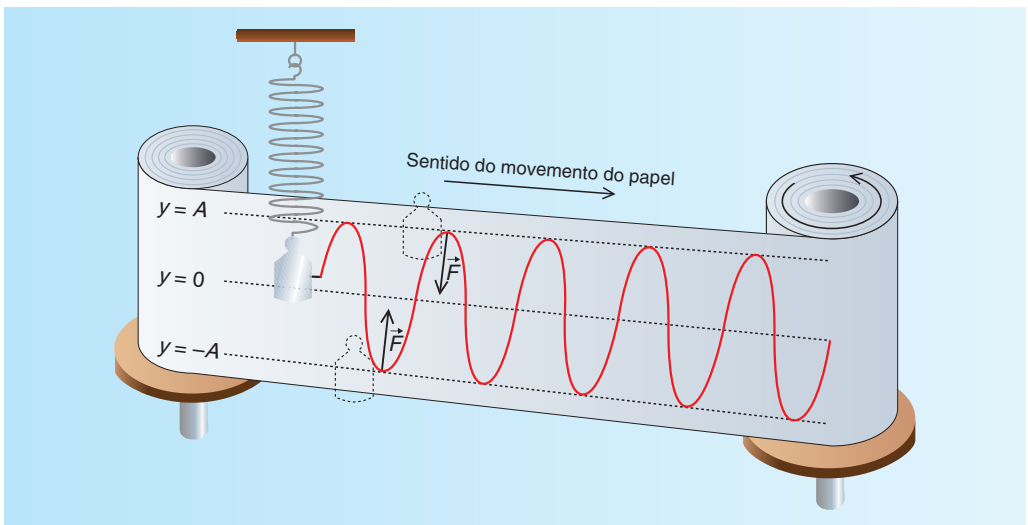
$$\left. \begin{aligned}
 \text{m.h.s.: } \vec{a} &= -\omega^2 \vec{y} \\
 \vec{F} &= m \vec{a}
 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned}
 \vec{F} &= m(-\omega^2 \vec{y}) = -m\omega^2 \vec{y} \\
 \text{E como } m\omega^2 &= \text{cte.} = k
 \end{aligned} \right\} \rightarrow \vec{F} = -k \vec{y}$$

Nesta última expresión vemos que a forza que causa o m.h.s. é directamente proporcional ao desprazamento e oposta a el: $\vec{F} = -k \vec{y}$, estando sempre dirixida cara ao punto de equilibrio. Se estiramos un resorte fixo por un dos seus extremos, aplicándolle unha forza ao ou-

tro extremo, comprobamos que canto maior sexa a deformación que queremos causar maior ten que ser a forza exercida: $\vec{F}_{\text{aplicada}} = k \vec{y}$. O resorte opónse á deformación cunha forza de igual módulo e dirección e de sentido contrario á aplicada: $\vec{F}_{\text{resorte}} = -k \vec{y}$ (**lei de Hooke**). Se en vez de estirar o resorte o comprimimos, a forza que nel aparece tamén é oposta á aplicada e tende tamén a restabelecer as condicións iniciais.



Esta forza que aparece cando se produce unha deformación sobre un corpo elástico, tal como un resorte, recibe o nome de **forza recuperadora** ou **elástica** e á constante k de proporcionalidade entre a forza e a deformación chámase **constante elástica** ou **constante recuperadora**.



Unha masa m colgada dun resorte de constante elástica k e desprazada verticalmente da súa posición de equilibrio vibra cun m.h.s.; de que depende o período, T , de oscilación?

$$m \omega^2 = k \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \frac{2 \pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow T = 2 \pi \sqrt{\frac{m}{k}} \\ \omega = \frac{2 \pi}{T} \end{array} \right.$$

Nesta expresión de T vemos que o período co que vibra un resorte de constante elástica k non depende da amplitude das oscilacións nin da lonxitude que se estire/contraiga o resorte (depende exclusivamente da constante elástica e da masa do corpo que oscila).

b) Aplicada a un corpo de masa m unha forza directamente proporcional ao desprazamento e de sentido contrario a este, $\vec{F} = -k \vec{y}$, que movemento toma?

$$\left. \begin{array}{l} \vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot a \cdot \vec{j} \\ \vec{F} = -k \cdot \vec{y} = -k \cdot y \cdot \vec{j} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} m \cdot a = -k \cdot y \\ a = \frac{d^2 y^{(*)}}{dt^2} \end{array} \right\} \rightarrow m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + k \cdot y = 0$$

(*) Queremos encontrar a ecuación do movemento para así saber de que movemento se trata.
 Por iso procedemos a relacionar a aceleración, a , coa elongación, y .

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot y = 0 \\ m \cdot \omega^2 = k \end{array} \right\} \rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 \cdot y = 0$$

Esta é unha ecuación diferencial de segunda orde, que ten por solución (coñecida de antemán) unha función sinusoidal:

$$y = A \text{ sen } (\omega t + \varphi_0)$$

Como esta é a ecuación do movemento harmónico simple, este é o tipo de movemento que toma a partícula de masa m sometida a unha forza \vec{F} directamente proporcional ao desprazamento e de sentido contrario a este.

Comprobémolo:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} [A \text{ sen } (\omega t + \varphi_0)] = A \omega \cos (\omega t + \varphi_0)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d[A \omega \cos (\omega t + \varphi_0)]}{dt} = -\omega^2 A \text{ sen } (\omega t + \varphi_0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega^2 A \text{ sen } (\omega t + \varphi_0) \\ y = A \text{ sen } (\omega t + \varphi_0) \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} -\omega^2 A \text{ sen } (\omega t + \varphi_0) + \omega^2 A \text{ sen } (\omega t + \varphi_0) = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right.$$

Polo tanto: $y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ é solución da ecuación $\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$

Exercicio resolto

► Unha partícula de 25 g vibra, segundo un m.h.s., cunha amplitude de 20 cm e unha frecuencia de 100 Hz. Calcula:

- a) a constante recuperadora.
- b) a velocidade 0,1 s despois de pasar pola posición de equilibrio co sentido positivo da elongación.

Solución:

a) Sabemos que:

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow T^2 = 4 \pi^2 \frac{m}{k} \rightarrow k = \frac{4 \pi^2 m}{T^2}$$

Temos que calcular o período. Como coñecemos $\nu = 100$ Hz e sabemos que $T = 1/\nu$ resulta:

$$k = 4 \cdot \pi^2 \cdot 25 \cdot 10^{-3} \cdot 100^2 = 1000 \cdot \pi^2 \text{ N m}^{-1}$$

b) Se a elongación \vec{y} a expresamos coa función seno: $\vec{y} = A \sin(\omega t + \varphi_0) \vec{j}$, á velocidade \vec{v} correspóndelle a función coseno: $\vec{v} = A \omega \cos(\omega t + \varphi_0) \vec{j}$. O valor de φ_0 calculámolo a partir das condicións iniciais: para $t = 0 \rightarrow y = 0$. Polo tanto: $0 = A \sin(\omega \cdot 0 + \varphi_0) \rightarrow 0 = \sin \varphi_0 \rightarrow \varphi_0 = 0$. Descartamos o valor de 180° porque no instante $t = 0$ o sentido do movemento é cara a valores positivos da elongación.

$$\left. \begin{array}{l} v = A \omega \cos(\omega t) \\ \omega = 2 \pi \nu \end{array} \right\} \rightarrow v = 20 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 100 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 100 \cdot 0,1) = 40 \pi \text{ m/s}$$

Exercicio resolto

► Un resorte de masa desprezable posúe unha lonxitude de 15 cm e ao aplicarlle unha forza de 300 g pasa a medir unha lonxitude de 25 cm. Deste resorte cólgase un corpo de 900 g e, unha vez alcanzada a posición de equilibrio, estírase verticalmente 7 cm. Calcula: a) a constante elástica do resorte e b) a frecuencia de oscilación. Dato: $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

Solución :

a) Escribimos a fórmula: $\vec{F} = k \cdot \vec{y}$, que relaciona a forza deformadora aplicada ao resorte coa deformación que nel se causa (nela non aparece o signo menos porque a expresión $F = -k \cdot \vec{y}$ corresponde á forza recuperadora e non á que se aplica exteriormente).

$$300 \cdot 10^{-3} \cdot 10 = k (0,25 - 0,15) \rightarrow k = 30 \text{ N m}^{-1}$$

b) O período de oscilación vén dado pola expresión: $T = 2 \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

Como a frecuencia é a inversa do período: $\nu = 1/T$, resulta que:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2 \pi \sqrt{\frac{m}{k}}} = \frac{1}{2 \pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

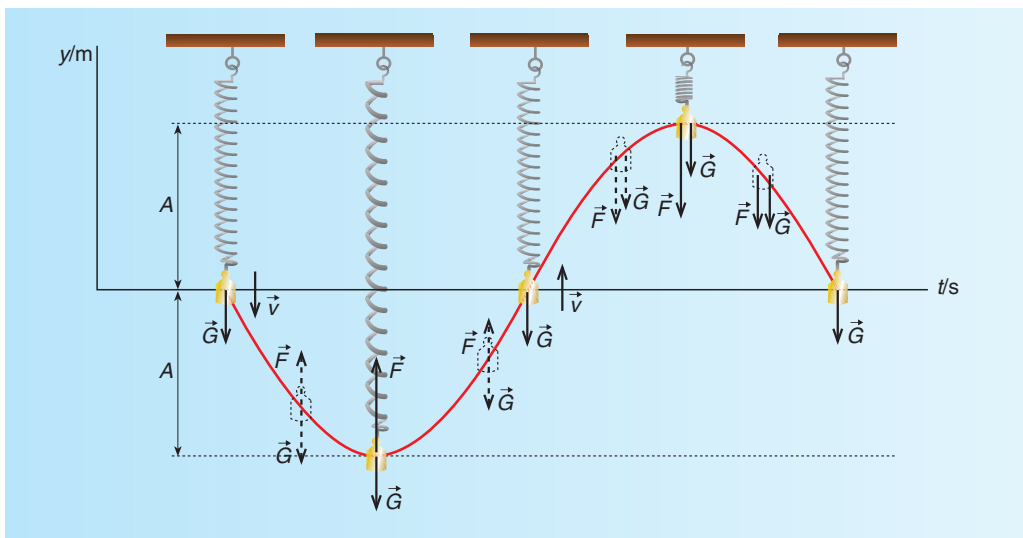
$$\text{Substituíndo temos: } \nu = \frac{1}{2 \pi} \sqrt{\frac{30}{0,9}} = 0,92 \text{ Hz}$$

5. ENERXÍA NO MOVEMENTO HARMÓNICO SIMPLE

Consideremos unha masa m que colgamos dun resorte de constante elástica k . Se desprazamos verticalmente a masa m unha distancia y da súa posición de equilibrio, m vibra cun m.h.s. xa que a forza que o causa é directamente proporcional á posición, cambiada de signo, $\vec{F} = -k \vec{y}$, e adquire enerxía cinética e potencial, intercambiando estes valores mentres oscila.

5.1. Enerxía potencial

Empezamos analizando como é a forza que causa o m.h.s.



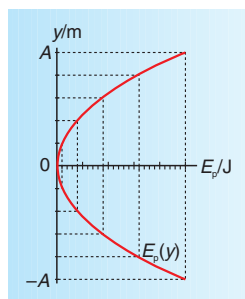
Consideremos un resorte de aceiro suxeito por un extremo e que do outro extremo colgamos unha masa m . O resorte alóngase até que se alcanza a posición de equilibrio. Unha vez establecido este, tiramos verticalmente cara abaixo da masa m , aparecendo unha forza recuperadora, sendo a forza neta \vec{F} que actúa sobre a masa do tipo: $\vec{F} = -k \vec{y}$. Como é esta forza? Ao tirar do resorte realizamos un traballo que se “almacena” no propio resorte, sendo totalmente recuperábel. Trátase, polo tanto, dunha forza conservativa podendo escribir: $\Delta E_p = -W$. Tamén podemos razoar o carácter conservativo da forza que causa o m.h.s. ao ver que sempre está dirixida cara a un punto fixo (o punto de equilibrio) e só é función da distancia, sendo unha forza central que, como toda forza central, é conservativa.

$$\Delta E_p = -\int_0^y \vec{F} \cdot d\vec{y} = -\int_0^y -k \cdot \vec{y} \cdot d\vec{y} = k \cdot \int_0^y y \cdot dy \cos 0^\circ = \frac{1}{2} k \cdot [y^2]_0^y = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2$$

A enerxía potencial depende da posición: ten un valor máximo nos extremos ($y = A$ e $E_p = (1/2) \cdot k \cdot A^2$) e mínimo no centro ($y = 0$ e $E_p = 0$). A súa variación é parabólica (polino-

mio en grao dous), coas ramas cara a valores positivos de E_p (coeficiente en grao dous positivo) e co vértice na orixe (ausencia de termos de grao menor que dous). A súa representación gráfica é a indicada na figura.

Na expresión da enerxía potencial elástica vemos que esta é sempre positiva, o que nos di que un resorte almacena enerxía, tanto se se alonga como se se comprime.



5.2. Enerxía cinética

$$\left. \begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \\ v &= \omega \cdot A \cos(\omega t + \varphi_0) \end{aligned} \right\} \rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

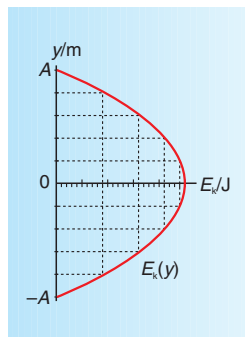
Para expresar a enerxía cinética en función da elongación recordaremos que: $\cos^2(\omega t + \varphi_0) = 1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0)$, resultando:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 [1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0)] \\ E_k &= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \end{aligned}$$

E como: $\text{Asen}(\omega t + \varphi_0) = y$, temos:

$$E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 y^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 (A^2 - y^2) = \frac{1}{2} k (A^2 - y^2)$$

A enerxía cinética depende da posición: é máxima no centro ($y = 0$ e $E_k = (1/2) \cdot k \cdot A^2$) e mínima nos extremos ($y = A$, $y = -A$ e $E_k = 0$). O valor da enerxía cinética en función da posición é o do gráfico da figura.

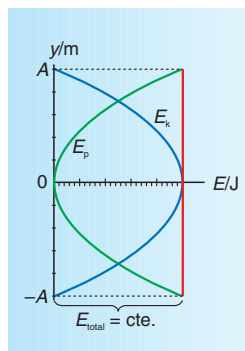


5.3. Enerxía mecánica

É a suma da enerxía cinética e potencial:

$$E_m = E_k + E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (A^2 - y^2) + \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$$

Vemos que no movemento harmónico a enerxía mecánica permanece constante (se non hai rozamento) xa que a amplitude do movemento permanece constante: durante unha oscilación hai un intercambio continuo de enerxía cinética e potencial, permanecendo constante a súa suma.



6. EXERCICIO DE COMPOSICIÓN DE DOUS M.H.S. DE IGUAL FRECUENCIA

Cando nun punto do espazo coinciden dúas ou máis ondas dise que interfieren e neste punto as ondas suman os seus efectos. Sexan as seguintes ondas as que interfieren:

$$y_1 = 3 \text{ sen } (8 \pi t - \pi/12)$$

$$y_2 = 2 \text{ sen } (8 \pi t - \pi/4) \text{ (en m)}$$

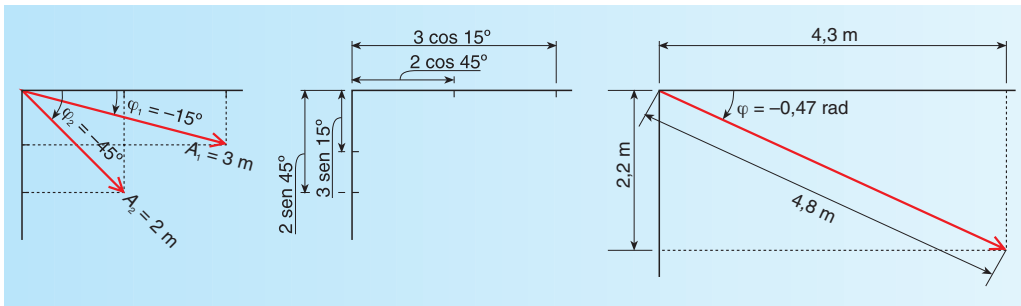
Cal será a ecuación da onda resultante?

Trátase da composición de dous movementos harmónicos simples de igual período: $\omega = 2\pi/T = 8\pi \text{ rad/s} \rightarrow T = 0,25 \text{ s}$, con amplitudes de 3 m e 2 m e fases iniciais, respectivamente, de -15° e -45° .

Sabemos que cada un destes dous movementos pode considerarse como o movemento que toma, sobre o eixe y, a proxección doutro movemento que describe unha circunferencia coa velocidade angular de $8\pi \text{ rad/s}$ e raio 3 e 2 m, respectivamente.

A ecuación da onda resultante hai de ser da forma: $y = A \text{ sen } (8 \pi t - \varphi)$.

Para achar a amplitude resultante, A, empezamos proxectando sobre os eixes coordenados os segmentos xiratorios que representan os dous movementos harmónicos. Simplificamos os cálculos tomando $t = 0$.



$$A_x = A_{1x} + A_{2x} = 3 \cos \pi/12 + 2 \cos \pi/4 = 4,3 \text{ m}$$

$$A_y = A_{1y} + A_{2y} = 3 \text{ sen } \pi/12 + 2 \text{ sen } \pi/4 = 2,2 \text{ m}$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{4,3^2 + 2,2^2} = 4,8 \text{ m}$$

Cos compoñentes A_x e A_y obtemos o ángulo de desfase φ : $\tan \varphi = -2,2/4,3 \rightarrow \varphi = -0,47 \text{ rad}$.

Substituíndo na ecuación $y = A \text{ sen } (\omega t + \varphi)$ obtemos a ecuación de onda resultante:

$$y = 4,8 \text{ sen } (8 \pi t - 0,47) \text{ (m)}$$



EXERCICIOS
(cuestións)

1. Mapa conceptual dos contidos do tema.
2. Que é cada termo da expresión: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$? Explica como a partir dela se determina o valor da constante elástica dun resorte. (*Selectividade COU; setembro 02*).
3. Cos valores que aparecen na táboa e que corresponden a un péndulo simple, calcula (aproximadamente) o valor da aceleración da gravidade, mostrando o procedemento utilizado. (*Selectividade COU; set. 01*).

Período T/s	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00
Lonxitude l/m	0,248	0,558	0,993	1,551	2,234	3,041	3,972	5,027	6,206

4. Ao desenvolver a práctica do resorte elástico polo método dinámico mídense os períodos de oscilación do mesmo para diferentes masas. Como se chega ao valor da constante elástica a partir destes datos? (*Selectividade COU; xuño 01*).
5. Explica como podes determinar a aceleración da gravidade utilizando un péndulo simple. Comenta cales son as principais fontes de erro que afectan o resultado. (*Selectividade COU; setembro 00*).
6. No estudo da práctica do resorte elástico, polo método dinámico, o período T de oscilación vén dado por $T^2 = 4\pi^2 m/k$, onde m é a masa que pende do resorte e k a súa constante elástica. Fai e comenta a representación gráfica que consideres máis adecuada para obter dela o valor de k . (*Selectividade COU; xuño 00*).
7. Explica como determinarías a constante elástica dun resorte mediante o estudo dinámico, utilizando os gráficos convenientes. (*Selectividade COU; setembro 99*).
8. Fai unha descrición do material e do desenvolvemento experimental na determinación da constante elástica dun resorte elástico, mediante o estudo estático, utilizando os gráficos convenientes. (*Selectividade COU; xuño 99*).
9. Na determinación de g mediante un péndulo simple, mídense períodos para diversas lonxitudes. Explica como consegues un axuste lineal ao tratar graficamente os datos experimentais, e relaciona o valor de g coa pendente do axuste. (*Selectividade COU; setembro 98*).
10. A un resorte de 20 cm de lonxitude aplícaselle unha serie de pesas, léndose nunha regra a posición final do resorte para cada carga. Os resultados danse na táboa. Acha a constante elástica do resorte e o seu erro. (*Selectividade COU; xuño 98*).

Pesa/g:	400	500	800	1000	1100
Lonxitude/cm:	26,4	27,9	32,5	35,7	37,1

11. Na determinación de g mediante o péndulo simple, que parámetros se poden modificar e con que resultado? (*Selectividade COU; setembro 97*).
12. Explica como determinarías cun péndulo a aceleración da gravidade no laboratorio. Como deben ser a lonxitude e a amplitude do mesmo para obter o mellor valor? (*Selectividade COU; xuño 97*).
13. Na determinación “dinámica” da constante elástica do resorte, que parámetros se poden modificar e con que resultado? (*Selectividade COU; setembro 96*).

14. Ao determinar “ g ” cun péndulo simple observamos que podemos actuar sobre dous parámetros: a lonxitude do fío e a masa que pende del. Como lle afectan ao período de oscilación do péndulo estes dous parámetros? (*Selectividade COU; xuño 96*).

15. Mediante un péndulo simple medíronse os seguintes datos de lonxitudes e períodos:

l/m	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20
T/s	1,40	1,55	1,71	1,76	1,92	2,02	2,13	2,19

Que conclusión xerais se poden deducir? (*Selectividade COU; setembro 95*).

16. Ao traballar co resorte determínase a súa constante elástica polos métodos estático e dinámico. Obtívose o mesmo valor por ambos métodos? É razoábel o resultado? (*Selectividade COU; xuño 95*).

17. Se un reloxo de péndulo adianta, débese aumentar ou diminuír a lonxitude do péndulo para corrixir a desviación? Razona a resposta. (*Selectividade COU; xuño 94*).

18. Temos un péndulo que realiza oscilacións de pequena amplitude arredor da súa posición de equilibrio. De se faceren varias experiencias con lonxitudes l_1, l_2, l_3, \dots crecentes, quere iso dicir que se van acadar valores de aceleración da gravidade g_1, g_2, g_3, \dots , tamén crecentes? Por que? (*Selectividade COU; setembro 93*).

19. Un resorte elástico do que pende unha masa m , se o estiramos lixeiramente, comeza a oscilar ao deixalo en liberdade. Se cambiamos a masa m por outra maior ou menor, verase afectado o período? Por que? (*Selectividade COU; xuño 93*).

20. Ao facer a experiencia do resorte para determinar a constante elástica dun resorte metálico, alguén che entrega un corpo de masa descoñecida e che pide que busques o valor desa masa. É posíbel dar con ela coa montaxe experimental desta práctica? En caso afirmativo explica como o farías; en caso negativo, sinala por que non se pode facer. (*Selectividade COU; setembro 92*).

21. Un alumno desexa realizar a práctica do péndulo simple. Un compañeiro deulle dous consellos para ter en conta:

1º O péndulo débese deixar oscilar cunha amplitude maior de 30° para asegurarse que o movemento é aproximadamente harmónico simple.

2º Hai que asegurarse que o péndulo estea oscilando nun plano e que non o faga elípticamente.

Pregunta: Son correctos os consellos? Razona a resposta. (*Selectividade COU; setembro 92*).

22. Unha alumna que realizou a práctica do péndulo simple escribe o seguinte parágrafo no seu caderno de laboratorio: “O obxectivo fundamental da práctica do péndulo simple é observar como varía o valor da gravidade no laboratorio, para iso constrúense diversos péndulos todos eles da mesma masa e de diversas lonxitudes”. Son correctas as dúas afirmacións? Razona a resposta. (*Selectividade COU; xuño 92*).

23. Un alumno realizou a práctica da constante elástica dun elástico mediante o seu estudo estático e dinámico. Observa que obtivo dous valores diferentes da constante elástica do elástico: k_1 para o estudo estático e k_2 para o estudo dinámico. É normal que obteña dous valores diferentes ou debe repetir a práctica até que obteña un único valor? Razona a resposta. (*Selectividade COU; xuño 92*).

24. Tense un péndulo simple que se fai oscilar con pequenos desprazamentos, variando a súa lonxitude sucesivamente na secuencia $l_1 < l_2 < l_3 < \dots < l_n$. Quere isto dicir que tamén se obtén unha secuencia de gravidades $g_1 < g_2 < g_3 < \dots < g_4$? Razona a resposta. (*Selectividade COU; setembro 91*).

25. No estudo estático dun resorte represéntanse os puntos de lonxitudes (l_1) fronte ás forzas (F_1), dando unha liña recta. No estudo dinámico do mesmo resorte represéntanse as masas (m_1) fronte ao cadrado dos períodos (T_1^2), obtendo tamén unha recta. Teñen ambas a mesma pendente? Razona a resposta. (*Selectividade COU; setembro 91*).
26. Dous corpos da mesma masa suspéndense respectivamente de dous resortes de constantes elásticas k_1 e k_2 , sendo $k_2 = 4 k_1$. Determina a relación dos respectivos períodos de oscilación T_1 e T_2 . (*Selectividade COU; xuño 91*).
27. Dunha experiencia do péndulo simple realizada no laboratorio observáronse as medidas de lonxitudes e períodos dadas na táboa seguinte. Que conclusións se deducen desta experiencia? Razona a resposta. (*Selectividade COU; xuño 91*).

PERÍODO T/s	LONXITUDE l/m
1,00	0,248
1,50	0,558
2,00	0,993
2,50	1,551
3,00	2,234
3,50	3,041
4,00	3,972
4,50	5,027
5,00	6,206

28. A liña recta obtida ao representar os datos medidos das experiencias estáticas dun resorte, ten a mesma pendente que a liña recta que tamén se obtén ao representar os datos medidos das experiencias dinámicas? Razóese a resposta. (*Selectividade COU; setembro 90*).
29. Cando un resorte se estira lixeiramente mediante unha pequena sobrecarga, ao soltalo comenza a oscilar arredor da posición de equilibrio inicial. Que sucede co período de oscilación cando se vai cargando o resorte con masas cada vez maiores? Razona a resposta. (*Selectividade COU; xuño 90*).
30. Téñense tres resortes distintos de constantes elásticas k_1 , k_2 , e k_3 . Mediante a experiencia do estudo dinámico dun resorte comprobouse que $k_1 < k_2 < k_3$. Como estarán ordenados os períodos de oscilación T_1 , T_2 e T_3 dos tres resortes cando se cargan os tres coa mesma masa? Razóese a resposta. (*Selectividade COU; xuño 90*).
31. Dispónse de dous corpos e dun resorte elástico. Se se coñece a masa dun dos corpos, como poderíamos saber a masa descoñecida do outro corpo? Nota: Dispónse así mesmo do material de apoio necesario para realizar o experimento. (*Selectividade COU; setembro 90*).
32. Ao estudar estaticamente un resorte obtéñense as seguintes lecturas:

Peso suspendido/g	0	2	6	10	15	20
Lonxitude resorte/mm	70,0	72,0	76,1	79,9	84,9	99,2

Calcúlese a constante do resorte e indíquese se o comportamento do resorte é elástico en toda a rexión. (*Selectividade COU; xuño. 90*).

33. Dispoñemos dun resorte, un prاتیño, unha caixa de pesas, papel milimetrado e lapis. Como poderíamos obter numérica e graficamente o valor da constante elástica, k , do resorte? (*Selectividade COU; xuño 88*).
34. Se se determina a constante dun resorte estaticamente (medindo os alongamentos) e dinamicamente (a partir do período de oscilación), obteranse os mesmos valores?, que valor debe tomarse? Por que? (*Selectividade COU; setembro 87*).
35. O péndulo simple que utilizaches no laboratorio constaba dunha bóla de chumbo de pequeno volume, cunha masa de 200 g, colgada dun fío ideal de lonxitude 225,3 cm, que facías oscilar cunha elongación máxima de 6° , desenvolvendo 15 oscilacións en 45 segundos. Tomando como posición inicial un dos extremos da súa traxectoria, escribe a súa elongación en función do tempo.
36. Un péndulo simple consta dunha bóla de gran masa e pequeno volume, colgada dun fío ideal de 2,00 m de lonxitude. Se se fai oscilar cunha amplitude de 32 cm, estuda se o movemento deste péndulo se pode considerar harmónico simple e, en caso afirmativo, escribe a súa elongación en función do tempo, sabendo que cando se empeza a contar o tempo está no centro da súa traxectoria e se despraza cara a valores negativos da elongación. Dato: $g = 9,80 \text{ m s}^{-2}$.
37. Temos un resorte elástico do que colgamos unha masa m causándolle un alongamento, Δy . Escribe a expresión que relaciona: a) a forza exercida pola masa m coa deformación causada no resorte e b) a forza recuperadora do resorte coa deformación que sofre o resorte.
38. Unha mesma masa m vibra segundo un m.h.s., con frecuencias diferentes e igual amplitude, ao estar colgada de dous resortes distintos. Contesta razoadamente que lle sucede ao valor da súa: a) velocidade máxima; b) aceleración máxima e c) enerxía mecánica.
39. Se a unha masa m , que vibra colgada dun resorte elástico, segundo un m.h.s., cunha frecuencia ν e amplitude A , se lle duplica a súa frecuencia e triplica a súa amplitude, estuda como varía o valor da súa enerxía mecánica.
40. Comenta as distintas opcións da seguinte frase: Unha partícula posúe un movemento harmónico simple, m.h.s., cando: a) repite a mesma situación física a iguais intervalos de tempo; b) a súa posición varía sinusoidalmente co tempo; c) a súa aceleración tanxencial é constante.
41. O espazo percorrido ao longo dun ciclo por unha partícula que realiza un movemento harmónico simple de amplitude A é: a) $2\cdot A$; b) $4\cdot A$; c) nulo xa que $y_{\text{no instante } t=0} = y_{\text{no instante } t=T}$. (Comenta os tres ítems).
42. No punto en que a velocidade dunha partícula que posúe un m.h.s. é máxima sucede que: a) a súa elongación é máxima; b) a súa aceleración é máxima; c) a forza que actúa sobre a partícula é nula.
43. Unha masa m está colgada do extremo dun resorte de constante elástica k e oscila cun m.h.s. de amplitude A . Razona se a enerxía mecánica total da masa m e a súa frecuencia de oscilación dependen do valor da masa.
44. Unha masa m está colgada do extremo dun fío de lonxitude l , constituíndo un péndulo simple, e oscila cunha amplitude A . Estuda se a súa frecuencia de oscilación e a súa enerxía mecánica total dependen do valor da masa m que oscila.
45. O movemento que describe unha pelota, que se deixa caer sobre unha superficie ríxida, producíndose un choque elástico, é: a) periódico; b) oscilatorio; c) vibratorio. (Elixo razoadamente a/s opción/s que consideres correcta/s).
46. Unha masa m oscila cun m.h.s. A súa enerxía potencial e cinética son iguais para o caso de que a elongación y , con respecto á amplitude A , sexa: a) $y = A$; b) $y = A/2$; c) $y = A/\sqrt{2}$ (Elixo razoadamente a opción que consideres correcta).


**EXERCICIOS
(problemas)**

1. Unha partícula de 1 g describe un movemento harmónico simple no eixe OX, arredor da posición de equilibrio $x = 0$, con frecuencia 10 Hz. Se no instante $t = 0$ a posición da partícula é $x_0 = 1$ cm e a súa velocidade é $v_0 = 0$, determina: a) o valor máximo da velocidade; b) o valor da constante recuperadora da forza que actúa sobre a partícula. (*Selectividade COU; xuño 02*).

R: a) $v_{\text{máxima}} = 0,2 \cdot \pi \text{ m s}^{-1}$; b) $k = 0,4 \cdot \pi^2 \text{ N m}^{-1}$.
2. Unha partícula está describindo un movemento harmónico simple de pulsación $\omega = 2\pi \text{ rad s}^{-1}$. Nun instante dado ($t = 0$) actívase o cronómetro. Neste instante, a elongación, que ten un sentido de percorrido cara ás elongacións positivas, é a metade da máxima e a velocidade é de 10 cm s^{-1} . Calcula: a) a fase inicial e b) a aceleración no instante $t = 0,1$ s. (*Selectividade COU; setembro 01*).

R: a) $\varphi_0 = \pi/6 \text{ rad}$ (cando a posición se expresa coa función seno); b) $\vec{a} = -0,67 \vec{j} \text{ (m s}^{-2}\text{)}$.
3. A enerxía total dun corpo que realiza un m.h.s. é $3 \cdot 10^{-5} \text{ J}$ e a forza máxima que actúa sobre el é $1,5 \cdot 10^{-3} \text{ N}$. a) Escribe a ecuación do movemento deste corpo, se o período é de 2 s e a fase inicial é de 60° . b) Calcula a velocidade ao cabo de 1 s de comenzo do movemento. (*Selectividade COU; xuño 01*).

R: a) $y = 4 \cdot 10^{-2} \cdot \text{sen} \left[\pi \cdot t + \frac{\pi}{3} \right] \text{ m}$; b) $\vec{v} = -6,28 \cdot 10^{-2} \vec{j} \text{ (m s}^{-1}\text{)}$.
4. Un resorte helicoidal ten unha lonxitude de 15 cm. Cando del pende unha masa de 50 g queda en repouso cunha lonxitude de 17 cm. Deseguida estírase cara abaixo de tal xeito que o sistema empeza a oscilar cunha amplitude de 5 cm. Calcula: a) a frecuencia do movemento, e b) a forza recuperadora aos 0,2 s de ter empezado a oscilar. ($g = 10 \text{ m s}^{-2}$). (*Selectividade COU; setembro 98*).

R: a) $\nu = 3,56 \text{ Hz}$; b) $\vec{F} = -0,30 \vec{j} \text{ (N)}$.
5. Unha masa de 4 kg móvese sobre unha superficie horizontal sen rozamento á velocidade de 3 m s^{-1} , e comprime un resorte elástico de masa desprezable e de constante recuperadora 900 N m^{-1} . Determina: a) a compresión máxima do resorte, e b) a velocidade da masa cando o resorte se comprimiu 10 cm. (*Selectividade COU; xuño 97*).

R: a) $x = 20 \text{ cm}$; b) $v = 2,6 \text{ m s}^{-1}$.
6. Unha partícula de 1 g de masa inicia un movemento harmónico simple no punto de máxima elongación, que se atopa a 1 m da orixe. O tempo que tarda a partícula desde o instante inicial até que alcanza a orixe é de 0,25 s. Calcula: a) a pulsación ω deste movemento, e b) a forza que actúa sobre a partícula, transcorridos 0,1 s desde o instante inicial. (*Selectividade COU; setembro 96*).

R: a) $\omega = 2 \pi \text{ s}^{-1}$; b) $\vec{F} = -32,0 \cdot 10^{-3} \vec{j} \text{ (N)}$.
7. Un punto material de 25 g describe un m.h.s. de 10 cm de amplitude e período de 1 s. No instante inicial, a elongación é máxima. Calcula: a) a velocidade máxima que pode alcanzar a citada masa, e b) o valor da forza recuperadora ao cabo dun tempo igual a 0,125 s. (*Selectividade COU; setembro 95*).

R: a) $v_{\text{máx.}} = 0,2 \cdot \pi \text{ m/s}$; b) $\vec{F} = -69,8 \cdot 10^{-3} \vec{j} \text{ N}$.
8. Unha masa de 2 g oscila cun período de π segundos e amplitude de 4 cm. No instante inicial a fase é de 45° . Cando a súa elongación sexa de 1 cm, acha: a) enerxía cinética da partícula, e b) a súa enerxía potencial. (*Selectividade COU; xuño 95*).

R: a) $E_k = 6 \cdot 10^{-6} \text{ J}$; b) $E_p = 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ J}$.

9. Unha partícula de 5 g está sometida a unha forza do tipo $F = -kx$. No momento inicial pasa por $x = 0$ cunha velocidade de 1 m s^{-1} . A frecuencia do movemento resultante é de $2/\pi \text{ Hz}$. Acha: a) a aceleración no punto de máxima elongación; b) a enerxía cinética en función do tempo. (*Selectividade COU; setembro 93*).

R: a) $\vec{a} = -4 \vec{i} \text{ (m/s}^2\text{)}$; b) $E_k = 2,5 \cdot 10^{-3} \cos^2(4t) \text{ J}$.

10. Unha partícula describe un movemento oscilatorio harmónico simple, de xeito que a súa aceleración máxima é de 18 m/s^2 e a súa velocidade máxima é de 3 m/s . Atopa: a) a frecuencia de oscilación da partícula, e b) a amplitude do movemento. (*Selectividade COU; setembro 92*).

R: a) $f = 3/\pi \text{ s}^{-1}$; b) $A = 0,5 \text{ m}$.

11. Unha partícula de 1 miligramo de masa executa un movemento oscilatorio harmónico que pode expresarse pola ecuación: $x = A \sin(\omega t)$, sendo o período de $0,01 \text{ s}$. Cando $t = 8,4 \cdot 10^{-4} \text{ s}$, a velocidade vale $v = 31,4 \text{ cm/s}$. Calcula: a) a amplitude, en metros, do movemento oscilatorio harmónico, e b) a enerxía total. (*Selectividade COU; xuño 91*).

R: $A = 5,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}$; b) $E_{\text{total}} = 6,73 \cdot 10^{-8} \text{ J}$

12. Un obxecto realiza un movemento harmónico simple. Cando se atopa a 3 cm da posición de equilibrio a súa velocidade é de 6 m/s , mentres que se a distancia é de 5 cm a súa velocidade é de 2 m/s . Calcula: a) a amplitude do movemento, e b) a frecuencia do mesmo. (*Selectividade COU; Setembro 89*).

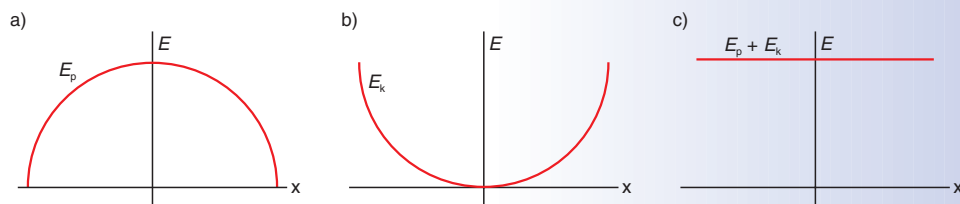
R: a) $A = 5,19 \cdot 10^{-2} \text{ m}$; b) $f = 23 \text{ Hz}$.



Razoa as respostas ás seguintes cuestións:

- ❖ A enerxía mecánica dun oscilador harmónico simple é función de: a) a velocidade; b) a aceleración; c) é constante. (*Xuño 08*).
- ❖ Explica, brevemente, as diferenzas no procedemento para calcular a constante elástica dun resorte, polo método estático e polo método dinámico. (*Xuño 08*).
- ❖ Un obxecto realiza un m.h.s., cales das seguintes magnitudes son proporcionais entre si?: a) a elongación e a velocidade; b) a forza recuperadora e a velocidade; c) a aceleración e a elongación. (*Setembro 06*).
- ❖ Na medida da constante elástica polo método dinámico: a) inflúe a lonxitude do resorte?; b) aféctalle o número de oscilacións e a amplitude delas?; c) varía a frecuencia de oscilación ao colgarlle diferentes masas? (*Setembro 06*).
- ❖ Na práctica para a medida da constante elástica dun resorte polo método dinámico, a) que precaucións debes tomar con respecto ao número e amplitude das oscilacións?; b) como varía a frecuencia de oscilación se se duplica a masa oscilante? (*Xuño 06*).

- ❖ Describe brevemente o procedemento seguido para medir a gravidade no laboratorio por medio dun péndulo simple. (Xuño 06).
- ❖ A constante elástica dun resorte medida polo método estático: a) depende do tipo de material?; b) varía co período de oscilación?; c) depende da masa e lonxitude do resorte? (Setembro 05).
- ❖ Cando no laboratorio mides g cun péndulo simple: a) cantas oscilacións convén medir?; b) que precaucións convén tomar coa amplitude das oscilacións?; c) inflúe a masa do péndulo na medida de g ? (Xuño 05).
- ❖ Se un oscilador harmónico se encontra nun instante dado nunha posición x que é igual á metade da súa amplitude ($x = A/2$), a relación entre a enerxía cinética e potencial é: a) $E_k = E_p$; b) $E_k = 2E_p$; c) $E_k = 3E_p$. (Setembro 04).
- ❖ No estudo estático dun resorte represéntanse variacións de lonxitude (Δl_i) fronte ás forzas aplicadas (F_i) obtendo unha liña recta. No estudo dinámico do mesmo resorte represéntanse as masas (m_i) fronte aos cadrados dos períodos (T_i^2) obténdose tamén unha recta. Teñen as dúas a mesma pendente? Razoa a resposta. (Setembro 04).
- ❖ Que influencia teñen na medida experimental de g cun péndulo simple as seguintes variábeis: a masa, o número de oscilacións, a amplitude das oscilacións. (Setembro 04).
- ❖ Na práctica da medida de g cun péndulo: Como conseguirías (sen variar o valor de g) que o péndulo duplique o número de oscilacións por segundo? (Xuño 04).
- ❖ Unha vez realizada a experiencia do resorte para determinar a constante elástica, como pescudaría o valor dunha masa descoñecida (método estático e dinámico)? (Setembro 03).
- ❖ Nun péndulo simple, indica cal dos seguintes gráficos se axusta correctamente á relación enerxía/elongación:



(Set.03).

- ❖ Médronse no laboratorio os seguintes valores de masas e períodos de oscilación dun resorte; obtén a partir deles o valor da constante elástica. (Xuño 03).

T/s	3,52	3,91	4,12	4,24	4,35
m/kg	0,62	0,75	0,85	0,90	0,95

- ❖ Na práctica do péndulo simple: depende o período do ángulo de oscilación? Canto varía o período se se aumenta a lonxitude un 20%? (Xuño 03).

- Na práctica do péndulo simple médironse os seguintes datos de lonxitudes e períodos:

l/m	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70
T/s	1,40	1,46	1,5	1,60	1,66

Cal é o valor de g obtido con estes datos? (*Setembro 02*).

- Na medida de k_c polo método dinámico: a) Como inflúe na medida de k_c a masa do propio resorte; b) poderías avaliar a masa "efectiva" do resorte? (*Xuño 02*).
- Na determinación de g cun péndulo simple, describe brevemente o procedemento e o material empregado. (*Setembro 01*).
- Na determinación de k_c polo método dinámico, valora a influencia que teñen as seguintes magnitudes: a) a masa total do resorte; b) a amplitude das oscilacións; c) o número de medidas feitas; d) a lonxitude do resorte. (*Xuño 01*).
- No estudo estático dun resorte elástico, que magnitudes se miden e que gráficos se usan para avaliar a constante elástica. Inflúe a masa do resorte? Poderías usar o resorte para pesar un obxecto? (*Setembro 00*).
- Na determinación da constante elástica dun resorte polo método dinámico, o período de oscilación é independente da amplitude?, depende da lonxitude e da masa do resorte?, que gráfico se constrúe a partir das magnitudes medidas? (*Xuño 00*).
- Un resorte de masa desprezábel e de lonxitude 20 cm, alóngase 4 cm cando se lle colga un peso de 1 kg. Se se estira 4 cm máis e se solta, cal será a frecuencia de oscilación? (*Setembro 99*).
- Na práctica do péndulo simple, explica como afectaría á medida do período o seguinte: a) duplicar a masa; b) reducir a lonxitude á metade; c) facer oscilacións con ángulos maiores de 45°; d) realizar unha soa medida (*Xuño 99*).
- No desenvolvemento da práctica do resorte elástico, obtivéronse valores parecidos da constante elástica polos métodos estático e dinámico? Cal pode ser a causa? (*Setembro 98*).
- Ao desenvolver a práctica do péndulo para o cálculo de "g", desempeña algunha función importante a lonxitude do fío? (*Xuño 98*).
- Na práctica do péndulo, que lonxitude de fío e amplitudes angulares iniciais consideras razoábeis? Por que? (*Setembro 97*).
- Na práctica do resorte elástico, consideras que o resorte utilizado tiña unha constante elástica grande ou pequena e por que? (*Xuño 97*).
- Nun movemento harmónico simple, o sentido da forza recuperadora apunta sempre cara ao punto de equilibrio. O seu valor, a) é constante, b) é sinusoidal como a elongación, c) é proporcional á elongación. (*Xuño 97*).

- ❖ A enerxía mecánica total dun oscilador harmónico, a) duplícase cando se duplica a amplitude da oscilación, b) duplícase cando se duplica a frecuencia da oscilación, c) cuadriplícase cando se duplica a amplitude da oscilación. (*Setembro 96*).
- ❖ Fai unha descrición do material e do desenvolvemento experimental na determinación da constante elástica dun resorte polo método dinámico. (*Xuño 96*).



- ❖ Un corpo de masa 100 g está unido a un resorte que oscila nun plano horizontal. Cando se estira 10 cm e se solta, oscila cun período de 2 s. Calcula: a) a velocidade cando se atopa a 5 cm da súa posición de equilibrio; b) a aceleración nese momento; c) a enerxía mecánica. (*Setembro 08*).
R: a) $v = 0,27 \text{ m s}^{-1}$; b) $a = -0,49 \text{ m s}^{-2}$; c) $E_m = 4,93 \cdot 10^{-3} \text{ J}$
- ❖ Dun resorte de 40 cm de lonxitude cólgase un peso de 50 g de masa e, alcanzado o equilibrio, a lonxitude do resorte é de 45 cm. Estírase coa man o conxunto masa-resorte 6 cm e sóltase. Deduce: a) a constante do resorte; b) a ecuación do M.H.S. que describe o movemento; c) a ecuación da enerxía potencial elástica. Dato: $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$. (*Setembro 07*).
R: a) $k = 9,8 \text{ N m}^{-1}$; b) $y = 6,0 \cdot 10^{-2} \cos(14 t) \text{ (m)}$
- ❖ Unha masa de 0,01 kg realiza un movemento harmónico simple de ecuación $y = 5 \cos(2 t + \pi/6)$, magnitudes no SI. Calcula: a) a posición, a velocidade e a aceleración en $t = 1 \text{ s}$; b) a enerxía potencial en $y = 2 \text{ m}$; c) a enerxía potencial é negativa nalgún instante? (*Xuño 07*).
R: a) $y = -4,1 \text{ m}$; $v = -5,8 \text{ m s}^{-1}$; $a = 16,3 \text{ m s}^{-2}$ b) $E_p = 0,08 \text{ J}$; c) non: $E_p = k y^2/2$
- ❖ Un resorte de masa desprezábel estírase 0,1 m cando se lle aplica unha forza de 2,45 N. Fíxase no seu extremo libre unha masa de 0,085 kg e estírase 0,15 m ao longo dunha mesa horizontal a partir da súa posición de equilibrio e sóltase deixándoo oscilar libremente sen rozamento. Calcula: a) a constante elástica do resorte e o período de oscilación; b) a enerxía total asociada á oscilación e as enerxías potencial e cinética cando $x = 0,075 \text{ m}$. (*Xuño 04*).
R: a) $k = 24,5 \text{ N/m}$, $T = 0,37 \text{ s}$; b) $E_m = 0,28 \text{ J}$, $E_p = 0,07 \text{ J}$, $E_k = 0,21 \text{ J}$.
- ❖ Un resorte de masa desprezábel estírase 10 cm cando se lle colga unha masa de 200 g. A continuación o sistema formado polo resorte e a masa estírase coa man outros 5 cm e sóltase no instante $t = 0 \text{ s}$. Calcula: a) a ecuación do movemento que describe o sistema; b) a enerxía cinética e potencial cando a elongación é $y = 3 \text{ cm}$. Dato: $g = 9,80 \text{ m/s}^2$. (*Xuño 03*).
R: a) $y = 0,050 \sin(9,90 t + 3 \pi/2) \text{ m}$; b) $E_p = 8,8 \cdot 10^{-3} \text{ J}$, $E_k = 1,57 \cdot 10^{-2} \text{ J}$.

- Unha masa de 0,1 kg, xunguida a un resorte de masa desprezábel, realiza oscilacións, arredor da súa posición de equilibrio, cunha frecuencia de 4 Hz, sendo a enerxía total do sistema oscilante de 1 xulio. Calcula: a) a constante elástica do resorte e a amplitude das oscilacións (A); b) a enerxía cinética e potencial da masa oscilante nun punto situado á distancia $A/4$ da posición de equilibrio. (*Setembro 02*).

R: a) $k = 63,2 \text{ N m}^{-1}$; $A = 0,18 \text{ m}$; b) $E_p = 0,06 \text{ J}$, $E_k = 0,96 \text{ J}$

- Unha masa de $3 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$ describe un m.h.s. de frecuencia 0,1 Hz e amplitude 0,05 m. Sabendo que en $t = 0 \text{ s} \rightarrow x = 0$, determina: a) a velocidade e a aceleración cando $t = 3 \text{ s}$; b) as enerxías cinética e potencial nese instante. (*Setembro 01*).

R: a) $\vec{v} = 0,0097 \vec{i}$ (m s^{-1}), $\vec{a} = 0,019 \vec{i}$ (m s^{-2}); b) $E_p = 1,34 \cdot 10^{-6} \text{ J}$, $E_k = 1,41 \cdot 10^{-7} \text{ J}$.

- A forza máxima que actúa sobre unha partícula que realiza un movemento harmónico simple e $2 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ e a enerxía total é de $5 \cdot 10^{-4} \text{ J}$. a) Escribe a ecuación do movemento desa partícula se o período é de 4 s e a fase inicial é de 30° ; b) canto vale a velocidade ao cabo de 1 s de comezar o movemento? (*Xuño 00*).

R: a) $y = 0,5 \text{ sen} \left[\frac{\pi}{2} \cdot t + \frac{\pi}{6} \right] \text{ m}$; b) $\vec{v} = -0,39 \vec{j}$ (m s^{-1}).

- Unha masa de 0,05 kg realiza un M.H.S. segundo a ecuación $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$. As súas velocidades son 1 m/s e 2 m/s cando as súas elongacións son, respectivamente, 0,04 e 0,02 m. Calcula: a) o período e a amplitude do movemento; b) a enerxía do movemento oscilatorio e a enerxía cinética e potencial cando $x = 0,03 \text{ m}$. (*Xuño 99*).

R: a) $T = 0,126 \text{ s}$; $A = 0,0447 \text{ m}$; b) $E_m = 12,4 \cdot 10^{-2} \text{ J}$; $E_p = 5,6 \cdot 10^{-2} \text{ J}$; $E_k = 6,8 \cdot 10^{-2} \text{ J}$.

- Un péndulo simple oscila cunha elongación de 18° , desenvolvendo 10 oscilacións por segundo. Tomando como instante inicial a posición de equilibrio: a) escribe a súa elongación en función do tempo, b) determina o seu período de oscilación na Lúa, onde a gravidade é aproximadamente un sexto da terrestre. (*Xuño 98*).

R: a) $y = 7,7 \cdot 10^{-4} \cdot \text{sen}(20 \pi t) \text{ m}$; b) $T_{\text{Lúa}} = 0,25 \text{ s}$.

- Unha butaca está montada sobre un resorte. Cando senta unha persoa de 75 kg, oscila cunha frecuencia de 1 Hz. Se sobre ela senta agora outra persoa de 50 kg, a) cal será a nova frecuencia de vibración?, b) canto descenderá a butaca cando alcance o equilibrio? $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$. (*Setembro 97*).

R: a) $\nu = 1,22 \text{ Hz}$; b) $y = 0,17 \text{ m}$.

- Dun resorte elástico de constante $k = 500 \text{ N m}^{-1}$ colga unha masa puntual de 5 kg. Estando o conxunto en equilibrio, desprázase a masa 10 cm, deixándoa oscilar a continuación libremente. Calcula: a) a ecuación do movemento harmónico que describe a masa puntual e b) os puntos nos que a aceleración desta masa é nula. (*Xuño 96*).

R: a) $y = 10^{-1} \cdot \text{sen}(10 t + 1,5 \pi) \text{ m}$; b) $y = 0 \text{ m}$.



PRÁCTICAS DE LABORATORIO

1. Determinación experimental da aceleración da gravidade, g , co péndulo simple

En principio, o valor de g podémolo experimentar de diversas formas. Así:

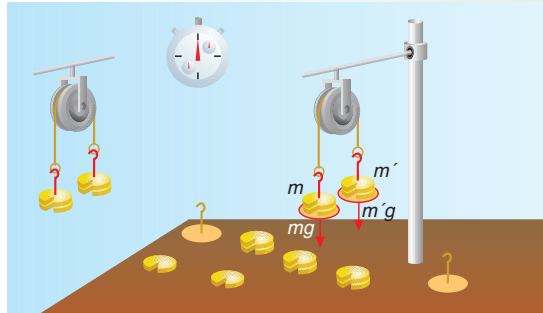
Determinación de g por caída libre

Se deixamos caer unha pedra e medimos o espazo percorrido e o tempo investido, chegamos a coñecer g .

Como o movemento que toma o móbil é uniformemente acelerado, temos que: $s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$. Ao substituír nesta expresión o valor de s e t , calculamos g . Aparece a dificultade da toma de datos, xa que o corpo percorre “moito” espazo en “pouco” tempo: 4,9 m xa no primeiro segundo: $\left(s = \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot 1^2 = 4,9 \text{ m} \right)$.

Determinación de g coa máquina de Atwood

Vemos que, debido ao alto valor da aceleración da gravidade (que no caso anterior é a aceleración con que cae a pedra), o método que acabamos de describir non é útil. Se ao corpo que cae lle aplicamos unha forza constante cara arriba (menor que o seu peso), a aceleración de caída é menor e, en consecuencia, para un mesmo tempo t percorre menos espazo. Unha forma fácil de aplicarlle a un corpo que cae unha forza constante cara arriba é facendo uso da máquina de Atwood.



$$\vec{F}_n = m \cdot \vec{a} \rightarrow m \cdot g - m' \cdot g = (m + m') \cdot a \rightarrow (m - m') \cdot g = (m + m') \cdot a$$

Como a forza resultante é constante, o movemento é uniformemente variado e a aceleración, a , determínámola medindo o espazo percorrido e o tempo investido, quedándonos como única incógnita a aceleración da gravidade, g , que agora calculamos⁵: $g = \frac{(m + m') \cdot a}{(m - m')}$.

Determinación de g co péndulo simple

Imos empezar dicindo o que é un péndulo simple. Un punto material⁶ de masa m , suspendido dun punto mediante un fío inextensíbel e sen masa, que pode oscilar nun plano vertical sen rozamento, constitúe un **péndulo simple** ou **matemático**.

Cando o péndulo está en repouso, o fío e a masa m están na posición vertical. Se separamos a masa m da posición de equilibrio e a abandonamos libremente toma un movemento periódico e oscilatorio, arredor da posición de equilibrio. Pero, é un movemento harmónico simple?

⁵ O resultado non é de moita exactitude xa que os cálculos son feitos supoñendo que tanto a polea como o fío carecen de masa e, ademais, o conxunto non posúe rozamento.

⁶ Consideraremos como tal un corpo de gran masa e pequeno volume.

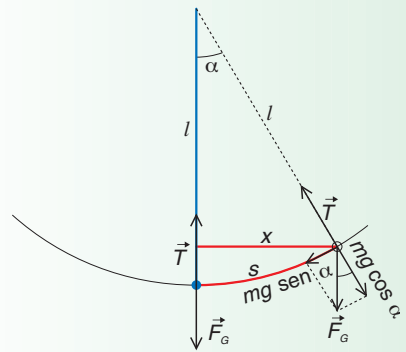
Sabemos que a traxectoria do m.h.s. é rectilínea: $\vec{F} = -k \cdot x \vec{i}$, (consideramos o eixe x na dirección horizontal). Porén, a traxectoria da masa m é a dun arco de circunferencia, que podemos confundir coa corda correspondente para pequenas desviacións (α pequeno). A forza que actúa sobre m é a do seu peso, \vec{F}_G , e a da tensión do fío, \vec{T} . Descompoñemos o peso en dúas direccións:

- Unha, na dirección do fío (que se anula coa tensión)⁷: $m \cdot g \cdot \cos \alpha$.
- Outra, na dirección perpendicular á anterior: $m \cdot g \cdot \sin \alpha$. Este compoñente é a resultante das forzas que actúan sobre m , orixinando o movemento oscilante do péndulo. Como é esta forza?

$F = m \cdot g \cdot \sin \alpha = m \cdot g \cdot (x/l)$. A súa expresión vectorial é: $\vec{F} = -m \cdot g \cdot x \vec{l}$: O signo menos indica que o sentido de \vec{F} é contrario ao de \vec{x} .

Pero a traxectoria do corpo non é a de x (corda), senón a de s (arco). Pero para pequenos ángulos ($\alpha \leq 10^\circ$) a corda confúndese co arco⁸ e a traxectoria do corpo pode considerarse rectilínea e o movemento harmónico simple: $\vec{F} = -k \cdot \vec{x}$, sendo $k = m \cdot g/l$. Substituíndo na expresión xeral do período dun m.h.s. resulta:

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \pi \sqrt{\frac{m}{\frac{m \cdot g}{l}}} = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$



⁷ Debe terse en conta que, cando o péndulo oscila, a tensión do fío é maior que o compoñente do peso nesa dirección, xa que o móbil segue un movemento circular e, por tanto, hai unha forza normal (centrípeta) dirixida cara ao centro da traxectoria.

Para un observador que está ligado á bóla (sistema non inercial) a 2ª lei de Newton é:

$$\vec{T} + \vec{F}_{G \text{ (na dirección de } \vec{T})} + \vec{F}_{\text{inercial}} = \vec{0} \rightarrow T - m g \cos \alpha - m a_i = 0 \rightarrow T = m g \cos \alpha + m \frac{v^2}{l},$$

sendo $T > m g \cos \alpha$ na cantidade de $m v^2/l$.

Para un observador inercial (observador que está no laboratorio) a 2ª lei de Newton é:

$$\vec{T} + \vec{F}_{G \text{ (na dirección de } \vec{T})} = m \cdot \vec{a}_n \rightarrow T = m g \cos \alpha + m \frac{v^2}{l},$$

sendo, a igual que antes, $T > m g \cos \alpha$.

⁸ $\left. \begin{array}{l} \text{sen } \alpha = \frac{x}{l} \\ \alpha = \frac{s}{l} \end{array} \right\} \text{ Se sen } \alpha = \alpha \text{ (en radiáns)} \rightarrow x = s$

A anterior igualdade ten lugar para valores pequenos de α . Exemplos:

- $\left. \begin{array}{l} \text{sen } 5^\circ = 0,087 \\ 5^\circ = 0,087 \text{ rad} \end{array} \right\} \rightarrow \text{sen } \alpha = \alpha$
- $\left. \begin{array}{l} \text{sen } 10^\circ = 0,174 \\ 10^\circ = 0,175 \text{ rad} \end{array} \right\} \rightarrow \text{sen } \alpha = \alpha$
- $\left. \begin{array}{l} \text{sen } 15^\circ = 0,259 \\ 15^\circ = 0,262 \text{ rad} \end{array} \right\} \rightarrow \text{sen } \alpha \approx \alpha$
- $\left. \begin{array}{l} \text{sen } 20^\circ = 0,342 \\ 20^\circ = 0,349 \text{ rad} \end{array} \right\} \rightarrow \text{sen } \alpha \neq \alpha$

Incluso para ángulos $\alpha = 30^\circ = \pi/6 \text{ rad} = 0,523 \text{ rad}$, a diferenza entre α e $\text{sen } \alpha = \text{sen } 30^\circ = 0,500$ é só do 4,6%.

Nesta expresión vemos que o período do péndulo simple só depende da súa lonxitude e do valor da aceleración da gravidade e é independente da masa e da amplitude das oscilacións (se estas son pequenas)⁹.

Obxectivos da práctica

- Adquirir habilidades de montaxe e toma de datos.
- Facer medidas de períodos.
- Comprobar que o período é independente da masa e da amplitude.
- Estudar como depende o período coa lonxitude do fío.
- Determinar a aceleración da gravidade no laboratorio.

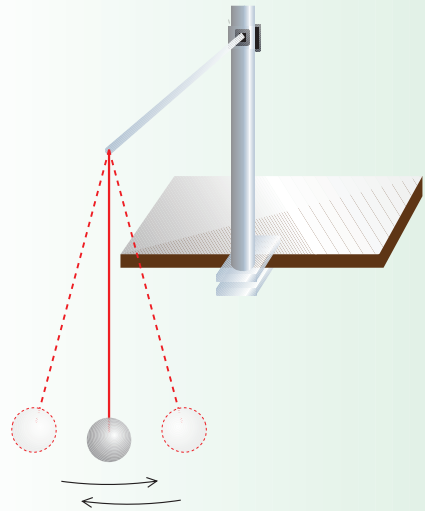
Medida do período dun péndulo simple

Material:

- Soporte, dobre noz e variña con gancho ou mordaza.
- Bólas de aceiro de distinta masa.
- Fío inextensíbel e de masa desprezábel.
- Cronómetro.
- Flexómetro.

Montaxe: A indicada na figura.

Modo de operar: Separa a bóla da posición de equilibrio. Cando as oscilacións sexan pequenas (da orde de 10°) e teñan lugar nun plano vertical (sen describir traxectorias elípticas) cronometra a duración dun número *n*, relativamente grande, de oscilacións. Calcula o período (*T*) mediante a relación; $T = t/n$, onde *t* é o tempo medido e *n* o número de oscilacións. Repite varias veces a medida do período, facendo a media aritmética dos valores obtidos.



Depende o período *T* da masa *m* que oscila?

Modo de operar: Repite os pasos anteriores para varios péndulos de igual lonxitude e distinta masa. Recolle os datos nunha táboa como a seguinte:

<i>m</i> /kg	<i>t</i> /s	<i>n</i>	<i>T</i> /s ?
<i>m</i> ₁ =			
<i>m</i> ₂ =			
<i>m</i> ₃ =			

Conclusión: $T \neq T(m)$

⁹ Para desprazamentos angulares grandes, aínda que o movemento do péndulo é periódico, o período é función da amplitude. A forza que acelera a masa cara ao equilibrio é $mg \sin \alpha$, sendo un valor menor que $mg \alpha$ (que causa un m.h.s., que é periódico e independente da amplitude), resultando un período lixeiramente maior, que podemos calcular con axuda da expresión:

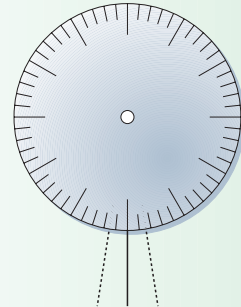
$$T = T_0 \left[1 + \frac{1}{2^2} \sin^2 \left(\frac{1}{2} \alpha_0 \right) + \frac{1}{2^2} \left(\frac{3}{4} \right)^2 \sin^4 \left(\frac{1}{2} \alpha_0 \right) + \dots \right]$$

onde α_0 é o desprazamento angular máximo e $T_0 = 2 \pi \sqrt{l/g}$ é o período correspondente ao límite dos ángulos pequenos.

Depende o período da amplitude das oscilacións?

Modo de operar: Para un péndulo determinado, fai a medida de T para distintas amplitudes, sendo estas pequenas, operando de igual forma a como fixeches até agora. Para a medida das amplitudes monta un disco graduado no punto de xiro do péndulo.

$A/^\circ$	t/s	n	$T/s ?$
$A_1 =$			
$A_2 =$			
$A_3 =$			



Conclusión: $T \neq T(A)$, para pequenas amplitudes.

Cálculo da aceleración da gravidade, g

Material:

- O utilizado na medida do período.
- Un flexómetro de varios metros.
- Pé de rei.

Montaxe: a indicada máis arriba.

Modo de operar:

- Mide o tempo t de varias oscilacións completas, n , e calcula o período, T .
- Mide a lonxitude l do péndulo que corresponde á distancia que existe entre o punto de suspensión e o centro xeométrico da esfera oscilante.
- Calcula g mediante a expresión: $g = (4\pi^2)l/T^2$
- Completa a táboa seguinte.

l/m	t/s	n	$T/s ?$	$T^2/s^2 ?$	$g/m s^{-2} ?$

Medida da variación do período dun péndulo simple coa súa lonxitude

Material e montaxe: o indicado anteriormente.

Procedemento: Modifica a lonxitude do péndulo, soltando ou recollendo o fío, medindo esta lonxitude e o período correspondente. Repite esta operación para varias lonxitudes distintas, enchendo a seguinte táboa e representando T fronte a l e T^2 fronte a l ¹⁰.

¹⁰ Nunha experiencia é costume tabular os datos obtidos, indicando as magnitudes de que se trata, coas correspondentes unidades.

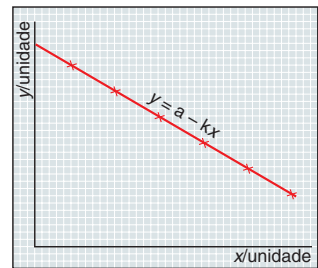
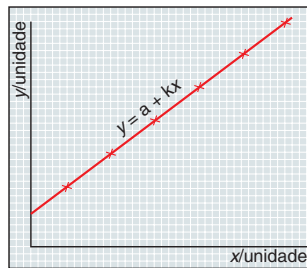
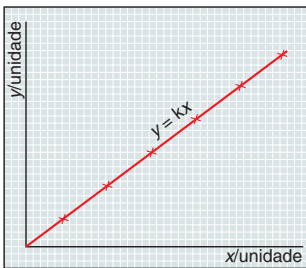
Moitas veces, para chegar ao resultado, os datos obtidos trátanse graficamente, debendo facer uso dos seguintes criterios:

- Representátese a variábel dependente (eixe de ordenadas) fronte á variábel independente (eixe de abscisas).
- Nos eixes han de figurar as magnitudes representadas coas unidades utilizadas, que se indicará da forma: magnitude/unidade.
- Hai que elixir adecuadamente as escalas sobre os eixes, obtendo un gráfico ben centrado sobre o papel: o segmento cuberto polos valores de x debe ser de lonxitude semellante ao segmento cuberto polos valores de y . En consecuencia, as escalas en cada eixe non teñen que ser necesariamente iguais.
- Hai que utilizar números enteiros e potencias de 10 para sinalar as divisións sobre os eixes en vez de marcar os números que imos representar (só figurarán os da escala). Ademais, para que resulte máis cómodo traballar coa gráfica que se obteña, a cuadrícula do papel debe coincidir con "números sinxelos" fáciles de manipular: 1, 2, 5, ..., e potencias de 10.
- Os valores da escala non teñen necesariamente que empezar en cero.
- Debúxase aquel gráfico que "mellor se axuste" aos datos experimentais, que, neste curso, faremos guiándonos da nosa intuición gráfica; en vez de unir os puntos representados.

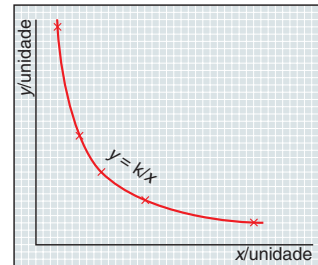
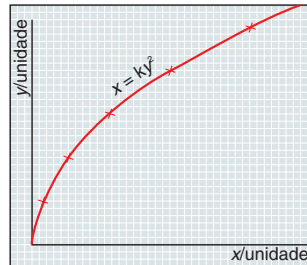
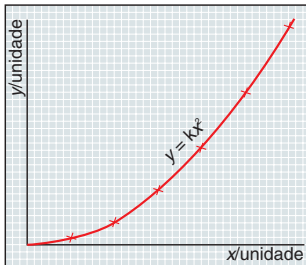
A representación gráfica ten a vantaxe de que nos suxire a relación que gardan entre si as magnitudes representadas. Comentamos algúns casos:

Nº	l/m	t/s	n	T/s ? T ² /s ² ?	T fronte a l	T ² fronte a l
1						
2						
3						
4						
5						

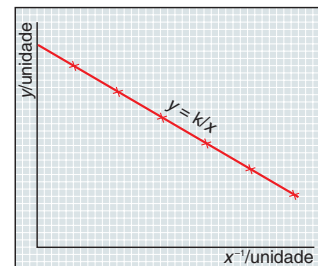
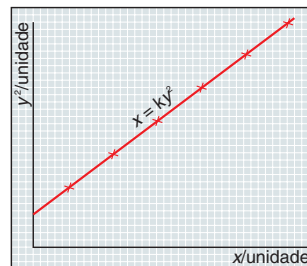
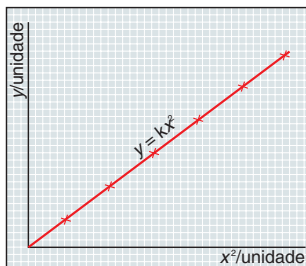
- Se o gráfico que mellor se axusta é unha recta, indícanos que as magnitudes representadas son directamente proporcionais e podemos coñecer a constante de proporcionalidade calculando a pendente da recta. Esta pendente obterémola tomando dous puntos sobre a recta; puntos que han de estar cara aos seus extremos xa que, se ben o erro absoluto de calquera lectura realizada sobre o papel milimetrado é sempre de 1 mm (que é o menor valor das divisións do papel), o erro relativo diminúe co tamaño da lonxitude de medida. No seguinte gráfico representamos tres posibles rectas:



- Noutros casos, o gráfico non é unha recta: a proporcionalidade entre x e y non é lineal. Se a curva que se axusta é unha parábola con vértice na orixe, a relación entre as dúas magnitudes representadas é da forma: $y = k \cdot x^2$ (con eixe vertical) ou $x = k \cdot y^2$ (con eixe horizontal). Se o gráfico é unha hipérbola (se crece x, decrece y e viceversa), a relación entre as magnitudes é da forma: $x \cdot y = k$.



Nestes casos pódese lograr unha representación gráfica en recta facendo un cambio de variábel. Nas representacións anteriores consiste, respectivamente, en:



Conclusión: A representación de T fronte a l é a dunha rama de parábola e a de T^2 fronte a l é unha recta. Polo tanto, a medida que aumenta a lonxitude do péndulo, aumenta o seu período, sendo o aumento de l directamente proporcional a T^2 .

Depende g da lonxitude l do péndulo? Cálculo de g

Agora continuamos completando a táboa anterior co cálculo de g_1, g_2, \dots, g_n . O cálculo de g facémolo de dúas formas:

- Coa media aritmética de g_1, g_2, \dots
- Coa pendente da recta do gráfico que se obtén ao representar T^2 fronte a l ¹¹: $\text{Pendente} = \frac{T^2}{l} = \frac{4\pi^2}{g}$.

Nº	l/m	t/s	n	T/s ?	T ² /s ² ?	g/m s ⁻² ?	
						$g = 4\pi^2/lT^2$	Pte. = $T^2/l = 4\pi^2/g$
1							
2							
3							
4							
5							
						$g_{\text{media}} =$	$g = 4\pi^2/\text{pte.} =$

Conclusión: g non depende da lonxitude do péndulo: $g \neq g(l)$.

2. Determinación da constante elástica, k , dun resorte: Estudo estático e dinámico

Introdución

Cando aplicamos unha forza a un corpo podemos:

- Deformalo: efecto estático.
Que relación hai entre a forza aplicada a un corpo elástico¹² e a deformación causada? Este é un dos obxectivos desta práctica e chegaremos á resposta desta pregunta de forma experimental: lei de Hooke.
- Modificar o seu estado de repouso ou de movemento: efecto dinámico.

No caso dunha masa m colgada dun resorte, ao desprazala da súa posición de equilibrio, oscila baixo unha forza do tipo: $\vec{F} = -k \cdot \vec{y}$, polo que o movemento é harmónico simple, podendo calcular k a partir do período de vibración: $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{(m/k)}$.

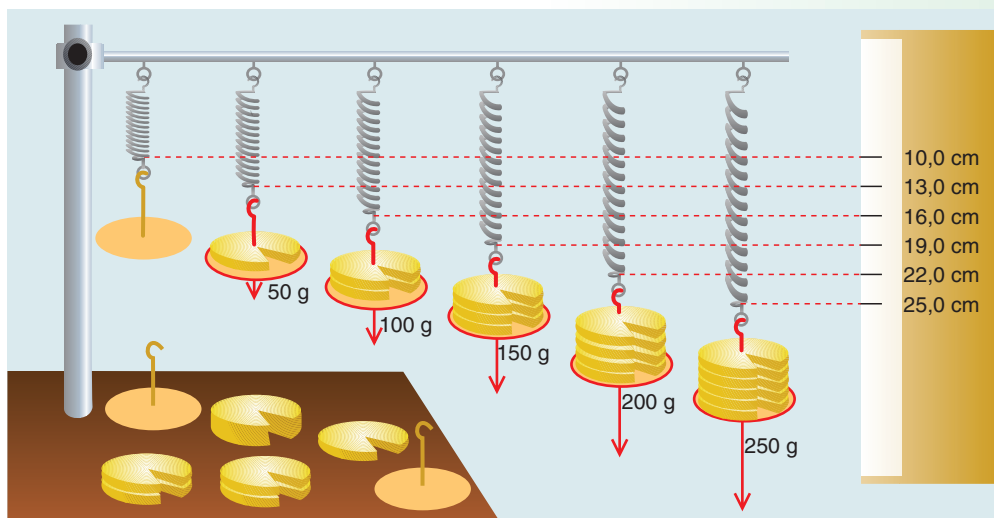
¹¹ Esta pendente determínase tomando dous puntos sobre a recta, cara aos seus extremos, que non teñen porqué coincidir con valores experimentais. Estes puntos escóllense de modo que a súa lectura coincida, polo menos, cun valor preciso dunha das magnitudes representadas nos eixes cartesianos.
¹² Todos os corpos, baixo a acción dunha forza externa, modifican a súa forma. Se ao cesar a forza deformadora, o corpo recupera completamente a súa forma primitiva, o corpo chámase **elástico** (é o caso dos resortes) e a deformación, **deformación elástica**. En caso contrario a deformación denomínase **plástica** (é o caso da plastilina).

Obxectivos:

- Adquirir habilidades de montaxe e de toma de datos.
- Determinar k estaticamente, verificando a lei de Hooke.
- Determinar que a k dun resorte non depende da súa lonxitude (do estirado que estea).
- Determinar a k de dous resortes distintos con iguais características xeométricas, comprobando que son diferentes.
- Ver como o período de vibración depende da masa vibrante.
- Determinar k dinamicamente, comparando este valor co obtido polo método estático.
- Obter a k dun novo resorte formado por varios resortes iguais asociados en serie.
- Comprobar que a k equivalente de varios resortes asociados en serie é igual á inversa da suma das inversas das constantes individuais: $k = 1/(1/k_1 + 1/k_2 + \dots)$.
- Obter a k de varios resortes iguais asociados en paralelo.
- Comprobar que a k equivalente de varios resortes asociados en paralelo é igual á suma das constantes individuais: $k = k_1 + k_2 + \dots$

Material:

- Soporte, dobre noz e variña.
- Portapesas.
- Xogo de pesas de 50, 100 e 200 g.
- Resortes de aceiro.
- Regra.
- Cronómetro.

MÉTODO ESTÁTICO**Montaxe:**

Realización:

- Mide a lonxitude inicial do resorte¹³, l_0 .
- Engade ao portapesas masas coñecidas, m .
- Mide a lonxitude do resorte, l , para cada unha das masas engadidas no portapesas, completando a seguinte táboa.
- Fai os cálculos e a representación indicados na táboa.

Nº	m/g	F/N	l_0/cm	l/cm	$\Delta l/cm?$	$k / N m^{-1} ?$	
						$k = F/\Delta l$	Δl fronte a F
1							
2							
3							
4							
5							
						$k_{media} =$	$k = 1/pte. =$

- Compara o valor medio de k (k_{media}) coa k obtida polo método gráfico.
- Razona, a partir do gráfico e dos valores de k_i obtidos para as distintas lonxitudes l_i do resorte, se a k do resorte depende da súa lonxitude.

Depende k da natureza do resorte?

- Repite a experiencia anterior, para un resorte distinto e que teña iguais características xeométricas (lonxitude, tamaño e forma da espira).
- Coas medidas obtidas, calcula o valor de k e compara esta k coa obtida na práctica anterior.

Nº	m/g	F/N	l_0/cm	l/cm	$\Delta l/cm?$	$k / N m^{-1} ?$	
						$k = F/\Delta l$	Δl fronte a F
1							
2							
3							
4							
5							
						$k_{media} =$	$k = 1/pte. =$

¹³ Esta medida debe facerse despois de colgar no resorte o portapesas cunha masa inicial.

MÉTODO DINÁMICO

Medida da variación do período de vibración dun resorte coa súa masa vibrante

Material e montaxe: o indicado anteriormente.

Realización:

- Colga, sucesivamente, dun dos resortes utilizados anteriormente, masas coñecidas¹⁴.
- Tira do resorte verticalmente cara abaixo, separándoo lixeiramente da posición de equilibrio.
- Solta o resorte deixándoo oscilar libremente.
- Mide para cada masa colgada o tempo de varias oscilacións enchendo os cadros en branco da seguinte táboa e fai os cálculos e as representacións indicadas.

Nº	m/g	t/s	n	T/s ? T²/s²?	T fronte a m		T² fronte a m	
1								
2								
3								
4								
5								

Conclusión: A representación gráfica de T fronte a m é unha rama de parábola e a de T^2 fronte a m é unha recta. Polo tanto, a medida que aumenta a masa vibrante aumenta o seu período, sendo o aumento de m directamente proporcional a T^2 .

Depende k da masa m vibrante? Cálculo de k

Agora continúa completando a táboa anterior co cálculo de k_1, k_2, \dots, k_n . O cálculo de k faíno de dúas formas:

- Coa media aritmética de k_1, k_2, \dots
- Coa pendente da recta que se obtén ao representar T^2 fronte a m : $\text{Pendente} = \frac{T^2}{m} = \frac{4\pi^2}{k}$.

Nº	m/g	t/s	n	T/s ? T²/s²?	k / N m ⁻¹ ?	
					$k = 4\pi^2 m / T^2$	Pte. = $T^2 / m = 4\pi^2 / k$
1						
2						
3						
4						
5						

$k_{\text{media}} =$ _____ $k = 4\pi^2 / \text{pte.} =$ _____

¹⁴ Recorda que a masa vibrante está formada pola masa das pesas colgadas, a do portapesas e a masa vibrante do resorte (xa que as súas espiras tamén están sometidas a un movemento vibratorio e, aproximadamente, é a terceira parte da súa masa).

- Compara o valor medio de k (k_m) coa k obtida polo método gráfico.
- Compara o valor de k obtido no método dinámico co obtido polo método estático.
- Ao ir engadindo masas ao resorte, este vai aumentando a súa lonxitude. A partir dos cálculos realizados razoa se a k do resorte depende da súa lonxitude.

Determinación da k correspondente a dous e a tres resortes iguais asociados en serie

Montaxe:

A indicada tres páxinas máis atrás.

Realización:

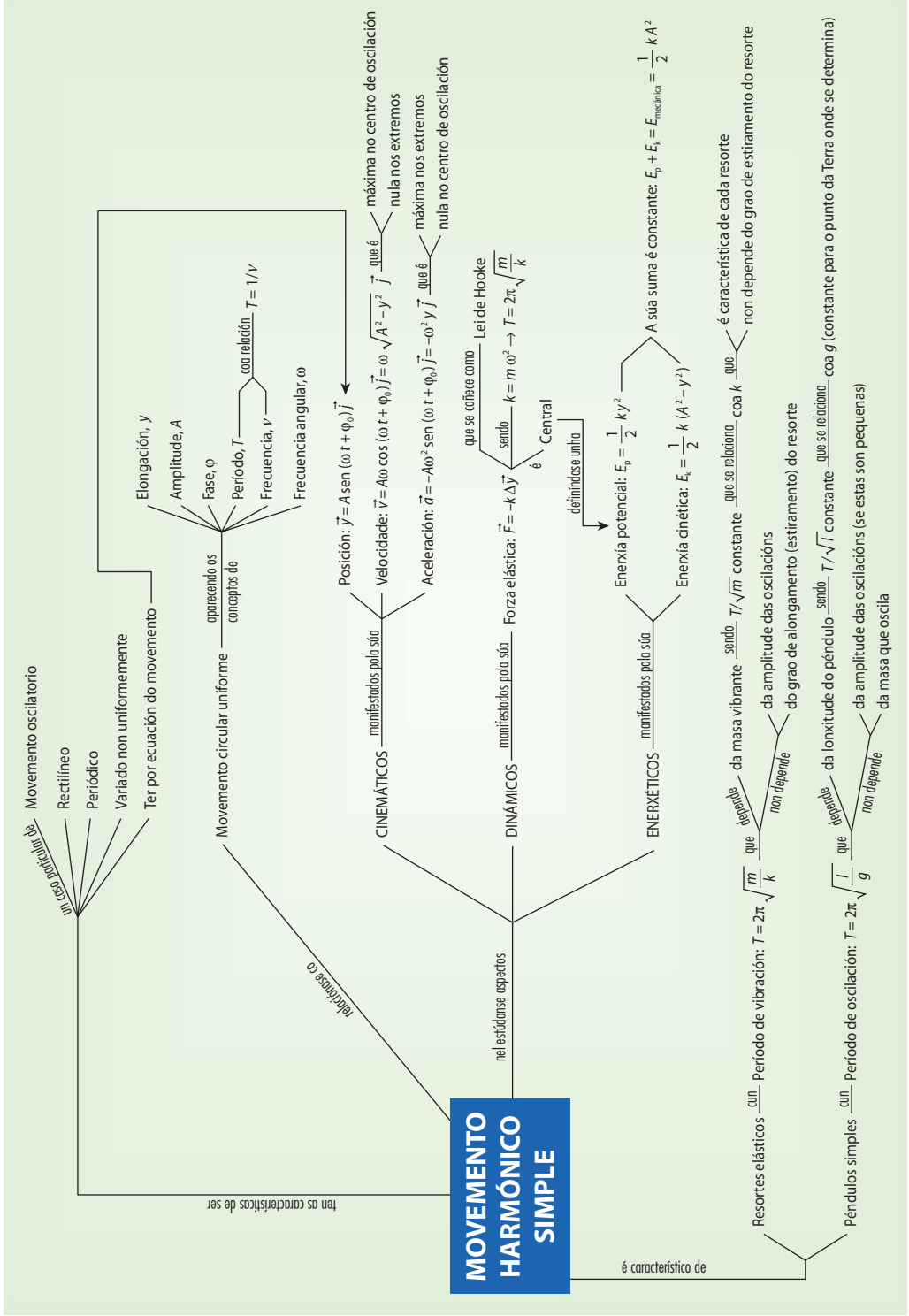
- Engade, primeiro dous e despois tres, resortes iguais ao utilizado anteriormente.
- Repite os pasos seguidos no apartado anterior.
- Compara os valores de k obtidos estática e dinamicamente.

Nº	m/g		t/s		n	T/s		T²/s²?		k = 4π²m/T²		k / N m⁻¹ ?		
	*	**	*	**		*	**	*	**	*	**	Pte. = T²/m = 4π²/k		
	*	**	*	**		*	**	*	**	*	**	*	**	
1														
2														
3														
4														
5														
											$k_{media} =$		$k = 4\pi^2/pte. =$	$k = 4\pi^2/pte. =$

*: Asociación serie de dous resortes iguais.

** : Asociación serie de tres resortes iguais.

Mapa conceptual do Tema 6



Tema 7

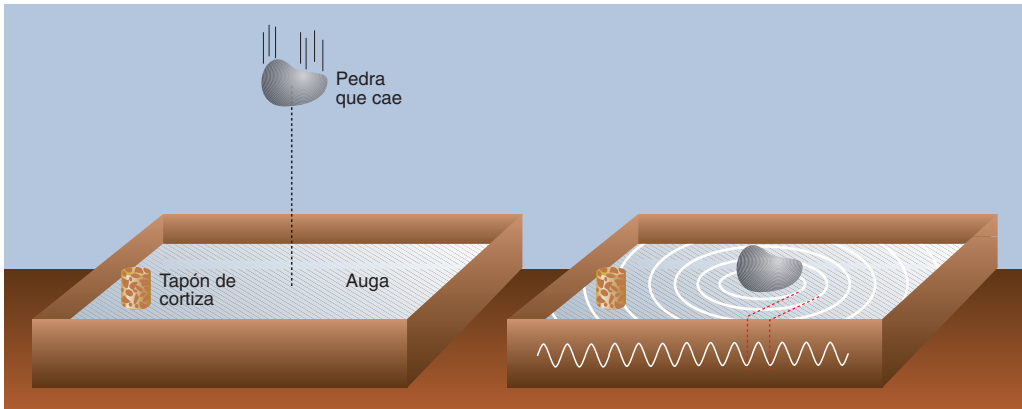
Movimento ondulatorio

1. **Concepto de onda e clases de ondas**
 2. **Magnitudes do movemento ondulatorio**
 3. **Ondas harmónicas. Ecuación de onda unidimensional**
 4. **Energía dunha onda harmónica**
 5. **Intensidade dunha onda harmónica**
 6. **Principio de Huygens: reflexión e refracción**
 7. **Estudo cualitativo dalgunhas propiedades das ondas**
 8. **O son**
 9. **Calidades subxectivas do son: Sonoridade, ton e timbre**
 10. **O eco**
 11. **O efecto Doppler**
- Exercicios**
Exercicios de selectividade
Mapa conceptual dos contidos do tema



1. CONCEPTO DE ONDA E CLASES DE ONDAS

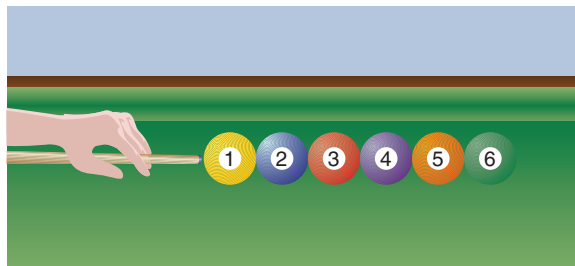
Imaxinemos un estanque con auga en repouso, na que hai unha ou varias cortizas. Ao deixar caer unha pedra na auga, vemos como na súa superficie aparecen uns círculos concéntricos que avanza cara á beira, propagando a perturbación (**chamada onda**) alcanzando ao cabo dun tempo os distintos puntos do medio. Cando chega á cortiza, esta sobe e baixa en torno á súa posición de equilibrio, permanecendo no mesmo lugar¹. Isto indícanos que a auga non se despraza coa perturbación, senón que soamente se axita ao seu paso.



Esta perturbación ten lugar na dirección perpendicular á dirección de propagación da onda: as ondas propáganse horizontalmente na superficie da auga e as partículas de líquido axítanse verticalmente. Dise que a **onda é transversal**.

Pensemose agora en varias bólas de billar que están en contacto formando unha liña recta. Se á primeira bóla lle damos un golpe na dirección e sentido en que están as demais, vemos que a perturbación avanza ao longo da fila, sendo transmitida á última. Se as bólas son elásticas, toda a enerxía da bóla “1” é transmitida á bóla “6” (se as bólas son de plástica, a enerxía inicial da primeira bóla pérdese na deformación das bólas seguintes).

Vemos que as bólas transmiten a perturbación na mesma dirección en que esta se propaga: son as chamadas **ondas lonxitudinais**. Tampouco agora hai desprazamento de masa: as bólas 1, 2, 3, 4 e 5, permanecen fixas, saíndo a 6 coa enerxía comunicada á 1 (se o choque é elástico e non hai rozamento).



¹ Quizais non esteamos totalmente convencidos de que non haxa transporte de materia xa que a experiencia nos di que a cortiza vai sendo arrastrada cara á beira do estanque. A razón está en que as ondas están constituídas por partículas de auga que ademais de desprazarse perpendicularmente á superficie do líquido en repouso, tamén se desprazan horizontalmente: as moléculas de auga cando están na crista móvense no sentido da onda mentres que nos vales o fan en sentido oposto. En consecuencia, cada partícula realiza un movemento que ten unha traxectoria practicamente circular producindo un arrastre dos obxectos que se encontran na superficie. Cando se despraza a cortiza débese a que a auga, ademais do movemento ondulatorio, experimenta un movemento circular que é o que causa o desprazamento.

Debido ás forzas que ligan as partículas da materia, a vibración dun punto material dun medio elástico fai vibrar os puntos veciños, propagándose a vibración a través do medio, coñecéndose esta propagación como **movemento ondulatorio**. Nel hai transporte de enerxía pero non de masa.

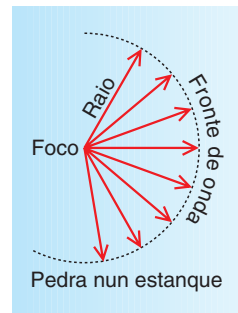
Podemos dicir que **movemento ondulatorio é a propagación dun movemento vibratorio a través dun medio, con transporte de enerxía** pero non de masa.

Nos exemplos expostos, as ondas desprázanse a través dun medio material, recibindo o nome de **ondas mecánicas** ou **materiais**. Pero hai ondas que non necesitan dun medio para propagarse, como é o caso das **ondas electromagnéticas**.

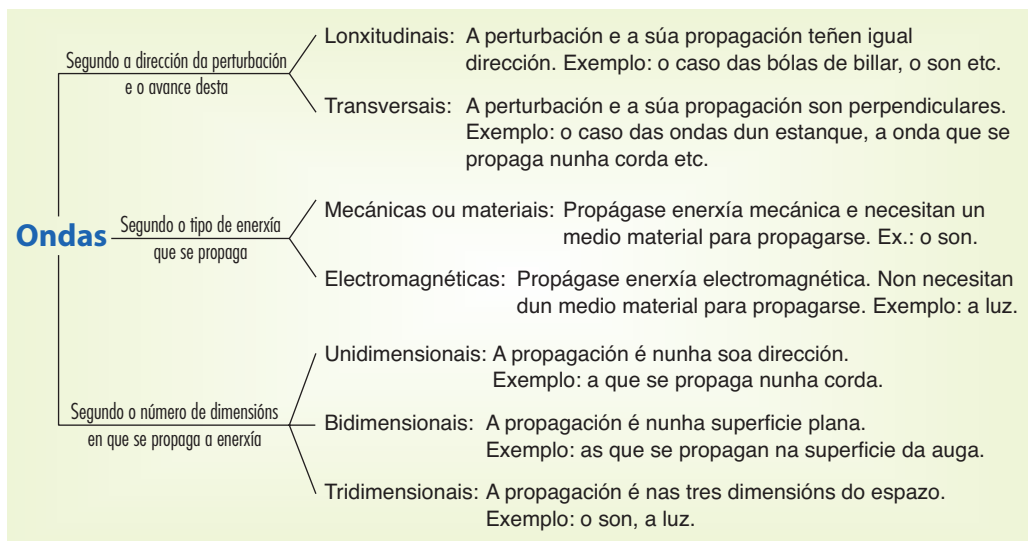
Segundo o número de dimensións nas que se propaga a perturbación, a onda clasifícase en **unidimensional** (é o caso das bólas de billar), **bidimensional** (pedra que cae nun estanque) e **tridimensional** (a luz, o son etc). Observa que se nos situamos nun punto moi afastado do foco (punto onde se produce a perturbación, é dicir, punto onde tivo lugar o impacto da pedra coa auga no exemplo inicial) as ondas (circulares) poden considerarse planas.

No caso de ondas bi e tridimensionais, son útiles os conceptos de:

- **Fronte de onda:** son os puntos que nun instante dado están nun mesmo estado de vibración; é dicir, posúen igual elongación, velocidade e aceleración. Cada círculo concéntrico que aparece nas ondas bidimensionais ou cada esfera concéntrica que aparece nas ondas tridimensionais constitúe unha fronte de ondas.
- **Raio:** é a dirección na que se propagan as ondas, sendo perpendicular á fronte de onda. Nos medios anisótropos (estes presentan propiedades diferentes nas distintas direccións) os raios perden o seu carácter rectilíneo e cúrvanse para permanecer normais á superficie de onda.



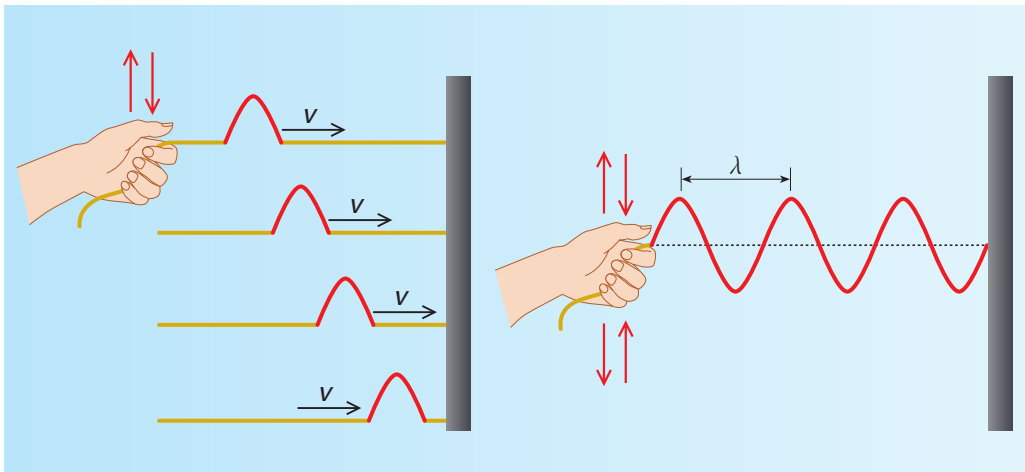
Resumindo, os tipos de ondas poden ser:



2. MAGNITUDES DO MOVEMENTO ONDULATORIO

Imos considerar o movemento ondulatorio causado por unha perturbación, que é un movemento harmónico simple.

Supoñamos que a unha corda tensa, suxeita nun dos seus extremos, lle damos, no outro extremo, un golpe, vertical cara arriba, volvendo ao punto de partida. Producímoslle un impulso e aparece unha soa onda ou **pulso**. Cada partícula da corda está en repouso até que lle chega o impulso. Se en vez de dar un só golpe ao extremo da corda, o movemos periodicamente cara arriba e abaixo, estamos producindo unha sucesión de ondas, chamada **tren de ondas**. Todas as partículas da corda estanse movendo sendo necesario, para producir un tren de ondas, subministrar enerxía continuamente ao centro emisor, que se chama **foco**.



O tren de ondas pode ser **periódico**, repetíndose a mesma situación física para iguais intervalos de tempo (**período**, T). Un período é o tempo que tarda un punto do medio (un punto da corda) en dar unha oscilación completa, que coincide co tempo que tarda unha onda en reproducirse.

O número de veces que se repite a mesma situación física na unidade de tempo é a **frecuencia**, simbolizada por ν ou f , resultando $T = 1/\nu$. Representa o número de oscilacións ou de ondas que se producen en un segundo.

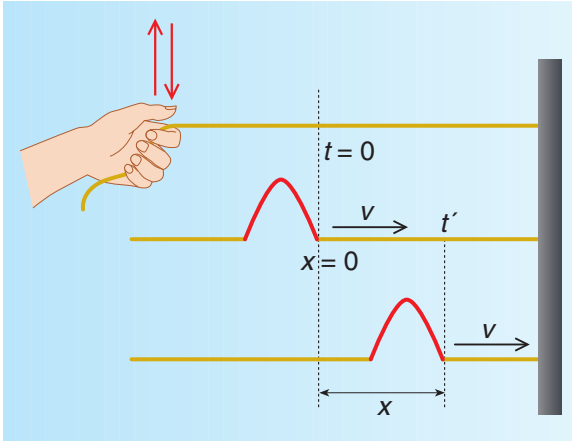
A distancia mínima medida sobre a dirección en que avanza a onda que existe entre dous puntos máis próximos que se encontran simultaneamente no mesmo estado de vibración coñécese como **lonxitude de onda**, λ . Por conseguinte, a velocidade v de propagación da onda é:

$$v = \lambda T = \lambda \cdot \nu$$

O valor que alcanza a perturbación –que é a distancia que hai desde a posición de equilibrio até a onda– é o **elongación**. O valor máximo da elongación chámase **amplitude**, A .

3. ONDAS HARMÓNICAS. ECUACIÓN DE ONDA UNIDIMENSIONAL

Imos estudar a ecuación dunha onda harmónica unidimensional² que se propaga ao longo do eixe x no seu sentido positivo e que a vibración asociada ao movemento harmónico simple ten lugar na dirección do eixe y . Para iso imos recordar o movemento ondulatorio que aparece nunha corda tensa e suxeita dun dos seus extremos, á que lle damos un golpe vertical cara arriba, volvendo ao punto de partida, no outro extremo, como se indica na figura.



Como toda ecuación de ondas, vai ser a expresión matemática que permite obter o estado de vibración dunha partícula en calquera instante.

No instante $t = 0$, o impulso empeza a alcanzar a partícula sita en $x = 0$, a cal vibra cun m.h.s. que ten por elongación a dada pola ecuación:

$$y(0,t) = A \text{ sen } (\omega t)$$

“ y ” é unha función de dúas variábeis: de x (abscisa) e de t (tempo).

Ao cabo dun tempo t' , o impulso chega á partícula sita en x , que empeza a vibrar, con respecto á partícula sita en $x = 0$ cun atraso de t' segundos, e a súa elongación é a que tiña a partícula sita en $x = 0$ t' segundos antes:

$$y(0, t-t') = A \text{ sen } [\omega(t-t')] = y(x, t)$$

Se a perturbación viaxa á velocidade v , podemos escribir a seguinte igualdade: $t' = x/v$ e substituíndoa na anterior temos:

$$y(x, t) = A \text{ sen } \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] = A \text{ sen } \left(\omega t - \omega \cdot \frac{x}{v} \right) = A \text{ sen } \left(\omega t - \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{x}{v} \right)$$

Se recordamos que $v = \lambda/T$ e, en consecuencia, $v \cdot T = \lambda$ podemos escribir:

$$y(x, t) = A \text{ sen } \left(\omega t - \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{\lambda} \right)$$

sendo $2\pi/\lambda$ o chamado **número de onda**, simbolizado por k , e representa o número de lonxitudes de onda que hai nunha lonxitude de 2π metros. Con esta nova notación resulta:

$$y(x, t) = A \text{ sen}(\omega t - kx)$$

² Onda harmónica unidimensional: é a propagación dun movemento harmónico nunha dirección.

Ao ángulo $(\omega t - kx)$ chámase **fase** da onda. Dise que dous puntos están **en fase** cando a diferenza de fase é de 2π radiáns ou un múltiplo enteiro deste valor: o seu estado de vibración é o mesmo. Se a diferenza de fase é de π radiáns ou un múltiplo impar deste valor, os estados de vibración están **en oposición de fase**.

Se a onda se propaga no sentido negativo do eixe x , a velocidade é negativa e a ecuación de onda é:

$$y(x,t) = A \text{sen}(\omega t + kx)$$

Se no instante en que empezamos a contar o tempo, $t = 0$, a perturbación no foco xa posúe a fase inicial φ_0 , a ecuación de onda queda da forma: $y(x,t) = A \text{sen}(\omega t \pm kx + \varphi_0)$.

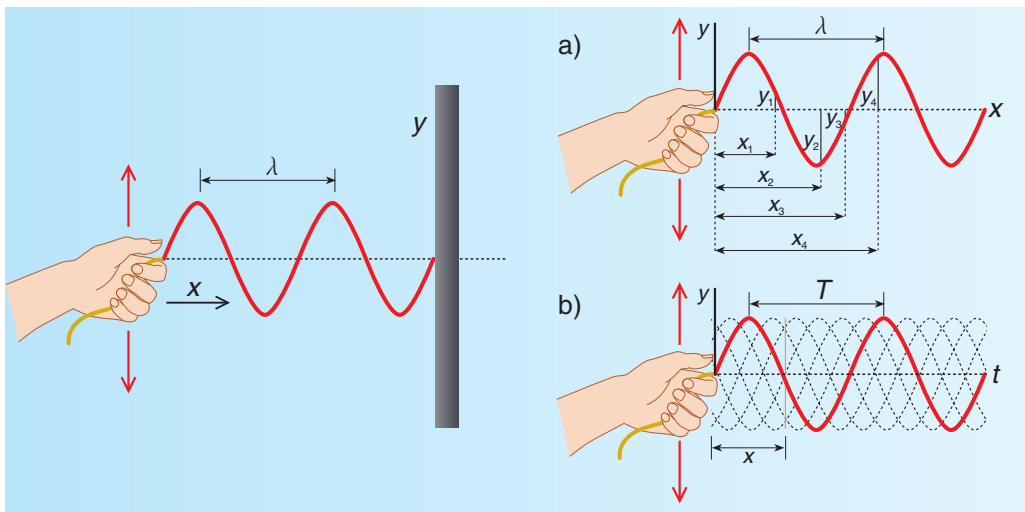
De igual forma, pódese utilizar a función coseno para describir a perturbación:

$$y(x,t) = A \text{cos}(\omega t \pm kx)$$

A utilización da función seno ou coseno queda determinada polas condicións iniciais (o mesmo que no movemento harmónico).

Se a vibración de cada punto do medio ten lugar na mesma dirección que a do avance da perturbación, que supoñemos no eixe x , a onda é lonxitudinal e a ecuación de onda correspondente é: $x'(x,t) = A \text{sen}(\omega t \pm kx + \varphi_0)$.

Como se ve, a ecuación obtida depende de dúas variábeis: x e t . Se mantemos fixo t , observamos que, ao variar x , a elongación y dos diversos puntos da onda varía periodicamente de forma sinusoidal: $x_1 \rightarrow y_1, x_2 \rightarrow y_2, x_3 \rightarrow y_3, \dots$ A ecuación de onda dá-nos, para un instante determinado, a forma de onda de calquera punto. É como se fixeramos unha fotografía da corda. Para unha lonxitude λ repítese a mesma situación física.



Dobre periodicidade: espacial no caso a) e temporal no caso b)

Se mantemos fixo x , a ecuación de onda dá-nos a elongación dunha partícula, que tamén varía periodicamente de forma sinusoidal en función do tempo: $t_1 \rightarrow y_1, t_2 \rightarrow y_2, t_3 \rightarrow y_3$ etc.

É como se fixeramos sucesivas fotos a un punto da corda. Ao cabo dun tempo T (período), o punto da corda volve repetir a mesma situación física. O gráfico que resulta é o que se obtén nun osciloscopio conectado a un micrófono.

Vemos que as ondas harmónicas son dobremente periódicas: no tempo, cun período temporal T , e no espazo, cun período lonxitudinal λ .

Na ecuación dunha onda non hai que confundir a velocidade de propagación da perturbación (ou velocidade de fase): $v = \lambda/T = \lambda \cdot \nu$, que para un medio determinado é constante, coa velocidade de vibración das partículas, que se obtén derivando a elongación ou ecuación de onda: $v = dy/dt = A \omega \cos(\omega t \pm kx)$, e depende do tempo t e da partícula x .

Exercicio resolto

- Para unha onda transversal que se propaga ao longo do eixe x , segundo a ecuación: $y(x,t) = 3 \text{ sen}(2,5 \pi t - 0,5 \pi x)$ m; calcula: a) a amplitude, o período, a frecuencia, o número de onda, a lonxitude de onda e a velocidade de propagación; b) a elongación correspondente aos puntos $x = 0$ m, $x = 1$ m, $x = 2$ m; $x = 3$ m e $x = 4$ m, no instante $t = 0$ s; c) a diferenza de fase, nun instante dado, entre os estados de vibración de dous puntos da onda separados pola distancia de 1 m, 2 m, 3 m e 4 m; d) fai a representación gráfica da onda no instante $t = 0$ s; e) a elongación correspondente aos puntos $x = 0$ m, $x = 1$ m, $x = 2$ m, $x = 3$ m e $x = 4$ m, no instante $t = 1,2$ s e fai a representación da onda para este instante.

Solución:

a) Comparando a ecuación de onda dada, $y(x,t) = 3 \text{ sen}(2,5 \pi t - 0,5 \pi x)$ m, coa expresión xeral, $y(x,t) = A \text{ sen}(\omega t - kx)$, temos:

$$A = 3 \text{ m}$$

$$\left. \begin{array}{l} \omega = 2,5 \pi \\ \omega = \frac{2 \pi}{T} \end{array} \right\} \rightarrow 2,5 \pi = \frac{2 \pi}{T} \rightarrow T = 0,8 \text{ s}$$

$$\left. \begin{array}{l} \nu = \frac{1}{T} \\ T = 0,8 \text{ s} \end{array} \right\} \rightarrow \nu = \frac{1}{0,8} \rightarrow \nu = 1,25 \text{ Hz}$$

$$k = 0,5 \pi \rightarrow k = 1,57 \text{ m}^{-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} k = 0,5 \pi \\ k = \frac{2 \pi}{\lambda} \end{array} \right\} \rightarrow 0,5 \pi = \frac{2 \pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = 4 \text{ m}$$

$$\left. \begin{array}{l} v = \frac{\lambda}{T} \\ \lambda = 4 \text{ m} \\ T = 0,8 \text{ s} \end{array} \right\} \rightarrow v = \frac{4}{0,8} \rightarrow v = 5 \text{ m s}^{-1}$$

b) Ao fixar o tempo, a ecuación de onda indícanos a elongación de cada punto nese instante e para calcular este valor abonda con substituír x e t na ecuación de onda, resultando:

$$y(0,0) = 3 \cdot \text{sen}(2,5 \cdot \pi \cdot 0 - 0,5 \cdot \pi \cdot 0) \rightarrow y(0,0) = 0 \text{ m}$$

$$y(1,0) = 3 \cdot \text{sen}(2,5 \cdot \pi \cdot 0 - 0,5 \cdot \pi \cdot 1) \rightarrow y(1,0) = -3 \text{ m}$$

$$y(2, 0) = 3 \cdot \text{sen}(2,5 \cdot \pi \cdot 0 - 0,5 \cdot \pi \cdot 2) \rightarrow y(2, 0) = 0 \text{ m}$$

$$y(3, 0) = 3 \cdot \text{sen}(2,5 \cdot \pi \cdot 0 - 0,5 \cdot \pi \cdot 3) \rightarrow y(3, 0) = 3 \text{ m}$$

$$y(4, 0) = 3 \cdot \text{sen}(2,5 \cdot \pi \cdot 0 - 0,5 \cdot \pi \cdot 4) \rightarrow y(4, 0) = 0 \text{ m}$$

c) As diferenzas de fase dos estados de vibración nun instante calquera, t , para as partículas separadas as distancias consideradas son:

$$\delta = \varphi_{x=0} - \varphi_{x=1} = (2,5 \cdot \pi \cdot t - 0,5 \cdot \pi \cdot 0) - (2,5 \cdot \pi \cdot t - 0,5 \cdot \pi \cdot 1) \rightarrow \delta = 0,5 \cdot \pi \text{ rad}$$

Este resultado indícanos que os puntos da onda separados 1 m están desfasados 90° , que podemos comprobar recordando que $\lambda = 4 \text{ m}$.

$$\delta = \varphi_{x=0} - \varphi_{x=2} = (2,5 \cdot \pi \cdot t - 0,5 \cdot \pi \cdot 0) - (2,5 \cdot \pi \cdot t - 0,5 \cdot \pi \cdot 2) \rightarrow \delta = \pi \text{ rad}$$

Este resultado indícanos que os puntos da onda separados 2 m están en oposición de fase, que comprobamos recordando que $\lambda = 4 \text{ m}$.

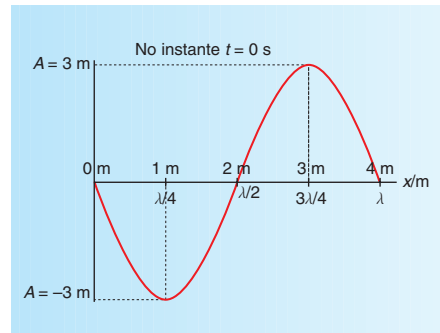
$$\delta = \varphi_{x=0} - \varphi_{x=3} = (2,5 \cdot \pi \cdot t - 0,5 \cdot \pi \cdot 0) - (2,5 \cdot \pi \cdot t - 0,5 \cdot \pi \cdot 3) \rightarrow \delta = 1,5 \cdot \pi \text{ rad}$$

Este resultado indícanos que os puntos da onda separados 3 m están desfasados en 270° , que comprobamos recordando que $\lambda = 4 \text{ m}$.

$$\delta = \varphi_{x=0} - \varphi_{x=4} = (2,5 \cdot \pi \cdot t - 0,5 \cdot \pi \cdot 0) - (2,5 \cdot \pi \cdot t - 0,5 \cdot \pi \cdot 4) \rightarrow \delta = 2 \cdot \pi \text{ rad}$$

Este resultado indícanos que os puntos da onda separados 4 m están en fase, polo que esta lonxitude é un múltiplo da lonxitude de onda, que comprobamos recordando que $\lambda = 4 \text{ m}$.

d) Fixado o tempo, $t = 0 \text{ s}$, a ecuación de onda indícanos a elongación (nese instante) de cada punto do medio afectado pola perturbación. Coñecida a elongación para os valores de $x = 0 \text{ m}$, $x = 1 \text{ m}$, $x = 2 \text{ m}$, ..., e tendo presente que a onda se repite ao longo do eixe x cada $\lambda = 4 \text{ m}$, o gráfico que resulta é o que se indica á marxe:



$$e) y(0, 1,2) = 3 \cdot \text{sen}(2,5 \cdot \pi \cdot 1,2 - 0,5 \cdot \pi \cdot 0) \rightarrow y(0, 1,2) = 0 \text{ m}$$

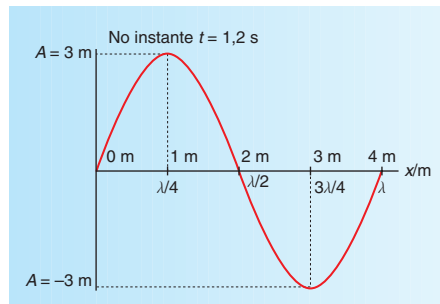
$$y(1, 1,2) = 3 \cdot \text{sen}(2,5 \cdot \pi \cdot 1,2 - 0,5 \cdot \pi \cdot 1) \rightarrow y(1, 1,2) = 3 \text{ m}$$

$$y(2, 1,2) = 3 \cdot \text{sen}(2,5 \cdot \pi \cdot 1,2 - 0,5 \cdot \pi \cdot 2) \rightarrow y(2, 1,2) = 0 \text{ m}$$

$$y(3, 1,2) = 3 \cdot \text{sen}(2,5 \cdot \pi \cdot 1,2 - 0,5 \cdot \pi \cdot 3) \rightarrow y(3, 1,2) = -3 \text{ m}$$

$$y(4, 1,2) = 3 \cdot \text{sen}(2,5 \cdot \pi \cdot 1,2 - 0,5 \cdot \pi \cdot 4) \rightarrow y(4, 1,2) = 0 \text{ m}$$

Cando o tempo transcorrido é $t = 1,2 \text{ s}$, cada punto da onda realizou 1,5 oscilacións, xa que as vibracións se repiten ao longo do tempo cun período $T = 0,8 \text{ s}$, sendo $t = 1,5 T$. Polo tanto, os puntos considerados nos instantes $t = 1,2 \text{ s}$ e $t = 0 \text{ s}$ están en posición de fase.



4. ENERXÍA DUNHA ONDA HARMÓNICA

Cando unha onda chega a un punto, este empeza a vibrar e adquire enerxía cinética; simultaneamente, ao desprazalo da súa posición de equilibrio, adquire enerxía potencial. Polo tanto, a propagación dunha onda leva consigo un transporte de enerxía.

Consideremos que o foco realiza un m.h.s., aparecendo unha onda mecánica que se propaga por un medio material. O foco transmite a súa enerxía ás partículas veciñas do medio, as cales adquiren un m.h.s., e a enerxía dunha partícula de masa m será:

- Soamente cinética: na posición de equilibrio, cando a elongación é cero.
- Soamente potencial: nos puntos de máxima elongación.
- Cinética e potencial: para outra posición calquera da vibración.

Imos facer o cálculo da enerxía dunha onda harmónica para o caso máis sinxelo: cando está na posición de equilibrio, no que toda a súa enerxía está en forma de enerxía cinética.

$$E_T = E_{k \text{ máx}} = \frac{1}{2} m v_{\text{máx}}^2, \text{ onde } v \text{ é a velocidade de vibración do punto}$$

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} [A \sin(\omega t - kx)] = A \omega \cos(\omega t - kx)$$

Cando $\cos(\omega t - kx) = 1$, a velocidade é máxima: $v_{\text{máx}} = A \omega$

$$\left. \begin{array}{l} E_{k \text{ máx}} = \frac{1}{2} m v_{\text{máx}}^2 \\ v_{\text{máx}} = A \omega \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} E_{k \text{ máx}} = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \\ \omega = 2\pi/T \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} E_{k \text{ máx}} = \frac{1}{2} m A^2 \frac{4\pi^2}{T^2} \\ T = 1/\nu \end{array} \right\} \rightarrow E_{k \text{ máx}} = 2\pi^2 m A^2 \nu^2$$

Como vemos, a enerxía das ondas harmónicas é directamente proporcional ao cadrado da frecuencia e da amplitude.

5. INTENSIDADE DUNHA ONDA HARMÓNICA

Chámase intensidade, I , dun movemento ondulatorio nun punto á cantidade de enerxía que na unidade de tempo atravesa a unidade de superficie colocada nese punto perpendicularmente á dirección de propagación da onda:

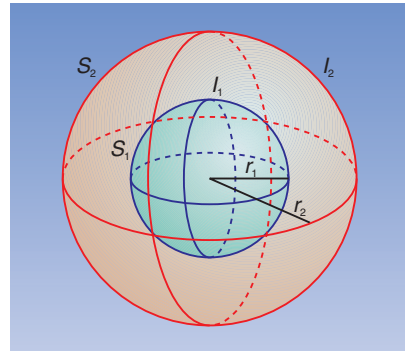
$$I = \frac{\text{Enerxía}}{\text{Tempo} \cdot \text{Superficie}} = \frac{\text{Potencia}}{\text{Superficie}}$$

No SI mídese en $J/(s \text{ m}^2)$, equivalente a W/m^2 .

É sabido que nas ondas bidimensionais e tridimensionais, a intensidade, I , diminúe coa distancia, r , ao foco emisor. Cal é a relación que hai entre intensidade e distancia?

Supoñamos unha onda tridimensional esférica que se propaga nun medio homoxéneo e isotrópico (condición necesaria para que a fronte de ondas sexa esférica). Neste caso a enerxía irradíase por igual en todas as direccións, repartíndose uniformemente na superficie da fronte de onda e para unha distancia r_1 do foco emisor a intensidade vale:

$$I_1 = \frac{P_1}{S_1} = \frac{P_1}{4\pi r_1^2}$$



Para unha distancia r_2 do mesmo foco emisor temos:

$$I_2 = \frac{P_2}{4\pi r_2^2}$$

Se non existe ningún tipo de rozamento, a enerxía mecánica que atravesa a superficie esférica de raio r_1 é a mesma que a enerxía que atravesa a superficie esférica de raio r_2 : $E_1 = E_2 \Rightarrow P_1 = P_2$ e, polo tanto, $I_1 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r_1^2 = I_2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r_2^2$, resultando:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \rightarrow I_1 \cdot r_1^2 = I_2 \cdot r_2^2 = \text{cte.}$$

A intensidade vai diminuíndo proporcionalmente ao cadrado da distancia ao foco emisor. No caso 1 a enerxía repártese entre as partículas que forman a fronte de onda de raio r_1 e no caso 2 entre as que forman a fronte de onda de raio r_2 , que é maior e, polo tanto, o seu cociente menor: $I = P/S$.

5.1. Atenuación

Como varía a amplitude, A , dunha onda a medida que esta se afasta do foco emisor?

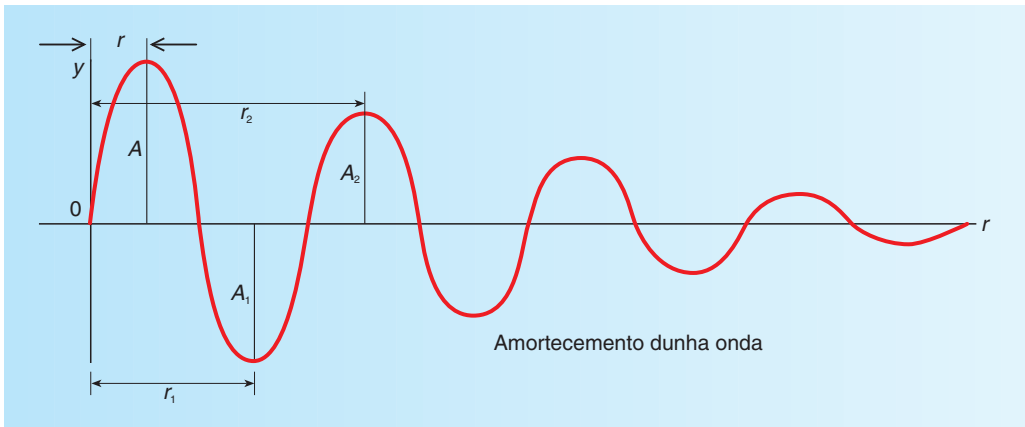
Como xa vimos, $E \propto A^2$ ($E = 2 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot A^2 \cdot \nu^2$) e, en consecuencia, $I \propto A^2$ [$I = E/(t \cdot S)$]. Polo tanto:

$$\left. \begin{array}{l} I_1 \propto A_1^2 \\ I_2 \propto A_2^2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{I_1}{I_2} = \frac{A_1^2}{A_2^2} \\ \frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{A_1^2}{A_2^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1} \rightarrow A_1 \cdot r_1 = A_2 \cdot r_2 = \text{cte.}$$

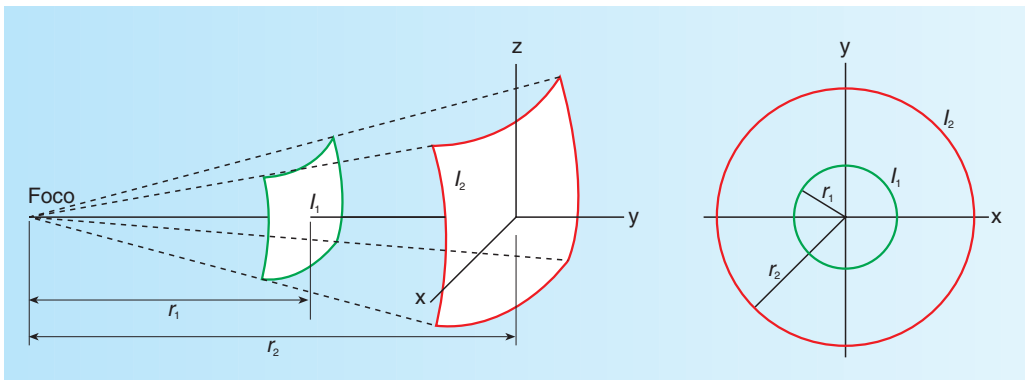
É dicir: a amplitude do movemento ondulatorio é inversamente proporcional á distancia do centro emisor e, polo tanto, ao aumentar a distancia as partículas vibran con menor enerxía: $E \propto A^2$. Isto débese a que a mesma enerxía se reparte en cada fronte de ondas, a medida que aumenta r , en maior número de partículas. Este fenómeno coñécese como

atenuación³. Ao amortecemento dunha onda tamén contribúe a **absorción**, cando a súa propagación ten lugar nun medio inelástico, perdéndose enerxía por rozamento, viscosidade etc. Isto fai que a amplitude dunha onda non sexa inversamente proporcional á distancia do foco emisor, senón que a onda se amorteza a distancias ás que, segundo a lei de proporcionalidade, $A = ct/r$, aínda lle corresponderían amplitudes considerábeis.

Isto é o que sucede nas ondas xeradas na superficie dun lago (bidimensionais) cando se deixa caer unha pedra, ou as producidas nun altofalante (tridimensionais). Os amortecementos descritos esixen a presenza de estacións repetidoras de ondas de TV e radio, permitindo prolongar o alcance do sinal até puntos moi afastados da estación emisora.

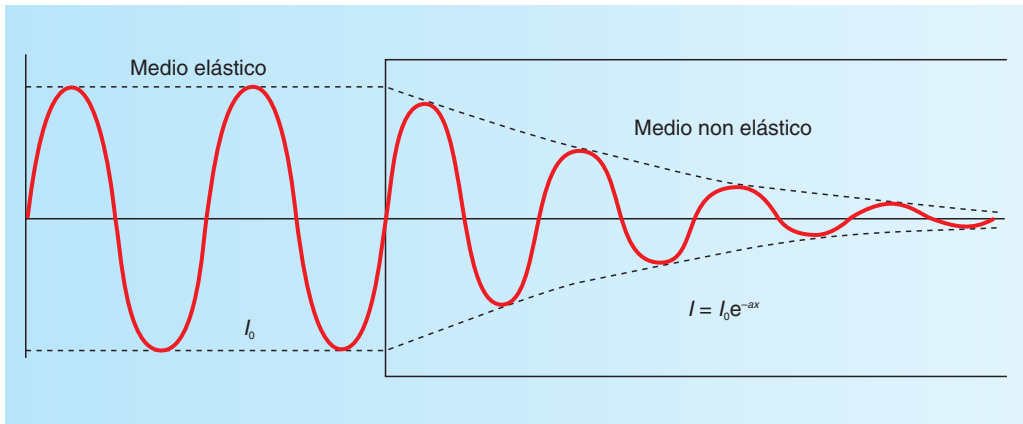


Se a amplitude A permanece constante coa distancia, dise que a onda **non é amortecida**.



No caso de ondas unidimensionais, tales como as dun resorte ou corda, as ondas propáganse nunha soa dirección do espazo e, se o medio é elástico, non se disipa enerxía: a fronte de ondas é plana, os raios son paralelos, non variando o número de partículas afectadas pola perturbación. Na práctica os medios son inelásticos: disipan enerxía en forma de calor.

³ Durante a atenuación a frecuencia da onda permanece constante.



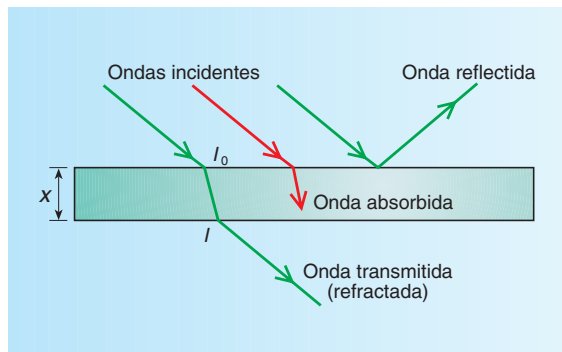
5.2. Absorción

Xa estudamos que, aínda no caso de que o medio no que se propaga unha onda non disipe enerxía, a amplitude e , en consecuencia, a enerxía dunha onda bi e tridimensional vaia amortecendo coa distancia ao foco emisor. Isto débese a que a enerxía se reparte en cada fronte de ondas, a medida que aumenta r , nun maior número de partículas. Este fenómeno coñécese como **atenuación**.

No caso de ondas unidimensionais, ao propagarse nunha soa dirección do espazo, non se produce amortecemento da onda por atenuación: o número de partículas afectadas pola perturbación é constante. O mesmo ocorre nunha onda plana: toda a enerxía que pasa a través dunha determinada superficie tamén o fai por outra igual e paralela. No entanto, na práctica, obsérvase un amortecemento da onda para calquera clase de onda, debido a que o medio de propagación é inelástico, disipándose enerxía en forma de calor por rozamento, viscosidade etc. Este feito é o que se coñece como **absorción**.

Cando unha onda chega á superficie de separación dun medio polo que se propaga pode presentar simultaneamente os fenómenos de reflexión, refracción e absorción, como esquematicamente se indica na figura.

Cando a fronte de ondas é plana⁴ comprobouse experimentalmente que a diminución de intensidade que experimenta por absorción é directamente proporcional á:



⁴ Nas ondas bi e tridimensionais, a grandes distancias do foco, as fronte de ondas poden considerarse planas e, neste caso, a diminución de intensidade por atenuación con respecto á distancia é nula.

- Intensidade, I , da onda.
- Lonxitude do traxecto, $d x$.
- Medio en que se propaga a onda, a (coeficiente de absorción do medio).

Resultando: $d I = -a \cdot I \cdot d x$, onde o signo negativo indica que a intensidade diminúe ao aumentar x . Integrando temos:

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\int_0^x a \, dx \rightarrow \ln [I]_{I_0}^I = -a[x]_0^x \rightarrow \ln I - \ln I_0 = -a x \rightarrow$$

$$\ln \frac{I}{I_0} = -a x \rightarrow e^{\ln \frac{I}{I_0}} = e^{-a x} \rightarrow I = I_0 e^{-a x} \quad (\text{Lei de Lambert - Beer})$$

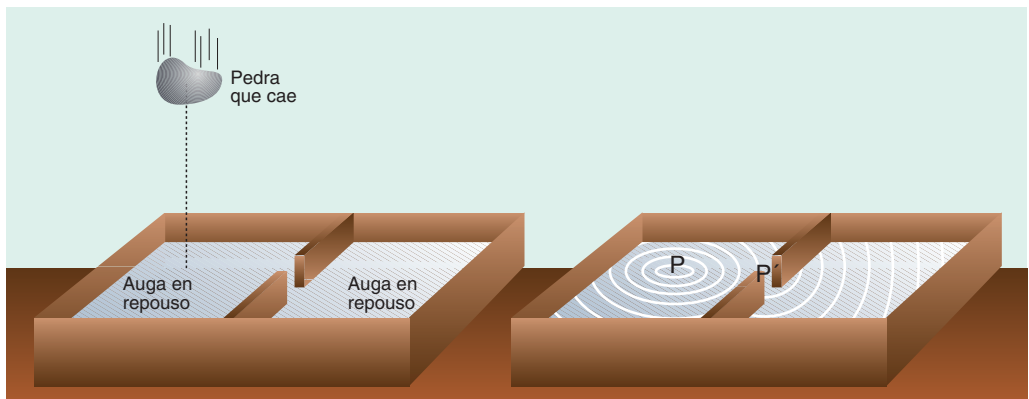
Esta expresión constitúe a lei de absorción do movemento ondulatorio, onde I_0 é a intensidade incidente e I a intensidade da onda despois de atravesar o medio de coeficiente de absorción a e anchura x .

Recordemos que cando a fronte de ondas é esférica ou circular, ademais da diminución de intensidade a causa da absorción hai que sumar o efecto da atenuación por razón da distancia.

En xeral, o fenómeno da absorción é selectivo, dependendo da frecuencia da onda. Así, por exemplo, o vidro é transparente para as radiacións visíbeis do Sol –non posúen enerxía suficiente para excitar os electróns–; absorbe a radiación ultravioleta e é opaco para a radiación infravermella⁵.

6. PRINCIPIO DE HUYGENS: REFLEXIÓN E REFRACCIÓN

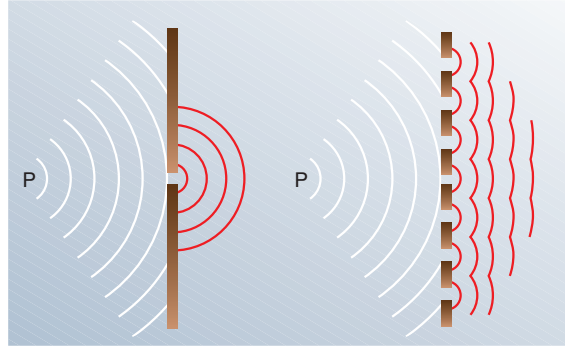
Principio de Huygens



⁵ Este é o fundamento do efecto invernadoiro: a radiación solar atravesa o vidro das paredes do invernadoiro e é absorvida polos obxectos do seu interior, que elevan a súa temperatura e emiten radiación infravermella, que non pode escapar.

Ao caer a pedra no estanque, aparecen uns círculos concéntricos na superficie da auga, que propagan a perturbación, alcanzando ao cabo dun tempo t o punto P' , observándose aquí a formación de novas ondas circulares, comportándose este punto como un novo foco emisor de ondas das mesmas características que as que chegan a el.

Se no tabique divisorio houbera máis buratos, veriamos que cada un deles se converte nun novo centro emisor de ondas. Isto constitúe o principio de Huygens: todo punto alcanzado por unha onda convértese nun novo foco emisor de ondas (ondas elementais). Estas ondas elementais determinan unha nova fronte de ondas, que é a envolvente de todas as ondas elementais.

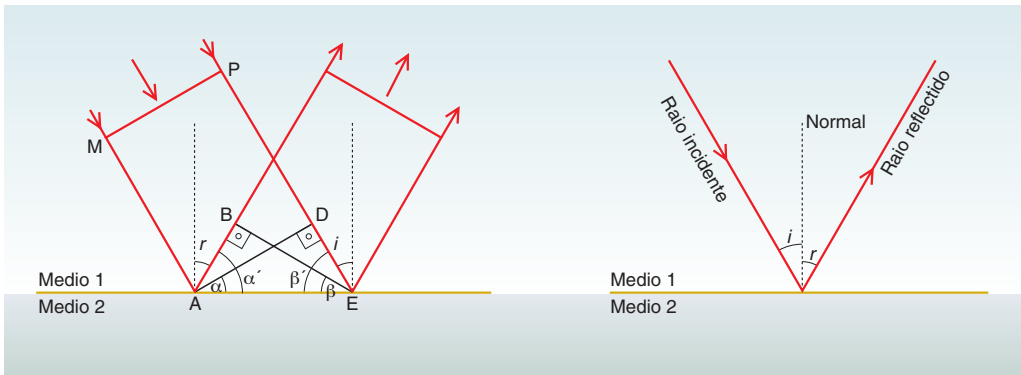


Ao chegar unha onda á superficie de separación de dous medios, parte da enerxía que leva a onda pode pasar ao segundo medio, cambiando a dirección de propagación (**refracción**) e outra permanecer no mesmo medio, cambiando tamén a dirección de propagación (**reflexión**).

Reflexión

Con este nome coñécese o cambio de dirección de propagación ou de sentido que unha onda experimenta cando chega á superficie de separación de dous medios, non cambiando de medio.

O ángulo que forma o raio incidente da onda coa normal á superficie reflectora chámase **ángulo de incidencia**, i , e o que forma a normal coa dirección que segue o raio reflectido é o **ángulo de reflexión**, r .



Experimentalmente compróbase que:

- O raio incidente, a normal e o raio reflectido están nun mesmo plano.
- O ángulo de incidencia é igual ao ángulo de reflexión.

En efecto: se o foco emisor dista moito da superficie reflectora, os raios incidentes M e P son paralelos e a fronte de onda MP é recta e perpendicular aos devanditos raios.

Ao avanzar a fronte MP, o seu extremo M é o primeiro que encontra a superficie reflectora (que supoñemos plana) no punto A, o cal, segundo o principio de Huygens, se converte nun novo centro emisor de ondas. Como a onda non cambia de medio, a velocidade antes e despois da reflexión é a mesma, polo que cando o punto D alcanza a superficie reflectora en E, percorrendo a distancia DE, as ondas elementais emitidas por A percorreren o espazo AB que é igual a DE. Resulta que os triángulos rectángulos ABE e ADE son iguais (ademais de ser iguais os lados AB e DE, teñen a mesma hipotenusa). Desta igualdade de triángulos resulta que: $\alpha = \beta$, $\alpha' = \beta'$ e, en consecuencia, $i = r$, xa que:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha' + r = 90^\circ \\ \beta' + i = 90^\circ \\ \alpha' = \beta' \end{array} \right\} \rightarrow i = r$$

Refacción

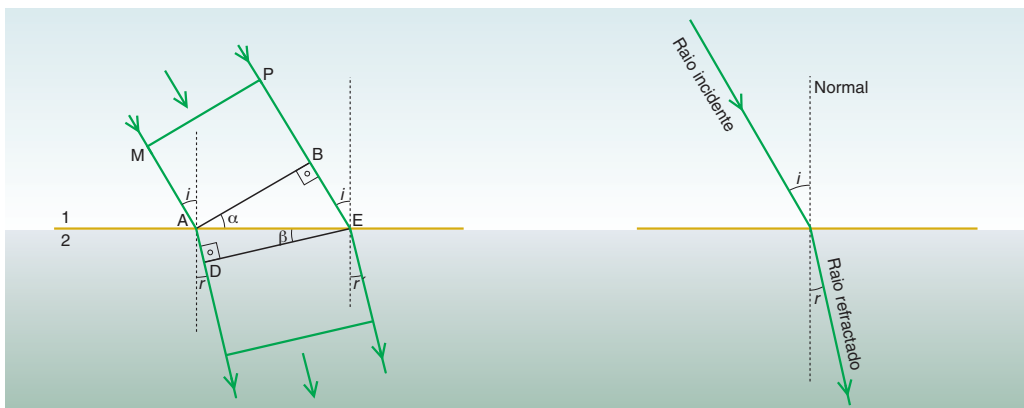
Con este nome coñécese o cambio de dirección de propagación que unha onda experimenta cando pasa dun medio a outro.

O ángulo que forma o raio incidente coa normal á superficie de separación dos dous medios é o chamado **ángulo de incidencia**, i , e o que forma a normal co raio refractado é o **ángulo de refracción**, r .

Experimentalmente compróbase que:

- O raio incidente, a normal e o raio refractado están nun mesmo plano.
- $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}$, sendo v_1 a velocidade da onda no primeiro medio (medio incidente) e v_2 a do segundo medio (medio no que se refracta).

Esta expresión coñécese como lei de Snell (1621) e o cociente v_1/v_2 é o chamado **índice de refracción** do medio dous con respecto ao medio un, e désígnase por n_{12} .



En efecto, sexa MP a fronte de onda plana que se propaga no medio 1 cunha velocidade v_1 . O extremo M é o primeiro en alcanzar a superficie de separación dos dous medios facéndoo no punto A, o cal se converte, segundo o principio de Huygens, nun foco emisor de novas ondas. Estas penetran no segundo medio percorrendo o espazo AD, cunha velocidade v_2 , no mesmo tempo que o extremo B da onda incidente AB percorre o espazo BE, coa velocidade v_1 ⁶.

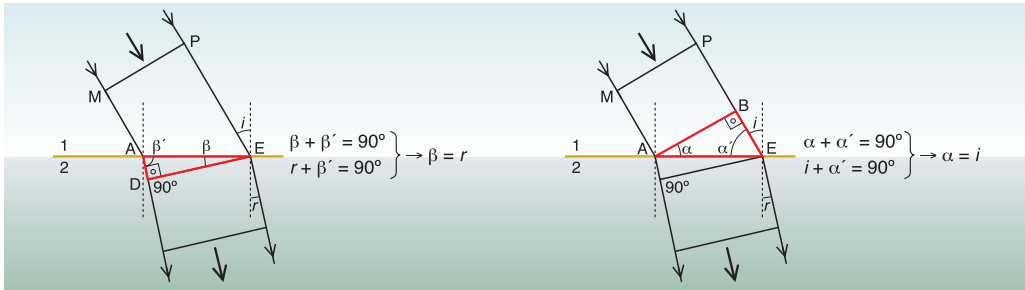
$$\left. \begin{aligned} BE &= v_1 \cdot t \\ AD &= v_2 \cdot t \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{BE}{AD} = \frac{v_1}{v_2}$$

Como intentamos relacionar v_1 e v_2 con $\text{sen } i$ e $\text{sen } r$, imos definir o seno daqueles ángulos que teñan por catetos opostos os lados BE e AD e, despois, relacionar estes ángulos cos de incidencia e refracción.

$$\left. \begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \frac{BE}{AE} \\ \text{sen } \beta &= \frac{AD}{AE} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} = \frac{BE}{AD} \left\{ \begin{aligned} \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} &= \frac{v_1}{v_2} \\ \frac{v_1}{v_2} &= \frac{BE}{AD} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{v_1}{v_2} = \text{cte.}$$

$$\alpha = i \text{ e } \beta = r$$

Dos triángulos BAE e AED dedúcese que $\alpha = i$ e $\beta = r$.



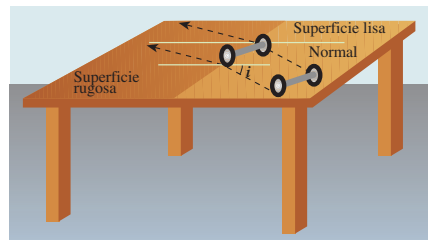
Para o caso de ondas electromagnéticas defínese o **índice de refracción absoluto** n dun medio material transparente como: $n = c/v$, sendo c a velocidade da luz no baleiro (que é a mesma para as distintas lonxitudes de onda) e v a velocidade da luz nese medio. Como c é maior que v , n é sempre maior que a unidade.

Nos medios dispersivos⁷, o índice de refracción depende da lonxitude de onda, λ , da radiación luminosa xa que a velocidade v da luz nun medio dispersivo depende de λ :

$$n = \frac{c}{v} = \frac{c}{\lambda \nu}$$

⁶ O modelo mecánico proposto por J. Tyndall pode ilustrar o comportamento das ondas ao refractarse. Consiste en colocar sobre unha mesa unha superficie lisa e outra rugosa, deixando deslizar por unha das superficies, nunha dirección que forma un ángulo i coa normal á liña de contacto de ambas superficies, dúas pequenas rodas unidas por un eixe. Cando a primeira das rodas cambia de superficie varía de velocidade e o xoguete cambia de dirección.

⁷ O único medio non dispersivo que hai é o baleiro, aínda que tamén se poden considerar como tal todos os gases a baixas presións.



e ν depende do foco emisor, sendo independente do medio material no que se propage a luz. Por esta razón, o índice de refracción dáse para unha lonxitude de onda, xeralmente para a luz amarela do sodio ($\lambda = 5800 \cdot 10^{-10}$ m).

En función dos índices de refracción, a lei de Snell é:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}$$

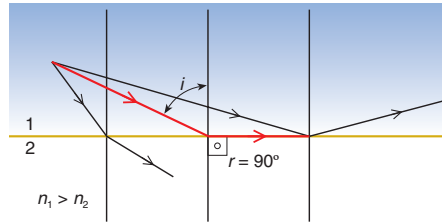
onde n_{12} é o cociente da velocidade da luz no medio un, v_1 , e no medio dous, v_2 , recibindo o nome de **índice de refracción relativo** do medio dous con respecto ao medio un. Se $n_2 > n_1 \rightarrow \text{sen } i > \text{sen } r \rightarrow i > r$, e o raio refractado acérase á normal.

Unha onda monocromática ao cambiar de medio (refractarse) varía a súa velocidade, e como sabemos que $v = \lambda \cdot \nu$ e ν non varía na refracción \Rightarrow que ten que variar λ , de modo que se aumenta v , λ tamén aumenta.

O raio refractado acérase á normal se $v_2 < v_1$, e afástase da normal cando $v_2 > v_1$. Neste segundo caso hai un ángulo de incidencia, chamado **ángulo límite**, para o cal o ángulo de refracción é de 90° .

Calcúlase da forma:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{v_1}{v_2} \rightarrow \text{sen } i = \frac{v_1}{v_2}$$



Para ángulos de incidencia maiores ao ángulo límite non se produce refracción, tendo lugar soamente a reflexión, coñecéndose este feito como **reflexión total**.

Exercicio resolto

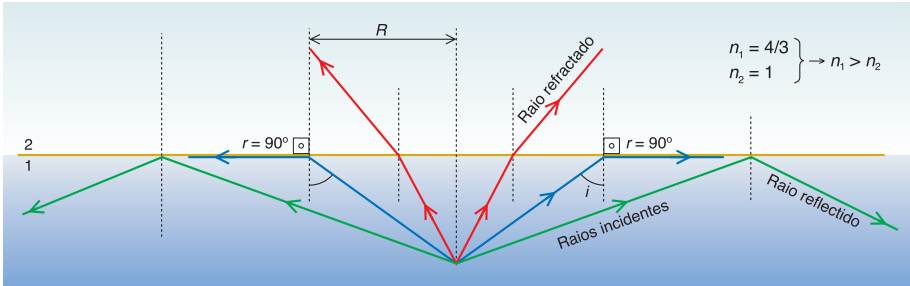
- ▶ No fondo dunha piscina con auga de 2 m de profundidade hai un foco que emite luz en todas as direccións. Calcula o raio R do círculo luminoso que é observado na superficie da auga. Dato: $n_{\text{auga}} = 4/3$.

Solución:

Como a luz vai desde un medio de maior índice de refracción (auga: $n_{\text{auga}} = 4/3$) a outro de menor índice de refracción (aire: $n_{\text{aire}} = 1$), o raio refractado sepárase da normal á superficie de separación dos dous medios e para ángulos de incidencia superiores ao ángulo límite aparece o fenómeno de reflexión total. Polo tanto, a abertura máxima do raio incidente para o que a luz se refracta é o ángulo límite, que imos calcular a partir da lei de Snell, facendo $r = 90^\circ$.

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \frac{c}{v_1} \rightarrow v_1 = \frac{c}{n_1} \\ n_2 &= \frac{c}{v_2} \rightarrow v_2 = \frac{c}{n_2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{v_1}{v_2} &= \frac{\frac{c}{n_1}}{\frac{c}{n_2}} \rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} \\ \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} &= \frac{v_1}{v_2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \frac{\sin i_{\text{limite}}}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{4/3} \rightarrow i_{\text{limite}} = 48,6^\circ$$



Agora o raio R do círculo luminoso da superficie da auga calcúlase tendo en conta que a profundidade do foco é de 2 m:

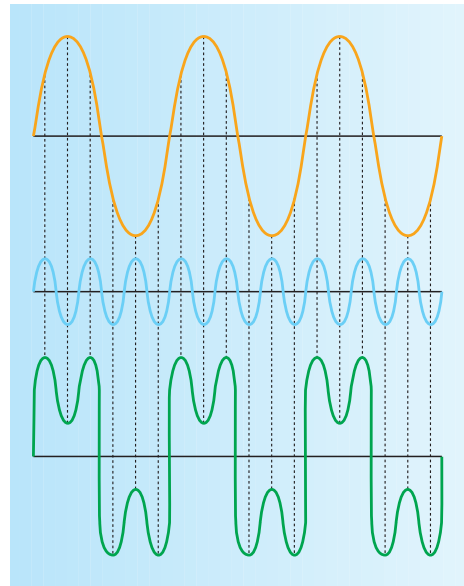
$$\tan 48,6^\circ = \frac{R}{2} \rightarrow R = 2,3 \text{ m}$$

7. ESTUDO CUALITATIVO DALGUNHAS PROPIEDADES DAS ONDAS

7.1. Interferencias

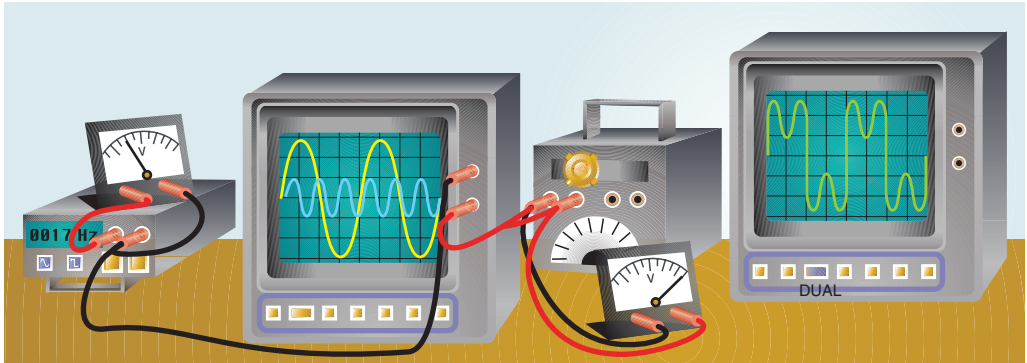
Pode ocorrer que dúas ou máis ondas producidas en focos diferentes se propaguen simultaneamente nun mesmo medio, coincidindo nalgúns dos seus puntos. Nestes puntos nos que coinciden, as ondas superpoñen os seus efectos, continuando despois sen modificación ningunha. Así, por exemplo, é posíbel que catro persoas manteñan dúas conversacións distintas aínda que falen de forma cruzada. A superposición de dúas ou máis ondas nun punto coñécese como **interferencia**.

Compróbase experimentalmente que a perturbación resultante en cada punto obedece ao **principio de superposición de ondas**, segundo o cal a elongación dunha partícula do medio afectada simultaneamente por varias ondas é igual á suma das elongacións que lle produciría cada onda por separado. Podémolo ver na pantalla dun osciloscopio de dobre traza ao



Superposición de dúas ondas harmónicas de diferente frecuencia e amplitude.

poñer unha entrada ao sinal da voltaxe para unha frecuencia da rede eléctrica (50 Hz) e na outra entrada ao sinal correspondente á outra onda, conseguida cun xerador de frecuencias. Premendo a tecla “dual” vemos a onda resultante, comprobando o principio de superposición.

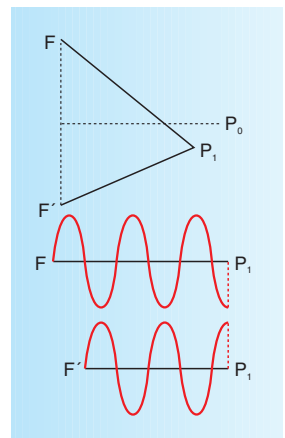
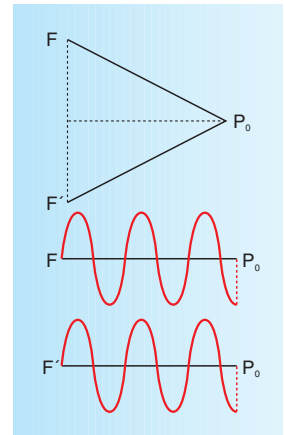


Dúas ondas ao sumarse poden dar lugar a unha onda de maior amplitude que as iniciais. Dise que a interferencia é **constructiva**. No caso de que a amplitude resultante sexa máis pequena que as amplitudes iniciais a interferencia é **destrutiva**.

A variedade de casos de interferencias de ondas é enorme. Imos analizar un caso moi simple: o de dous focos puntuais F e F' que emiten simultaneamente ondas harmónicas de igual amplitude, frecuencia e lonxitude de onda, estando en igual fase ao ser emitidas polos focos⁹.

Cando as fronte de onda se encontran nun punto da mediatriz do segmento FF', por percorrer ambas ondas igual distancia, vanse encontrar na mesma fase e coa mesma elongación¹⁰ e, polo principio de superposición, a elongación resultante será dobre da dunha onda individual. Igual interferencia se produce cando a diferenza de camiños percorridos polas dúas ondas sexa de: 1λ , 2λ , 3λ , 4λ , ...

Consideremos agora un punto como o P₁ tal que $P_1F - P_1F' = \lambda/2$. Ao chegar a P₁, a diferenza dos camiños percorridos por ambas ondas é media lonxitude de onda e as elongacións de cada onda son iguais e de sentido contrario¹¹. Polo principio de superposición, a onda resultante é nula e o punto P₁ non vibrará.

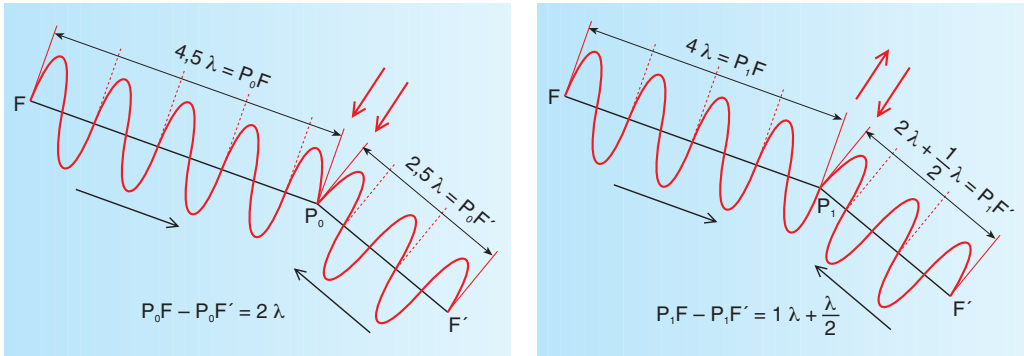


⁹ Un símil desta situación pode ser o de dous peóns que saen simultaneamente de dous puntos, F e F', respectivamente, dando pasos iguais, coa mesma rapidez e comezando a andar co pé dereito. Se as direccións que levan os homes converxen nun punto, como darán o paso no momento en que se encontran: cos pés do mesmo lado, un co dereito e o outro co esquerdo, ...? Dependerá da distancia que ande cada home, desde que parten até que se encontran.

¹⁰ Seguindo co símil dos peóns, ao andar os dous igual distancia van ter os pés na mesma posición.

¹¹ Ao dar un dos peóns un paso máis que o outro, vanse encontrar co pé na mesma posición, pero un co pé dereito e o outro co esquerdo. No símil, unha lonxitude de onda vén ser dous pasos: un co pé esquerdo e o outro co dereito.

Nos puntos como o P_0 , onde as ondas ao superpóñerse posúen elongacións do mesmo sentido, a perturbación resultante é maior que a de cada onda por separado e prodúcese unha **interferencia construtiva**. Isto ocorre para todos aqueles puntos en que a diferenza entre os camiños percorridos polas dúas ondas sexa λ , 2λ , 3λ , ...; é dicir: $n\lambda = 2n(\lambda/2)$ (múltiplo enteiro de lonxitudes de onda ou múltiplo par de semilonxitudes de onda). Polo contrario, hai puntos como o P_1 , nos que as elongacións das ondas que interfíren son de sentido contrario e a elongación resultante é menor que a elongación de cada onda por separado. Nestes puntos hai **interferencia destrutiva** e ocorre para todos aqueles puntos nos que a diferenza de camiños percorridos polas dúas ondas sexa $\lambda/2$, $\lambda/2+\lambda$, $\lambda/2+2\lambda$, ...; é dicir, un número impar de semilonxitudes de onda: $(2\cdot n+1)\cdot\lambda/2$.

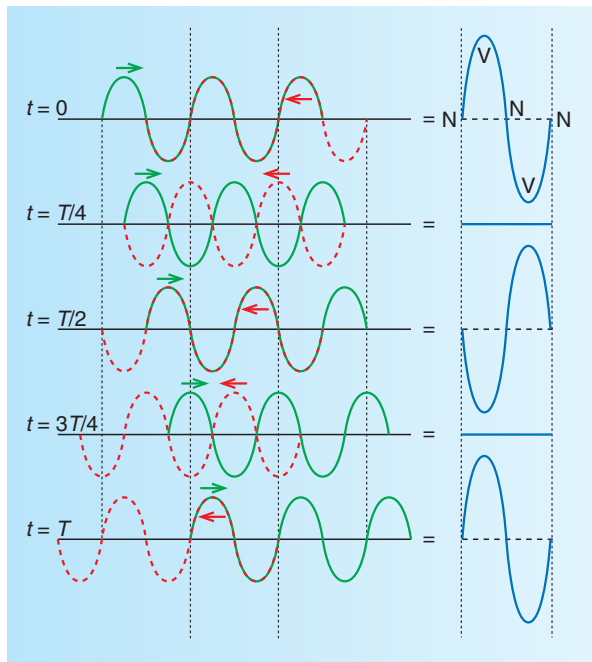


As **ondas estacionarias** constitúen un caso particular de interferencias e fórmanse cando se propagan, nun medio elástico e homoxéneo, co mesmo valor de velocidade, na mesma dirección e en sentidos contrarios, dúas ondas harmónicas da mesma frecuencia, amplitude e lonxitude de onda.

A onda estacionaria que resulta é harmónica, de **igual frecuencia e lonxitude de onda** que as ondas compoñentes, sendo a súa **amplitude de variábel** para cada punto.

Na figura aparecen dúas ondas harmónicas transversais unidimensionais que se propagan en sentido contrario, avanzando a representada coa liña continua verde cara á dereita e a de liña descontinua vermella cara á esquerda. Cada representación está feita, con respecto á anterior, cun avance de un cuarto de lonxitude de onda ($\lambda/4$).

Obsérvese que hai puntos que permanecen sempre en repouso, como os N: son os **nodos**, estando distan-



ciados media lonxitude de onda. Entre cada dous nodos, e á mesma distancia, hai un punto que vibra con amplitude máxima: son os **ventres** e están representados por V. Os demais puntos vibran cunha amplitude intermedia, comprendida entre 0 e $2A$.

Como pode verse na figura da páxina anterior todos os puntos alcanzados pola onda estacionaria adquiren ao mesmo tempo as posicións centrais de vibración, polo que todos eles (excepto os nodos) vibran coa mesma frecuencia.

Cando nunha onda estacionaria só son posibles determinadas frecuencias, dise que a onda está cuantizada. Isto sucede no caso das ondas estacionarias asociadas ao electrón no átomo ou na corda dunha guitarra (só se poden producir aquelas ondas que orixinan nodos nos extremos da corda).

Como os nodos están sempre en repouso, a onda non viaxa (de aí o nome da onda estacionaria) e **a enerxía non se propaga**, non sendo unha onda en sentido estrito, como imos ver:

Se as ecuacións das ondas que se propagan as expresamos como:

$$y_1(x, t) = A \operatorname{sen}(\omega t - kx)$$

$$y_2(x, t) = A \operatorname{sen}(\omega t + kx)$$

o estado de perturbación resultante da interferencia vén dado por:

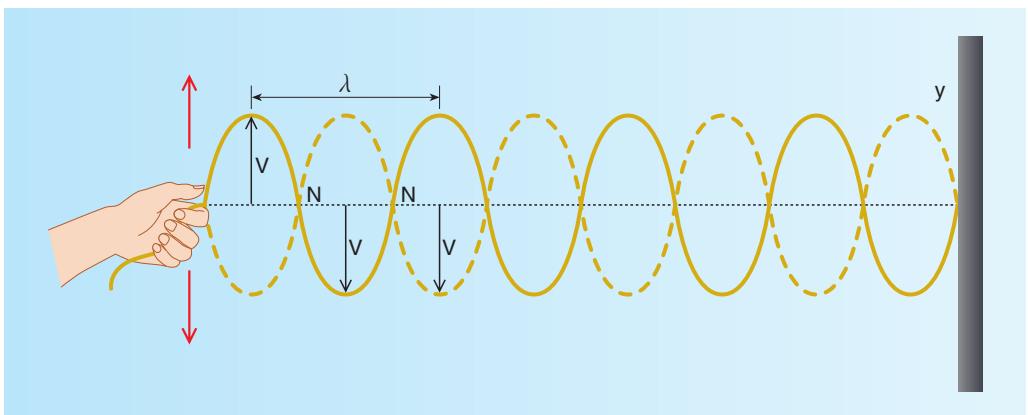
$$y(t) = A \operatorname{sen}(\omega t - kx) + A \operatorname{sen}(\omega t + kx)$$

Ao aplicar a fórmula de transformación dunha suma de dous senos nun produto de razóns trigonométricas resulta:

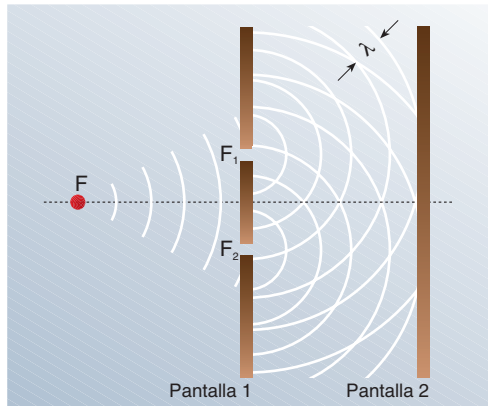
$$y(t) = 2A \cos(kx) \operatorname{sen}(\omega t)$$

A fase desta ecuación é soamente temporal (como nos movementos harmónicos simples) e non presenta parte espacial (como nas funcións de onda), polo que esta ecuación non representa unha función de onda. Ademais, a amplitude das oscilacións non é a mesma para os distintos puntos, xa que depende de x : $2A \cos(kx)$.

A representación convida para as ondas estacionarias é a indicada na figura que segue.



O fenómeno de interferencia prodúcese tanto en ondas que se propagan en medios materiais como en ondas electromagnéticas. No caso da luz é moi coñecida a experiencia de Young, consistente en que a luz monocromática procedente dun foco puntual pasa a través de dous pequenos buratos abertos nunha pantalla opaca, equidistantes dos focos, comportándose como dous novos focos emisores de luz, F_1 e F_2 . Como por construción $FF_1 = FF_2$, as ondas que parten dos focos F_1 e F_2 teñen a mesma fase inicial e a mesma amplitude, (ademais da mesma frecuencia e lonxitude de onda) e ao interferir estas ondas vemos, nunha segunda pantalla, distintas zonas de iluminación, segundo sexa a distancia que hai desde os focos até o punto da pantalla observado. Se a diferenza de camiños percorridos é $n\lambda$ a interferencia é construtiva e aparece un máximo de luz, mentres que se esa diferenza é $(2n+1)\lambda/2$, a interferencia é destrutiva e aparece escuridade, vendo unha sucesión de franxas claras e escuras.

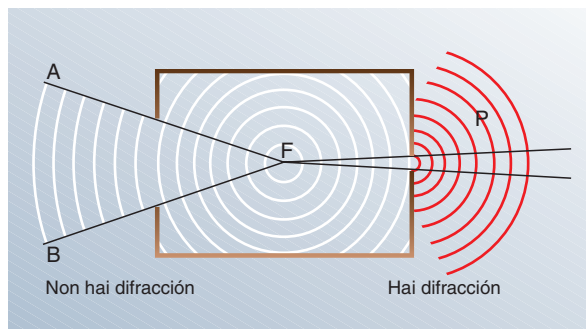


7.2. Difracción

De todos é sabido que o son, por exemplo, emitido detrás dunha esquina pode oírse aínda que non vexamos o foco emisor. Este fenómeno coñécese co nome de **difracción** e é característico do movemento ondulatorio, non podendo ser explicado co concepto de partícula. Para que a fronte de ondas rodee o obstáculo e se propague ao redor del, o tamaño deste será igual ou menor que a lonxitude de onda da onda que se propaga. Así, as ondas sonoras, que posúen unha lonxitude de onda comprendida entre uns centímetros e varios metros (ondas de FM de radio), poden rodear a maioría dos obstáculos que atopan no seu camiño, pero non poden salvar un gran edificio ou unha montaña.

O fenómeno da difracción tamén se pode observar se se trata dunha barreira cunha pequena regaña en vez dun obstáculo. Agora o diámetro da regaña será menor que a lonxitude de onda da onda que se propaga.

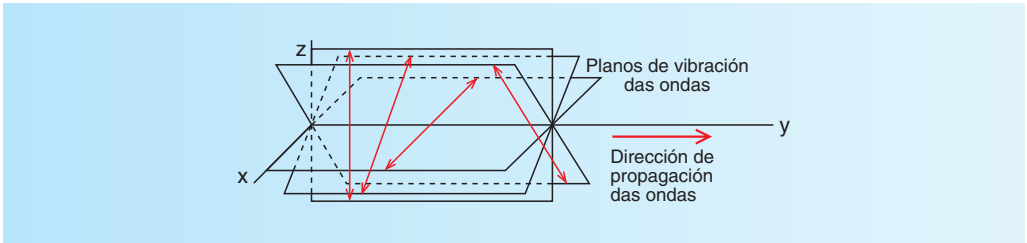
Sexa, por exemplo, un foco luminoso F. Se a abertura do tabique é moi grande, fóra do cono AFB non hai luz: non aparece o fenómeno de difracción. No entanto, cando esta abertura é da mesma orde de magnitude que a lonxitude de onda do movemento ondulatorio considerado (preferibelmente menor que esta) aparece nela, segundo o principio de Huygens, un novo foco emisor de ondas, habendo luz no punto P: os raios difractanse.



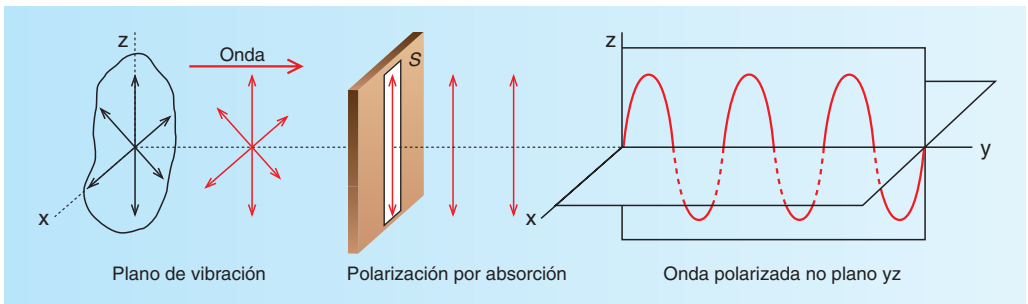
7.3. Polarización

Polarización dunha onda, no seu sentido máis amplo, consiste en limitar dalgún modo a forma libre de vibración das partículas do medio. Se conseguimos que a vibración teña lugar nun único plano dise que a onda está **polarizada linealmente**: as partículas afectadas pola onda efectúan vibracións nunha única dirección, perpendiculares á de propagación; é a polarización que imos estudar agora.

Pensem nunha onda transversal: a perturbación e a súa propagación son perpendiculares. Nas ondas transversais hai infinitos planos, contendo a dirección de propagación, nos que a onda pode vibrar. Supoñamos que o eixe y é a dirección de propagación, vibrando as partículas en calquera plano que (contendo a dirección de propagación) é perpendicular ao plano xz .



Se dalgunha forma conseguimos que a onda transversal vibre soamente nun plano que, contendo a dirección de propagación, sexa perpendicular a unha das infinitas direccións do plano xz , dicimos que a onda está **polarizada linealmente**.



Chámase **plano de polarización** ao formado pola dirección de propagación e a dirección de vibración. No exemplo é o plano yz .

Dise que a onda que aparece despois de atravesar a superficie S está polarizada linealmente no eixe z : a vibración realízase sempre ao longo da mesma liña (z) contida no plano de vibración yz .

O exemplo máis inmediato que podemos ter dunha onda polarizada linealmente é o da onda transversal que se propaga nunha corda.

Nas ondas lonxitudinais non ten sentido falar de polarización, xa que a dirección de vibración coincide coa dirección de propagación e non cumpren a condición de que estas direccións sexan perpendiculares.

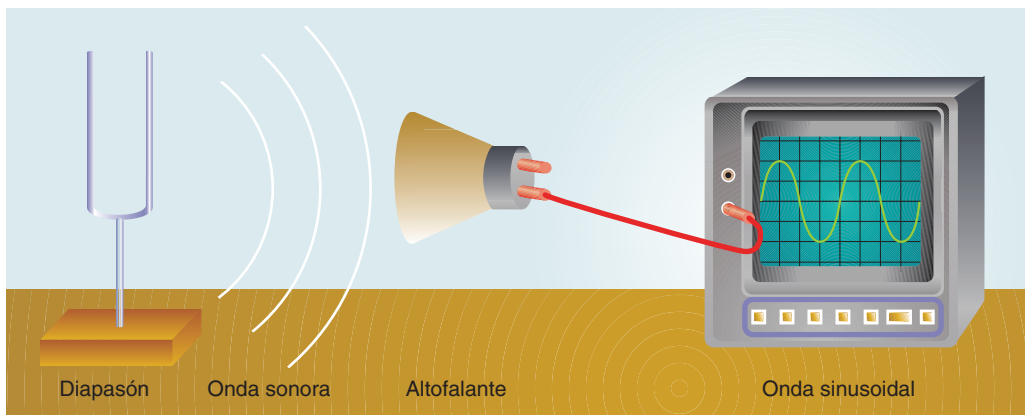
8. O SON

Se golpeamos un diapasón ponse a vibrar de forma periódica e aparece un son. Se tocamos fortemente o diapasón, deixa de vibrar e desaparece o son. O **son** prodúcese pola **vibración periódica** dun obxecto (se as **vibracións non son periódicas**, aparece o que chamamos **ruído**).

As vibracións do diapasón comprimen as capas de aire que hai ao seu arredor, estas capas fano sobre as seguintes, provocando compresións e expansións, aparecendo unhas ondas: son as ondas sonoras que chegan ao oído (as partículas de aire só oscilan en torno á súa posición de equilibrio). Como os elementos de volume de aire se moven paralelamente á dirección de propagación, as ondas sonoras son lonxitudinais¹².

Ademais, como as compresións e expansións poden ter lugar en todas as direccións do espazo, forman parte do grupo de ondas tridimensionais.

Se conectamos un micrófono á entrada dun osciloscopio e golpeamos o diapasón, na pantalla observamos unha onda sinusoidal¹³. Isto indícanos que as ondas sonoras producidas son harmónicas.



Se facemos vibrar o diapasón, ou un despertador, no interior dunha campá na que se fixo o baleiro non escoitamos nada: as ondas sonoras necesitan dun medio material para propagarse, facéndoo con distinta velocidade, segundo a súa natureza.

Así: $v_{\text{do son no aire}} = 344 \text{ m s}^{-1}$; $v_{\text{do son na auga}} = 1500 \text{ m s}^{-1}$; $v_{\text{do son no ferro}} = 5120 \text{ m s}^{-1}$.

¹² As características físicas do medio (densidade, elasticidade etc.) van ser determinantes no tipo de onda que pode transmitirse por el. Así, as ondas mecánicas lonxitudinais propáganse en calquera tipo de medio (sólido, líquido e gasoso), mentres que as ondas mecánicas transversais só se propagan en medios sólidos e superficialmente en líquidos xa que precisan forzas de suficiente intensidade entre as partículas veciñas para que a propagación transversal teña lugar. Como o son se propaga en calquera tipo de medio, as ondas sonoras son lonxitudinais.

¹³ O altafalante transforma o son emitido polo diapasón nunha tensión eléctrica, sendo debuxado o correspondente sinal no osciloscopio. Se o diapasón está montado sobre unha caixa de resonancia, esta canaliza o son a través da súa abertura.

9. CALIDADES SUBXECTIVAS DO SON: SONORIDADE, TON E TIMBRE

Desde un punto de vista fisiolóxico, podemos dicir que o son é todo o que oímos; pero desde o punto de vista físico, o son é unha onda e, como toda onda, é a propagación dunha perturbación con transporte de enerxía.

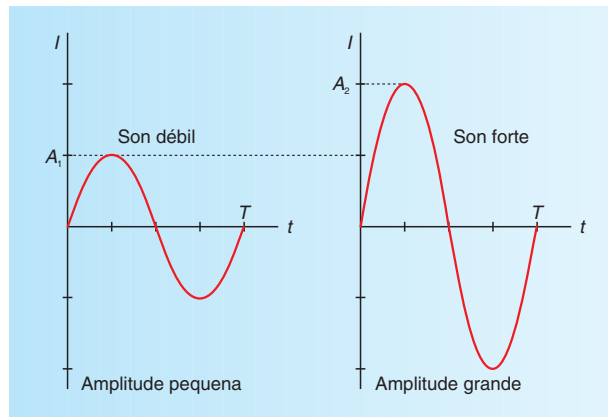
Non todas as ondas sonoras son audíbeis para o oído: depende de varias magnitudes; nin captadas de igual forma: o oído distingue entre distintos sons, clasificándoos de acordo á súa sonoridade, ton e timbre. Estas calidades, que son sensoriais e, como tales, subxectivas do individuo, imos relacionalas coas propiedades físicas das ondas.

A sonoridade

A **sonoridade**, tamén coñecida como **sensación sonora**, **intensidade subxectiva** ou **nivel sonoro**, é unha sensación asociada á percepción do son, podendo ser débil e forte.

Por experiencia sabemos que canto maior sexa a distancia do foco emisor, r , menos se oíe; e que o son dunha corda de guitarra é tanto máis forte canto maior é a separación ou amplitude, A , da mesma. Isto indícanos que a sonoridade diminúe coa distancia e aumenta coa amplitude, magnitudes estas que se relacionan coa intensidade I da onda:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}, \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{A_1^2}{A_2^2}$$



Para a frecuencia de 1000 Hz, o nivel inicial de intensidade, I_0 , no aire, para o oído humano, é de $10^{-12} \text{ W m}^{-2}$ (son débil) e o nivel de sensación desagradábel aparece para unha intensidade, I , de 1 W m^{-2} (son forte). Os sons de intensidade superior producen sensacións dolorosas.

Na audición non existe unha proporcionalidade directa entre a causa que produce a excitación: a intensidade da onda sonora, I , e a sensación fisiolóxica que percibimos, S . Segundo a lei de Weber-Fechner, esta relación é:

$$S = \log \frac{I}{I_0}, \quad \text{sendo } I_0 \text{ a intensidade inicial mínima: } I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}.$$

A unidade de sensación sonora é o **bel** ou **belio**, B^{14} , aínda que en acústica se utiliza o **decibel** ou **decibelio**, dB, adoptando, neste caso, a lei de Weber-Fechner a forma de:

$$S = 10 \log \frac{I}{I_0}.$$

¹⁴ En honra a Alexander Graham Bell, a quen se consideraba que no ano 1876 inventara o teléfono, aínda que no ano 2002 se recoñece a autoría deste invento a Antonio Meneci (1849).

Segundo o que acabamos de dicir, ao límite inicial de intensidade correspóndelle unha sonoridade de 0 dB: $S = 10 \log \frac{10^{-12}}{10^{-12}} = 0$ dB e ao límite máximo 120 dB: $S = 10 \log \frac{1}{10^{-12}} = 120$ dB.

A sonoridade, S , tamén se pode expresar en función da distancia, r , ao foco sonoro:

$$S = 10 \log \frac{I}{I_0} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \frac{I}{I_0} = \frac{r_0^2}{r^2} \end{array} \right\} \rightarrow S = 10 \log \frac{r_0^2}{r^2} = 20 \log \frac{r_0}{r} \text{ dB}$$

sendo r_0 a distancia limiar, que é aquela distancia ao foco sonoro para a cal a sonoridade, S_0 , é nula.

Exercicio resolto

- A que valor de sonoridade corresponde o inicio doloroso de son sabendo que ten lugar para a intensidade $I = 1 \text{ W m}^{-2}$ e que a intensidade mínima inicial é $I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$?

Solución:

O cálculo do nivel sonoro obtémolo coa lei de Weber-Fechner: $S = 10 \log \frac{I}{I_0}$

$$S = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{1}{10^{-12}} = 120 \text{ dB}$$

Exercicio resolto

- Un altofalante ten unha potencia de 100 W. Calcula a intensidade de onda para distancias de 1 m, 10 m e 20 m e os correspondentes niveis sonoros. Dato: intensidade inicial mínima $I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$.

Solución:

A intensidade dunha onda sonora obtense substituíndo na expresión:

$$I = \frac{\text{Enerxía}}{\text{Tempo} \cdot \text{Superficie}} = \frac{\text{Potencia}}{\text{Superficie}} = \frac{P}{S}$$

$$I_1 = \frac{P}{S_1} = \frac{100}{4 \pi 1^2} = 800 \cdot 10^{-2} \text{ W m}^{-2}$$

$$I_{10} = \frac{P}{S_{10}} = \frac{100}{4 \pi 10^2} = 8 \cdot 10^{-2} \text{ W m}^{-2}$$

$$I_{20} = \frac{P}{S_{20}} = \frac{100}{4 \pi 20^2} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ W m}^{-2}$$

Vemos que a intensidade diminúe coa distancia, pero non de forma lineal.

Para o cálculo do nivel sonoro utilizamos a lei de Weber-Fechner: $S = 10 \log \frac{I}{I_0}$.



$$S_1 = 10 \log \frac{I_1}{I_0} = 10 \log \frac{800 \cdot 10^{-2}}{10^{-12}} = 129 \text{ dB}$$

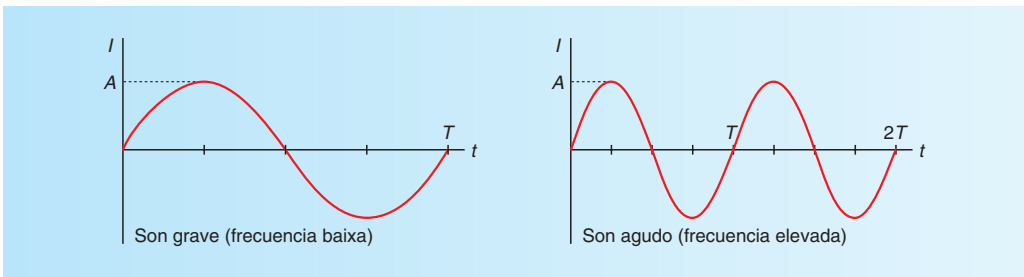
$$S_{10} = 10 \log \frac{I_{10}}{I_0} = 10 \log \frac{8 \cdot 10^{-2}}{10^{-12}} = 109 \text{ dB}$$

$$S_{20} = 10 \log \frac{I_{20}}{I_0} = 10 \log \frac{2 \cdot 10^{-2}}{10^{-12}} = 103 \text{ dB}$$

O ton

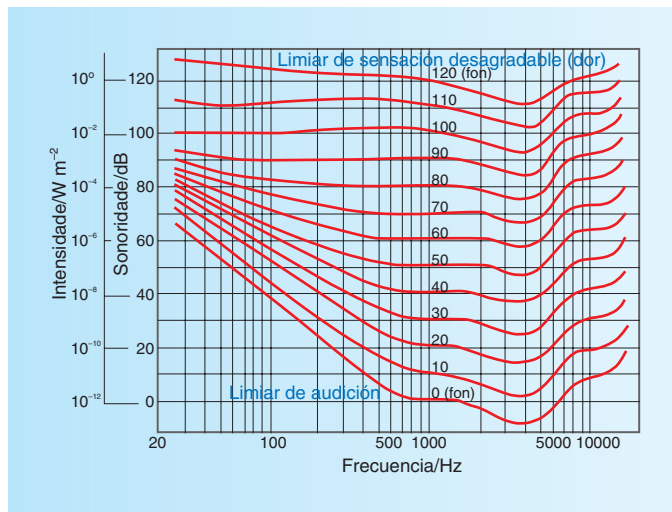
Ao teclear de esquerda a dereita un piano, observamos como vai subindo o ton das notas en cada unha das escalas. Dous sons de igual intensidade pero de distinta frecuencia percíbense de forma diferente, podendo ser:

- De ton **baixo** (son **grave**), se a súa frecuencia é baixa, e
- De ton **alto** (son **agudo**), se a súa frecuencia é elevada.



O ton é unha característica do son que depende do número de vibracións por segundo (**frecuencia**) que o oído recibe. A súa sensibilidade é máxima para o intervalo de 1000 Hz–5000 Hz.

Resulta que a sensibilidade do oído humano a un son depende, ademais da súa intensidade, da frecuencia da onda. Para cada frecuencia é necesaria unha intensidade mínima, $I_{\text{mín}}$, por debaixo da cal non se produce sensación sonora. Igualmente, para cada frecuencia hai unha intensidade máxima, $I_{\text{máx}}$, por encima da cal o oído ten unha sensación dolorosa. Esta influencia da frecuencia na sensación sonora dun son



pode verse no gráfico adxunto. Nel aparecen curvas de igual sonoridade para distintas frecuencias.

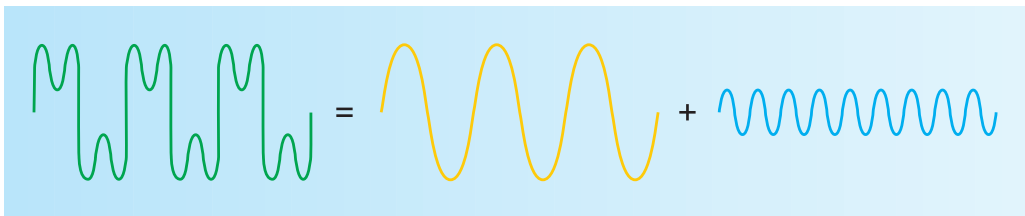
Para un son forte, o intervalo de frecuencias está comprendido entre 20 Hz e 20000 Hz, mentres que se o son é débil, este intervalo redúcese considerabelmente. Por debaixo dos 20 Hz están os infrasons (son producidos por oscilacións de corpos grandes, por exemplo: un tremor de terra) e por encima dos 20000 Hz temos os ultrasóns (obtéñense por medio da piezoelectricidade de certas substancias, como é o caso do cuarzo tallado adecuadamente).

A dependencia da sensación sonora coa frecuencia da onda fai que o decibelio perda importancia como unidade de sensación sonora. A sensación sonora para un valor de frecuencia exprésase na unidade de **fonio**, tamén chamada **fon**. O valor expresado en fonios, para a sensación sonora dun son de calquera frecuencia, coincide co valor expresado en decibelios doutro son de 1000 Hz de frecuencia, que produce no noso oído a mesma sensación sonora.

Timbre

Unha mesma nota musical, producida coa mesma intensidade e frecuencia por instrumentos distintos, soa diferente; é moi distinto o son dunha mesma nota tocada nun piano e nunha frauta. Débese a que os sons non son puros, é dicir, de unha soa frecuencia. Ademais dos sons principais, aparecen outros que o acompañan, que reciben o nome de harmónicos ou sobretóns. O resultado é que a onda é harmónica, pero non sinusoidal e, en consecuencia, aparecen ondas de distinta forma.

Unha onda complexa periódica pode descompoñerse nunha serie de ondas harmónicas de diferentes frecuencias ou tons. Isto é o que se coñece como síntese de Fourier.



Unha onda complexa pode descompoñerse nunha suma de ondas harmónicas de distinta frecuencia.

Diremos que o timbre é a calidade do son, que nos permite distinguir sons de igual sonoridade e ton producidos por instrumentos distintos e débese á forma da onda.

10. O ECO

As ondas sonoras, a igual que calquera outra onda, posúen a propiedade de reflectirse. Así, cando un son se encontra cun obstáculo que lle impide a súa propagación, reflíctese, escoitando dous sons distintos se o intervalo de tempo entre o son directo e o reflectido (**eco**) é

igual ou superior a 0,1 s (intervalo de tempo necesario para que o oído humano distinga dous sons consecutivos).

Exercicio resolto

- Calcula a distancia mínima á que ten que estar o obstáculo reflector dun foco emisor de ondas sonoras para percibir o eco. Dato: $v_{\text{do son no aire}} = 340 \text{ m s}^{-1}$.

Solución:

Como o oído humano só distingue dous sons cando os percibe cunha diferenza de tempo, como mínimo, de 0,1 s, imos calcular o espazo que percorre a onda sonora neste tempo:

$$v = \frac{s}{t} \rightarrow s = v \cdot t = 340 \cdot 0,1 = 34 \text{ m}$$

E para que haxa eco, o obstáculo reflector encontrárase, como mínimo, a 17 m do foco emisor. No caso de que esta separación sexa menor, ao producirse reflexión percibiremos soamente un son, que será prolongado, coñecéndose como **reverberación**.

11. O EFECTO DOPPLER

O efecto Doppler é un fenómeno característico de todos os movementos ondulatorios, sendo facilmente observábel nas ondas sonoras e nas electromagnéticas.

Cando o foco emisor de ondas e o observador están en movemento relativo con respecto ao medio en que a onda se propaga, a frecuencia das ondas observadas é distinta da frecuencia das ondas emitidas. Este cambio de frecuencia recibe o nome de **efecto Doppler**.

Cal é a relación da frecuencia f' que aparece no efecto Doppler, percibida polo observador, coa frecuencia f do foco emisor? A expresión que relaciona estas frecuencias, cando o foco e o observador se moven na mesma dirección, vén dada pola expresión:

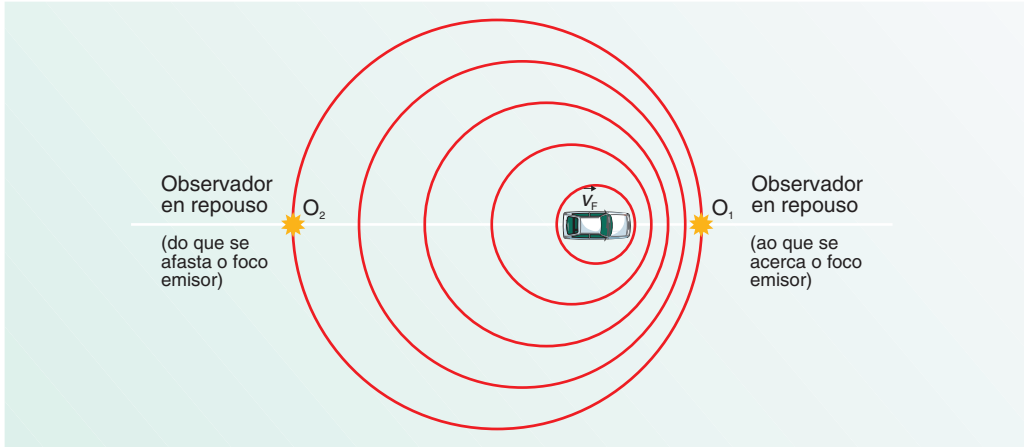
$$\frac{f'}{f} = \frac{v \pm v_o}{v \pm v_F}$$

sendo: v a velocidade da onda no medio en que se propaga; v_o a velocidade do observador e v_F a velocidade do foco emisor de ondas. O criterio de signos é: a) para v_o : “+” se o observador se acerca ao foco emisor e “-” se se afasta; b) para v_F : “-” se o foco emisor se acerca ao observador e “+” se se afasta.

Aplicando esta ecuación a algún caso particular resulta:

O **foco emisor acércase ao observador**, que permanece en repouso: $\frac{f'}{f} = \frac{v}{v - v_F}$

O **foco emisor afástase do observador**, que permanece en repouso: $\frac{f'}{f} = \frac{v}{v + v_F}$



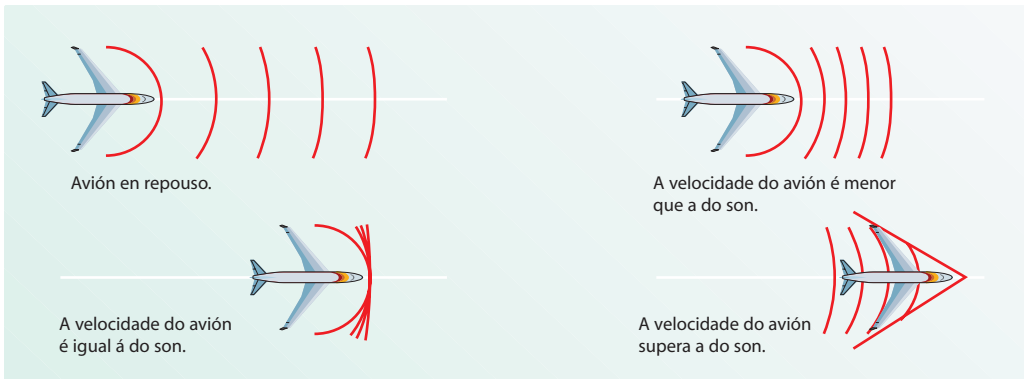
O observador acércase ao foco emisor, que permanece en repouso: $\frac{f'}{f} = \frac{v + v_0}{v}$

O observador afástase do foco emisor, que permanece en repouso: $\frac{f'}{f} = \frac{v - v_0}{v}$

Se a velocidade con que o observador se afasta do foco é maior que a velocidade da onda no medio en que se propaga, $v_0 > v$, non ten sentido aplicar a ecuación, xa que a onda nunca pode alcanzar ao observador.

Un caso especial aparece cando, estando o observador en repouso relativo con respecto ao medio, o foco emisor se move cunha velocidade maior que a velocidade de propagación das ondas: $v_f > v$. Cando isto sucede, resulta que aplicando a ecuación se obtén unha frecuencia negativa, $f' < 0$, cousa que fisicamente é imposible. Neste caso, as fronte de onda agrúpanse, dando lugar a unha **onda de choque**, tamén chamada **onda de Mach**, que acumula unha gran cantidade de enerxía.

Nas seguintes figuras represéntanse distintos estados sucesivos das ondas sonoras emitidas por un avión a iguais intervalos de tempo para distintas velocidades. Vemos a formación da barreira do son, cando a velocidade do avión alcanza a velocidade do son, e a formación da onda de Mach, cando a velocidade do avión supera a velocidade do son.



- A alarma dun edificio emite un son de 500 Hz. Con que frecuencia observará este son unha persoa que foxe á velocidade de 144 km/h e o policía que se acerca ao edificio á mesma velocidade? Dato: $v_{\text{son}} = 340$ m/s.

Solución:

Neste caso a velocidade do foco é nula, $v_F = 0$; a velocidade do observador que foxe é negativa, xa que se afasta da alarma: $v_0 = -144$ km/h = -40 m/s, e a velocidade do policía é positiva, xa que se acerca á alarma: $v_{\text{policía}} = +40$ m/s.

Substituíndo valores na ecuación $\frac{f'}{f} = \frac{v \pm v_0}{v \pm v_F}$ resulta:

$$\text{Para a persoa que foxe: } \frac{f'}{500} = \frac{340 - 40}{340 \pm 0} \rightarrow f' = 441 \text{ Hz}$$

$$\text{Para o policía que se acerca: } \frac{f'}{500} = \frac{340 + 40}{340 \pm 0} \rightarrow f' = 559 \text{ Hz}$$

O son que escoita o policía é máis agudo (de maior frecuencia) que o que percibe a persoa que foxe: este observa un son máis grave (de menor frecuencia).

- A sirena dunha ambulancia, que se move en liña recta cunha velocidade de 35 m/s, emite un son de 400 Hz. Que frecuencia escoita un motorista, que se move cunha velocidade de 30 m/s na mesma dirección e en sentido contrario, cando: a) se aproxima á ambulancia; b) se afasta da ambulancia? Dato: $v_{\text{son}} = 340$ m/s.

Solución:

- a) Cando ambulancia-moto se acercan: $v_F = -35$ m/s e $v_0 = +30$ m/s. Substituíndo valores na

ecuación $\frac{f'}{f} = \frac{v \pm v_0}{v \pm v_F}$ resulta:

$$\frac{f'}{400} = \frac{340 + 30}{340 - 35} \rightarrow f' = 485 \text{ Hz}$$

- b) Cando ambulancia-moto se separan: $v_F = +35$ m/s e $v_0 = -30$ m/s. Substituíndo valores resulta:

$$\frac{f'}{400} = \frac{340 - 30}{340 + 35} \rightarrow f' = 331 \text{ Hz}$$

O motorista percibe maior frecuencia (un son agudo) cando se acerca á ambulancia e menor frecuencia (un son máis grave) cando se afasta da ambulancia.


EXERCICIOS
 (cuestións)

1. Mapa conceptual dos contidos do tema.
2. Considera dúas ondas de radio: Unha en onda media (AM) de 1000 kHz e outra en frecuencia modulada (FM) de 100 MHz. Razona cal das dúas posúe maior lonxitude de onda. (*Selectividade COU; setembro 02*).
R: $\lambda_{AM \text{ de } 1000 \text{ kHz}} > \lambda_{FM \text{ de } 100 \text{ MHz}}$
3. Nunha onda mecánica nun medio material, as partículas desprázanse necesariamente na dirección de propagación da onda? Póñase algún exemplo. (*Selectividade COU; xuño 02*).
R: Non.
4. Escribe a ecuación dunha onda de frecuencia 100 Hz, que se propaga con velocidade de 200 m s⁻¹ na dirección do eixe "x", cara á esquerda e con amplitude de 0,1 m. (*Selectividade COU; setembro 01*).
R: $y(x,t) = 0,1 \cdot \text{sen}(200 \pi t + \pi x)$ m.
5. Unha onda plana incidente atravesou unha fenda, cuxo ancho posúe unha magnitude da orde da lonxitude da onda incidente. Debuxa e explica as ondas incidente e a emerxente da fenda. (*Selectividade COU; xuño 00*).
6. Que tipo de fenómeno se presenta cando unha onda atopa un obstáculo de dimensións comparábeis á súa lonxitude de onda? Pon algún exemplo. (*Selectividade COU; xuño 99*).
R: Difracción.
7. Poden polarizarse as ondas sonoras? Xustifica a resposta. (*Selectividade COU; xuño 97*).
R: Non.
8. Estabelece as diferenzas entre difracción e interferencia. (*Selectividade COU; setembro 96*).
9. Comenta a diferenza entre ondas lonxitudinais e transversais. (*Selectividade COU; xuño 96*).
10. Un feixe de luz láser pasa dun medio a outro de índice de refracción menor. O ángulo de refracción será maior ou menor que o ángulo de incidencia? Xustifica a resposta. (*Selectividade COU; xuño 94*).
R: Maior.
11. Que se entende por refracción dunha onda? Calcula as condicións que deben cumprir os índices de refracción para que o ángulo de incidencia dunha onda luminosa sexa $\theta < \pi/2$ e o ángulo de refracción sexa $\theta = \pi/2$. (*Selectividade COU; setembro 91*).
R: $n_{\text{primeiro medio}} > n_{\text{segundo medio}}$
12. Sexa unha onda electromagnética, que se propaga nun medio material ideal a unha frecuencia f_1 ; se lle variamos a súa frecuencia a f_2 , sendo $f_1 > f_2$, diminúe tamén a velocidade de propagación da onda electromagnética? Razona a resposta. (*Selectividade COU; setembro 91*).
R: Non: v constante independentemente do valor de f (excepto nos medios dispersivos)

13. Explica a diferenza entre as ondas lonxitudinais e transversais. De que tipo son as ondas electromagnéticas? Razona a resposta. (*Selectividade COU; xuño 91*).

R: Transversais.

14. Que é unha onda unidimensional harmónica? Na onda definida pola ecuación $y = 8 \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{8}t\right)$ (en m) determina os parámetros: amplitude, número de onda, frecuencia e lonxitude de onda. (*Selectividade COU; xuño 91*).

R: $A = 8$ m; $k = \pi/2$ m⁻¹; $\nu = 1/16$ s⁻¹; $\lambda = 4$ m

15. Escribe a ecuación dunha onda que se propaga por unha corda no sentido negativo do eixe x sabendo que a velocidade de propagación é de 8 m s⁻¹, o período de 0,3 s e a amplitude de 20 cm.

R: $y(x, t) = 0,20 \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{0,3} + \frac{x}{2,4}\right)$ m

16. Que relación hai entre as intensidades de dúas ondas harmónicas da mesma frecuencia e unha de dobre amplitude que a outra?

R: $I_1/I_2 = 4$.

17. Unha onda plana que incide sobre a superficie de separación de dous medios nos que a velocidade de propagación é v_1 e v_2 ; existe a posibilidade de que a onda non se refracte?

R: Si, no caso da reflexión total.

18. Dúas ondas de igual amplitude interfíren destrutivamente nun punto do espazo resultando unha onda de amplitude nula. Que ocorre coas ondas despois da interferencia?

R: Continúan sen modificación ningunha.

19. Unha onda sinusoidal transversal, coa dirección de vibración vertical, y, propágase de dereita a esquerda, eixe x, cunha velocidade de 400 cm s⁻¹, tendo unha amplitude de 50 cm e unha lonxitude de onda de 20 cm. Escribe: a) a ecuación de movemento da onda, e b) a velocidade máxima de vibración dun punto do medio alcanzado pola onda.

R: a) $y = 0,50 \sin(40\pi t + 10\pi x)$ en m; b) $v_{\text{máx.}} = 20\pi$ m s⁻¹

20. A ecuación dunha onda harmónica transversal que se propaga nun medio é: $y = 4 \sin(8\pi t - \pi x)$ m. Indica: a) o valor da amplitude, período, frecuencia e lonxitude de onda, b) a velocidade de propagación da onda e o valor de vibración dun punto do medio, en función do tempo, e c) o tempo que tarda a perturbación en percorrer unha distancia de 48 m.

R: a) $A = 4$ m, $T = 0,25$ s, $\nu = 4$ Hz, $\lambda = 2$ m; b) $v_{\text{propagación}} = 8$ m s⁻¹, $v_{\text{vibración}} = 32\pi \cos(8\pi t - \pi x)$ m s⁻¹; c) $t = 6$ s

21. Un raio de luz monocromática propágase desde o aire cara á auga. Pode darse o fenómeno de reflexión total? E se o raio se propaga desde a auga cara ao aire? Dato: $n_{\text{auga}} = 4/3$.

R: Non; Si, para $i > 48,6^\circ$

22. Explica por que nun burato de pequenas dimensións, da orde do centímetro, non se observa o fenómeno de difracción das ondas luminosas e si das ondas sonoras. Dato: $\lambda_{\text{luz}} \approx 10^{-7} \text{ m}$, $\lambda_{\text{son}} \approx 10 \text{ cm}$.

R: $\lambda_{\text{luz}} \ll d_{\text{burato}} \ll \lambda_{\text{son}}$

23. Relaciona as seguintes calidades subxectivas do son coa correspondente propiedade física da onda:

EFEECTO SENSORIAL	PROPIEDAD FÍSICA DA ONDA
Sonoridade (a)	Forma de onda (d)
Ton (b)	Intensidade da onda (e)
Timbre (c)	Frecuencia da onda (f)

R: (a) con (e), (b) con (f), (c) con (d)

24. O oído humano pode percibir sons máis débiles que os que corresponden a unha intensidade da onda de $10^{-12} \text{ W m}^{-2}$?

R: Non

25. Estuda cal é no SI a unidade do coeficiente de absorción e do número de onda.

R: m^{-1}

26. No instante en que a enerxía potencial dunha partícula que vibra cunha amplitude A , segundo a ecuación dunha onda harmónica unidimensional, é a metade da súa enerxía total, estuda cal das opcións, que a continuación se indican, se cumpre:

- A posición y da partícula en relación coa amplitude A é: a) $y=A/2$; b) $y=A/\sqrt{2}$; c) non se pode saber.
- A velocidade v da partícula en relación coa súa velocidade máxima, $v_{\text{máx}}$ é: a) $v=v_{\text{máx}}/2$; b) $v=v_{\text{máx}}$; c) $v=v_{\text{máx}}/\sqrt{2}$;

R: b); c)

27. Sabendo que o índice de refracción da auga é de $4/3$ e o do vidro vale $3/2$, a reflexión total aparece: a) sempre que o ángulo de incidencia da radiación supere o ángulo límite; b) sempre que o raio incidente emerxa do vidro; c) soamente cando o raio incidente emerxa do vidro e o seu ángulo de incidencia supere o ángulo límite.

R: A opción c).

28. Un raio luminoso pasa desde a auga, de índice de refracción $4/3$, cara a un segundo medio, que é de vidro cun índice de refracción de valor $3/2$. O índice de refracción auga/vidro, ou sexa, o índice de refracción do vidro respecto do da auga, é: a) 2; b) $1/2$; c) $9/8$.

R: A opción c).

29. Cando un raio de luz pasa do aire á auga, de índice de refracción $4/3$, sucede que: a) a súa velocidade aumenta; b) a súa frecuencia aumenta; c) a súa lonxitude de onda diminúe.

R: A opción c).

30. O ángulo que forma un raio de luz coa normal á superficie de separación de dous medios é de $55,000^\circ$. Se o índice de refracción do medio onde procede o raio vale 2 e o índice de refracción do segundo medio é de 1,5; estuda se haberá raio refractado. En caso afirmativo, calcula o ángulo de refracción e, en caso negativo, calcula o valor máximo do ángulo de incidencia para que poida haber refracción.

R: Non; $i_{\text{máximo}} = 48,59^\circ$

31. Un raio de luz de lonxitude de onda $\lambda = 0,70 \mu\text{m}$ (luz vermella) propágase desde o aire cara á auga. Sabendo que o índice de refracción da auga, n_{auga} , é $4/3$, calcula a lonxitude de onda que posúe neste segundo medio, λ_{auga} .

Sabendo que no espectro electromagnético a lonxitude de onda obtida no apartado anterior corresponde á cor verde, di que cor verá unha persoa mergullada na auga.

R: $\lambda_{\text{auga}} = 0,525 \mu\text{m}$; cor vermella.

32. Unha onda propágase por unha corda, que ten un extremo fixo nunha parede, segundo a ecuación: $y(x,t) = 4 \cdot 10^{-2} \text{ sen}(20t + 5x)$, en unidades do SI. Escribe a ecuación de onda reflectida.

R: $y(x,t) = 4 \cdot 10^{-2} \text{ sen}(20t + 5x + \pi) = -4 \cdot 10^{-2} \text{ sen}(20t + 5x)$.



Razoa as respostas ás seguintes cuestións:

- ❖ Un raio de luz incide desde o aire ($n = 1$) sobre unha lámina de vidro de índice de refracción $n = 1,5$. O ángulo límite para a reflexión total deste raio é: a) $41,8^\circ$; b) 90° ; c) non existe. (*Setembro 08*).
- ❖ Se a ecuación de propagación dun movemento ondulatorio é $y(x,t) = 2 \text{ sen}(8\pi t - 4\pi x)$ (SI); a súa velocidade de propagación é: a) 2 m/s; b) 32 m/s; c) 0,5 m/s. (*Xuño 08*).
- ❖ Cando un raio de luz incide nun medio de menor índice de refracción, o raio refractado: a) varía a súa frecuencia, b) acérase á normal; c) pode non existir raio refractado. (*Setembro 07*).
- ❖ Se un feixe de luz láser incide sobre un obxecto de pequeno tamaño (da orde da súa lonxitude de onda): a) detrás do obxecto hai sempre escuridade; b) hai zonas de luz detrás do obxecto; c) reflíctese cara ao medio de incidencia. (*Setembro 07*).
- ❖ Unha onda electromagnética que se atopa cun obstáculo de tamaño semellante á súa lonxitude de onda: a) forma nunha pantalla, colocada detrás do obstáculo, zonas claras e escuras; b) polarízase e o seu campo eléctrico oscila sempre no mesmo plano; c) reflíctese no obstáculo. (*Xuño 07*).
- ❖ Na polarización lineal da luz: a) o modifícase a frecuencia da onda; b) o campo eléctrico oscila sempre nun mesmo plano; c) non se transporta enerxía. (*Setembro 06*).
- ❖ Cando a luz atravesa a zona de separación de dous medios experimenta: a) difracción; b) refracción; c) polarización. (*Xuño 06*).

- Cando a luz incide na superficie de separación de dous medios cun ángulo igual ao ángulo límite significa que: a) o ángulo de incidencia e o ángulo de refracción son complementarios; b) non se observa raio refractado; c) o ángulo de incidencia é maior que o de refracción. (*Setembro 05*).
- O son dunha guitarra propágase como: a) unha onda mecánica transversal; b) unha onda electromagnética; c) unha onda mecánica lonxitudinal. (*Setembro 05*).
- Nunha onda estacionaria xerada por interferencia de dúas ondas, cúmprese: a) a amplitude é constante; b) a onda transporta enerxía; c) a frecuencia é a mesma que a das ondas que interfíren. (*Xuño 05*).
- Se o índice de refracción do diamante é 2,52 e o do vidro 1,27: a) a luz propágase con maior velocidade no diamante; b) o ángulo límite entre o diamante e o aire é menor que entre o vidro e o aire; c) cando a luz pasa do diamante ao vidro o ángulo de incidencia é maior que o ángulo de refracción. (*Xuño 05*).
- O ángulo límite na refracción auga/aire é de 48,61°. Se se posúe outro medio no que a velocidade da luz sexa $v_{\text{medio}} = 0,878 v_{\text{auga}}$, o novo ángulo límite (medio/aire) será: a) maior; b) menor; c) non se modifica. (*Xuño 04*).
- A posibilidade de oír detrás dun obstáculo sons procedentes dunha fonte sonora, que se atopa fóra da nosa vista, é un fenómeno de: a) polarización; b) difracción; c) refracción. (*Setembro 03*).
- A enerxía dunha onda é proporcional: a) ao cadrado da amplitude; b) á inversa da frecuencia; c) á lonxitude de onda. (*Xuño 03*).
- Un raio luminoso que viaxa por un medio do que o índice de refracción é n_1 , incide con certo ángulo sobre a superficie de separación dun segundo medio de índice n_2 ($n_1 > n_2$). Respecto do ángulo de incidencia, o de refracción será: a) igual; b) maior; c) menor. (*Setembro 02*).
- Cando interfíren nun punto dúas ondas harmónicas coherentes, presentan interferencia construtiva se a diferenza de percorridos, Δr , é: a) $\Delta r = (2n + 1) \cdot \lambda/2$; b) $\Delta r = (2n + 1) \cdot \lambda$; c) $\Delta r = n \lambda$ (sendo $n = 0, 1, 2, \dots$ e λ a lonxitude de onda). (*Setembro 02*).
- Cando a interferencia de dúas ondas orixina unha onda estacionaria, esta cumpre: a) a súa frecuencia duplícase; b) a súa amplitude posúe máximos e nulos cada $\lambda/4$; c) transporta enerxía proporcional ao cadrado da frecuencia. (*Xuño 02*).
- Das seguintes ondas, cales poden ser polarizadas?: a) ondas sonoras; b) luz visíbel; c) ondas producidas na superficie da auga. (*Xuño 02*).
- Cando un movemento ondulatorio se atopa na súa propagación cunha fenda de dimensións pequenas comparábeis ás da súa lonxitude de onda prodúcese: a) polarización; b) onda estacionaria; c) difracción. (*Xuño 01*).
- A enerxía que transporta unha onda é proporcional: a) á frecuencia, b) á amplitude, c) aos cadrados da frecuencia e amplitude. (*Setembro 00*).
- Cal das expresións propostas representa unha onda transversal que se propaga no sentido positivo do eixe x cunha velocidade de 5 m s^{-1} , ten unha amplitude de 1 m e unha frecuencia de 10 Hz?: a) $y = \cos 2\pi (10t - 5x)$, b) $y = \cos 2\pi (10t + x)$, c) $y = \cos 4\pi (5t - x)$. (*Xuño 00*).
- A ecuación dunha onda transversal que se propaga a través dunha corda é $\psi = 0,1 \text{ sen } [2\pi \cdot (0,4t - 6,25x)]$ (sistema internacional). Determina: a) a amplitude, lonxitude de onda, frecuencia, constan-

te e velocidade de propagación; b) velocidade e aceleración transversal das partículas do medio en $x = 0$, $t = T/2$. (Setembro 99).

- ❖ As ondas sonoras cumpren algunha das seguintes características: a) son transversais; b) son lonxitudinais; c) transmítese no baleiro. (Xuño 99).
- ❖ Nun movemento ondulatorio que se propaga a velocidade constante, a frecuencia e a lonxitude de onda: a) son independentes, b) están relacionadas, c) están relacionadas só se a onda se propaga nun medio material. (Setembro 98).
- ❖ Un raio luminoso que viaxa por un medio de índice de refracción n , incide con certo ángulo sobre a superficie de separación dun segundo medio de índice n' ($n' > n$). Con respecto ao ángulo de incidencia, o de refracción será: a) igual, b) maior, c) menor. (Xuño 97).
- ❖ Dos seguintes tipos de ondas dicir cal non é capaz de transportar enerxía, a) as ondas lonxitudinais, b) as ondas transversais, c) as ondas estacionarias. (Setembro 96).
- ❖ Considéranse dúas ondas de radio, unha en onda media (AM) de 1000 kHz e outra en frecuencia modulada (FM) de 100 MHz; a) a onda de AM ten maior lonxitude de onda que a de FM; b) a onda de AM ten menor lonxitude que a de FM; c) todas as ondas de radio teñen igual lonxitude de onda. (Xuño 96).



- ❖ Unha onda harmónica transversal propágase na dirección do eixe x : $y(x,t) = 0,5 \sin(4x - 6t)$ (SI). Calcula: a) a lonxitude de onda, a frecuencia con que vibran as partículas do medio e a velocidade de propagación da onda; b) a velocidade dun punto situado en $x = 1$ m no instante $t = 2$ s; c) os valores máximos da velocidade e da aceleración. (Setembro 08).

R: a) $\lambda = \pi/2$ m; $f = 3/\pi$ Hz; $v = 1,5$ m s⁻¹; b) $v = 0,44$ m s⁻¹; c) $v_{\text{máx.}} = 3,0$ m s⁻¹; $a_{\text{máx.}} = 18,0$ m s⁻².

- ❖ A ecuación dunha onda sonora que se propaga na dirección do eixe x é $y = 4 \sin 2\pi(330t - x)$ (SI). Calcula: a) a velocidade de propagación; b) a velocidade máxima de vibración dun punto do medio en que se transmite a onda; c) define a enerxía dunha onda harmónica. (Setembro 07).

R: a) $v = 330$ m s⁻¹; b) $v_{\text{máx.}} = 8,3 \cdot 10^3$ m s⁻¹.

- ❖ A ecuación dunha onda transversal é $y(t,x) = 0,05 \cos(5t - 2x)$ (magnitudes no SI). Calcula: a) os valores de t para os que un punto situado en $x = 10$ m ten velocidade máxima; b) o tempo que ha de transcorrer para que a onda percorra unha distancia igual a 3λ ; c) esta onda é estacionaria? (Xuño 07).

R: a) $t = 4,0 + 0,2n\pi + 0,1\pi = (4,3 + 0,63n)$ s, sendo $n = 0, 1, 2, \dots$; b) $t = 3,8$ s; c) non é estacionaria.

- Unha onda transmítese ao longo dunha corda. O punto situado en $x = 0$ oscila segundo a ecuación $y = 0,1 \cos(10 \pi t)$ e outro punto situado en $x = 0,03$ m oscila segundo a ecuación $y = 0,1 \cos(10 \pi t - \pi/4)$. Calcula: a) a constante de propagación, a velocidade de propagación e a lonxitude de onda; b) a velocidade de oscilación dun punto calquera da corda. (*Xuño 06*).

R: a) $k = 26,2 \text{ m}^{-1}$, $v = 1,2 \text{ m/s}$, $\lambda = 0,24 \text{ m}$; b) $v = -\pi \sin(10 \pi t - 26,2 x) \text{ m/s}$.
- Unha onda periódica vén dada pola ecuación $y(x,t) = 10 \sin 2 \pi (50 t - 0,20 x)$ en unidades do SI. Calcula: a) a frecuencia, a velocidade de fase e a lonxitude de onda; b) a velocidade máxima dunha partícula do medio e os valores do tempo t para os que esa velocidade é máxima (nun punto que dista 50 cm da orixe). (*Setembro 05*).

R: a) $\nu = 50 \text{ Hz}$, $v = 250 \text{ m/s}$, $\lambda = 5 \text{ m}$; b) $v_{\text{máxima}} = 1000 \pi \text{ m/s}$, $t = 0,002 + 0,01 n \text{ s}$, sendo $n = 0, 1, 2, \dots$
- Unha onda plana propágase na dirección x positiva con velocidade $v = 340 \text{ m/s}$, amplitude $A = 5 \text{ cm}$ e frecuencia $\nu = 100 \text{ Hz}$ (fase inicial $\varphi_0 = 0$); a) escribe a ecuación da onda; b) calcula a distancia da onda entre dous puntos cuxa diferenza de fase nun instante dado é $2 \pi/3$. (*Xuño 05*).

R: a) $y = 5 \cdot 10^{-2} \sin(200 \pi t - 1,85 x) \text{ m}$; b) $\Delta x = 1,13 \text{ m}$.
- A función de onda que describe a propagación dun son é $y(t,x) = 6 \cdot 10^{-2} \cos(628 t - 1,90 x)$ (magnitudes no SI); calcula: a) a frecuencia, lonxitude de onda e velocidade de propagación; b) a velocidade e a aceleración máximas dun punto calquera do medio no que se propaga a onda. (*Setembro 04*).

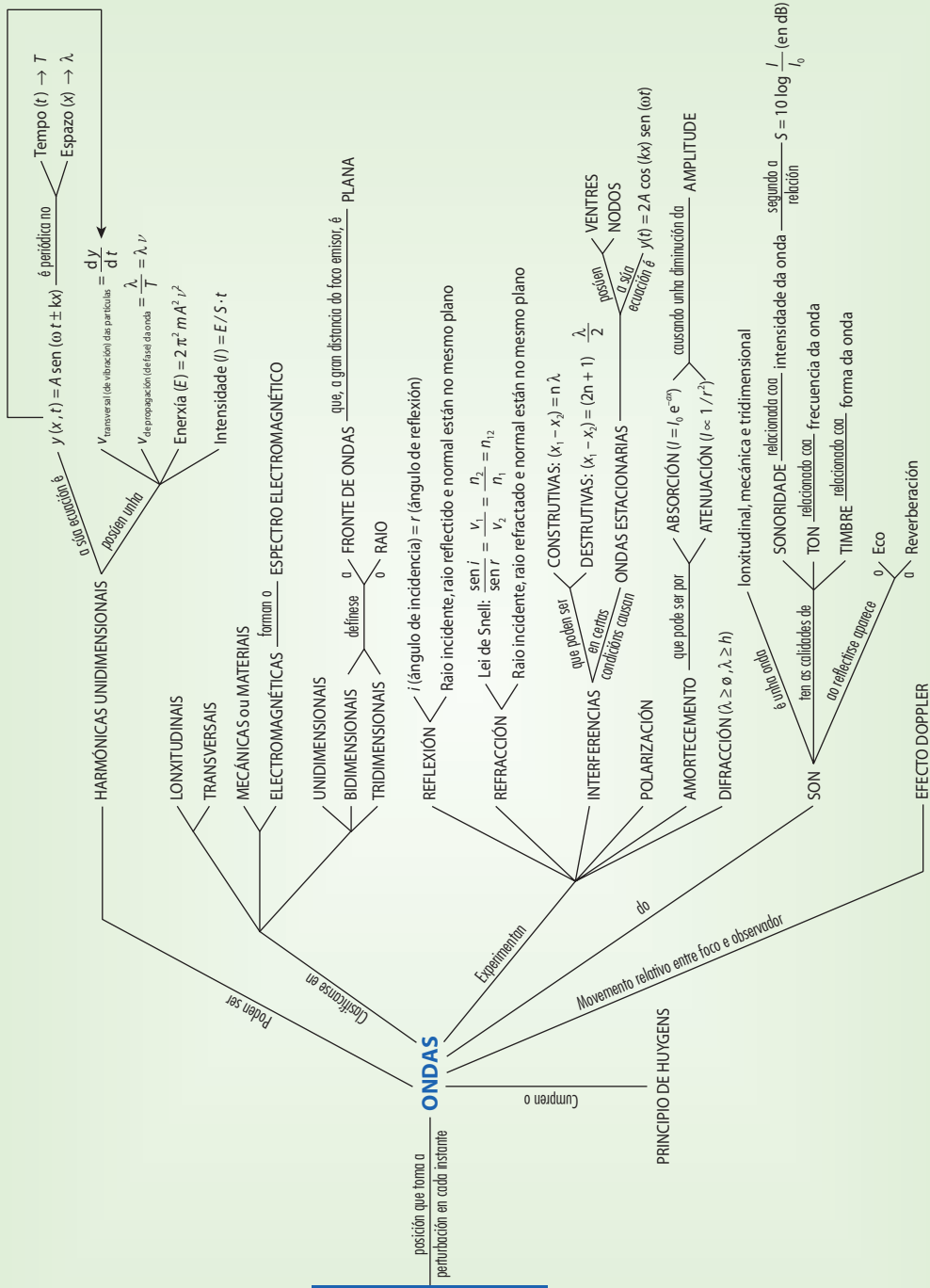
R: a) $\nu = 100 \text{ Hz}$, $\lambda = 3,31 \text{ m}$, $v = 331 \text{ m/s}$; b) $|v_{\text{máxima}}| = 37,68 \text{ m/s}$, $|a_{\text{máxima}}| = 2,366 \cdot 10^4 \text{ m/s}^2$.
- Por unha corda tensa propágase unha onda transversal con amplitude 5 cm, frecuencia 50 Hz e velocidade de propagación 20 m/s. Calcula: a) a ecuación de onda $y(x,t)$; b) os valores do tempo para os que $y(x,t)$ é máxima na posición $x = 1 \text{ m}$. (*Xuño 04*).

R: a) $y(x,t) = 5 \cdot 10^{-2} \sin(100 \pi t - 5 \pi x) \text{ m}$; b) $t = (11 + 4 n)/200 \text{ s}$, sendo $n = 0, 1, 2, \dots$ Nota: Se nos referimos a unha y máxima en valor absoluto: $t = (11 + 2 n)/200 \text{ s}$.
- O ángulo límite vidro-auga é de 60° ($n_a = 1,33$). Un raio de luz que se propaga no vidro incide sobre a superficie de separación cun ángulo de 45° refractándose dentro da auga. Calcula: a) o índice de refracción do vidro; b) o ángulo de refracción na auga. (*Setembro 03*).

R: a) $n_{\text{vidro}} = 1,54$; b) $r = 55^\circ$.
- A ecuación de propagación dun movemento ondulatorio é $y(x, t) = 2 \sin(8 \pi t - 4 \pi x)$ (SI): a) Cal é a amplitude, a frecuencia e a velocidade de propagación da onda?; b) cal é (en función do tempo) a velocidade e a aceleración dun punto para o que x é constante? (*Setembro 01*).

R: a) $A = 2 \text{ m}$; $\nu = 4 \text{ Hz}$; $v_{\text{propagación}} = 2 \text{ m s}^{-1}$;
 b) $v_{\text{vibración}} = 16 \pi \cos(8 \pi t - 4 \pi x) \text{ m s}^{-1}$; $a = -128 \pi^2 \sin(8 \pi t - 4 \pi x) \text{ m s}^{-2}$

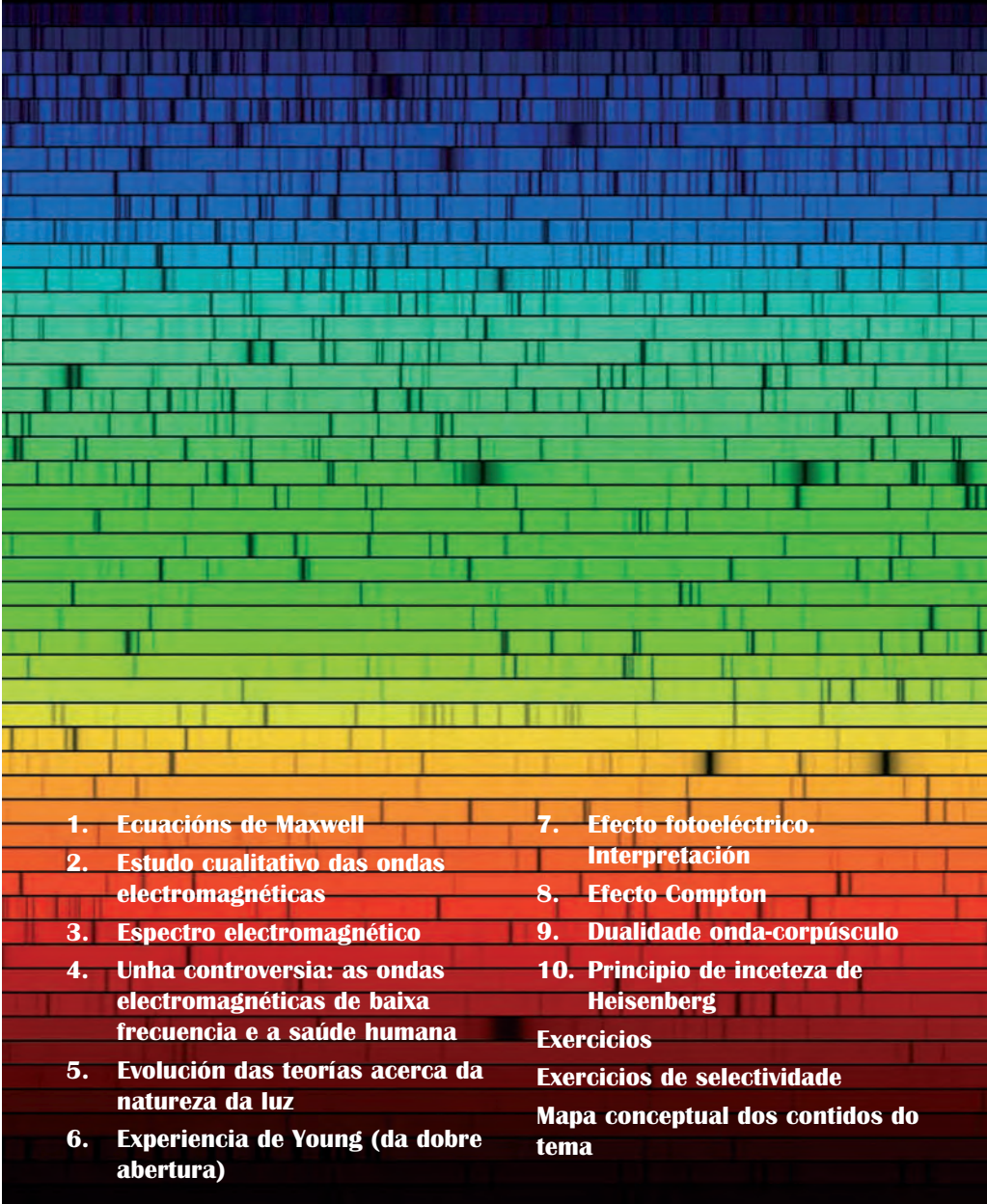
Mapa conceptual do Tema 7



Tema

8

A luz e as ondas electromagnéticas

- 
1. Ecuacións de Maxwell
 2. Estudo cualitativo das ondas electromagnéticas
 3. Espectro electromagnético
 4. Unha controversia: as ondas electromagnéticas de baixa frecuencia e a saúde humana
 5. Evolución das teorías acerca da natureza da luz
 6. Experiencia de Young (da dobre abertura)
 7. Efecto fotoeléctrico. Interpretación
 8. Efecto Compton
 9. Dualidade onda-corpúsculo
 10. Principio de incerteza de Heisenberg
- Exercicios
Exercicios de selectividade
Mapa conceptual dos contidos do tema

1. ECUACIONES DE MAXWELL

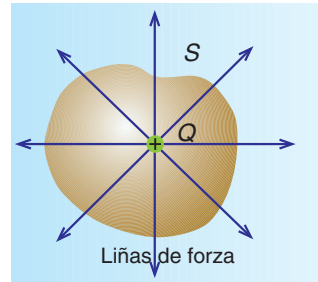
As ecuacións de Maxwell sintetizan as leis de Coulomb, Oersted, Ampère, Ohm e Faraday, que se relacionan cos fenómenos eléctricos e magnéticos, en catro ecuacións. Relacionan os campos eléctrico, \vec{E} , e magnético, \vec{B} , coas causas que os orixinan.

A **primeira lei de Maxwell** vén sendo o teorema de Gauss para o campo eléctrico:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon}$$

sendo \vec{E} a intensidade de campo eléctrico, Q a carga encerrada dentro da superficie pechada S e ϵ é a permitividade do medio.

Esta lei indícanos que as liñas de forza do campo eléctrico son abertas.

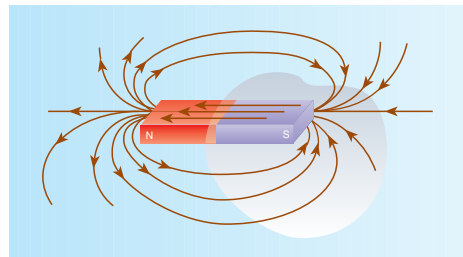


A **segunda lei de Maxwell** coincide co teorema de Gauss para o magnetismo:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

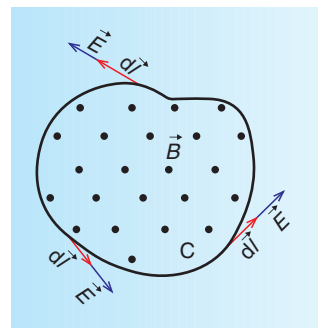
sendo \vec{B} o vector intensidade de campo magnético e S a superficie pechada considerada.

Como o fluxo magnético a través dunha superficie pechada é nulo, as liñas de indución do campo magnético son pechadas, non existindo polos magnéticos illados.



A **terceira lei de Maxwell** equivale á lei de Faraday referente aos fenómenos de indución electromagnética: *Un campo magnético variábel produce un campo eléctrico.*

As experiencias de Faraday dinnos que a variación de fluxo magnético que atravesa unha espira condutora produce nela unha corrente eléctrica inducida. Así, se colocamos unha espira metálica perpendicularmente ao campo magnético creado, por exemplo, por un electroímán polo que circula unha corrente variábel; na espira aparece unha corrente inducida. Como a espira está en repouso, sobre os electróns non actúa ningunha forza magnética, polo que para poñelos en movemento se tivo que inducir un campo eléctrico que proporcione a forza electromotriz ϵ que fai mover os electróns. Polo tanto:

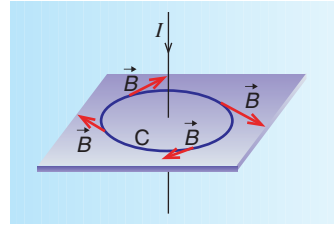


$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= \frac{W}{Q} = \oint_C \frac{\vec{F} \cdot d\vec{l}}{Q} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ \epsilon &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \end{aligned} \right\} \rightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Dinos que as variacións de fluxo magnético no tempo a través dunha superficie non pechada inducen un campo eléctrico (que non é conservativo).

A **cuarta lei de Maxwell** vén sendo a lei de Ampère xeneralizada: *un campo magnético pode ser producido por unha corrente eléctrica (lei de Ampère) e por un campo eléctrico variábel no tempo:*

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



Esta lei foi enunciada por Maxwell sen ningunha comprobación experimental. Supón que, por razóns de simetría na natureza, se un campo magnético variábel produce un campo eléctrico, tamén debe cumprirse o proceso inverso: un campo eléctrico variábel debe producir un campo magnético.

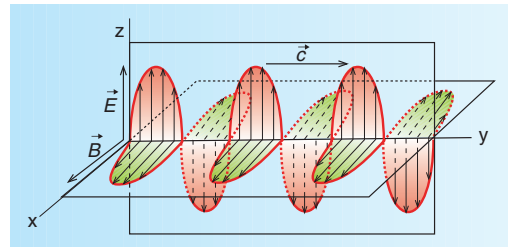
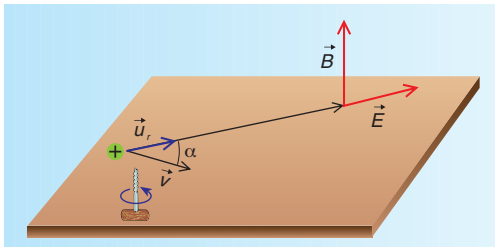
A esta asociación de campos eléctricos e magnéticos, Maxwell denominouna **campo electromagnético**.

2. ESTUDO CUALITATIVO DAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Toda carga eléctrica crea un campo eléctrico: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q \cdot \vec{u}_r}{r^2}$.

Se a carga está en movemento, ademais do campo eléctrico, crea un campo magnético:

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{Q \cdot (\vec{v} \times \vec{u}_r)}{r^2}, \text{ sendo as súas direccións perpendiculares.}$$

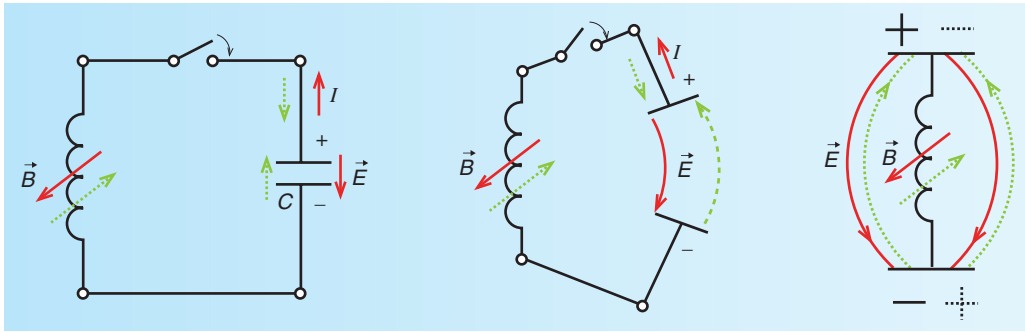


Pode comprobarse que se a velocidade da carga non varía, a súa enerxía permanece constante, pero se a velocidade da carga non é constante, esta emite enerxía en todas as direccións en forma de ondas electromagnéticas.

A propagación dos campos eléctrico e magnético variábeis, que vibran en planos perpendiculares entre si, creados por unha carga eléctrica acelerada, recibe o nome de **onda electromagnética**. Estas ondas propáganse coa velocidade da luz nunha dirección perpendicular á dirección de perturbación, polo que se trata dunha onda transversal (a súa dirección e sentido de propagación son os do vector $\vec{E} \times \vec{B}$, chamado vector de Poynting).

Unha forma de producir radiación electromagnética consiste en preparar un circuíto formado por unha bobina, un condensador e un interruptor conectados en serie e sen elementos de consumo. Este circuíto recibe o nome de **circuíto oscilante**. O condensador almace-

na enerxía electrostática: $E = (1/2) \cdot C \cdot V^2$, mentres que a bobina almacena enerxía magnética: $E = (1/2) \cdot L \cdot I^2$.

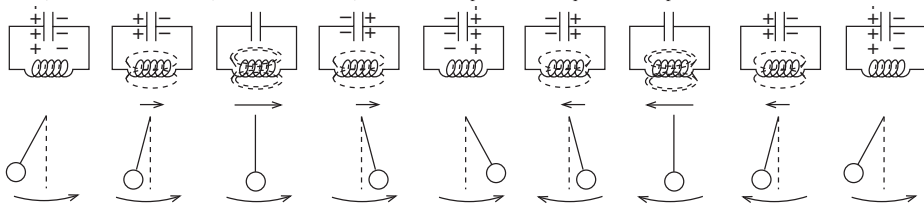


Supoñamos que nun instante dado o condensador está cargado cunha certa carga Q . Entre as súas armaduras hai un campo eléctrico e unha diferenza de potencial e , ao pechar o circuíto, empeza a circular unha corrente eléctrica até que nas armaduras do condensador se esgote a súa carga. Esta corrente crea un campo magnético na bobina, almacenando enerxía en forma de enerxía magnética.

Cando o condensador está totalmente descargado, a corrente eléctrica no circuíto é máxima e toda a enerxía está almacenada na bobina.

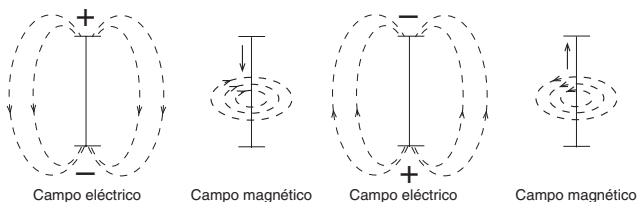
A continuación, a corrente empeza a diminuír e indúcese unha corrente eléctrica no mesmo sentido da que xa había. Isto fai que se cargue de novo o condensador coa polaridade invertida respecto á inicial até volver ter a carga inicial (se non hai perdas) completándose así un medio ciclo. O outro medio ciclo corresponde á nova descarga do condensador a través da bobina e á súa nova carga, esta vez coa polaridade inicial¹.

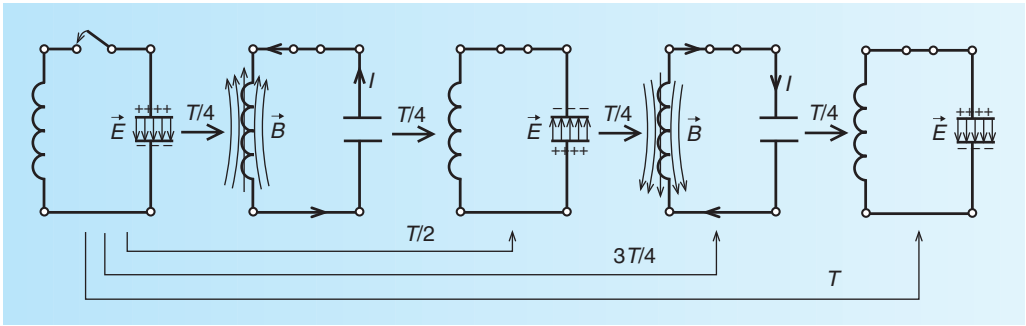
¹ Un símil mecánico é o dun péndulo que oscila no aire, que pode ter oscilacións pouco amortecidas (se o medio presenta moi pouco rozamento) ou moi amortecidas (medio moi viscoso), alcanzando a posición de equilibrio sen practicamente oscilar.



Isto é o que ocorre no circuíto LC descrito: canto máis grande sexa a resistencia óhmica R fronte á X_L da bobina, máis amortecidas son as oscilacións: máis enerxía se disipa en forma de calor por efecto Joule. Na práctica a descarga entre as placas do condensador é oscilante amortecida, durando un tempo relativamente curto. Pódese obter unha sucesión de descargas volvendo cargar o condensador despois de cada descarga.

Se se abre este circuíto de modo que as placas do condensador queden nos extremos e ademais substituímos a bobina por un condutor rectilíneo, conseguimos un circuíto oscilante aberto, no cal as liñas de forza dos campos eléctricos e magnéticos se estenden polo espazo circundante e se emite enerxía en forma de ondas electromagnéticas.

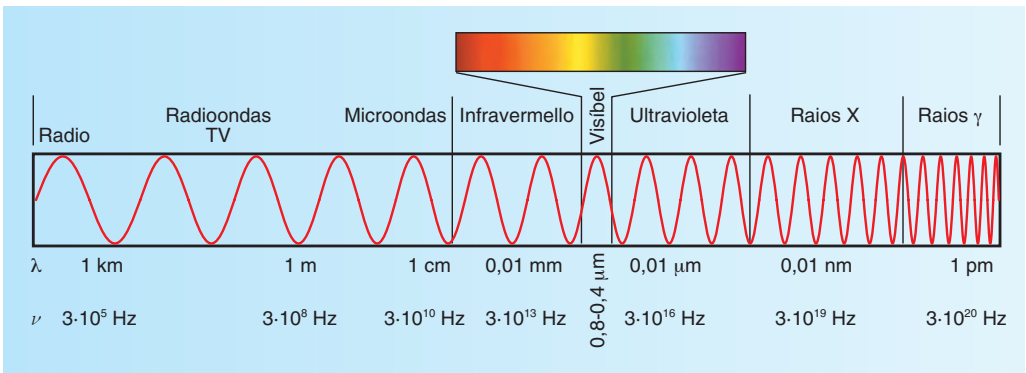




Neste circuito así descrito, a enerxía electromagnética queda practicamente na súa totalidade almacenada no propio circuito sen irradiala ao exterior. A irradiação conséguese separando gradualmente as armaduras do condensador e cando esta separación é máxima se ten unha antena emisorora².

3. ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO

A luz é unha onda electromagnética, pero non todas as ondas electromagnéticas son percibidas polo ollo humano. O espectro electromagnético é o conxunto de todas as ondas electromagnéticas. Estas abarcan unha gama moi ampla de frecuencias ($10\text{ Hz} - 10^{23}\text{ Hz}$) constituíndo o chamado **espectro electromagnético**.



Os diversos intervalos de frecuencias teñen nomes específicos, que son:

Radioondas ($3 \cdot 10^3\text{ Hz} - 3 \cdot 10^9\text{ Hz}$): Son as ondas electromagnéticas de menor frecuencia. Prodúcese nun circuito oscilante LC. Empréganse en radiodifusión³ e telecomunicacións.

² Mediante ondas electromagnéticas podemos transmitir a voz a grandes distancias, e con ela a información. Primeiro necesitamos transformar as ondas sonoras (ondas materias) en corrente eléctrica, feito que ten lugar no micrófono. A frecuencia da corrente que logramos é igual á frecuencia do son que a provoca (o son audíbel para o ser humano ten unha frecuencia que vai de 20 até 20000 Hz). Para que poida ser transmitida por radiación debe ter unha maior frecuencia. Por esta razón acóplase a onda de baixa frecuencia que vén do micrófono a outra de máis alta frecuencia que procede do oscilador (onda portadora) e que ten unha amplitude constante. O resultado é unha nova onda suma das dúas e modulada en amplitude.

³ As ondas de radio teñen lonxitudes de onda comprendidas entre 10 km e 1 m. As ondas de λ comprendida entre 10-1 km chámanse **ondas longas** e posúen un gran poder de difracción. As ondas de λ comprendida entre 1000-100 m chámanse **ondas medias** e teñen

Microondas ($3 \cdot 10^9 - 3 \cdot 10^{12}$ Hz): Son producidas por vibracións de moléculas. Empréganse en radioastronomía e comunicacións.

Raios infravermellos ($3 \cdot 10^{12}$ Hz – $3 \cdot 10^{14}$ Hz): Son producidas por vibracións atómicas. Empréganse na industria e en medicina.

Luz visíbel ($3,8 \cdot 10^{14}$ Hz –vermello– até $7,7 \cdot 10^{14}$ Hz –violeta): Son producidas por oscilacións dos electróns máis externos do átomo. Empréganse para a visión, láser etc. A radiación solar está formada por un 60% de raios visíbeis, o 37% de radiación infravermella e o 3% de radiación ultravioleta.

Raios ultravioletas ($8 \cdot 10^{14}$ Hz – 10^{17} Hz): Son producidas por oscilacións dos electróns internos do átomo. Empréganse en medicina. O Sol é un grande emisor de raios ultravioletas. Axudan ao organismo para sintetizar a vitamina D (unha das poucas que o ser humano é capaz de sintetizar). A fonte natural desta radiación é o Sol. Podemos produci-la mediante lámpadas de vapor de mercurio. Son perigosos para os tecidos debido ao seu poder enerxético⁴.

Raios X (10^{16} Hz – 10^{21} Hz): Son producidos nas oscilacións de electróns próximos ao núcleo. Utilízanse na industria e en medicina.

Raios gamma (10^{19} Hz e maiores): Son de orixe nuclear, aparecendo nas reaccións nucleares. Son danosos para os seres vivos.

4. UNHA CONTROVERSIA: AS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS DE BAIXA FRECUENCIA E A SAÚDE HUMANA

As fontes de campos electromagnéticos poden ser naturais ou producidas polo ser humano. Estas últimas van desde as redes de transporte de enerxía eléctrica até os equipos de diagnóstico por raios X, pasando por toda a gama de comunicacións sen fíos e de equipos electrónicos. Que riscos representan para a saúde humana?

O efecto das ondas electromagnéticas depende da potencia e da frecuencia da onda: a súa enerxía é directamente proporcional á frecuencia. Se a onda ten enerxía abondo como para romper os enlaces atómicos e liberar electróns, os cambios moleculares que aparecen poden causar danos nos tecidos biolóxicos e no ADN celular. Estas ondas ionizantes son de frecuencia superior a 10^{15} Hz: son as que van desde o ultravioleta en diante. Os seus efectos son

menor poder de difracción que as ondas longas. As ondas de λ comprendida entre 100–1 m reciben o nome de **ondas curtas**, con menor poder de difracción que as anteriores. Estas ondas fanse reflectir na ionosfera podendo utilizarse para radiar a gran distancia. Como ben é sabido, son máis audíbeis durante a noite ao desaparecer a radiación solar xa que o compoñente ultravioleta desta é a que dá lugar á formación da ionosfera, diminuíndo o grosor desta capa e o seu poder de absorción. As emisións de frecuencia modulada hai que captalas directamente (non utilizando a onda reflectida) e nelas o que se modula é a frecuencia (en vez da amplitude) da onda electromagnética emitida.

⁴ Debemos evitar as exposicións prolongadas a estas radiacións pois, debido á enerxía que transportan, poden ionizar átomos das células provocando erros na súa reprodución e cancro de pel.

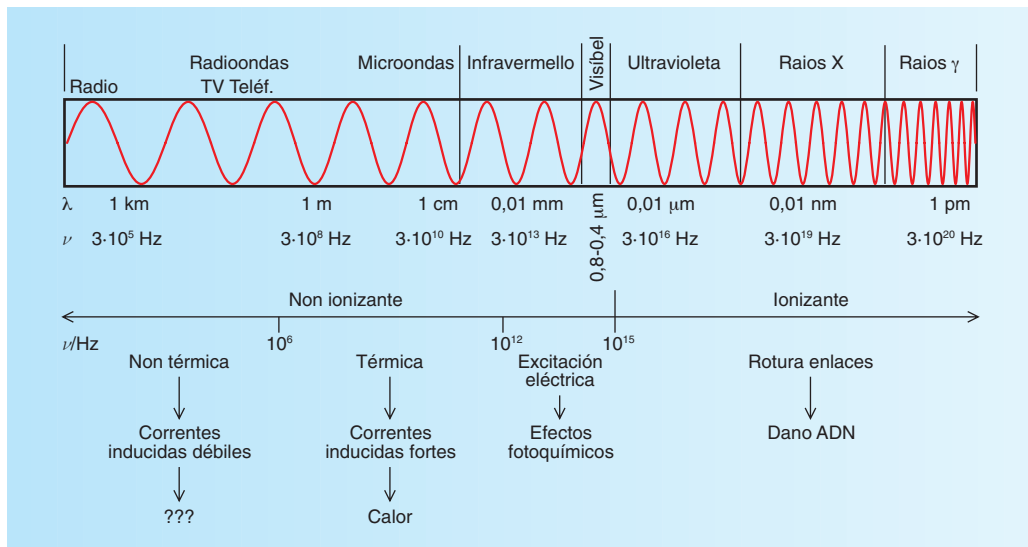
coñecidos e esixe tomar certas precaucións cando estamos expostos a elas.

As ondas de frecuencia igual ou inferior á zona visíbel do espectro electromagnético non teñen enerxía suficiente para romper enlaces químicos e non poden arrancar electróns: son as non ionizantes. As ondas da zona visíbel e infravermella producen excitacións electrónicas, que ocasionan efectos fotoquímicos, e as que están por debaixo do infravermello distánte subdivídense en térmicas e non térmicas.

Cando a enerxía electromagnética causa un aumento medíbel na temperatura do obxecto ou persoa en torno a 1 °C, dise **onda térmica**. A radiación, ao actuar no organismo humano, induce altas correntes eléctricas que provocan un incremento da temperatura nos tecidos das células e producen un cambio na orientación espacial (oscilación) das moléculas dipolares, principalmente da auga, e os ións. Se a enerxía da onda é insuficiente para elevar a temperatura por riba das flutuacións de temperatura normais do sistema biolóxico, fálase de **ondas non térmicas** (a frecuencia é inferior a 1 MHz). Estas ondas inducen nos tecidos correntes e campos eléctricos cuxos efectos a nivel celular non se coñecen adecuadamente, aparecendo posturas enfrontadas tanto desde o punto de vista dos niveis aceptábeis como das consecuencias dunha exposición esporádica ou continuada.



Máquina de Raios X.



As principais fontes de radiación electromagnética de baixa frecuencia son as que producen os aparellos eléctricos e a rede de subministración eléctrica, que son un exemplo de campos de frecuencia extremadamente baixa (de 0 a 300 Hz); os dispositivos antirrobo, siste-

mas de seguridade e as pantallas de ordenador, que son fontes de frecuencia intermedia (de 300 Hz a 10 MHz) e os teléfonos móbiles, a televisión, os transmisores de radio e radares e os fornos de microondas (de 10 MHz a 300 GHz).

A transmisión dos impulsos electroquímicos, base do funcionamento do sistema nervioso central, prodúcese especialmente por transporte de ións a través da membrana das células, que depende en gran medida do seu campo eléctrico. Pode verse alterado o funcionamento normal do organismo humano pola influencia dos campos electromagnéticos non ionizantes de baixa frecuencia?



Os televisores son unha importante fonte de radiación electromagnética.

Hai investigacións que relacionan os efectos causados polas ondas electromagnéticas de baixa frecuencia coa ansiedade, trastornos de sono, dores de cabeza, depresión, algúns tipos de cancro etc; aínda que a súa veracidade non está contrastada.

Existe a posibilidade de que o organismo humano sexa capaz de adaptarse adecuadamente ás variacións ambientais mediante mecanismos de compensación biolóxica, aínda que isto poida supoñer cambios irreversíbeis ao producir tensión no propio mecanismo de adecuación.

Ante tal situación, en 1996 a Organización Mundial da Saúde (OMS) inicia un programa internacional multidisciplinar de investigación para avaliar os efectos dos campos electromagnéticos no ser humano e determinar cal é o nivel aceptábel de radiación electromagnética.

En 1999 a Unión Europea (UE) elabora unha recomendación baseándose nos criterios da OMS. Nela establécese o límite de referencia en 50 veces por debaixo do nivel a partir do cal aparecerían efectos nocivos. No ano 2001 España adopta a recomendación da UE, fixando os límites de exposición do público aos campos electromagnéticos das ondas de radiofrecuencia.

5. EVOLUCIÓN DAS TEORÍAS ACERCA DA NATUREZA DA LUZ

Huygens, a finais do século XVII (1690) e Newton, a comezos do século XVIII (1704), enuncian dúas teorías acerca da natureza da luz: a ondulatoria e a corpuscular.

A **teoría ondulatoria de Huygens** di que a luz se propaga mediante ondas mecánicas, semellantes ás ondas sonoras, emitidas polos corpos luminosos. Como a luz se propaga en ausencia de aire, por exemplo no interior dunha campá na que está feito o baleiro,

Huygens supón a existencia dun medio elástico⁵ ideal, ao que se lle deu o nome de **éter**, que estaba presente en todos os medios materiais e tamén no baleiro. Huygens pensaba que as ondas luminosas eran lonxitudinais (por analogía co son), mentres que Hooke defendía que eran transversais.

Con esta teoría interpretábase moi facilmente os fenómenos de propagación rectilínea, reflexión, refracción e dobre refracción.

No entanto, os partidarios da idea de luz como corpúsculo obxectaban que se a luz era un movemento ondulatorio, as ondas luminosas deberían bordear os obstáculos⁶ (difracción) na súa traxectoria e, en consecuencia, non habería sombras e poderíanse ver os obxectos detrás dunha esquina.

A **teoría corpuscular de Newton** di que a luz está formada por diminutas partículas materiais –**corpúsculos**–, emitidas a grande velocidade e en liña recta polos corpos luminosos. A dirección de propagación destas partículas recibe o nome de raio luminoso.

Desta forma Newton tamén explica os fenómenos de propagación rectilínea⁷, reflexión⁸ e refracción⁹ da luz e xustifica as sombras.



Isaac Newton (1643-1727)

A gran personalidade científica de Newton fai que a súa teoría prevaleza sobre a de Huygens.

No ano 1801, a experiencia de Young sobre a interferencia da luz pon en dúbida a teoría corpuscular, tomando importancia a teoría ondulatoria.

⁵ O aire é un medio elástico. Pode comprobarse recollendo un pouco de aire no interior dunha xiringa. Se lle pechamos o extremo de saída e colgamos no émbolo masas coñecidas podemos comprobar que se cumpre a relación: $\vec{F} = k \Delta\vec{y}$, sendo \vec{F} o peso das masas engadidas e $\Delta\vec{y}$ o aumento de lonxitude que experimenta a columna de aire encerrado no interior da xiringa.

⁶ A difracción dunha onda luminosa xa fora observada por Grimaldi no ano 1665 pero non se lle dera ningunha importancia naquela época. Recordar que para que teña lugar o fenómeno da difracción, a lonxitude de onda da onda non debe ser menor que o tamaño do obxecto a bordear ou o buraco a atravesar. No caso da luz visíbel, λ é menor de 10^{-6} m, polo que os fenómenos de difracción non resultaban facilmente observábeis en obxectos macroscópicos.

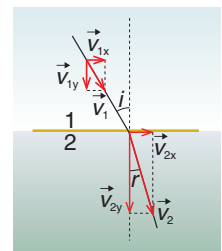
⁷ A propagación rectilínea da luz pode explicarse pensando que os corpúsculos luminosos non se ven practicamente afectados pola acción da gravidade, debido á gran velocidade con que son emitidos.

⁸ O fenómeno da reflexión da luz interprétase como un choqe elástico dos corpúsculos luminosos cos obxectos materiais.

⁹ No ano 1621, Snell chegou á lei de refracción ($\text{sen } i / \text{sen } r = v_2 / v_1$). Experimentalmente sabíase que un raio de luz, ao pasar dun medio menos denso a outro máis denso, se acercaba á normal, pensando Descartes (1638) que se debía a que na refracción o compoñente vertical da velocidade aumentaba, manténdose constante o compoñente horizontal.

$$\left. \begin{aligned} \text{sen } i &= \frac{v_{1x}}{v_1} \\ \text{sen } r &= \frac{v_{2x}}{v_2} = \frac{v_{1x}}{v_2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{v_2}{v_1} = \text{cte} \Rightarrow v_2 > v_1$$

Para Newton, os corpos conteñen o éter no interior dos seus poros, dicindo que o éter no aire era máis denso que dentro dos corpos. A igual que Descartes, pensaba que os corpúsculos luminosos aumentaban a súa velocidade ao atravesar un medio máis denso que o aire.



Fresnell (1816) deu unha explicación satisfactoria do fenómeno da difracción coa teoría de Huygens.

A pesar destes descubrimentos, a teoría corpuscular aínda seguía tendo algúns partidarios. Era necesario medir a velocidade da luz na auga e no aire, xa que neste punto as dúas teorías eran contraditorias. Para Newton a velocidade era maior na auga (medio máis denso) mentres que para Huygens é maior no aire. En 1850 Foucault demostrou experimentalmente que a luz ten maior velocidade no aire que na auga.

É Maxwell (1873) quen dá un novo impulso á teoría ondulatoria ao demostrar, cunhas ecuacións matemáticas que establece, que un circuíto oscilante LC debe de emitir

ondas electromagnéticas coa velocidade: $v_{\text{baleiro}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} = 300\,000 \text{ km/s}$ (que coincide

coa velocidade da luz no baleiro, c). Isto fílle supoñer que a luz é unha pequena parte do espectro electromagnético, abandonando a idea de onda mecánica para a luz.

En 1885 Hertz confirma experimentalmente que as ondas luminosas e as ondas electromagnéticas producidas por unha corrente eléctrica oscilante (salvo a visibilidade) son de igual natureza.

Agora é a teoría ondulatoria a que prevalece. Pero dous anos máis tarde, en 1887, Hertz descubriu o efecto fotoeléctrico, que consiste na emisión de electróns por parte dalgúns metais ao ser iluminados con luz, a cal debe ter un valor mínimo de frecuencia, independentemente da intensidade da radiación. Ademais a enerxía cinética máxima dos electróns arrancados só depende da frecuencia da luz excitadora, sendo independente da intensidade que posúa. Estes feitos non poden ser explicados coa teoría ondulatoria xa que, segundo esta, a enerxía dunha onda é directamente proporcional á súa intensidade e se esta é suficientemente grande, aínda que a frecuencia sexa pequena, deberían arrancarse os electróns cunha velocidade proporcional á intensidade da radiación.

Resumindo:

- Algúns fenómenos luminosos poden ser explicados indistintamente pola teoría corpuscular ou ondulatoria. Son os fenómenos de propagación rectilínea e reflexión.
- Outros fenómenos son tipicamente ondulatorios, como as interferencias, a difracción e a polarización.
- E, por último, os efectos fotoeléctrico e Compton, entre outros, só poden ser interpretados cunha teoría corpuscular.



James Clerk Maxwell (1851-1879)

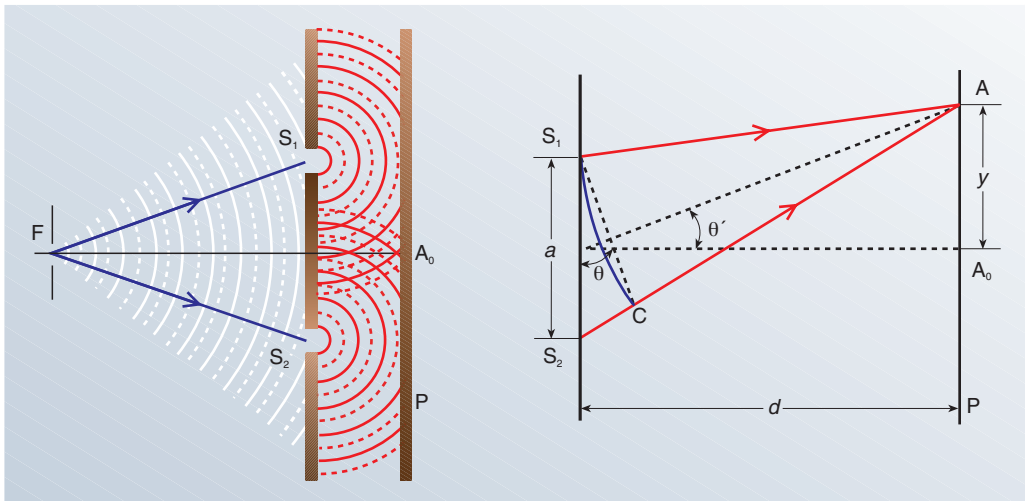


Heinrich Hertz (1857-1894)

O resultado é que a luz pode presentar a natureza ondulatoria (tendo unha frecuencia e unha lonxitude de onda) e a corpuscular (cunha cantidade de movemento), manifestando unha ou a outra natureza segundo as condicións do fenómeno que se observe. No entanto, en ningún fenómeno presenta o seu carácter dual dunha forma simultánea.

6. EXPERIENCIA DE YOUNG (da dobre abertura)

Imaxinemos un foco luminoso F que emite unha intensa luz monocromática, alcanzando unha pantalla na que hai dúas pequenas aberturas, S_1 e S_2 , moi xuntas e equidistantes do foco. Estas, polo principio de Huygens, convértense en novos focos emissores de ondas, con igual fase inicial e de igual amplitude, frecuencia e lonxitude de onda.



Na figura represéntase, nun instante dado, as cristas por liñas continuas e os vales por liñas a puntos. Nos puntos onde se cortan cristas con cristas e vales con vales aparecen interferencias construtivas, mentres que cando coinciden as cristas dun foco cos vales do outro hai interferencia destrutiva. As interferencias construtivas determinan na pantalla P zonas luminosas e as destrutivas zonas escuras e coñécense como franxas de interferencia.

Nun punto A da pantalla haberá máxima luz ou escuridade completa segundo se verifiquen, respectivamente, as condicións seguintes:

$$S_2A - S_1A = n\lambda$$

$$S_2A - S_1A = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$$

sendo n un número enteiro.

A posición (distancia y) das franxas brillantes e escuras con respecto ao punto central pode calcularse supoñendo que a distancia desde as aberturas á pantalla é moito maior que a separación entre as aberturas¹⁰.

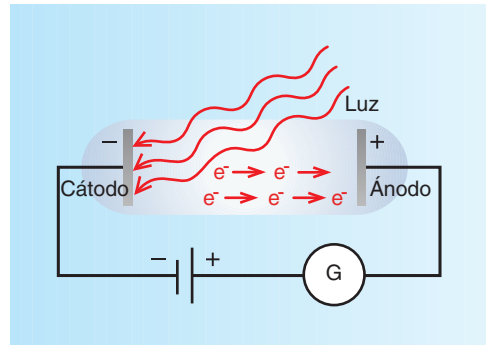
Con luz que non sexa monocromática, e especialmente con luz branca, só poden observarse algunhas franxas próximas á franxa central, pois, a medida que nos afastamos desta, as bandas van sendo irisadas (presentando as cores do arco iris), xa que as radiacións con distinta lonxitude de onda teñen os seus máximos para valores distintos de y , debido a que nos medios materiais a velocidade da luz depende da lonxitude de onda. Como na propagación da luz nun medio material a frecuencia permanece constante, a variación de velocidade que experimenta débese á súa distinta lonxitude de onda. No baleiro é: $c = \lambda \cdot \nu = \text{cte}$ e nun medio material temos: $v = \lambda \cdot \nu = f(\lambda)$.

Esta experiencia de Young pon en evidencia a natureza ondulatoria da luz.

7. EFECTO FOTOELÉCTRICO. INTERPRETACIÓN

Co nome de efecto fotoeléctrico coñécese a propiedade que teñen algúns metais de emitir electróns cando se encontran sometidos á acción da luz (visíbel ou ultravioleta). Os electróns así emitidos chámanse **fotolelectróns**. Este fenómeno foi descuberto por Hertz en 1887.

A figura representa unha ampola transparente na que se practicou o baleiro e na que hai dous eléctrodos: o cátodo, de Zn por exemplo, conectado ao borne negativo dunha batería e o ánodo, conectado ao borne positivo. Este dispositivo constitúe unha **célula fotoeléctrica**.



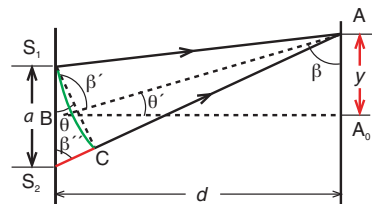
Cando unha radiación luminosa incide sobre o cátodo e este emite electróns, que son atraídos polo ánodo, o galvanómetro marca paso de corrente. Obsérvase que:

¹⁰ Se se supón que a distancia d é moito maior que a , as distancias S_2A e S_1A percorridas polas ondas pódense considerar paralelas, sendo a figura S_2CS_1 un triángulo rectángulo de modo que $S_2C = S_2A - S_1A = a \text{ sen } \theta$.

Ademais, o triángulo S_2CS_1 é case semellante ao BA_0A , xa que:

$$\left. \begin{aligned} \beta + \theta' &= 90^\circ \\ \beta' + \theta' &= 90^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} \beta &= \beta' \\ \beta' &= \beta'' \end{aligned} \right\} \rightarrow \beta = \beta'' \rightarrow \theta = \theta'$$

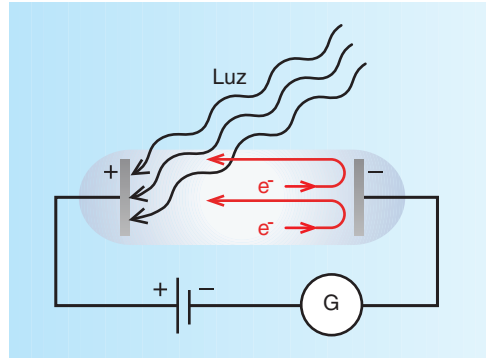
(para $d \gg a$)



Para valores pequenos dun ángulo podemos igualar o seu seno á tanxente: $\text{sen } \theta = \text{sen } \theta' = \text{tx } \theta = y/d$, resultando: $S_2A - S_1A \approx a \cdot y/d$. Como a condición de máximo aparece cando $S_2A - S_1A = n \cdot \lambda$, resulta que: $a \cdot y/d = n \cdot \lambda \rightarrow y = n \cdot d \cdot \lambda/a$. A posición da franxa escura aparece cando $S_2A - S_1A = (2 \cdot n + 1) \cdot \lambda/2$, resultando:

$$a \cdot \frac{y}{d} = (2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\lambda}{2} \rightarrow y = (2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\lambda \cdot d}{2 \cdot a}$$

- Se iluminamos o cátodo dunha célula fotoeléctrica con luz monocromática de distinta lonxitude de onda, λ , o galvanómetro deixa de indicar paso de corrente cando ν é inferior a certo valor ν_0 , chamado **frecuencia limiar** (“umbral”), valor que é independente da intensidade da radiación, sendo característico de cada metal. Isto non concorda coa teoría clásica¹¹ que predí que o efecto fotoeléctrico debe ocorrer para calquera frecuencia con tal que a intensidade luminosa sexa o suficientemente alta¹².
- Se a frecuencia da luz incidente é igual ou maior á frecuencia limiar, o número de fotoelectróns emitidos, que se mide pola corrente que circula polo galvanómetro, é proporcional á intensidade luminosa. Así, se duplicamos a intensidade da radiación que incide sobre o cátodo, tamén se duplica o número de fotoelectróns. Porén, a enerxía cinética máxima dos fotoelectróns é independente da intensidade da luz (feito que non pode explicarse coa teoría clásica) e aumenta ao aumentar a frecuencia da radiación.
- Se invertemos a polaridade dos eléctrodos, esta voltaxe crea un campo que atrae os fotoelectróns, anulándose a corrente para un valor V_0 , chamado **potencial de detención**, de freado ou de corte, que non depende da intensidade da radiación monocromática, pero si da súa frecuencia: ao aumentar a frecuencia aumenta o potencial de detención, sendo esta relación lineal.



Unha explicación satisfactoria destes feitos deuna Einstein, no ano 1905, aplicando á luz as ideas de Planck sobre a radiación térmica¹³: a luz propágase polo espazo, transportando enerxía en cuantos (“paquetes” discretos) de luz, chamados **fotóns**, que teñen por enerxía $E = h \cdot \nu$, sendo ν a frecuencia e h a constante de Planck.

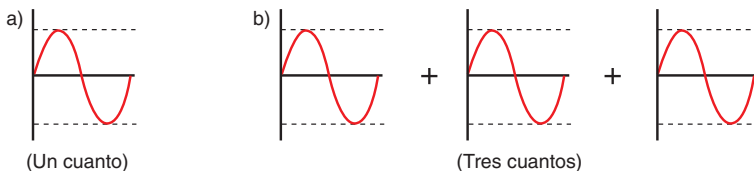
De acordo con este modelo, un aumento de intensidade luminosa significa un maior número de “paquetes” de enerxía, pero a enerxía de cada paquete só depende da frecuencia da luz¹⁴.

¹¹ Despois de que Hertz (1885) confirmou experimentalmente que as ondas luminosas e electromagnéticas eran de igual natureza, considérase o carácter electromagnético da luz como a teoría clásica deste fenómeno.

¹² Sabemos que para o caso dunha onda, $E \propto \nu^2$, $E \propto I$, de modo que aínda que ν sexa pequena, se a intensidade é suficientemente grande, a onda debería ter suficiente enerxía para poder arrancar o electrón e, en consecuencia, producirse o efecto fotoeléctrico.

¹³ Para poder explicar a emisión de enerxía dun corpo negro, Planck, no ano 1900, establece a idea de que a enerxía emitida por un corpo non é continua, senón que o fai por “paquetes” discretos ou **cuantos**, sendo a enerxía de un cuanto $E = h \cdot \nu$ e a enerxía de unha radiación: $n \cdot h \cdot \nu$, onde n é o número de cuantos.

¹⁴ Sexan as radiacións monocromáticas seguintes:



A intensidade da radiación b) é maior que a intensidade da radiación a), pero o cuanto das dúas radiacións teñen igual enerxía.

A enerxía transportada por un fotón incidente distribúese da seguinte forma:

- Na enerxía necesaria para liberar un electrón dos átomos do metal, que é constante para cada metal, e recibe o nome de traballo de extracción: W_0 .
- Na enerxía cinética con que sae o electrón do metal, E_k .

Como consecuencia resulta a seguinte ecuación:

$$h \cdot \nu = W_0 + \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

que se coñece como **ecuación de Einstein do efecto fotoeléctrico**.

Con esta teoría, a interpretación do efecto fotoeléctrico é a seguinte¹⁵:

- O feito de que o efecto fotoeléctrico non se produza para frecuencias inferiores á frecuencia limiar débese a que se a enerxía do fotón incidente, $h \cdot \nu$, é inferior ao traballo de extracción, W_0 , non se chega a arrancar o electrón e, en consecuencia, non se produce o efecto fotoeléctrico por moi intensa que sexa a radiación utilizada, xa que a intensidade inflúe no número de fotóns, pero non na enerxía de cada fotón, que soamente depende da súa frecuencia.
- O feito de que o número de fotoelectróns sexa directamente proporcional á intensidade da radiación débese a que ao aumentar a intensidade (o número de fotóns), con frecuencia igual ou superior á frecuencia limiar, tamén aumenta o número de fotoelectróns, non variando a súa enerxía cinética ($E_{k \text{ máx.}} = h \cdot \nu - W_0$) ao depender da frecuencia e non da intensidade. No entanto, se tamén variamos a frecuencia tamén varía a $E_{k \text{ máx.}}$
- A interpretación de que o potencial de detención aumenta coa frecuencia e é independente da intensidade é a seguinte: os electróns son emitidos polo cátodo cunha velocidade v , adquirindo unha enerxía cinética, E_k , de valor: $E_k = m \cdot v^2 / 2$. Ao inverter o potencial os electróns están sometidos a unha forza que os rexeita cunha enerxía $e \cdot V_0$ (función traballo). A súa velocidade anúlase cando:

$$e \cdot V_0 = \frac{1}{2} m \cdot v^2.$$

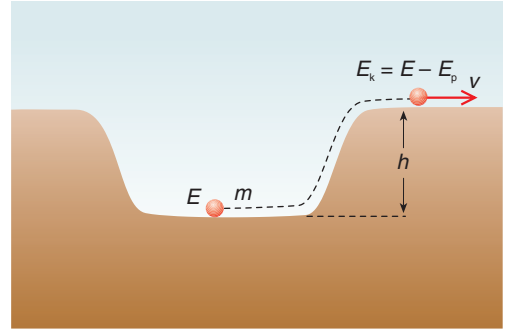
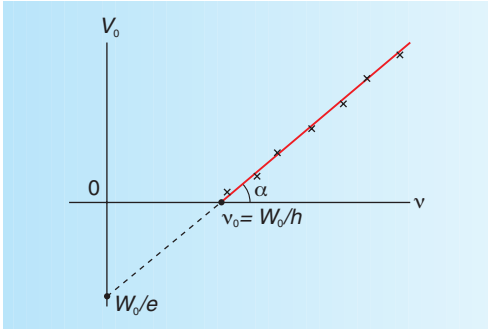
Como ademais: $E_k = h \cdot \nu - W_0$; podemos escribir:

$$e \cdot V_0 = h \cdot \nu - W_0$$

Polo tanto, o valor de V_0 depende da frecuencia: da enerxía do fotón, pero non da intensidade: do número de fotóns.

¹⁵ Un símil podería ser o seguinte: Supoñamos un fútbol que funciona cunha moeda de 1 euro; por moitas moedas que utilizemos de 20 céntimos, 50 céntimos etc., nunca lograremos sacar as bólas, porque as moedas actúan de forma individual. Igual ocorre co efecto fotoeléctrico: a extracción dun electrón débese a acción dun fotón (ou cuanto de luz) que, ao incidir sobre o electrón e cederlle toda a súa enerxía, logra arrancalo. Se o fotón utilizado non posúe suficiente enerxía para lograr extraer o electrón, ao actuar de forma individual, por moi intensa que sexa a radiación, non se produce o efecto fotoeléctrico.

Utilizando radiacións de distinta frecuencia ν , pódese obter unha serie de valores para o potencial de detención, V_0 , e a gráfica que se obtén ao representar V_0 fronte a ν é unha liña recta, cuxa pendente é: $\tan \alpha = h/e$. Medindo α e utilizando o valor de e calcúlase a constante de Planck, h , coincidindo o valor así calculado co que se obtén por outros métodos. Esta concordancia é unha confirmación máis da existencia dos fotóns.



Como analogía mecánica do efecto fotoeléctrico podemos considerar unha bóla de masa m en repouso no interior dun pozo de profundidade h . Para que a bóla saía do pozo necesítase comunicarlle dunha soa vez unha enerxía mínima, E_m , igual á enerxía potencial: $E_p = m \cdot g \cdot h$. Se se lle dá unha enerxía superior E , a bóla “escapará” cunha velocidade ν , de acordo co seguinte balance enerxético:

$$E = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m \cdot \nu^2 \text{ (se non hai rozamento)}$$

Onde: $m \cdot g \cdot h$ representa o traballo de extracción e E a enerxía do fotón incidente.

Exercicio resolto

- ▶ A frecuencia limiar de extracción de electróns dun determinado metal por efecto fotoeléctrico é $\nu_0 = 1,014 \cdot 10^{15}$ Hz. Se sobre este metal inciden fotóns de 10 eV, acha a enerxía cinética máxima dos electróns arrancados. Datos: $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J s, carga electrón: $-1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

Solución:

A ecuación de Einstein do efecto fotoeléctrico é: $E_{k \text{ máx.}} = h\nu - h\nu_0$, sendo ν a frecuencia da radiación incidente e $h\nu_0$ o traballo de extracción.

Sabemos que o electrón-voltio (eV) é a enerxía que adquire un electrón cando se somete á diferenza de potencial de 1 voltio. No sistema internacional esta unidade de enerxía equivale a: $1 \text{ eV} = 1 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C V} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, xa que neste sistema de unidades a carga se expresa en coulombs (C).

Con todo isto resulta:

$$E_{k \text{ máx.}} = 10 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} - 6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 1,014 \cdot 10^{15} = 9,28 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

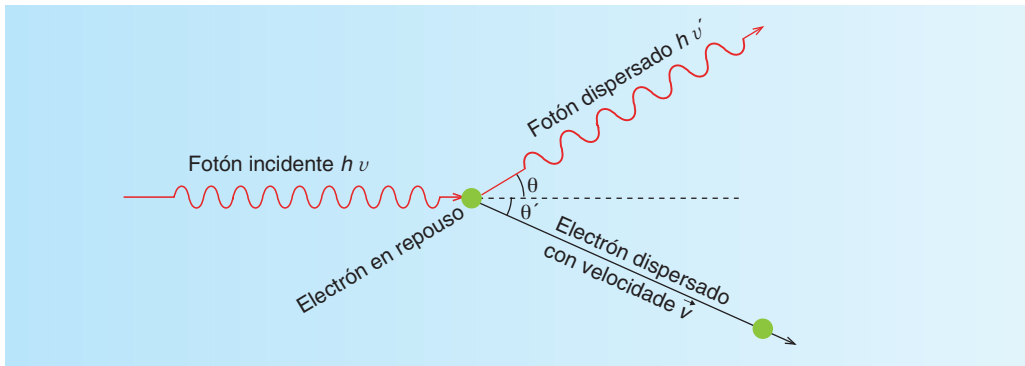
- ▶ Por que no efecto fotoeléctrico se manifesta o carácter discontinuo da radiación e, no entanto, non se observa nos fenómenos de reflexión e refracción?

Solución:

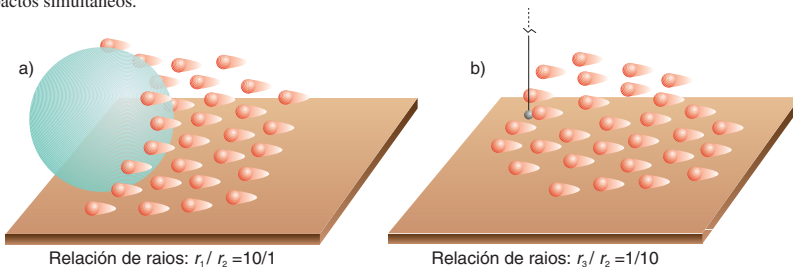
No efecto fotoeléctrico, dada unha partícula tan pequena como é o electrón, a individualidade dos fotóns aparece clara e, en consecuencia, a distribución discontinua da enerxía. No entanto, na reflexión e refracción hai tantos fotóns por unidade de superficie da fronte de onda que non se nota cada fotón de forma individual e a enerxía parece que está distribuída de forma continua¹⁶.

8. EFECTO COMPTON

No ano 1923 Compton estudou a dispersión dos raios X (ondas electromagnéticas) por corpos lixeiros, como o grafito, a parafina etc. Observou que ao bombardear con RX un electrón case libre, é dicir: ligado debilmente co núcleo do seu átomo, e inicialmente en repouso¹⁷, a radiación é dispersada e ten unha frecuencia menor que a radiación incidente¹⁸. Isto explícase supoñendo que os fotóns chocan co electrón (dispersándose a radiación) e adquire unha certa enerxía cinética, sendo a radiación dispersada de menor enerxía que a radiación incidente¹⁹: o fotón dispersado ten maior lonxitude de onda que o fotón incidente.



¹⁶ Pensemos que bombardeamos con bólas de 1 cm de raio, r_2 , que lanzamos na mesma dirección e sentido, bólas de: a) 1 dm de raio, r_1 , e b) 1 mm de raio, r_3 . No segundo caso, os “proyectís” impactan de forma sucesiva e nunca simultánea; porén, no primeiro caso haberá impactos simultáneos.



¹⁷ O electrón pode considerarse en repouso porque a enerxía cinética de axitación é moito menor que a dos fotóns incidentes.

¹⁸ Segundo a teoría clásica (ondulatoria) da luz, un oscilador capaz de absorber radiación dunha determinada lonxitude de onda λ debe emitir radiación da mesma lonxitude de onda. Como isto non se cumpre no efecto Compton, a radiación electromagnética non se comporta como unha onda.

¹⁹ O equivalente mecánico sería o choque dunha bóla en movemento con outra en repouso: esta adquire unha certa enerxía cinética e a primeira sac cunha enerxía inferior á inicial.

Compton encontrou experimentalmente que a diferenza de lonxitudes de onda da radiación dispersada (λ') e incidente (λ) non depende da lonxitude de onda da radiación incidente nin das propiedades da substancia dispersora, senón que só é función do ángulo θ formado polas direccións destas radiacións, segundo a ecuación: $\lambda' - \lambda = \lambda_c \cdot (1 - \cos \theta)$, sendo λ_c unha constante para todas as substancias, chamada lonxitude de onda de Compton para o electrón, e foi determinada experimentalmente cun valor de $2,42 \cdot 10^{-12}$ m.

Se o fotón e o electrón se comportan como dúas partículas que efectúan unha colisión elástica, conservarase a cantidade de movemento e a enerxía. Facendo uso dos principios de conservación da enerxía²⁰ e da cantidade de movemento²¹ en termos relativistas (pola grande velocidade das partículas) e supoñendo para o fotón unha cantidade de movemento $p = h/\lambda$, ao resolver o sistema correspondente obtense o seguinte resultado:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m \cdot c} (1 - \cos \theta)$$

resultado que coincide coa expresión obtida experimentalmente por Compton, sendo

$$\lambda_c = \frac{h}{m \cdot c}$$

Cando a difusión ten lugar cun ángulo de 90° esta expresión toma a forma:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m \cdot c} = \lambda_c$$

e ao substituír h (constante de Planck), m (masa do electrón en repouso) e c (velocidade da luz) aparece un valor para λ_c de $2,42 \cdot 10^{-12}$ m, que coincide co valor experimental medido por Compton.

O fotón que choca co electrón compórtase como se fose unha partícula, vindo dada a súa cantidade de movemento por: $p = h/\lambda$, e leva asociado unha onda electromagnética de lonxitude de onda λ . A ecuación $\lambda = h/p$ reúne o aspecto ondulatorio (λ) e o aspecto corpuscular (m) do fotón: expresa a súa dobre natureza.

Exercicio resolto

- A lonxitude de onda dun fotón é $1,50 \cdot 10^{-10}$ m. Tras interaccionar cun electrón libre, a súa nova lonxitude de onda é $1,54 \cdot 10^{-10}$ m. Cal é o ángulo de difusión e a enerxía cinética adquirida polo electrón? Datos: $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J s, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg, λ asociada ao $e^- = 2,42 \cdot 10^{-12}$ m.

Solución:

Empezamos escribindo a relación de Compton:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos \theta)$$

onde λ' é a lonxitude de onda da radiación dispersada, λ a da radiación incidente e θ o ángulo formado polas direccións destas radiacións.

²⁰ Que significa igualar a enerxía do electrón en repouso máis a enerxía do fotón incidente á enerxía do electrón despois do choque máis a enerxía do fotón dispersado.

²¹ Hai que igualar a cantidade de movemento do fotón incidente á cantidade de movemento do fotón dispersado máis a cantidade de movemento do electrón dispersado.

Substituíndo temos:

$$1,54 \cdot 10^{-10} - 1,50 \cdot 10^{-10} = 2,42 \cdot 10^{-12} (1 - \cos \theta) \rightarrow \theta = 130,76^\circ$$

A enerxía cinética adquirida polo electrón é a diferenza de enerxía do fotón antes e despois da interacción:

$$E_k = E - E' = h \cdot \nu - h \cdot \nu' = h \left(\frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda'} \right)$$

$$E_k = 6,626 \cdot 10^{-34} \cdot \left(\frac{3 \cdot 10^8}{1,50 \cdot 10^{-10}} - \frac{3 \cdot 10^8}{1,54 \cdot 10^{-10}} \right) = 3,44 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$

9. DUALIDADE ONDA-CORPÚSCULO

Chégase ao ano 1923 con fenómenos luminosos que son interpretados mediante unha teoría ondulatoria (interferencia, difracción, ...) mentres que outros hai que interpretalos coa teoría corpuscular (efecto fotoeléctrico, Compton, ...). Parece que nos encontramos ante un dilema: uns experimentos indican que a luz se comporta como unha onda (cunha lonxitude de onda λ) e outros como un chorro de corpúsculos (cunha cantidade de movemento $p = h/\lambda$), tendo que considerar que a luz presenta a dobre natureza de onda e corpúsculo, segundo as condicións do fenómeno que se observe. Así cando a lonxitude de onda da luz é maior ou dun valor parecido ao do tamaño do obxecto que bordea ou do buraco polo que atravesa, presenta o comportamento de onda (aparece a difracción) mentres que se a lonxitude de onda é moi pequena comparada co tamaño do obxecto sobre o que incide ou buraco polo que pasa, ten o comportamento de corpúsculo (aparecen as sombras).

Isto fixo pensar ao físico L. De Broglie se a materia se podería comportar como unha onda, é dicir, se toda partícula en movemento tería asociada unha onda.

Imos encontrar a lonxitude de onda asociada a un fotón partindo da enerxía, a cal vén dada:

- se consideramos a onda asociada ao fotón, pola ecuación de Planck: $E = h \cdot \nu$, sendo ν a frecuencia da onda asociada, e
- se o consideramos como partícula, pola ecuación de Einstein: $E = m \cdot c^2$ (sendo m a masa que se transforma en enerxía).

Igualando ambas expresións resulta:

$$h \cdot \nu = m \cdot c^2 \rightarrow h \cdot \frac{c}{\lambda} = m \cdot c^2 \rightarrow \lambda = \frac{h}{m \cdot c}$$

Esta fórmula, que é válida para o caso dos fotóns, foi xeneralizada por De Broglie en 1924 a toda partícula en movemento, establecendo o seguinte principio: a todo corpúsculo en movemento (electrón, protón, molécula,...) correspóndelle unha onda de lonxitude de onda $\lambda = h/(m \cdot v)$, sendo m a masa da partícula e v a súa velocidade, e frecuencia $\nu = E/h$.

Esta suposición teórica foi confirmada no ano 1927 por Davisson e Germer ao facer incidir un feixe de electróns sobre un cristal metálico, obtendo imaxes de difracción, cunha λ que se corresponde coa da ecuación de De Broglie.

Unha manifestación da dualidade onda-corpúsculo da radiación e da materia é o principio de incerteza de Heisenberg. Como as ondas non poden localizarse no espazo, a medida da posición dunha partícula con características ondulatorias está sometida a unha incerteza e a onda asociada á partícula representa a probabilidade de encontrala nun punto determinado.

Exercicio resolto

- Un electrón posúe unha enerxía de $2,50 \cdot 10^5$ eV. Acha a lonxitude de onda asociada a el. Datos: carga $e^- = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg, $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J s.

Solución:

Toda partícula en movemento ten asociada unha onda (dualidade onda-corpúsculo de De Broglie) correspondéndolle unha lonxitude de onda λ , que vén dada pola expresión:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v}$$

Como coñecemos a enerxía cinética do electrón, podemos calcular a súa velocidade:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow 2,50 \cdot 10^5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = \frac{1}{2} \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot v^2$$

$$v = 2,96 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Agora, substituíndo na expresión $\lambda = \frac{h}{m \cdot v}$, temos:

$$\lambda = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 2,96 \cdot 10^8} = 2,46 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

10. PRINCIPIO DE INCERTEZA DE HEISENBERG

No mundo macroscópico é posíbel observar un fenómeno e medir as súas propiedades utilizando instrumentos que non inflúen apreciabelmente no resultado da medida. Así, cando medimos cun termómetro a temperatura da auga dunha piscina, o feito de introducir o termómetro na auga non causa un erro aprecíbel na medida. No entanto, no mundo atómico resulta imposible evitar as perturbacións producidas polos aparellos de medida.

Para explicar este feito, Heisenberg efectuaba o seguinte “experimento mental”: Supoñamos un canón de electróns capaz de disparar un electrón horizontalmente nun recinto totalmente baleiro. Para observar a súa traxectoria dispoñía dunha fonte que emitía fotóns da lonxitude de onda desexada e dun microscopio ideal que funcionaba con calquera radiación do espectro.

Segundo a mecánica clásica, a partícula seguiría unha traxectoria parabólica. Pero para “ver” o electrón debe incidir sobre el un fotón que posúe a cantidade de movemento de:

$p_{\text{fotón}} = \frac{h}{\lambda_{\text{fotón}}}$. Isto, por efecto Compton, dá lugar a un cambio na traxectoria e na velocidade do electrón, variando a súa cantidade de movemento, variación que pode chegar a coincidir coa $p_{\text{fotón}}$: $\Delta p_{\text{electrón}} = \frac{h}{\lambda_{\text{fotón}}}$. Se intentamos minimizar este efecto utilizando fotóns de menor enerxía, ao aumentar λ tamén aumenta a difracción e resulta máis difícil observar o electrón, é dicir: determinar a súa posición²².

Heisenberg, no ano 1927, xeneralizou este resultado no coñecido **principio de incerteza**, tamén chamado de **indeterminación**, que di que existen pares de magnitudes físicas que, ao medilas simultaneamente, todo incremento de precisión na medida dunha delas entraña unha menor exactitude na medida da outra, de tal modo que o produto dos erros cometidos na medida simultánea de dúas magnitudes asociadas é igual ou maior a $h/2\pi$, sendo h a constante de Planck.

Estas magnitudes asociadas teñen as dimensións de enerxía por tempo. Exemplos característicos de tales parellas de magnitudes son:

posición – momento lineal
enerxía (emitida por unha partícula) – tempo (en que se emite a enerxía)

sendo o produto dos seus erros:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{2\pi}; \quad \Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$$

²² O electrón será observado polos fotóns de luz que dispersa ao ser iluminado, e como o límite de resolución do microscopio (que determina a precisión máxima con que pode situarse a partícula) é proporcional á lonxitude de onda da luz dispersada, temos: $\Delta x \approx \lambda$


**EXERCICIOS
(cuestións)**

1. Mapa conceptual dos contidos do tema.
2. Interpreta a expresión: $h \nu = h \nu_0 + \frac{1}{2} m v_{\text{máx}}^2$. (*Selectividade COU; xuño 02*).
3. Cantas teorías existen sobre a natureza da luz? A cal vén apoiar o efecto fotoeléctrico? (*Selectividade COU; xuño 96*).
4. Describe algún exemplo ou exemplos nos que se poñan de manifesto o dobre comportamento ondulatorio e corpuscular da luz (*Selectividade COU; setembro 95*).
5. Observouse que cando a frecuencia da radiación que incide sobre unha placa dun metal é f , a enerxía cinética dos electróns extraídos é E_k ; de triplicarse a frecuencia da radiación incidente, pódese afirmar que a enerxía cinética dos electróns extraídos é $3 E_k$? Razona a resposta. (*Selectividade COU; set. 92*).
6. Dá unha explicación do efecto fotoeléctrico e xustifica o aspecto corpuscular da luz. (*Selectividade COU; Setembro 91*).
7. De que depende a enerxía dun fotón?
8. Con que relacionas o feito de que un fotón de frecuencia ν , que choca cun electrón na superficie dun metal, non logra arrancalo? Se a intensidade da radiación se duplicara (2 fotóns); lograríase arrancar o citado electrón? Nota $2 \cdot h \cdot \nu > W_{\text{extracción}}$.
9. Un fotón de frecuencia ν logra arrancar un electrón na superficie dun metal, adquirindo unha certa enerxía cinética. Se se triplica a intensidade da radiación, lograrase aumentar a E_k do electrón arrancado? Esta nova radiación causa, con respecto á anterior, algunha diferenza no número de fotoelectróns arrancados?
10. Para o caso de que soamente queiramos aumentar a enerxía cinética dos fotoelectróns arrancados dun certo metal facéndolle incidir unha radiación electromagnética, é necesario: a) aumentar a frecuencia e a intensidade da radiación incidente; b) aumentar a intensidade da radiación e c) aumentar a frecuencia da radiación. Elixo de forma razoada a opción que consideres correcta.
11. Para o caso de que soamente queiramos aumentar a intensidade da corrente fotoeléctrica facéndolle incidir unha radiación electromagnética a un certo metal, é necesario: a) aumentar a frecuencia e a intensidade da radiación incidente; b) aumentar a intensidade da radiación e c) aumentar a frecuencia da radiación. Elixo de forma razoada a opción que consideres correcta.
12. Un chorro de electróns posúe: a) soamente propiedades corpusculares; b) soamente propiedades ondulatorias; c) propiedades corpusculares e ondulatorias. Elixo razoadamente a/s opción/s que consideres correcta/s.
13. Ao observar cun hipotético microscopio a posición e a cantidade de movemento dunha partícula resulta que: a) a incerteza na cantidade de movemento diminúe se empregamos unha radiación de menor lonxitude de onda; b) canto maior sexa a precisión con que se mide a súa cantidade de movemento maior é a incerteza con que se obtén a súa posición; c) a incerteza na posición diminúe se utilizamos unha radiación de lonxitude de onda maior. Elixo razoadamente a/s opción/s que consideres correcta/s.
14. A enerxía dun fotón é directamente proporcional á súa: a) velocidade; b) frecuencia; c) lonxitude de onda. Elixo razoadamente a/s opción/s que consideres correcta/s.

15. Un fotón en movemento choca cun electrón libre, que inicialmente está en repouso. Se o fotón emerxe cun ángulo θ con respecto á súa dirección inicial e o electrón é dispersado cunha velocidade v e un ángulo θ' , o fotón secundario con respecto ao fotón inicial ten: a) a mesma cantidade de movemento; b) maior lonxitude de onda; c) maior frecuencia. Elixo razoadamente a/s opción/s que consideres correcta/s.
16. As ondas de radio difiren das ondas luminosas en que: a) se propagan a distinta velocidade; b) teñen diferente frecuencia; c) necesitan dun medio material para propagarse. Elixo razoadamente a/s opción/s que consideres correcta/s.



EXERCICIOS (problemas)

1. A enerxía limiar necesaria para extraer un electrón dun átomo de potasio é de 2,0 eV. Se sobre unha mostra de potasio inciden fotóns de lonxitude de onda $\lambda = 4 \cdot 10^{-7}$ m, calcula a enerxía cinética máxima dos fotoelectróns arrancados do metal. Datos: $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J s, carga do electrón: $-1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

Solución:

A ecuación de Einstein do efecto fotoeléctrico é: $E_{k \text{ máx.}} = h\nu - h\nu_0$, sendo h a constante de Planck, ν , a frecuencia da radiación incidente e $h\nu_0$ o traballo de extracción.

Sabemos que o electrón-voltio (eV) é a enerxía que adquire un electrón cando se somete á diferenza de potencial de 1 voltio. No sistema internacional esta unidade de enerxía equivale a: $1 \text{ eV} = 1 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C V} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, xa que neste sistema de unidades a carga se expresa en coulombs (C).

Como ademais sabemos que: $c = \lambda \cdot \nu$, sendo c a velocidade da radiación incidente, $3 \cdot 10^8$ km/s, resulta que:

$$E_{k \text{ máx.}} = h \cdot \frac{c}{\lambda} - h \cdot \nu_0$$

Substituíndo queda:

$$E_{k \text{ máx.}} = 6,626 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^{-7}} - 2,0 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 1,77 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

2. O platino, igual que outros metais, presenta efecto fotoeléctrico, sendo a súa lonxitude de onda limiar $1,96 \cdot 10^{-7}$ m. a) Calcula o seu traballo de extracción. b) Se unha superficie de platino é iluminada por un feixe de luz dun láser que emite con lonxitude de onda $1,67 \cdot 10^{-7}$ m, acha a velocidade dos electróns extraídos. Datos: constante de Planck $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J s; velocidade da luz no baleiro $c = 3,00 \cdot 10^8$ m s⁻¹; masa do electrón $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg. (*Selectividade COU; set. 97*).

R: $W_0 = 1,01 \cdot 10^{-18}$ J; b) $v = 6,22 \cdot 10^5$ m s⁻¹.

3. O traballo de extracción fotoeléctrico da superficie do sodio metálico é de 2,0 eV. Determina: a) a velocidade máxima coa que son emitidos os electróns dunha superficie de sodio cando se ilumina con luz de lonxitude de onda $\lambda = 400$ nm; b) a mínima lonxitude de onda, correspondente á frecuencia limiar, necesaria para que sexan emitidos os electróns da superficie metálica.

Datos: carga do $e^- = -1,60 \cdot 10^{-19}$ C; $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg; $c = 3,00 \cdot 10^8$ m s $^{-1}$; $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J s; 1 nm = 10^{-9} m. (*Selectividade COU; xuño 97*).

R: a) $v = 6,24 \cdot 10^5$ m s $^{-1}$; b) $\lambda = 6,22 \cdot 10^{-7}$ m.

4. Un feixe de luz monocromática de lonxitude de onda $488 \cdot 10^{-9}$ m incide sobre un material, sendo o traballo de extracción de $3,2 \cdot 10^{-19}$ J. Calcula: a) a lonxitude de onda limiar, e b) a velocidade dos electróns emitidos. Datos: constante de Planck $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J s, velocidade da luz no baleiro $c = 3 \cdot 10^8$ m s $^{-1}$, masa do electrón $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg. (*Selectividade COU; set. 94*).

R: a) $\lambda_0 = 6,22 \cdot 10^{-7}$ m; b) $v = 0,44 \cdot 10^6$ m s $^{-1}$.



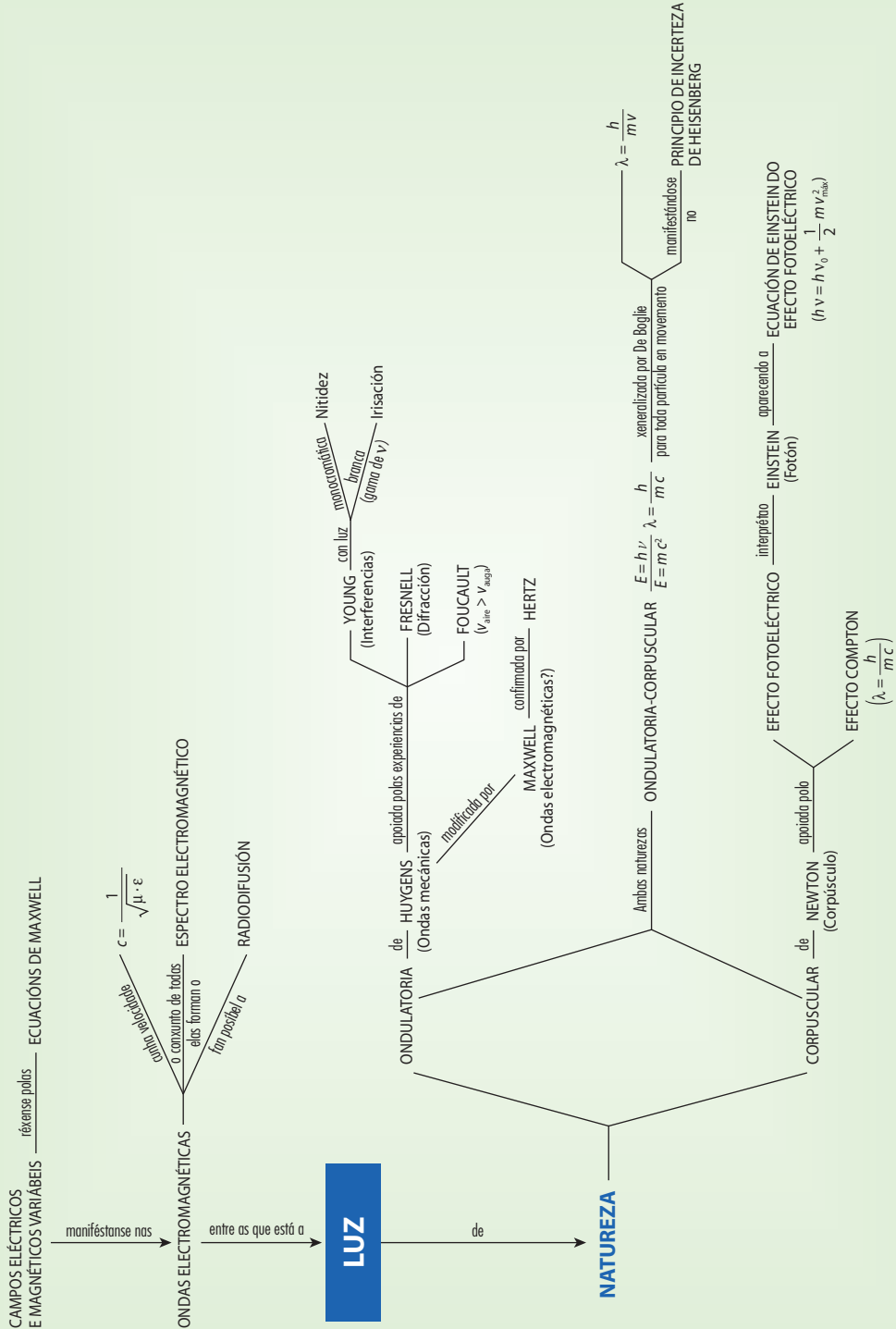
- ❖ Prodúcese efecto fotoeléctrico cando fotóns máis enerxéticos que os visíbeis, por exemplo luz ultravioleta, inciden sobre a superficie limpa dun metal. De que depende que haxa ou non emisión de electróns?: a) da intensidade da luz; b) da frecuencia da luz e da natureza do metal; c) só do tipo de metal. (*Setembro 08*).
- ❖ Da hipótese de De Broglie, dualidade onda-corpúsculo, dérvase como consecuencia: a) que a enerxía total dunha partícula é $E = m \cdot c^2$; b) que as partículas en movemento poden mostrar comportamento ondulatorio; c) que se pode medir simultaneamente e con precisión ilimitada a posición e o momento dunha partícula. (*Xuño 08*).
- ❖ Un metal, cuxo traballo de extracción é 4,25 eV, ilumínase con fotóns de 5,5 eV. Cal é a enerxía cinética máxima dos fotoelectróns emitidos? a) 5,5 eV; b) 1,25 eV; c) 9,75 eV. (*Setembro 07*).
- ❖ A relación entre a velocidade dunha partícula e a lonxitude de onda asociada establécese: a) a través da relación de Einstein masa-enerxía; b) por medio do principio de Heisenberg; c) coa ecuación de De Broglie. (*Xuño 05*).
- ❖ A luz xerada polo Sol: a) está formada por ondas electromagnéticas de diferente lonxitude de onda; b) son ondas que se propagan no baleiro a diferentes velocidades; c) son fotóns da mesma enerxía. (*Setembro 04*).

- Cando se dispersan raios X en grafito, obsérvase que emerxen fotóns de menor enerxía que a incidente e electróns de alta velocidade. Este fenómeno pode explicarse por: a) unha colisión totalmente inelástica entre o fotón e un átomo; b) elástica entre un fotón e un electrón; c) elástica entre dous fotóns. (*Setembro 04*).
- Tres cores da luz visíbel, a azul, a amarela e a vermella, coinciden en que: a) posúen a mesma enerxía; b) posúen a mesma lonxitude de onda; c) propáganse no baleiro coa mesma velocidade. (*Xuño 04*).
- Da hipótese de De Broglie, dualidade onda-corpúsculo, derivase como consecuencia: a) que os electróns poden mostrar comportamento ondulatorio $\lambda = h/p$; b) que a enerxía das partículas atómicas está cuantizada $E = hv$; c) que a enerxía total dunha partícula é $E = mc^2$. (*Setembro 03*).
- No efecto fotoeléctrico: a) a enerxía cinética dos electróns emitidos depende da intensidade da luz incidente; b) hai unha frecuencia mínima para a luz incidente; c) o traballo de extracción non depende da natureza do metal. (*Xuño 03*).
- Se a incerteza na medida na posición dunha partícula é de $6,00 \cdot 10^{-30}$ m, a incerteza mínima na medida do seu momento lineal é: a) a mesma; b) maior; c) ningunha. (Dato: $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J s). (*Setembro 02*).
- A enerxía dun cuanto de luz é directamente proporcional: a) á súa lonxitude de onda; b) á súa frecuencia; c) ao cadrado da velocidade da luz. (*Setembro 01*).
- Cal dos seguintes fenómenos constitúe unha proba da teoría corpuscular da luz: a) a refracción; b) a difracción; c) o efecto fotoeléctrico. (*Setembro 01*).
- A cantidade de movemento dun fotón vén expresada por: a) $p = m \cdot c^2$; b) $p = h \cdot v$; c) $p = h/\lambda$. (*Xuño 01*).
- No efecto fotoeléctrico cando un fotón interacciona coa materia: a) transfórmase nun fotón de menor enerxía e en enerxía cinética de electróns; b) emprégase en arrincar e acelerar electróns do metal e el desaparece; c) transfórmase en dous fotóns de menor enerxía. (*Setembro 00*).
- No efecto Compton orixínanse: a) fotóns de maior lonxitude de onda e electróns acelerados; b) fotóns de menor e maior frecuencia que os incidentes, c) electróns acelerados. (*Setembro 99*).
- Nun movemento ondulatorio que se propaga a velocidade constante, a frecuencia e a lonxitude de onda: a) son independentes, b) están relacionadas, c) están relacionadas só se a onda se propaga nun medio material. (*Setembro 98*).
- Determínase a posición dunha partícula cun erro de 10^{-5} m, e o seu momento lineal con outro erro de 10^{-7} kg m s⁻¹. a) É imposible, pois viola o principio de indeterminación de Heisenberg, b) é posible xa que non o viola, c) non se pode asegurar, pois cumpre a enerxía da partícula. Dato: constante de Planck: $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J s. (*Setembro 97*).
- Dispónse de luz monocromática capaz de extraer electróns dun metal. A medida que medra a lonxitude de onda da luz incidente, a) os electróns emitidos son máis enerxéticos; b) os electróns emitidos son menos enerxéticos; c) a luz monocromática non é capaz de extraer electróns. (*Xuño 96*).

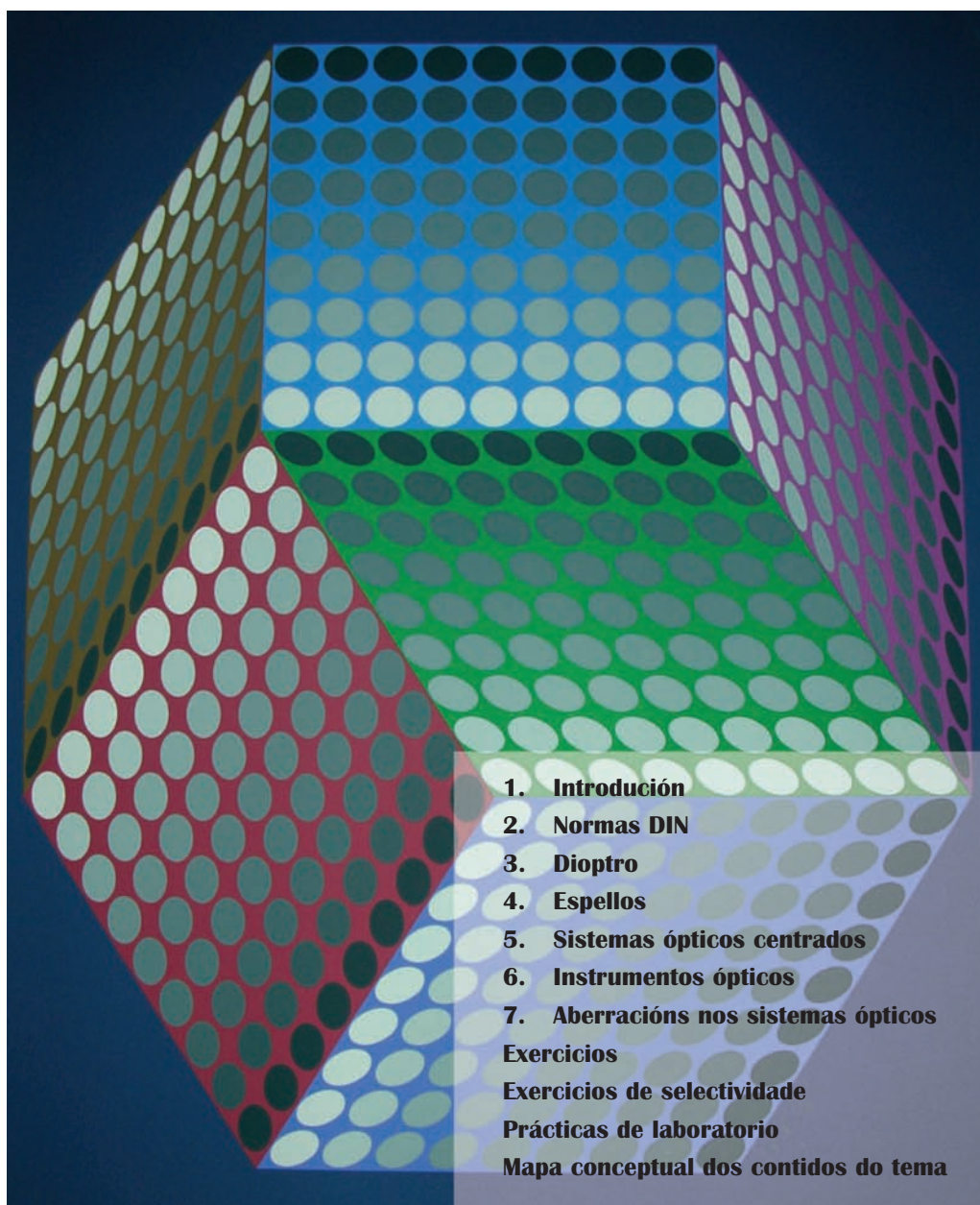


- ❖ O traballo de extracción do cátodo metálico nunha célula fotoeléctrica é 3,32 eV. Sobre el incide radiación de lonxitude de onda $\lambda = 325$ nm; calcula: a) a velocidade máxima coa que son emitidos os electróns; b) o potencial de freado. Datos: $1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$; $Q_e = -1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$; $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$; $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$. (*Xuño 05*).
- R:** a) $v = 4,2 \cdot 10^5 \text{ m/s}$; b) $V = 0,5 \text{ V}$.
- ❖ Se o traballo de extracción para certo metal é $5,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, calcula: a) a frecuencia limiar por debaixo da cal non hai efecto fotoeléctrico nese metal; b) o potencial de freado que se debe aplicar para que os electróns emitidos non cheguen ao ánodo se a luz incidente é de 320 nm. Datos: $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$; $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$; $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$; $Q_e = -1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. (*Setembro 03*).
- R:** a) $\nu_0 = 8,45 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$; b) $V = 0,39 \text{ V}$.
- ❖ O traballo de extracción de electróns dun metal é de $5 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Unha luz de lonxitude de onda 375 nm incide sobre o metal; calcula: a) a frecuencia limiar; b) a enerxía cinética dos electróns extraídos. Datos: constante de Plank, $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$; $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$. (*Setembro 02*).
- R:** a) $\nu_0 = 7,55 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$; b) $E_k = 2,96 \cdot 10^{-20} \text{ J}$.
- ❖ Nunha célula fotoeléctrica, o cátodo metálico ilumínase cunha radiación de $\lambda = 175$ nm, o potencial de freado para os electróns é de 1 V. Cando se usa luz de 200 nm, o potencial de freado é de 1,86 V. Calcula: a) o traballo de extracción do metal e a constante de Planck, h ; b) produciríase efecto fotoeléctrico se se ilumina con luz de 250 nm? Datos: $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $c = 2 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$; $1 \text{ m} = 10^9 \text{ nm}$. (*Xuño 02*).
- R:** a) $h = -6,5 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$, resultado que non coincide co seu valor por ser incorrecto o enunciado; $W = -1,22 \cdot 10^{-18} \text{ J}$ (resultado incorrecto); b) non, se se dan por bos os resultados anteriores.

Mapa conceptual do Tema 8



Tema 9 Óptica xeométrica



1. INTRODUCCIÓN

A luz é unha onda electromagnética, pero moitos dos seus aspectos pódense estudar fixándonos unicamente na súa propagación rectilínea (raio), sen necesidade de considerar o seu carácter electromagnético. O estudo do comportamento dun raio de luz, cando cruza as superficies de separación entre diferentes medios transparentes, homoxéneos e isótropos¹, é o que se coñece como **óptica xeométrica**.

Un conxunto de superficies, de forma xeométrica sinxela, que separan medios de distinto índice de refracción, forman o que se chama un **sistema óptico**. O **sistema óptico** máis simple é o **dioptro**: consiste en dous medios transparentes, homoxéneos e isótropos de distinto índice de refracción separados por unha soa superficie, que non reflicte a luz.

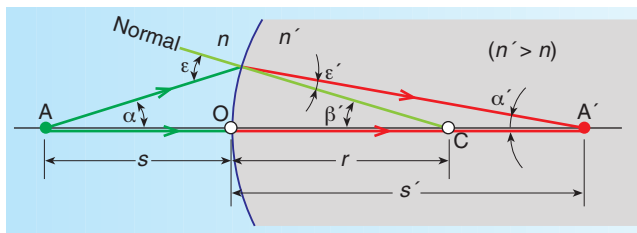
A óptica xeométrica supón que:

- Nos medios homoxéneos e isótropos, a luz se propaga en liña recta.
- Se cumpren as leis da reflexión e da refracción.
- O camiño seguido por un raio non depende do sentido en que se propague: se un raio parte de A e chega a C, pasando por B, se partise de C en dirección a B, chegaría a A.

2. NORMAS DIN

No estudo da óptica xeométrica necesitamos introducir un convenio de signos: nós seguiremos as normas DIN, que resumidas son:

- As figuras debúxanse de modo que a luz incidente procede da esquerda e propágase cara á dereita.
- As distancias represéntanse con letras minúsculas e os puntos con letras maiúsculas. Para os ángulos utilízanse letras gregas.
- Os símbolos (letras) que fan referencia á imaxe e ás magnitudes relacionadas con ela son os mesmos que os do obxecto, engadíndolle o signo “prima”.
 • A orixe de coordenadas é o vértice do dioptro (punto O) e o eixe OX é o eixe óptico.
- As distancias horizontais son positivas ou negativas segundo nos despracemos cara á dereita ou cara á esquerda, respectivamente, do vértice do sistema óptico: é como se o vértice estivera situado na orixe de coordenadas. Na figura, as distancias r e s' son positivas mentres que s é negativa.



¹ Un medio dise:

- Transparente cando deixa pasar a luz ao seu través.
- Homoxéneo cando ten a mesma composición en todos os puntos e
- Isótropo cando ten as mesmas propiedades en todas as direccións.

- As distancias verticais son positivas ou negativas segundo nos despracemos cara arriba ou cara abaixo, respectivamente, do eixe óptico.
- Os ángulos de incidencia, reflexión e refracción dun raio son positivos se para facer coincidir o raio coa normal á superficie polo camiño máis curto hai que xiralo no sentido horario. No caso contrario o ángulo é negativo. Os ángulos ε e ε' son positivos.
- O ángulo formado por un raio ou pola normal co eixe óptico é positivo se para facer coincidir o raio ou a normal sobre o eixe polo camiño máis curto hai que facer o xiro no sentido antihorario. No caso contrario, o ángulo é negativo. Así os ángulos β' e α' son positivos e o α é negativo.

3. DIOPTRO

O dioptro é o sistema óptico formado por unha soa superficie que non reflicte a luz (só a refracta) e separa dous medios transparentes, homoxéneos e isótropos, de distinto índice de refracción. Segundo a forma xeométrica da superficie, pode ser esférico ou plano.

3.1. Dioptro esférico

É un dioptro no que a superficie de separación dos dous medios ten a forma esférica.

O centro da superficie esférica á que pertence o dioptro é o **centro de curvatura** do dioptro, C, e o raio desta superficie é o **raio de curvatura** do dioptro, r . Segundo o signo do raio podemos falar do dioptro esférico cóncavo, $r < 0$, e convexo, $r > 0$. Este último é o que se representou na figura anterior.

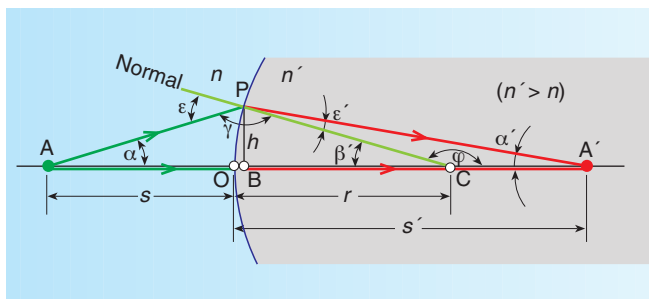
O eixe de simetría da superficie esférica é o **eixe do dioptro** ou **eixe óptico** e o punto de corte deste eixe coa superficie do dioptro é o chamado, **polo**, **centro óptico** ou **vértice do dioptro**, O. Calquera outra recta que pase polo centro de curvatura e corte á superficie esférica é un **eixe secundario**.

A distancia do punto obxecto, A, ao vértice do dioptro, O, é a **distancia obxecto**, s . A distancia do vértice do dioptro, O, ao punto imaxe, A', é a **distancia imaxe**, s' .

Ecuación fundamental do dioptro esférico

Para este estudo imos utilizar un casquete esférico de raio r , centro C e vértice O; que separa dous medios de índices de refracción n e n' , sendo $n' > n$.

Un punto luminoso A sobre o eixe óptico manda un raio AP, que forma un ángulo α co eixe do dioptro e refráctase seguindo o camiño PA' formando, tamén co eixe óptico, un ángulo α' . Se $n' > n$, o raio refractado aproxímase á normal e $\varepsilon' < \varepsilon$. O raio AO non sofre desviación



(é perpendicular á superficie esférica) e corta o raio PA' en A'; polo tanto, o punto A', punto no que ten lugar a intersección de dous raios refractados, é a imaxe de A.

Para simplificar os cálculos, consideramos que os raios luminosos son paraxiais. Neste caso os raios que interveñen na formación da imaxe están moi próximos ao eixe óptico (os raios e o eixe pódense considerar paralelos), cumpríndose que as distancias PB e OB son desprezables fronte a s , s' e r . En consecuencia, na zona paraxial, os senos e as tanxentes dos ángulos pódense substituír polo valor dos propios ángulos expresados en radiáns.

Aplicando a lei de Snell para a refracción resulta:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n'}{n} \rightarrow \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} = \frac{n'}{n} \rightarrow n \cdot \sin \varepsilon = n' \cdot \sin \varepsilon' \rightarrow n \cdot \varepsilon = n' \cdot \varepsilon'$$

Imos buscar a relación que liga o punto obxecto, A, co punto imaxe, A', coas características do dioptro.

Fixándonos na figura da páxina anterior podemos escribir as seguintes igualdades:

$$\left. \begin{array}{l} |\varepsilon'| + |\alpha'| + |\varphi| = 180^\circ \\ |\beta'| + |\varphi| = 180^\circ \end{array} \right\} \rightarrow |\varepsilon'| + |\alpha'| = |\beta'| \rightarrow \varepsilon' + \alpha' = \beta'$$

(Os tres ángulos son positivos).

$$\left. \begin{array}{l} |\alpha| + |\beta'| + |\gamma| = 180^\circ \\ |\varepsilon| + |\gamma| = 180^\circ \end{array} \right\} \rightarrow |\alpha| + |\beta'| = |\varepsilon| \rightarrow -\alpha + \beta' = \varepsilon$$

(α é negativo e β' e ε son positivos).

Combinando estas dúas últimas expresións coa lei de Snell resulta:

$$n \cdot (\beta' - \alpha) = n' \cdot (\beta' - \alpha')$$

Nos triángulos da figura e para raios paraxiais obtéñense as seguintes igualdades:

$$\text{tx } \alpha = h/s = \alpha; \quad \text{tx } \beta' = h/r = \beta'; \quad \text{tx } \alpha' = h/s' = \alpha'$$

Substituíndo estas igualdades na anterior ecuación resulta:

$$n \left(\frac{h}{r} - \frac{h}{s} \right) = n' \left(\frac{h}{r} - \frac{h}{s'} \right) \rightarrow n \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) = n' \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'} \right)$$

Esta ecuación coñécese como invariante de Abbe². Tamén a podemos escribir da forma:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}$$

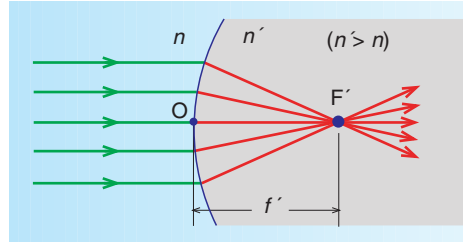
que é a **ecuación fundamental do dioptro esférico**. Permítenos relacionar a distancia obxecto coa distancia imaxe coñecendo as características do dioptro.

² Invariante de Abbe: **invariante** porque a expresión $n \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right)$ **non varía** ao escribirla no espazo obxecto ou cos datos correspondentes ao espazo imaxe, e de **Abbe** na honra do alemán Ernst Abbe.

Da ecuación anterior, válida para raios paraxiais, deducimos que a distancia imaxe, s' , é independente do ángulo que forma o raio incidente co eixe do dioptro, polo que todos os raios que saen dun punto obxecto, A, se xuntan nun mesmo punto imaxe, A'. O sistema óptico que cumpre esta condición coñécese como **estigmático**; en caso contrario o sistema chámase **astigmático**.

Focos e distancias focais

Cando un punto obxecto se encontra a unha distancia infinita ($s = -\infty$), os raios que chegan ao dioptro son paralelos ao eixe óptico e a imaxe fórmase nun punto do eixe, chamado **foco imaxe**, F', a unha distancia que se coñece como **distancia focal imaxe**, f' , e pódese obter substituíndo na ecuación fundamental os valores de $s = -\infty$ e $s' = f'$.



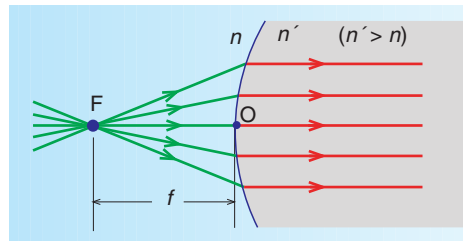
$$\frac{n'}{f'} - \frac{n}{-\infty} = \frac{n' - n}{r} \rightarrow f' = r \cdot \frac{n'}{n' - n}$$

Esta expresión dinos que:

- Se $r > 0$ e $n' > n$ se obtén que $f' > 0$: o foco imaxe, F', está á dereita do vértice do dioptro.
- Se $r > 0$ e $n' < n$ se obtén que $f' < 0$: o foco imaxe, F', está á esquerda do vértice do dioptro.

Análogas consideracións se poden facer para o caso de que o dioptro sexa cóncavo, $r < 0$.

O **foco obxecto**, F, é o punto do eixe de onde deben saír os raios para que unha vez que atravesen o dioptro saian paralelos ao eixe óptico, polo que $s' = \infty$. Á distancia entre o foco obxecto e o vértice do dioptro chámase **distancia focal obxecto**, f . Operando como para a distancia focal imaxe resulta:



$$\frac{n'}{\infty} - \frac{n}{f} = \frac{n' - n}{r} \rightarrow f = -r \cdot \frac{n}{n' - n}$$

Esta expresión dinos que:

- Se $r > 0$ e $n' > n$ se obtén que $f < 0$: o foco obxecto, F, está á esquerda do vértice do dioptro.
- Se $r > 0$ e $n' < n$ se obtén que $f > 0$: o foco obxecto, F, está á dereita do vértice do dioptro.

Análogas consideracións se poden facer para o dioptro cóncavo, $r < 0$.

Se se divide membro a membro as expresións da distancia focal imaxe e obxecto, obtense:

$$\frac{f'}{f} = -\frac{\frac{r \cdot n'}{n' - n}}{\frac{r \cdot n}{n' - n}} \rightarrow \frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$$

Esta expresión dinos que nun dioptro esférico as distancias focais obxecto e imaxe están na mesma relación que os índices de refracción dos dous medios.

Por outra parte, se sumamos as dúas distancias focais resulta:

$$f' + f = r \cdot \frac{n'}{n' - n} - r \cdot \frac{n}{n' - n} = r \cdot \left(\frac{n' - n}{n' - n} \right) \rightarrow f' + f = r$$

A suma das distancias focais obxecto e imaxe coincide co raio do dioptro.

Imos obter a expresión que relaciona as distancias focais coa distancia obxecto e a distancia imaxe. Empezamos dividindo a ecuación fundamental do dioptro por $(n' - n)/r$:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r} \rightarrow \frac{\frac{n'}{s'}}{\frac{n' - n}{r}} - \frac{\frac{n}{s}}{\frac{n' - n}{r}} = 1 \rightarrow \frac{r \cdot n'}{(n' - n) \cdot s'} - \frac{r \cdot n}{(n' - n) \cdot s} = 1$$

Agora relacionamos a expresión anterior con f e f' :

$$\left. \begin{aligned} \frac{r \cdot n'}{(n' - n) \cdot s'} - \frac{r \cdot n}{(n' - n) \cdot s} &= 1 \\ f' &= \frac{r \cdot n'}{n' - n} \\ f &= \frac{r \cdot n}{n' - n} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1$$

Esta expresión coñécese como nome de fórmula de Gauss (ou fórmula xeral do dioptro esférico).

Formación de imaxes

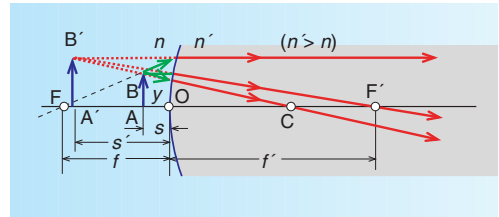
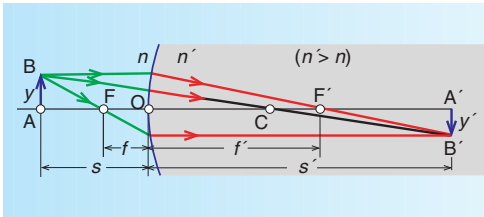
Coñecendo a intersección de dous raios refractados (ou a prolongación destes) orixinados por outros dous raios procedentes do extremo do obxecto, permítenos obter a súa imaxe. Para iso recordamos que:

- Todo raio que incide sobre o dioptro paralelo ao eixe óptico se refracta pasando polo foco imaxe, F' .
- Todo raio procedente do obxecto que pase polo foco obxecto, F , se refracta ao incidir sobre o dioptro, saíndo paralelo ao seu eixe.
- Todo raio que pasa polo centro de curvatura do dioptro, C , non se desvía ao ser perpendicular á súa superficie.

No punto onde se cortan os raios refractados é onde se forma a imaxe. Esta pode ser:

- Real: cando os raios refractados converxen nela, podendo ser recollida nunha pantalla colocada no plano da imaxe.

- Virtual: cando os raios refractados diverxen a partir dela, non podendo recorllerse nunha pantalla. Ao non cortarse os raios refractados temos que prolongalos no sentido contrario á súa propagación e o punto onde se cortan estas prolongacións é o punto imaxe.
- Dereita: cando a orientación da imaxe coincide coa do obxecto.
- Invertida: cando a imaxe está orientada en sentido contrario con respecto ao obxecto.



Cuestión teórica

- Estuda como é (positiva ou negativa) a distancia focal obxecto e a distancia focal imaxe dun dióptro esférico cónico de raio r , cando os raios luminosos van desde un medio de índice de refracción n a outro de índice de refracción n' , sendo $n' > n$.

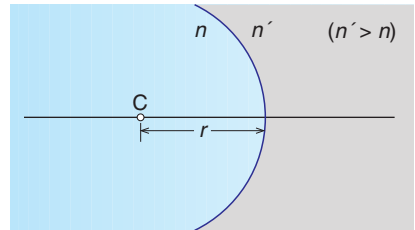
Indica, con respecto ao centro de curvatura, a situación (dereita ou esquerda) dos focos obxecto e imaxe e marca no eixe óptico unha posíbel situación dos mesmos.

Fai un estudo analítico de se a imaxe dun obxecto situado diante do vértice do dióptro e perpendicularmente ao eixe óptico é real ou virtual e constrúe graficamente a imaxe do obxecto.

Solución:

A distancia focal imaxe, f' , en función dos índices de refracción dos dous medios, n e n' , e do raio de curvatura do dióptro, r , é:

$$f' = r \frac{n'}{n' - n}$$



Como $r < 0$ e $n' > n$ resulta: $f' = -|r| \frac{n'}{|n' - n|} \rightarrow f' < 0$

Para a distancia focal obxecto, f , temos:

$$\left. \begin{array}{l} f = -r \frac{n}{n' - n} \\ r < 0 \\ n' > n \end{array} \right\} \rightarrow f = -(-|r|) \frac{n}{|n' - n|} \rightarrow f > 0$$

Para coñecer a posición do foco imaxe, F' , con respecto ao centro de curvatura relacionamos a distancia focal imaxe, f' , co raio de curvatura, r , recordando que:

$$f' = -|r| \frac{n'}{|n' - n|}$$

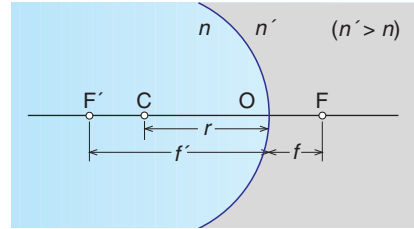
Como $|n' - n| < n'$, resulta que: $\frac{n'}{|n' - n|} > 1$ e $|f'| > |r|$.

Agora xa estamos en condicións de situar F' con respecto ao centro de curvatura, C .

A posición do foco obxecto obtémola a partir da relación:

$$f' + f = r \rightarrow f = r - f' \rightarrow f = (-|r|) - (-|f'|) \rightarrow f = |f'| - |r|.$$

Unha posíbel situación de F e F' é a que se indica na figura.



A imaxe é real ou virtual segundo se forme, respectivamente, pola converxencia dos raios refractados ou pola súa prolongación. Para facer este estudo escribimos a ecuación fundamental dos dioptros:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r} \rightarrow \frac{n'}{s'} = \frac{n' - n}{r} + \frac{n}{s} \rightarrow s' = \frac{n' \cdot r \cdot s}{s \cdot (n' - n) + r \cdot n}$$

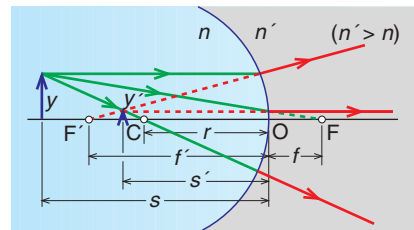
onde s é a distancia obxecto e s' é a distancia imaxe.

$$s' = \frac{n' \cdot (-|r|) \cdot (-|s|)}{(-|s| \cdot |n' - n|) + (-|r|) \cdot n} \rightarrow s' = - \frac{n' \cdot |r| \cdot |s|}{|s| \cdot |n' - n| + |r| \cdot n}$$

Como s' é negativa, **a imaxe** formada polo dioptro que nos ocupa é sempre **virtual**.

A construción gráfica da imaxe realízase buscando a intersección de polo menos dous raios de traxectoria coñecida, despois de que se refracten na superficie do dioptro:

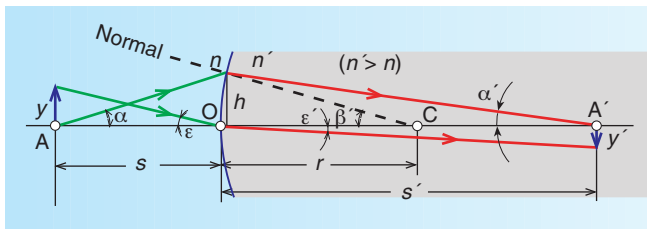
- A prolongación do raio refractado, que corresponde ao raio que incide paralelamente ao eixe óptico, pasa polo foco imaxe, F' .
- O raio refractado que emerge paralelamente ao eixe óptico correspóndese co raio incidente cuxa dirección pasa polo foco obxecto do dioptro, F .



- O raio que pasa polo centro óptico do dioptro non sofre desviación.

Aumento lateral e aumento angular

Se y é o tamaño do obxecto e y' é o tamaño da imaxe, y'/y é o chamado **aumento lateral**, A_L . Imos escribir esta relación en función dos índices de refracción e das distancias obxecto e imaxe.



Da figura sacamos:

$$\text{tx } \varepsilon = \frac{y}{s} \quad \text{e} \quad \text{tx } \varepsilon' = \frac{y'}{s'}$$

Recordando que para raios paraxiais a tanxente dun ángulo coincide co seno dese ángulo, podemos escribir:

$$\text{sen } \varepsilon = \frac{y}{s} \quad \text{e} \quad \text{sen } \varepsilon' = \frac{y'}{s'}$$

Con estas igualdades e a lei de Snell resulta:

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen } \varepsilon = \frac{y}{s} \\ \text{sen } \varepsilon' = \frac{y'}{s'} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\text{sen } \varepsilon}{\text{sen } \varepsilon'} = \frac{\frac{y}{s}}{\frac{y'}{s'}} = \frac{y \cdot s'}{y' \cdot s} \\ \frac{\text{sen } \varepsilon}{\text{sen } \varepsilon'} = \frac{n'}{n} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{y \cdot s'}{y' \cdot s} = \frac{n'}{n} \rightarrow \frac{s' \cdot n}{s \cdot n'} = \frac{y'}{y} \\ A_L = \frac{y'}{y} \end{array} \right\} \rightarrow A_L = \frac{n \cdot s'}{n' \cdot s}$$

Chámase **aumento angular** á relación entre o ángulo α' que forma o raio emerxente co eixe óptico e o ángulo α que forma o correspondente raio incidente co eixe óptico.

Na figura anterior, e para raios paraxiais, deducimos:

$$\text{tx } \alpha = \frac{h}{s} = \text{sen } \alpha = \alpha$$

$$\text{tx } \alpha' = \frac{h}{s'} = \text{sen } \alpha' = \alpha'$$

Dividindo membro a membro as igualdades anteriores temos:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\frac{h}{s}}{\frac{h}{s'}} = \frac{s'}{s} \rightarrow \text{aumento angular} = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{s}{s'}$$

Relacionando o aumento lateral co aumento angular resulta:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{y'}{y} = \frac{s' \cdot n}{s \cdot n'} \\ \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{s}{s'} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{n}{n'} \rightarrow y' \cdot \alpha' \cdot n' = y \cdot \alpha \cdot n$$

Esta é a ecuación de Helmholtz e dinos que o produto $y \cdot \alpha \cdot n$ é constante para os distintos medios³.

³ A expresión $y \cdot n \cdot \alpha$ toma a mesma forma no espazo obxecto e no espazo imaxe, coñecendo-se como invariante de Lagrange-Helmholtz.

- Un dioptro esférico convexo de 40 cm de raio separa dous medios transparentes, aire e auga. Calcula: a) as distancias focais imaxe e obxecto; b) a distancia á que se forma a imaxe dun obxecto de 2 cm de altura, situado no aire e perpendicularmente ao eixe do dioptro e á distancia de 180 cm do seu vértice e comenta se se trata dunha imaxe real ou virtual; e c) o aumento lateral e angular. Fai a construción gráfica da marcha dos raios, obtendo a imaxe. Datos: $n_{\text{aire}} = 1$, $n_{\text{auga}} = 4/3$.

Solución:

Segundo o convenio de signos, os datos do enunciado son: $r = +40$ cm; $y = +2$ cm; $s = -180$ cm.

$$a) f' = r \cdot \frac{n'}{n' - n} \rightarrow f' = 0,40 \cdot \frac{4/3}{4/3 - 1} = 1,6 \text{ m}$$

$$f = -r \cdot \frac{n}{n' - n} \rightarrow f = -0,40 \cdot \frac{1}{4/3 - 1} = -1,2 \text{ m}$$

O signo menos da distancia focal obxecto dinos que o foco obxecto está á esquerda do vértice do dioptro.

Podemos comprobar que:

- A suma das distancias focais obxecto e imaxe coincide co raio do dioptro:

$$f' + f = 1,6 + (-1,2) = 0,4 \text{ m} = r$$

- A distancia focal obxecto e imaxe gardan a relación dos índices de refracción dos dous medios que forman o dioptro:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{f'}{f} = \frac{1,6}{-1,2} = -1,33 \\ \frac{n'}{n} = \frac{4/3}{1} = 1,33 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$$

- b) Utilizando a ecuación fundamental do dioptro esférico calcúlase a distancia imaxe:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{(n' - n)}{r} \rightarrow s' = \frac{n'}{\frac{n}{s} + \frac{n' - n}{r}} \rightarrow s' = \frac{4/3}{\frac{1}{-1,80} + \frac{4/3 - 1}{0,40}} = 4,8 \text{ m}$$

A distancia imaxe, s' , é positiva, formándose a imaxe á dereita do vértice do dioptro, sendo real.

Tamén podemos calcular a distancia imaxe coa fórmula de Gauss:

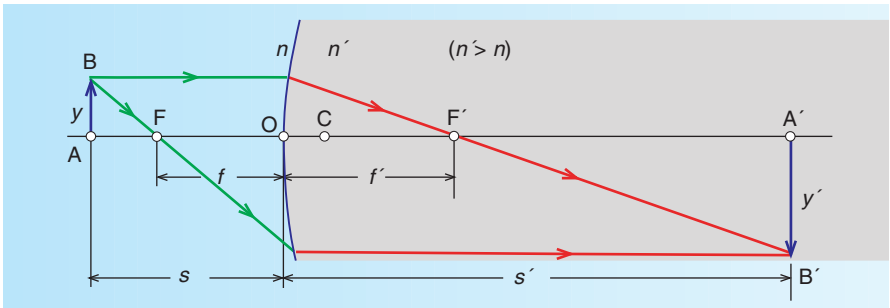
$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1 \rightarrow \frac{1,6}{s'} + \frac{-1,2}{-1,80} = 1 \rightarrow s' = 4,8 \text{ m}$$

$$c) \text{ Aumento lateral} = \frac{y'}{y} = \frac{s' \cdot n}{s \cdot n'} \rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{4,80 \cdot 1}{-1,80 \cdot 4/3} \rightarrow \frac{y'}{y} = -2$$

O signo negativo do aumento lateral indica que a imaxe é invertida e o valor 2 dinos que a imaxe é de dobre tamaño que o obxecto.

$$\text{Aumento angular} = \frac{s}{s'} = \frac{-1,80}{4,80} = -0,375$$

A marcha dos raios e a formación da imaxe é a que se indica na seguinte figura:



3.2. Dioptrio plano

É toda superficie plana que separa dous medios transparentes, homoxéneos e isotropos, de distinto índice de refracción, que refracta a luz sen reflectila. Pode considerarse como un caso particular do dioptrio esférico de raio infinito.

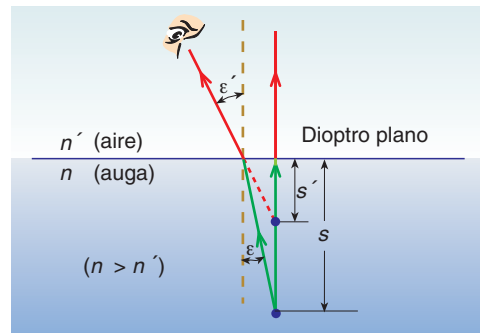
A **ecuación fundamental** obtémola facendo, na ecuación fundamental do dioptrio esférico, $r = \infty$:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{\infty} \rightarrow \frac{n'}{s'} = \frac{n}{s}$$

Con esta fórmula podemos calcular a distancia imaxe en función da distancia obxecto e os índices de refracción de ambos medios:

$$s' = \frac{n' \cdot s}{n}$$

Se $n > n'$; por exemplo ao observar desde o aire un obxecto mergullado na auga, resulta que $s' < s$ e, en consecuencia, a profundidade aparente do obxecto é menor que a real.



Exercicio resolto

- No fondo dunha piscina de 2,5 m de profundidade hai un obxecto. Calcula a distancia á que nos parece que este obxecto se encontra con respecto á superficie da auga. Dato: $n_{\text{auga}} = 4/3$.

Solución:

Os raios de luz proceden do interior da auga, sendo esta o primeiro medio e o aire o segundo, co que: $n = 4/3$ e $n' = 1$. Se o observador fose un submarinista e mirase un obxecto de fóra da auga, os índices de refracción serían: $n = 1$ e $n' = 4/3$.

A ecuación fundamental do dioptro plano dinos que: $\frac{\text{Profundidade aparente, } s'}{\text{Profundidade real, } s} = \frac{n'}{n}$.

$$s' = \frac{n' \cdot s}{n} \rightarrow s' = \frac{1 \cdot (-2,5)}{4/3} \rightarrow s' = -1,9 \text{ m}$$

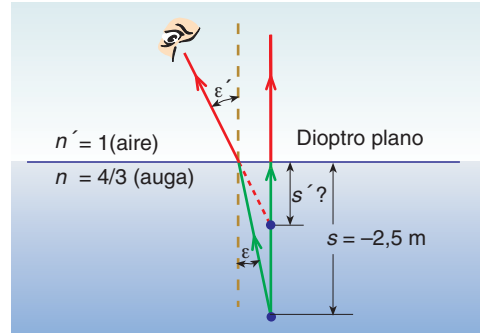
(Nota: $s = -2,5$ m porque o obxecto está, con respecto á superficie de separación dos dous medios, do lado de onde proceden os raios).

O observador que mira o obxecto que está mergullado na auga ve a súa imaxe virtual a unha distancia da superficie da auga inferior á distancia real.

Graficamente obtemos a imaxe mediante dous raios, que son:

- Un incide perpendicularmente á superficie de separación dos dous medios: auga-aire.
- Outro incide cunha certa inclinación, refractándose segundo a lei de Snell.

Como estes dous raios diverxen, as súas prolongacións córtanse nun punto, que é onde vemos a imaxe do obxecto.



Distancias focais

Substituíndo $r = \infty$ nas ecuacións correspondentes do dioptro esférico obtéñense as **distancias focais obxecto e imaxe**:

$$f = \frac{\infty \cdot n}{n' - n} = -\infty \text{ e } f' = \frac{\infty \cdot n'}{n' - n} = \infty, \text{ sendo: } |f| = |f'| = \infty.$$

En consecuencia, todo raio paralelo ao eixe óptico do dioptro plano dá lugar a outro raio paralelo ao eixe, xa que é perpendicular á superficie do dioptro.

Para o **aumento lateral** resulta:

$$\left. \begin{aligned} \frac{y'}{y} &= \frac{s' \cdot n}{s \cdot n'} \\ \frac{s}{s'} &= \frac{n}{n'} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{y'}{y} = 1$$

As imaxes producidas no dioptro plano, para raios paraxiais, son de igual tamaño que o obxecto.

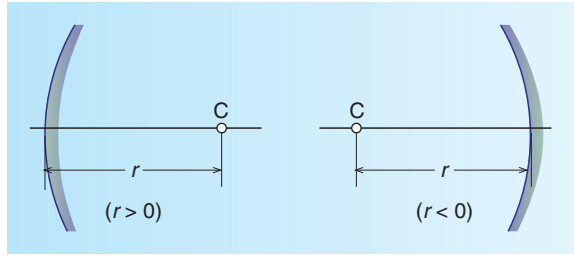
4. ESPELLOS

Un espello é unha superficie pulida que pode reflectir os raios luminosos. Segundo a forma xeométrica desta superficie temos os espellos planos, esféricos, parabólicos etc.

4.1. Espellos esféricos

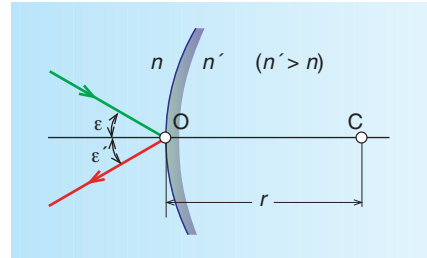
A forma xeométrica destes espellos é a dun casquete esférico e pode ser:

- Convexo, se o raio de curvatura é positivo ($r > 0$): a reflexión ten lugar na superficie externa do espello.
- Cóncavo, se o raio de curvatura é negativo ($r < 0$): a reflexión ten lugar na superficie interior do espello.



Co criterio de signos DIN para os ángulos, temos que $\varepsilon = -\varepsilon'$ e podemos considerar a reflexión como un caso particular da refracción:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\text{sen } \varepsilon}{\text{sen } \varepsilon'} = \frac{n'}{n} \\ \varepsilon = -\varepsilon' \end{array} \right\} \rightarrow \frac{\text{sen } \varepsilon}{\text{sen } (-\varepsilon)} = \frac{n'}{n} \rightarrow n' = -n$$



Para os espellos esféricos pódense aplicar as fórmulas do dioptro esférico, considerando que $n' = -n$, xa que a luz ao reflectirse cambia de sentido pero non de medio.

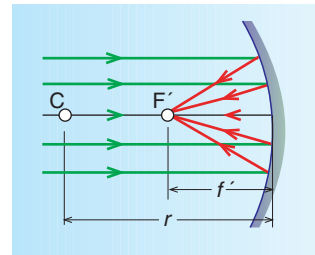
Ecuación fundamental e distancia focal

Cambiando n' por $-n$ na ecuación fundamental do dioptro esférico resulta:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r} \\ n' = -n \end{array} \right\} \rightarrow \frac{-n}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{-n - n}{r} \rightarrow \frac{-n}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{-2n}{r} \rightarrow \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r}$$

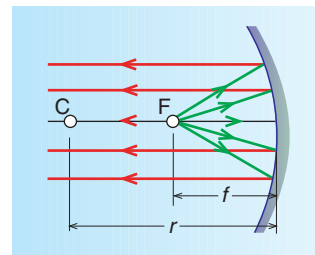
Cando un punto obxecto se encontra a unha distancia infinita ($s = -\infty$), os raios que chegan ao espello son paralelos ao eixe óptico e a imaxe fórmase nun punto do eixe, chamado **foco imaxe**, F' , a unha distancia que se coñece como **distancia focal imaxe**, f' , e pódese obter substituíndo na ecuación fundamental os valores de $s = -\infty$ e $s' = f'$.

$$\frac{1}{f'} + \frac{1}{-\infty} = \frac{2}{r} \rightarrow \frac{1}{f'} = \frac{2}{r} \rightarrow f' = \frac{r}{2}$$



O **foco obxecto**, F , é o punto do eixe de onde deben saír os raios para que unha vez reflectidos no espello saian paralelos ao eixe óptico, polo que $s' = -\infty$ e $s = f$.

$$\frac{1}{-\infty} + \frac{1}{f} = \frac{2}{r} \rightarrow \frac{1}{f} = \frac{2}{r} \rightarrow f = \frac{r}{2}$$



Vemos que nos espellos esféricos a distancia focal obxecto coincide coa distancia focal imaxe, polo que se considera unha soa distancia focal. O seu valor é: $f' = f = r/2$.

Con este novo resultado, a ecuación fundamental dos espellos esféricos escrita en función da distancia focal é:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} &= \frac{2}{r} \\ f &= \frac{r}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

Aumento lateral

A partir da expresión do aumento lateral dos dioptrós esféricos obtemos a correspondente magnitude para os espellos esféricos.

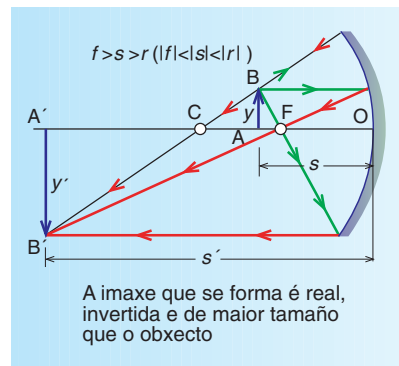
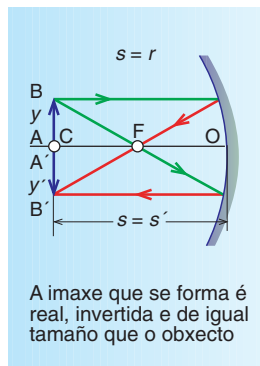
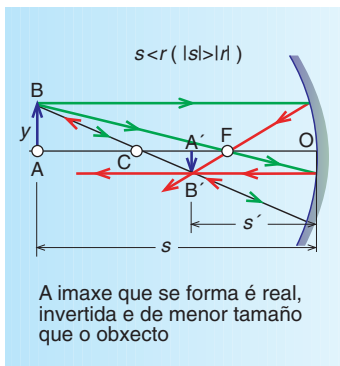
$$\left. \begin{aligned} \frac{y'}{y} &= \frac{s' \cdot n}{s \cdot n'} \\ n' &= -n \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{s' \cdot n}{s \cdot (-n)} \rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

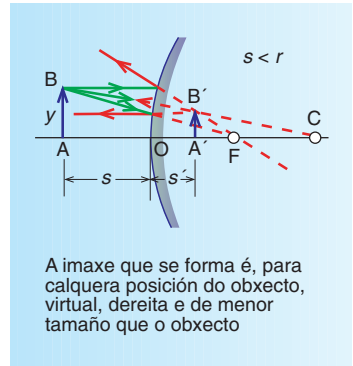
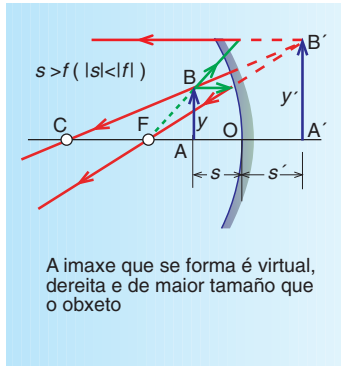
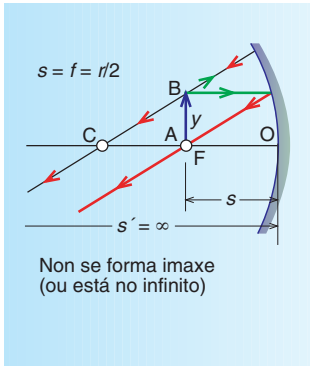
Formación de imaxes

Para a construción gráfica das imaxes obtidas nos espellos esféricos seguiremos o procedemento utilizado no dioptró esférico. Recordaremos que:

- Un raio que incide paralelo ao eixe óptico, ao reflectirse no espello, pasa (el ou a súa prolongación) polo foco, F.
- Un raio que pasa (el ou a súa prolongación) polo foco do espello, F, reflíctese paralelamente ao eixe óptico.
- Un raio que pasa (el ou a súa prolongación) polo centro de curvatura do espello, C, reflíctese na mesma traxectoria orixinal, sen sufrir desviación xa que incide perpendicularmente sobre a superficie do espello.

Trazando dous raios dos anteriores que partan do obxecto, obtense a imaxe. O tamaño, posición e natureza (real ou virtual) da imaxe depende do tipo de espello e da posición que ocupa o obxecto sobre o eixe óptico.





Exercicio resolto

- ▶ Diante dun espello cóncavo de raio de curvatura 90 cm, colócase un obxecto de 2 cm de alto, perpendicularmente ao eixe óptico do espello, á distancia de 60 cm. Calcula: a) a distancia focal; b) a posición da imaxe; c) o tamaño da imaxe. Fai a construción gráfica da imaxe.

Solución:

Segundo o convenio de signos temos: $r = -90$ cm; $s = -60$ cm e $y = 2$ cm.

- a) A distancia focal do espello calculámola a partir da súa relación co raio de curvatura: $f = r/2$.

$$f = \frac{-90}{2} = -45 \text{ cm}$$

- b) A distancia imaxe obtémola a partir da fórmula xeral dos espellos esféricos.

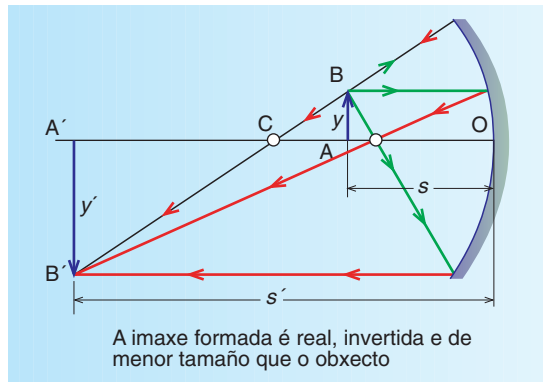
$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{s'} + \frac{1}{-60} = \frac{1}{-45} \rightarrow s' = -180 \text{ cm}$$

- c) A partir do aumento lateral calculamos o tamaño da imaxe:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \rightarrow \frac{y'}{2} = -\frac{-180}{-60} = -3 \rightarrow y' = y \cdot (-3) \rightarrow y' = 2 \cdot (-3) = -6 \text{ cm}$$

A relación $\frac{y'}{y} = -3$ indícanos que o tamaño da imaxe é 3 veces maior que o do obxecto e o signo menos “-” dinos que a imaxe é invertida.

A construción gráfica da imaxe do espello obtémola buscando a intersección de dous raios de traxectoria coñecida, despois de que se reflicten no espello, como se ve na figura.



4.2. Espellos planos

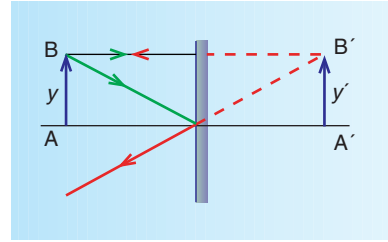
Nos espellos planos a superficie de reflexión é plana.

Pódense considerar como un caso particular dos espellos esféricos de raio infinito. Con esta consideración, a **ecuación fundamental** obtense substituíndo na ecuación fundamental dos espellos esféricos o raio r polo valor de infinito (∞).

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} &= \frac{2}{r} \\ r &= \infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = 0 \rightarrow s = -s' \text{ (imaxe virtual)}$$

O aumento lateral dos espellos planos é igual á unidade:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} = 1$$



5. SISTEMAS ÓPTICOS CENTRADOS

Cando un sistema óptico está formado por varias superficies que separan medios de distintos índices de refracción, dise que o sistema óptico é composto. Se as superficies están dispostas de maneira que os seus centros de curvatura estean situados nunha mesma liña recta, dise que o **sistema óptico é centrado**. Se algúnha das superficies é plana (esfera de raio infinito), estarían situadas normalmente na recta que une os centros de curvatura, que é o eixe óptico do sistema.

Nun sistema óptico centrado, coñecidos os focos e os planos principais, resulta fácil trazar a marcha dos raios luminosos.

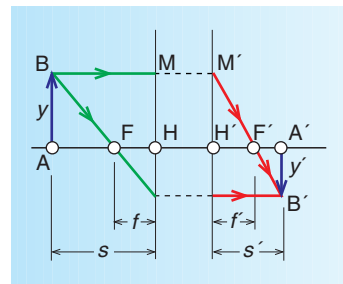
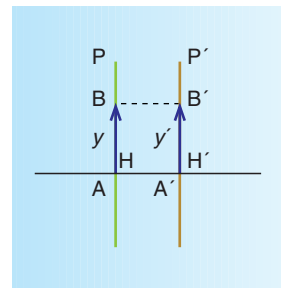
Foco obxecto, F, é o punto do eixe onde partirán os raios luminosos para que, unha vez atravesado o sistema óptico, saian paralelos ao eixe.

Foco imaxe, F', é o punto do eixe onde converxen aqueles raios que chegan ao sistema óptico paralelos ao eixe óptico.

Os puntos conjugados, H e H', sobre o eixe óptico para os que o aumento lateral é igual a +1 reciben o nome de **puntos principais**. Os dous planos perpendiculares ao eixe óptico, P e P', que pasan polos puntos principais, coñécense como **planos principais**.

Nun sistema óptico centrado, todo raio que chegue a un dos planos principais nun punto situado a unha distancia do eixe óptico emerxe do outro plano dun punto situado á mesma distancia do devandito eixe xa que, segundo as propiedades dos planos principais, a imaxe de MH é M'H'.

As distancias mídense a partir dos puntos principais, H e H'.



5.1. Lentes delgadas

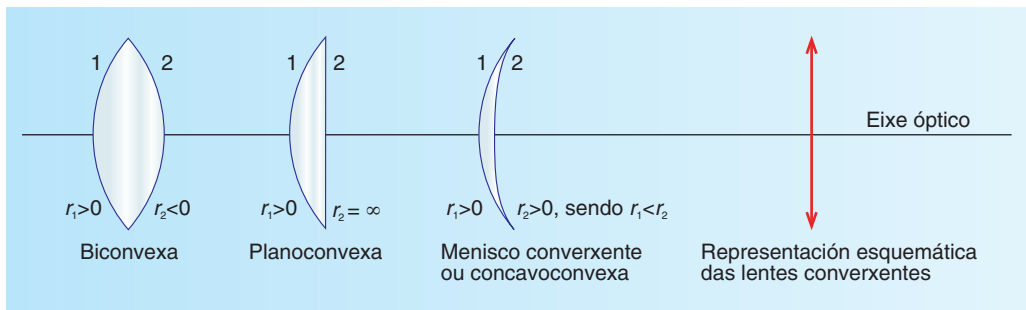
Unha **lente** é un sistema óptico centrado formado por dous dioptros, dos cales un, polo menos, acostuma ser esférico e os medios extremos posúen o mesmo índice de refracción.

Se o grosor da lente é desprezábel en comparación cos raios de curvatura dos dioptros que a forman, recibe o nome de **lente delgada**. Nestas lentes os planos principais coinciden e cortan ao eixe óptico no centro óptico (que é o centro xeométrico da lente).

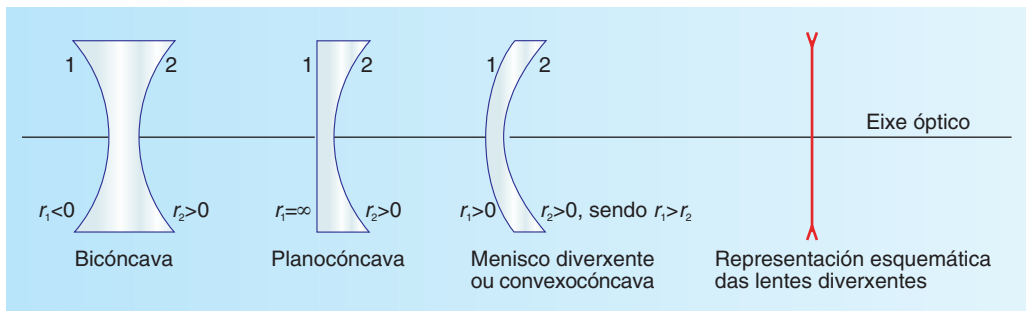
Se o grosor da lente non é desprezábel, temos o que se coñece como **lente grossa**.

Atendendo á forma das superficies que constitúen os dioptros, as lentes poden ser:

Converxentes: Fan converxer nun punto, chamado foco imaxe, F' , os raios incidentes paralelos ao eixe óptico. Son máis grosas no centro que nas beiras. Esquemáticamente representáanse por unha liña con puntas de frecha nos extremos que figuran a iniciación das superficies esféricas. Segundo o valor dos raios dos dioptros que forman a lente, esta pode ser biconvexa, planoconvexa e menisco converxente, tamén chamada cóncavoconvexa.



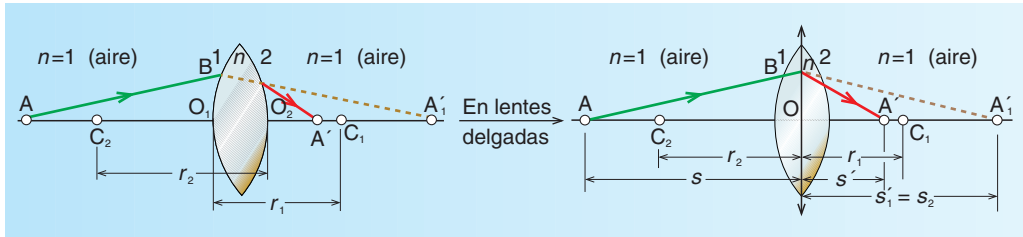
Diverxentes: Fan diverxer os raios incidentes, sendo as prolongacións dos raios emerxentes, que corresponden cos raios incidentes paralelos ao eixe óptico, as que conflúen no foco imaxe, F' . Son máis delgadas na parte central que nos extremos. Esquemáticamente representáanse por unha liña recta acabada en puntas de frecha invertidas. Segundo o valor dos raios dos dioptros que forman a lente, esta poder ser bicóncava, planocóncava e menisco diverxente, tamén chamada convexocóncava.



Ecuación fundamental

Para lentes delgadas, a distancia entre os polos dos dioptrós que a forman, O_1O_2 , é desprezável.

Consideramos que a lente está formada por un medio transparente de índice de refracción n e que está situada no aire de índice de refracción 1.



O raio que parte de A e chega a B, ao refractarse na primeira superficie, pasaría por A_1' , sendo A_1' a imaxe de A producida por esta superficie refractora.

Cando o raio refractado na primeira superficie chega á segunda das superficies sofre unha segunda refracción, pasando por A' . Nesta segunda refracción podemos considerar que a imaxe que forma o primeiro dioptro é o obxecto (virtual) para o segundo.

Para obter a ecuación fundamental aplicamos dúas veces a fórmula do dioptro esférico,

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{(n' - n)}{r},$$

tendo en conta que:

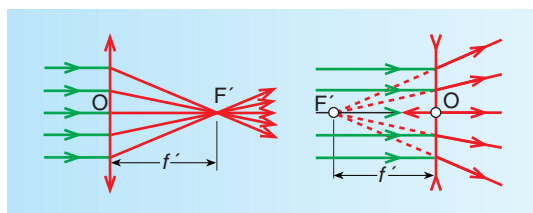
- No primeiro dioptro, o raio vai desde o aire de $n=1$ até a lente de $n'=n$. No segundo resulta: $n=n$ e $n'=1$, xa que agora o raio pasa da lente ao aire.
- A distancia imaxe do primeiro dioptro, s_1' , é a distancia obxecto para o segundo: $s_1' = s_2$.

$$\left. \begin{aligned} \frac{n}{s_1'} - \frac{1}{s} &= \frac{n-1}{r_1} \\ \frac{1}{s'} - \frac{n}{s_1'} &= \frac{1-n}{r_2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

sendo s a distancia obxecto e s' a distancia imaxe, con respecto á lente.

Focos e distancias focais

Cando un punto obxecto se encontra a unha distancia infinita ($s = -\infty$) da lente, os raios propáganse paralelamente ao eixe óptico e a imaxe fórmase nun punto



do eixe, chamado **foco imaxe**, F'^4 , a unha distancia que se coñece como **distancia focal imaxe**, f' . O seu valor obtense substituíndo na ecuación fundamental os valores $s = -\infty$ e $s' = f'$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} &= (n-1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ s &= -\infty \\ s' &= f' \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{1}{f'} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

De forma análoga, o **foco obxecto**, F , dunha lente é o punto do eixe de onde deben saír os raios para que unha vez que atravesen a lente emerxan paralelos ao eixe óptico, polo que $s' = \infty$. A distancia entre o foco obxecto e a lente chámase **distancia focal obxecto**, f . Operando como para a distancia focal imaxe resulta:

$$-\frac{1}{f} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Comparando as expresións das dúas distancias focais resulta: $f = -f'$.

En función das distancias focais, a ecuación fundamental das lentes delgadas, situadas no aire, pode escribirse da forma:

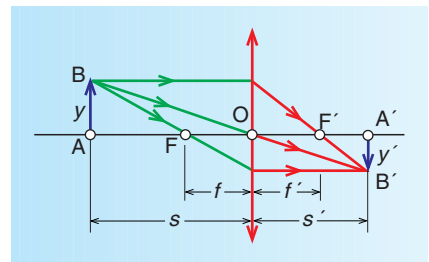
$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f} \rightarrow \frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1$$

A última expresión coincide coa fórmula xeral do dioptro esférico.

Aumento lateral

O aumento lateral dunha lente é a relación que existe entre o tamaño da imaxe e o tamaño do obxecto: y'/y . Pódese obter observando que os triángulos OAB e $OA'B'$ da figura son semellantes, polo que:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$



Potencia

A potencia dunha lente é a inversa da súa distancia focal imaxe: $P = \frac{1}{f'}$. Se a distancia

focal imaxe, f' , se mide en metros, a unidade da potencia é m^{-1} e coñécese co nome de **dioptría**. Unha dioptría é a potencia dunha lente que ten unha distancia focal imaxe de 1 m.

⁴ Este foco, a igual que o foco obxecto, é específico da lente e non coincide cos focos dos dioptros que a forman.

O signo da potencia é o mesmo que o da distancia focal imaxe, polo que a potencia dunha lente converxente é positiva, $P > 0$, e a dunha lente diverxente é negativa, $P < 0$.

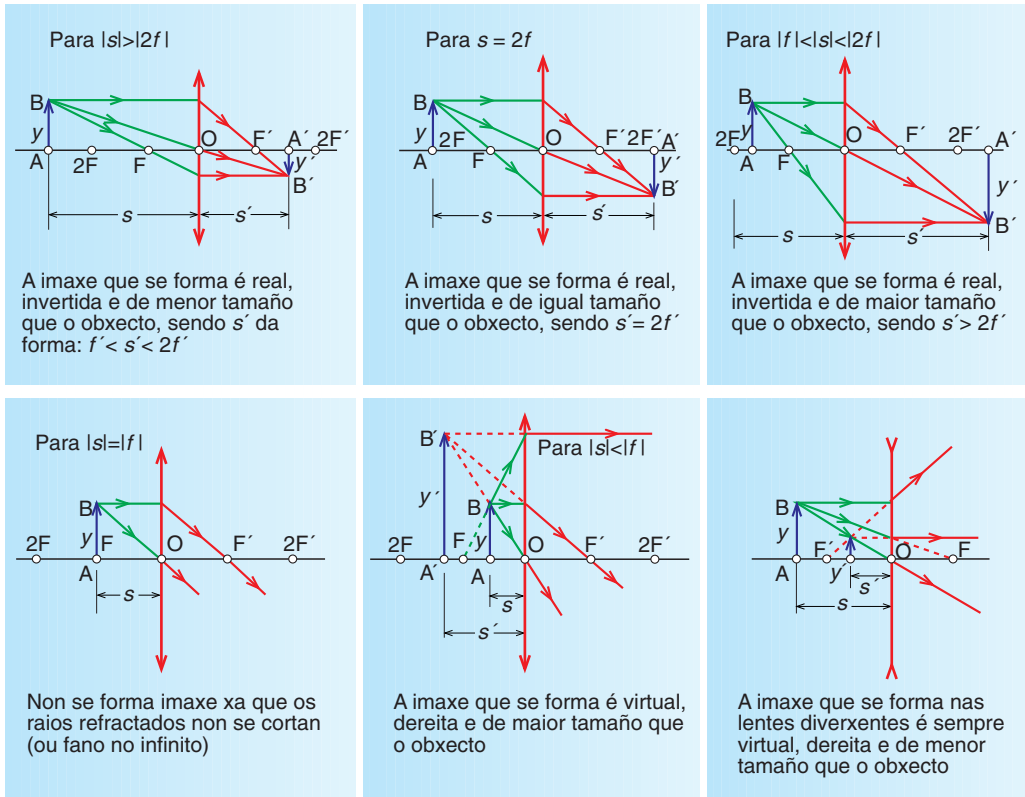
A potencia de varias lentes delgadas que están en contacto é igual á suma da potencia de cada lente: $P = P_1 + P_2 + \dots$

Construción de imaxes

A construción gráfica da imaxe dunha lente realízase buscando a interxección de polo menos dous raios de traxectoria coñecida, despois de que se refracten na lente. Para iso debemos recordar que:

- Todo raio que chega paralelamente ao eixe óptico, despois de refractarse na lente, pasa, o propio raio ou a súa prolongación, polo foco imaxe, F' .
- Todo raio que pase polo foco obxecto, F , e se refracte na lente, emerxe paralelo ao eixe óptico.
- Todo raio que pase polo centro óptico (centro xeométrico) da lente delgada non sofre desviación.

A construción gráfica da imaxe dun obxecto vén dada pola intersección de dous dos raios anteriores (imaxe real) ou das súas prolongacións (imaxe virtual).



- Unha lente delgada bicóncava ten un índice de refracción $n = 1,5$ e os seus raios de curvatura miden 6 cm e 4 cm. Calcula: a) a súa distancia focal; b) a posición da imaxe dun obxecto de 2,5 cm de altura situado perpendicularmente ao eixe óptico a unha distancia de 8 cm da lente; c) o tamaño e natureza da imaxe. Fai a construción gráfica da imaxe.

Solución:

Segundo o convenio de signos, os datos do problema son: $y = +2,5$ cm; $s = -8$ cm; $r_1 = -6$ cm; $r_2 = +4$ cm.

- a) Para calcular a distancia focal imaxe aplicamos a ecuación

$$\frac{1}{f'} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \rightarrow \frac{1}{f'} = (1,5-1) \cdot \left(\frac{1}{-6} - \frac{1}{4} \right) \rightarrow f' = -4,8 \text{ cm}$$

O signo menos da distancia focal imaxe indica que a lente é diverxente.

$$-\frac{1}{f} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \rightarrow -\frac{1}{f} = (1,5-1) \cdot \left(\frac{1}{-6} - \frac{1}{4} \right) \rightarrow f = 4,8 \text{ cm}$$

Vemos como a distancia focal obxecto e imaxe gardan a relación $f = -f'$. Por esta razón, nas fórmulas das lentes, a súa distancia focal represéntase por f' .

b)
$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \rightarrow \frac{1}{-4,8} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{-8} \rightarrow s' = -3 \text{ cm}$$

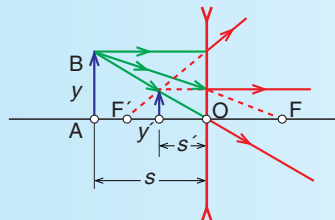
- c) O tamaño da imaxe obtémolo a partir do aumento lateral:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow \frac{y'}{2,5} = \frac{-3}{-8} \rightarrow y' = 0,94 \text{ cm}$$

A imaxe formada é:

- Virtual, $s' = -3$ cm: a imaxe do obxecto non se forma pola intersección dos raios refractados senón que se forma pola intersección das súas prolongacións e
- De menor tamaño que o obxecto, $y' < y$.

A construción gráfica da imaxe da lente obtémola buscando a intersección de dous raios (ou das súas prolongacións) de traxectoria coñecida, despois de que refracten na lente.



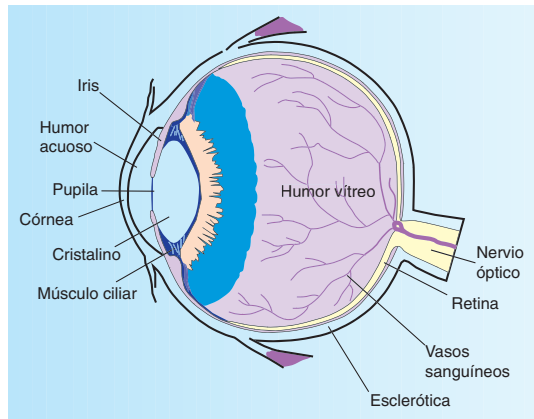
A imaxe formada é virtual, dereita e de menor tamaño que o obxecto

6. INSTRUMENTOS ÓPTICOS

Os instrumentos ópticos son asociacións de sistemas ópticos, entre os que se encontran: o ollo humano, a lupa, o microscópico, o anteollo, ..., que estudamos a continuación.

6.1. O ollo humano

É o instrumento óptico por excelencia. Ten forma aproximadamente esférica, cun diámetro duns 3 cm. A membrana exterior que o rodea recibe o nome de **esclerótica**. É de aspecto abrancazado e opaco, excepto na súa parte anterior central, denominada **córnea**, que é transparente e dá paso a unha lente converxente biconvexa, chamada **crystalino**, cun índice de refracción de 1,44.

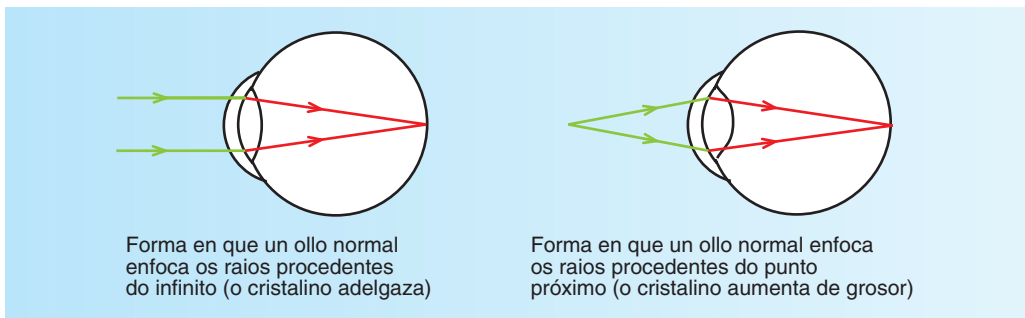


Esta lente divide o ollo en dúas partes: o **humor acuoso**, que está na parte anterior, e o **humor vítreo**, que está na parte posterior. Ambos humores teñen un índice de refracción semellante ao da auga, 1,33.

A cantidade de luz que entra no ollo régúlase cun diafragma coloreado, chamado **iris**, que é o responsábel da cor dos ollos, e no seu centro está a **pupila**, de forma circular e de tamaño variábel, segundo a intensidade da luz.

A capa máis interna e profunda do ollo recibe o nome de **retina** e é onde se forma a imaxe dos obxectos observados, transmitíndose a información visual ao cerebro mediante o **nervio óptico** (a retina vén sendo a continuación do nervio óptico, que vén do cerebro).

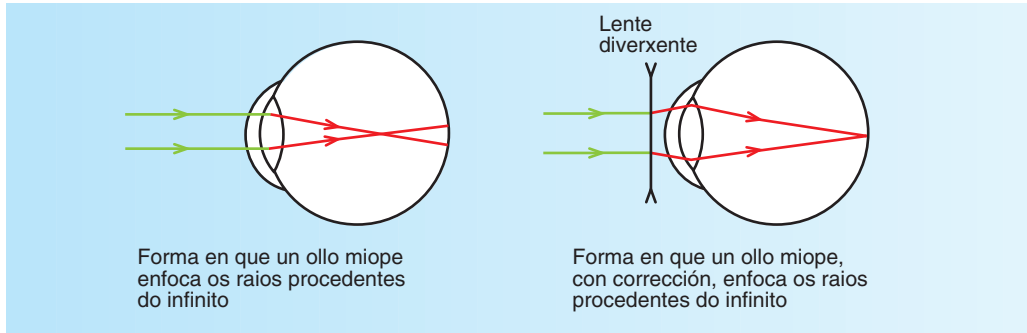
Para que a imaxe dun obxecto que se ve se forme na superficie da retina, os **músculos ciliares** cambian o grosor e a forma do cristalino, variando a súa distancia focal. Este axuste é o que se coñece como **acomodación**. Un ollo normal en canto á súa converxencia, chamado **emétrope**, en idade adulta pode acomodar obxectos situados desde unha distancia de 25 cm⁵, posición coñecida como **punto próximo**, até o infinito (**punto remoto**).



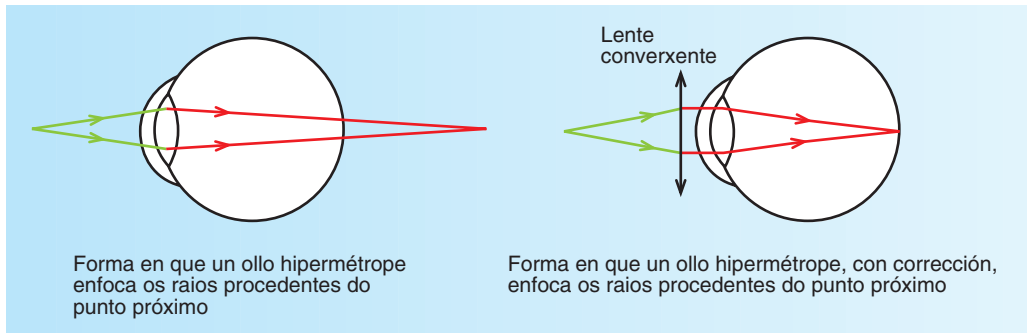
⁵ Esta distancia, para un neno de 10 anos, é duns 7 cm e a partir dos 45 anos vaixe afastando dos 25 cm.

Se o ollo non ten este intervalo de acomodación non é normal en canto á súa converxencia e dise que é **amétrope**. Entre os defectos máis comúns están:

Miopía. Nun ollo miope, a imaxe dun obxecto distante fórmase diante da retina, non sendo nítida. Débese a que a potencia do cristalino é excesiva para a profundidade do ollo. O punto remoto e próximo están máis cerca do normal e para que a imaxe a través do cristalino se sitúe na retina do ollo hai que usar lentes esféricas diverxentes.



Hipermetropía. Nun ollo hipermétrope, a imaxe dun obxecto próximo fórmase detrás da retina, non sendo nítida. Débese a que a potencia do cristalino é pequena para o demasiado curto que é o globo ocular. O punto próximo está máis lonxe do normal e para que a imaxe a través do cristalino se sitúe na retina do ollo hai que usar lentes esféricas converxentes.



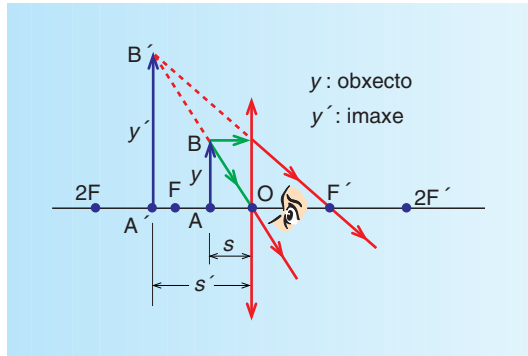
Presbicia ou vista cansada. Polo xeral, aparece a partir dos 45 anos e consiste na perda de capacidade de acomodación debido á fatiga dos músculos ciliares ou á perda de flexibilidade do cristalino. Como consecuencia, o punto próximo distánciase e os obxectos próximos vense mal e para que a imaxe a través do cristalino se sitúe na retina do ollo hai que usar lentes esféricas converxentes.

Astigmatismo. Prodúcese cando a córnea e/ou o cristalino presenta máis curvatura nunha dirección que noutra. En consecuencia, a imaxe dun punto é un trazo (unha liña recta). Corríxese con lentes cilíndricas, que teñan maior curvatura nunha dirección que noutra.

6.2. A lupa

A lupa, tamén chamada **microscopio simple**, utilízase para observar obxectos pequenos, dos que forma unha imaxe virtual, dereita e ampliada.

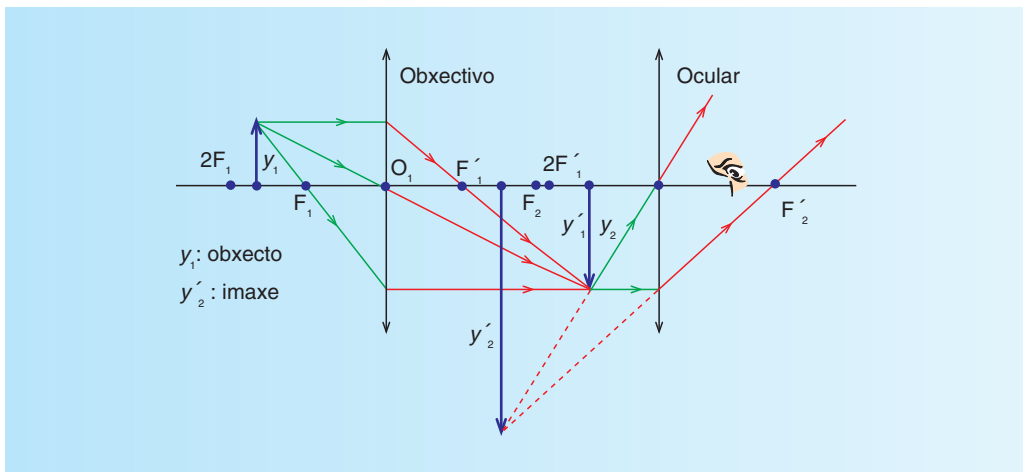
Consiste nunha lente converxente de pequena distancia focal e interponse entre o ollo e o obxecto que se desexa observar, acercándoa a este até unha distancia inferior á súa distancia focal, para así formar unha imaxe dereita e de maior tamaño que o obxecto.



6.3. O microscopio

O microscopio, tamén chamado **microscopio composto**, permite unha ampliación da imaxe dun obxecto maior que a que se consegue coa lupa.

Consta de dous sistemas ópticos converxentes, chamados **obxectivo** (é o máis próximo ao obxecto e ten unha pequena distancia focal) e **ocular** (é o máis próximo ao ollo e de maior distancia focal que o obxectivo). Estes sistemas ópticos poden estar formados por unha ou varias lentes, segundo a calidade do microscopio.

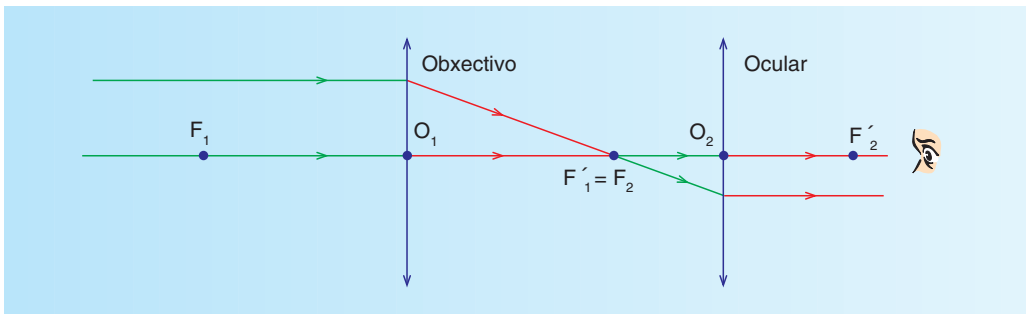


A misión do obxectivo é producir unha imaxe real e de maior tamaño que o obxecto investigado, polo que este estará situado entre o foco e dúas veces a distancia focal do obxectivo. A imaxe así obtida, situada dentro da distancia focal ocular, fai o papel de obxecto para o ocular, que actúa como lupa, resultando unha imaxe do obxecto que é aumentada, virtual e invertida, que é a que capta o ollo.

6.4. O anteollo e o telescopio

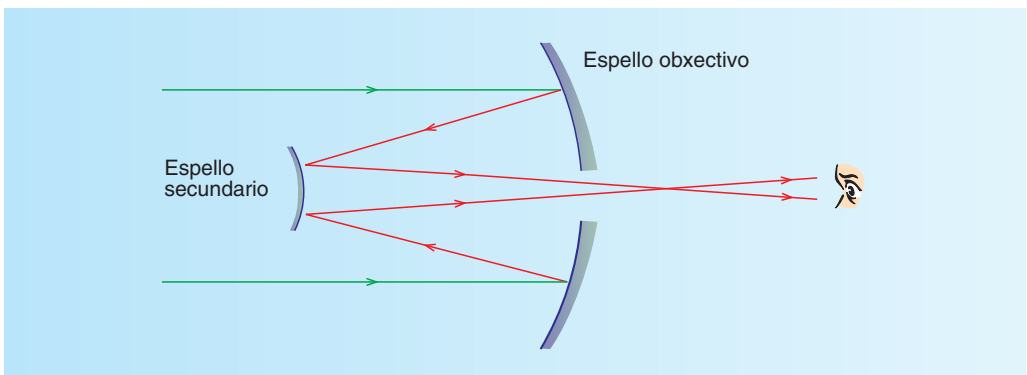
Utilízase para que os obxectos moi afastados (situados no infinito) parezan máis cercanos e así poder observalos. A igual que o microscopio, consta de dúas lentes converxentes: O **obxectivo** e o **ocular**. Pero a diferenza deste, o obxectivo é o que ten maior distancia focal (algúns metros fronte a varios centímetros que corresponden á distancia focal do ocular) e ademais, xeralmente, o foco imaxe do obxectivo coincide co foco obxecto do ocular.

O obxectivo, que é o que está máis cerca do obxecto, ten por misión formar, no seu plano focal, unha imaxe real e invertida dun obxecto situado no infinito. Esta imaxe fai o papel de obxecto para o ocular e os raios luminosos emerxen paralelos ao eixe óptico, resultando no infinito unha imaxe que é real e invertida.



Este anteollo, que dá unha imaxe invertida do obxecto, é útil en observacións astronómicas e coñécese como **anteollo astronómico**. Pero para observacións terrestres, nas que interesa obter imaxes dereitas, non resulta adecuado. Por esta razón, nos **anteollos terrestres** incorpórase unha terceira lente e no caso dos populares **prismáticos binoculares** a imaxe enderéitase mediante dous prismas colocados adecuadamente entre o obxectivo e o ocular.

Se, para formar a imaxe real dun obxecto afastado, a lente obxectivo dun anteollo astronómico se substitúe por un espello cóncavo, esférico ou parabólico, o instrumento óptico que resulta, que proporciona máis aumento que o anteollo correspondente, recibe o nome de **telescopio**.



7. ABERRACIÓNS NOS SISTEMAS ÓPTICOS

De todos son coñecidos os instrumentos ópticos tales como a cámara fotográfica, a lupa, o microscopio etc. Na súa construción interveñen lentes e espellos.

A finalidade dos instrumentos ópticos é obter sen deformación a imaxe dalgún obxecto, xa sexa sobre a retina do ollo ou sobre unha pantalla. No entanto, na práctica, os instrumentos ópticos causan nas imaxes certos defectos ou **aberracións**. Estas aberracións non se deben a defectos de construción, senón que son consecuencia das leis da refracción-reflexión.

Na óptica xeométrica estudada até agora introduciuse a simplificación de considerar lentes delgadas, raios paraxiais e luz monocromática; condicións que na práctica non se cumpren, polo que a formación de imaxes non se axeita á teoría estudada.

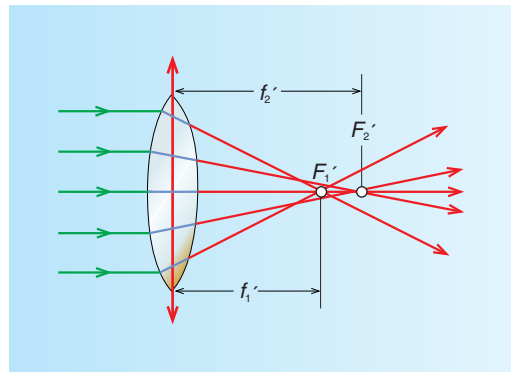
As aberracións máis comúns son:

7.1. Aberración esférica

Ten lugar nas lentes e nos espellos esféricos. As partes exteriores dunha superficie esférica teñen unha distancia focal distinta á da zona central e isto fai que, ao chegar un feixe de raios paralelos ao eixe óptico, os raios reflectidos (espellos) ou refractados (lentes) non se corten nun único punto e non se produzan imaxes nítidas. É debido a que non se cumpre a aproximación paraxial.

Pode evitarse esta aberración eliminando os raios marxinais cun diafragma (disco opaco cun buraco central que se coloca perpendicularmente e centrado ao eixe) de modo que só deixe pasar os raios paraxiais.

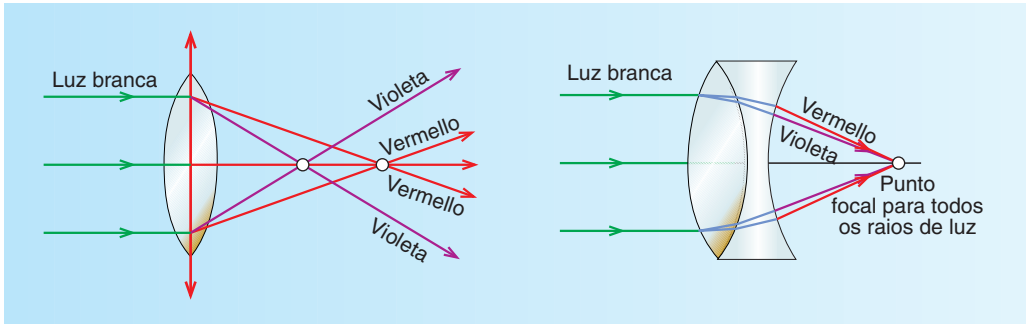
Debido a que os raios marxinais converxen a menor distancia da lente se esta é converxente e a maior distancia se é diverxente, asociando adecuadamente unha lente converxente con outra diverxente tamén se elimina este tipo de aberración.



7.2. Aberración cromática

Débese a que o índice de refracción dun medio é diferente para as distintas lonxitudes de onda da luz e como a distancia focal dunha lente depende do valor do índice de refracción, ao iluminar con luz branca un obxecto e refractarse nunha lente, cada cor experimenta unha desviación distinta. Isto fai que a imaxe non se forme nun único punto, aparecendo unha aberración cromática.

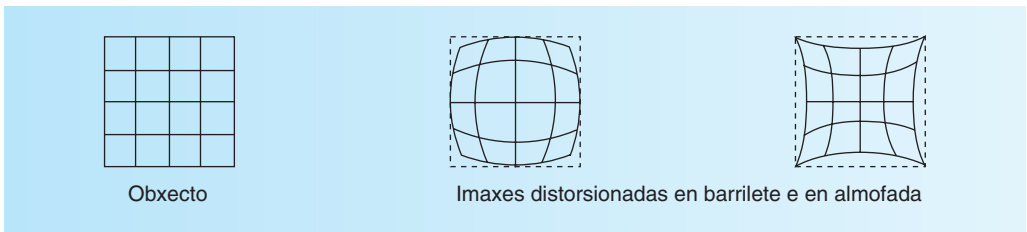
Este defecto corríxese combinando adecuadamente unha lente converxente con outra diverxente, de distinto índice de refracción.



Os espellos son acromáticos: non posúen aberración cromática.

7.3. Distorsión

Esta aberración consiste en que se infrinxe a semellanza entre a imaxe e o obxecto. Débe-se a que o aumento lateral do sistema óptico depende da distancia do obxecto ao eixe óptico, resultando que a imaxe dun obxecto extenso se ve deformada. As rectas que non corten o eixe óptico teñen unha imaxe curva.



Esta aberración evítase colocando adecuadamente un diafragma ou elixindo lentes con distorsións de carácter diferente.



1. Mapa conceptual dos contidos do tema.
2. Comenta cal é a consideración que se fai para tomar o dioptro plano como un caso particular do dioptro esférico.
3. Fai a construción gráfica da imaxe que aparece nun espello esférico cóncavo para os casos de que o obxecto sexa perpendicular ao eixe óptico e estea: a) entre o foco e o centro de curvatura do espello, b) entre o vértice e o foco, e c) entre o infinito e o centro de curvatura.

4. Fai a construción gráfica da imaxe que aparece nunha lente delgada converxente para os casos de que o obxecto sexa perpendicular ao eixe óptico e estea: a) entre o foco, F , e o vértice, b) entre F e $2F$ e c) a unha distancia maior a dúas veces a distancia focal.
5. Un instrumento óptico sen ningún defecto de construción, causa na imaxe algún defecto? A que se debe?
6. Que é a dioptría?
7. Co criterio de signos DIN indica como é (positiva ou negativa) a distancia imaxe para unha lente: a) converxente e b) diverxente.
8. Temos dúas lentes e queremos coñecer cal delas é máis converxente. Con este fin recolleamos coas lentes os raios do Sol e formamos a súa imaxe sobre un papel até que quede ben enfocada. Como recoñeces a lente máis converxente?
9. Relaciona a distancia focal dunha lente converxente coa doutra lente diverxente, de igual material e de idénticos raios de curvatura.
10. As lentes converxentes forman imaxes virtuais: a) sempre (independentemente da posición do obxecto); b) nunca; c) soamente cando o obxecto está entre a distancia focal e o vértice.
11. As lentes diverxentes forman imaxes virtuais: a) sempre (independentemente da posición do obxecto); b) nunca; c) ás veces.
12. Un raio incidente sobre unha lente, procedente dun dos focos, refráctase pasando: a) polo outro punto focal; b) paralelamente ao eixe da lente; c) por calquera dirección, dependendo do índice de refracción e dos raios de curvatura das caras da lente. (Elixo razoadamente a opción que consideres correcta).
13. Unha imaxe, que se encontra ao mesmo lado da lente que o obxecto, é unha imaxe: a) real; b) virtual; c) real ou virtual, dependendo da clase de lente. (Elixo razoadamente a opción que consideres correcta).
14. A imaxe dun obxecto real, formada nun espello convexo, é: a) sempre virtual; b) sempre real; c) real ou virtual, dependendo da posición do obxecto con respecto ao espello. (Elixo razoadamente a opción que consideres correcta).
15. O ollo humano ve: a) soamente as imaxes reais; b) soamente as imaxes virtuais; c) as imaxes reais e as virtuais. (Elixo razoadamente a opción que consideres correcta).
16. Estuda que lle ocorre ás propiedades dunha lente de vidro (en canto á súa distancia focal), de índice de refracción $3/2$, cando se introduce en auga, de índice de refracción $4/3$.
17. Estuda se ao introducir unha lente biconvexa nun líquido pode chegar a diverxer os raios luminosos.
18. A relación entre a profundidade á que está un obxecto mergullado na auga ($n_{\text{auga}} = 4/3$) coa profundidade aparente con que é visto por un observador situado no aire é: a) 1; b) $3/4$; c) $4/3$; d) ningunha das anteriores. Nota: Estes valores de relación de profundidades son obtidos coa distancias que hai até a superficie de separación dos dous medios, non tendo en conta a distancia que hai desde a superficie da auga até o observador. (Elixo razoadamente a opción que consideres correcta).


**EXERCICIOS
(problemas)**

1. Calcula as distancias focais dun dioptro esférico cóncavo de 10 cm de raio, no que os índices de refracción dos dous medios transparentes son $n = 1$ e $n' = 1,5$.
R: $f' = -0,3$ m; $f = 0,2$ m
2. Nun dioptro esférico, as distancias focais son: $f = -10$ cm e $f' = 30$ cm. Calcula:
 - a) O raio de curvatura do dioptro.
 - b) A relación dos índices de refracción dos dous medios.
 - c) A distancia imaxe dun obxecto de 1 cm de alto que dista 5 cm do vértice do dioptro, estando situado á esquerda da superficie de separación dos dous medios.
 - d) O tamaño da imaxe.**R:** a) $r = 20$ cm; b) $n/n' = 1/3$; c) $s' = -30$ cm; d) $y' = 2,0$ cm
3. Un pescador encóntrase a 3 m de altura por encima da superficie da auga e un peixe nada a 2 m de profundidade, estando nunha dirección case perpendicular á do pescador. Calcula:
 - a) A distancia á que o pescador ve o peixe.
 - b) A distancia á que o peixe ve o pescador.
 Dato: índice de refracción da auga: $4/3$.
R: a) $s' = 4,5$ m; b) $s' = 6$ m
4. Un obxecto de 3 cm de altura está situado perpendicularmente ao eixe óptico a 40 cm dunha lente converxente de 10 cm de distancia focal. Calcula a posición e o tamaño da imaxe, comentando se é dereita ou invertida.
R: $s' = 13$ cm; $y' = -1$ cm; imaxe invertida
5. Temos unha lente delgada diverxente de -4 dioptrías e queremos que a imaxe dun obxecto de 2,5 cm colocado perpendicularmente ao eixe óptico sexa dun tamaño de 0,5 cm. Calcula a distancia focal da lente e a distancia obxecto e fai a construción gráfica da marcha dos raios luminosos que dan lugar á formación da imaxe.
R: $f' = -25$ cm; $s = -100$ cm
6. Un obxecto de 5 cm de altura está situado perpendicularmente ao eixe óptico dunha lente delgada converxente de 40 cm de distancia focal. Se a distancia obxecto é de 60 cm, calcula:
 - a) A potencia da lente.
 - b) A posición da imaxe.
 - c) O tamaño da imaxe.**R:** a) $P = 2,5$ dioptrías; b) $s' = 120$ cm; c) $y' = -10$ cm



Razoa as respostas ás seguintes cuestións:

- Se cun espello se quere obter unha imaxe maior que o obxecto, haberá que empregar un espello: a) plano; b) cóncavo; c) convexo. (*Setembro 08*).
- Debuxa a marcha dos raios nunha lente converxente cando a imaxe producida é virtual. (*Setembro 08*).
- Fai un esquema da práctica de óptica, situando o obxecto, a lente e a imaxe, e debuxando a marcha dos raios para obter unha imaxe dereita e de maior tamaño que o obxecto. (*Setembro 07*).
- Se se desexa formar unha imaxe virtual, dereita e de menor tamaño que o obxecto, débese utilizar: a) un espello cóncavo; b) unha lente converxente; c) unha lente diverxente. (*Xuño 07*).
- Cun banco óptico de lonxitude l , obsérvase que a imaxe producida por unha lente converxente é sempre virtual. Como se pode interpretar isto? (*Xuño 07*).
- A imaxe formada nos espellos é: a) real se o espello é convexo; b) virtual se o espello é cóncavo e a distancia obxecto é menor que a focal; c) real se o espello é plano. (*Setembro 06*).
- Dispónse dunha lente delgada converxente; describe brevemente un procedemento práctico para coñecer o valor da súa focal. (*Setembro 06*).
- Nas lentes diverxentes a imaxe sempre é: a) dereita, menor e virtual; b) dereita, maior e real; c) dereita, menor e real. (*Xuño 06*).
- Na práctica da lente converxente, fai un esquema da montaxe experimental seguida no laboratorio, explicando brevemente a misión de cada un dos elementos empregados. (*Setembro 05*).
- Disoponse dun proxector cunha lente delgada converxente e deséxase proxectar unha transparencia de xeito que a imaxe sexa real, invertida e maior que o obxecto. Explica como facelo e fai un debuxo mostrando a traxectoria dos raios. (*Xuño 05*).
- Dous espellos planos están colocados perpendicularmente entre si. Un raio de luz que se despraza nun terceiro plano perpendicular aos dous reflíctese sucesivamente nos dous espellos; o raio reflectido no segundo espello, con respecto ao raio orixinal: a) é perpendicular; b) é paralelo; c) depende do ángulo de incidencia. (*Setembro 04*).
- Na práctica da lente converxente explica se hai algunha posición do obxecto para a que a imaxe sexa virtual e dereita e outra para a que a imaxe sexa real e invertida e do mesmo tamaño que o obxecto. (*Xuño 04*).
- Cando se observa o fondo dun río en dirección case perpendicular, a profundidade real con relación á aparente é: a) maior; b) menor; c) a mesma. (*Setembro 03*).
- Que clase de imaxes se forman nunha lente converxente se o obxecto se atopa a unha distancia superior ao dobre da distancia focal? Fai unha representación gráfica. (*Setembro 03*).

- ❖ Nas lentes diverxentes a imaxe sempre é: a) dereita, maior e real; b) dereita, menor e virtual; c) dereita, menor e real. (*Xuño 03*).
- ❖ Nunha lente converxente, se se coloca un obxecto entre o foco e a lente, como é a imaxe? Debuxa a marcha dos raios. (*Setembro 02*).
- ❖ Nun espello esférico convexo a imaxe que se forma dun obxecto é: a) real, invertida e de maior tamaño que o obxecto; b) virtual, dereita e de menor tamaño que o obxecto; c) virtual, dereita e de maior tamaño que o obxecto. Razona as respostas. (*Setembro 02*).
- ❖ Na práctica da lente converxente debuxa a marcha dos raios e a imaxe formada dun obxecto cando: a) se sitúa entre o foco e o centro óptico; b) se sitúa no foco. (*Xuño 02*).
- ❖ Fai un pequeno gráfico explicando como podes usar unha lente converxente como lupa de aumento. (*Setembro 01*).
- ❖ Cunha lente converxente debuxa a marcha dos raios e o tipo de imaxe formada en cada un destes dous casos: a) se a distancia obxecto, s , é igual ao dobre da focal, $2f$; b) se a distancia obxecto é igual á focal, f . (*Xuño 01*).
- ❖ Cunha lente converxente deséxase formar unha imaxe virtual, dereita e aumentada. Onde debe colocarse o obxecto? Fai un esquema da práctica. (*Setembro 00*).
- ❖ Que clase de imaxes se forman nunha lente converxente se o obxecto se encontra a unha distancia inferior á focal? E se se encontra na focal? Debuxa a marcha dos raios. (*Xuño 00*).
- ❖ Cando se observa en dirección case perpendicular un obxecto no fondo dun río a profundidade aparente observada é: a) maior que a real; b) menor que a real; c) igual á real. (*Setembro 99*).
- ❖ Se nunha lente converxente un obxecto situado no eixe óptico e a 20 cm non forma imaxe, cal é a potencia e a focal da lente? Debuxa a marcha dos raios. Como sería a imaxe se $s=10$ cm? (*Setembro 99*).
- ❖ Nunha lente converxente, un obxecto atópase a unha distancia s maior que o dobre da focal ($2f$). Fai un esquema da marcha dos raios e explica que clase de imaxe se forma (real ou virtual, dereita ou invertida) e que ocorre co aumento. (*Xuño 99*).
- ❖ Ao atravesar unha lente delgada, un raio paralelo ao eixe óptico: a) non se desvía, b) desvíase sempre, c) desvíase ou non dependendo do tipo de lente. (*Setembro 98*).
- ❖ Na práctica de óptica, púidose e como determinar a distancia focal da lente? (*Setembro 98*).
- ❖ Nunha lente converxente, os raios que saen do foco obxecto, a) converxen no foco imaxe, b) emerxen paralelos, c) non se desvían. (*Setembro 97*).
- ❖ Fai un esquema da práctica de óptica, situando o obxecto, a lente e a imaxe, debuxando a marcha dos raios. (*Xuño 97*).



- Un obxecto de 3 cm está situado a 8 cm dun espello esférico cóncavo e produce unha imaxe a 10 cm á dereita do espello: a) calcula a distancia focal; b) debuxa a marcha dos raios e obtén o tamaño da imaxe; c) en que posición do eixe hai que colocar o obxecto para que non se forme imaxe? (*Xuño 08*).

R: a) $f = -40$ cm; b) $y' = 3,75$ cm; c) no foco.

- Un obxecto de 3 cm de altura sitúase a 75 cm dunha lente delgada converxente e produce unha imaxe a 37,5 cm á dereita da lente: a) calcula a distancia focal; b) debuxa a marcha dos raios e obtén o tamaño da imaxe; c) en que posición do eixe hai que colocar o obxecto para que non se forme imaxe? (*Xuño 08*).

R: a) $f' = 25$ cm; b) $y' = -1,5$ cm; c) no foco.

- Un obxecto de 3 cm de altura colócase a 20 cm dunha lente delgada de 15 cm de focal; calcula analítica e graficamente a posición e o tamaño da imaxe: a) se a lente é converxente; b) se a lente é diverxente. (*Setembro 06*).

R: a) $s' = 60$ cm, $y' = -9$ cm; b) $s' = -8,6$ cm, $y' = 1,3$ cm.

- Dado un espello esférico de 50 cm de raio e un obxecto de 5 cm de altura situado sobre o eixe óptico a unha distancia de 30 cm do espello, calcula analítica e graficamente a posición e o tamaño da imaxe: a) se o espello é cóncavo; b) se o espello é convexo. (*Xuño 06*).

R: a) $s' = -150$ cm, $y' = -25$ cm; b) $s' = 13,6$ cm, $y' = 2,3$ cm.

- Un espello esférico cóncavo ten un raio de curvatura de 0,5 m. Determina analítica e graficamente a posición e o aumento da imaxe dun obxecto de 5 cm de altura situado en dúas posicións diferentes: a) a 1 m do espello; b) a 0,30 m do espello. (*Setembro 05*).

R: a) $s' = -1/3$ m, $A_L = -1/3$; b) $s' = -1,5$ m, $A_L = -5,0$.

- Un obxecto de 5 cm de altura está situado a unha distancia x do vértice dun espello esférico cóncavo de 1 m de raio de curvatura; calcula a posición e o tamaño da imaxe: a) se $x = 75$ cm; b) se $x = 25$ cm (nos dous casos debuxa a marcha dos raios). (*Setembro 04*).

R: a) $x' = -150$ cm, $y' = -10$ cm; b) $x' = 50$ cm, $y' = 10$ cm.

- Un obxecto de 3 cm de altura sitúase a 75 cm e verticalmente sobre o eixe dunha lente delgada converxente de 25 cm de distancia focal. Calcula: a) a posición da imaxe; b) o tamaño da imaxe. Fai un debuxo do problema. (*Xuño 03*).

R: a) $s' = 38$ cm; b) $y' = -1,5$ cm.

- Un espello esférico forma unha imaxe virtual, dereita e de tamaño dobre que o obxecto cando este está situado verticalmente sobre o eixe óptico e a 10 cm do espello. Calcula: a) a posición da imaxe; b) o raio de curvatura do espello. (Debuxa a marcha dos raios). (*Xuño 02*).

R: a) $s' = 20$ cm; b) $r = -40$ cm.



**PRÁCTICAS DE
LABORATORIO**

1. Estudo experimental dunha lente converxente

Obxectivos:

- Comprobar experimentalmente o mecanismo de formación de imaxes, cunha lente delgada converxente.
 - Identificar os conceptos de: focos, distancias focais, imaxe real e virtual, aumento etc.
 - Estudar a posición, natureza e tamaño da imaxe dun obxecto en función da distancia obxecto-lente.
- Comprobar os resultados experimentais cos obtidos de forma gráfica e analítica.

Material:

- Banco óptico.
- Foco luminoso.
- Lentes converxentes.
- Obxecto ou diafragma con figura.
- Pantalla.
- Soportes.
- Regra.
- Papel milimetrado.

Montaxe:

A lente máis próxima ao foco luminoso está intercalada para favorecer que os raios luminosos que incidan sobre o obxecto sexan paralelos sobre o eixe óptico. Debe colocarse a unha distancia da lámpada igual á súa distancia focal xa que os raios procedentes do foco dunha lente a atravesan saíndo paralelos ao seu eixe, formando a súa imaxe no infinito.



Realización:

Feita a montaxe da figura anterior, cambiamos a posición da segunda lente desprazándoa ao longo do seu eixe óptico e localízase a imaxe na pantalla movéndoa até que se forme unha imaxe nítida. De non lograr na pantalla a formación nítida da imaxe, mírase a través da lente, en sentido contrario á marcha dos raios, acercando o ollo á lente, até observar a formación dunha imaxe virtual.

Para distintas posicións da lente, faise a medida da distancia obxecto, s , e imaxe, s' ; do tamaño do obxecto, y , e da imaxe, y' ; anótase se a imaxe é real ou virtual, dereita ou invertida, cubrindo unha táboa como a seguinte.

Cuestións:

Completa os cadros en branco da táboa seguinte.

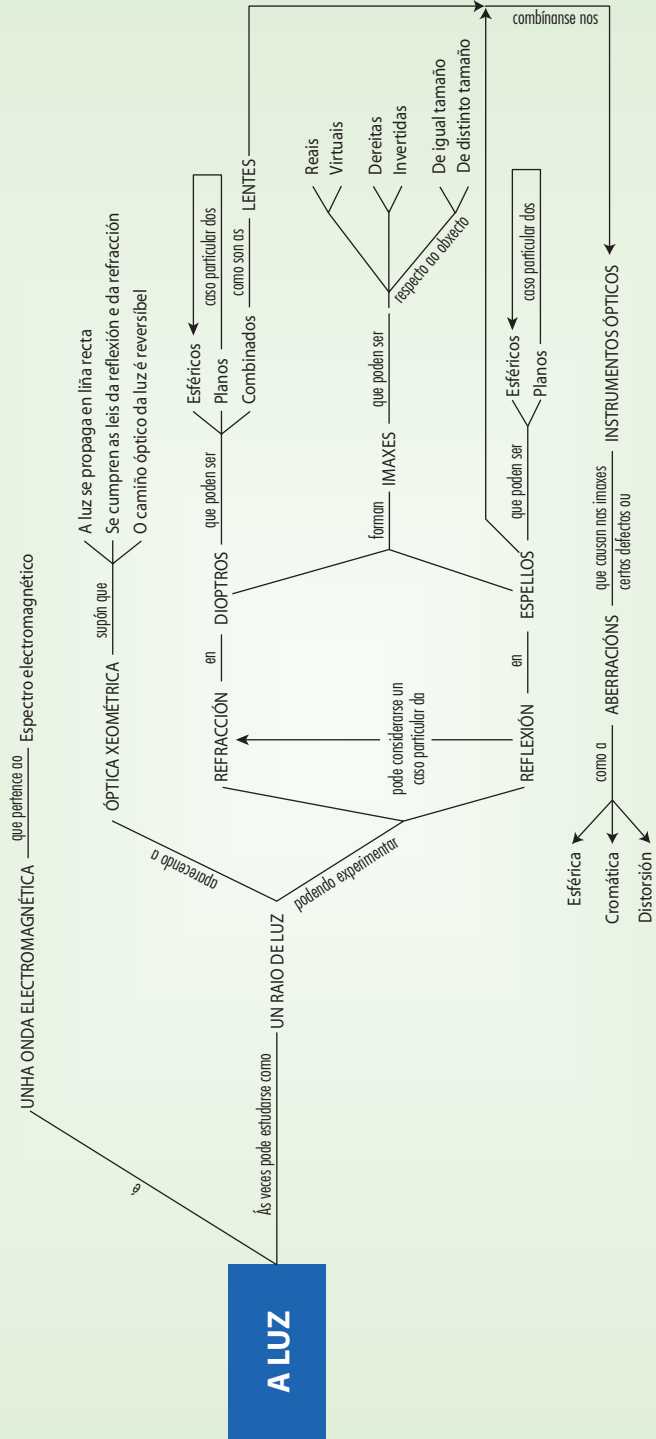
Que clase de imaxe se forma para as seguintes distancias do obxecto: a) $s < 2f$; b) $s = 2f$; c) $2f < s < f$; d) $s = f$; e) $s > f$?

Fai a construción gráfica das imaxes para cada un dos casos anteriores.

Compara os valores da relación y'/y cos da s'/s .

DISTANCIA		TAMAÑO				CARACTERÍSTICAS DA IMAXE		DISTANCIA FOCAL?		AUMENTO LATERAL?	
RELACIÓN DE s, f (de $ s $ e $ f $)	s'/m	s'/m	y'/m	y'/m	REAL OU VIRTUAL	DEREITA OU INVERTIDA	f'/m	POTENCIA/ DIOPTRÍA	y'/y	s'/s	
	$s < 2f$ ($ s > 2 f $)										
$s = 2f$ ($ s = 2 f $)											
$2f < s < f$ ($2 f > s > f $)											
$s = f$ ($ s = f $)											
$s > f$ ($ s < f $)											

Mapa conceptual do Tema 9



Tema 10 Física relativista



1. **Sistemas de referencia**
2. **A relatividade na mecánica clásica**
3. **Experiencia de Michelson-Morley**
4. **Interpretación de Einstein. Teoría da relatividade restrinxida ou especial**
5. **Transformación de Lorentz. Consecuencias**
6. **Masa e enerxía relativistas. Equivalencia**

Exercicios

Exercicios de selectividade

Mapa conceptual dos contidos do tema

1. SISTEMAS DE REFERENCIA

Sabemos que o concepto de movemento é relativo: depende do sistema de referencia elixido.

Un sistema de referencia dise **inercial** cando está en repouso ou se move con velocidade, \vec{v} , constante (movemento rectilíneo uniforme) con respecto a outro sistema inercial. Neles cúmprense as leis de Newton. O observador ligado a un sistema de referencia inercial recibe o nome de observador inercial.

Os sistemas de referencia ligados á Terra, en sentido estrito, non son inerciais debido á aceleración que posúen: a Terra está rotando sobre si mesma e trasladándose ao redor do Sol; pero moitas veces tómanse como inerciais, polo pequeno valor da aceleración¹.

Se o sistema de referencia, con respecto a un sistema de referencia inercial, posúe aceleración, dise que é non inercial e nel non se cumpren as leis de Newton: O observador non inercial ten que introducir a forza de inercia para poder utilizalas.

2. A RELATIVIDADE NA MECÁNICA CLÁSICA

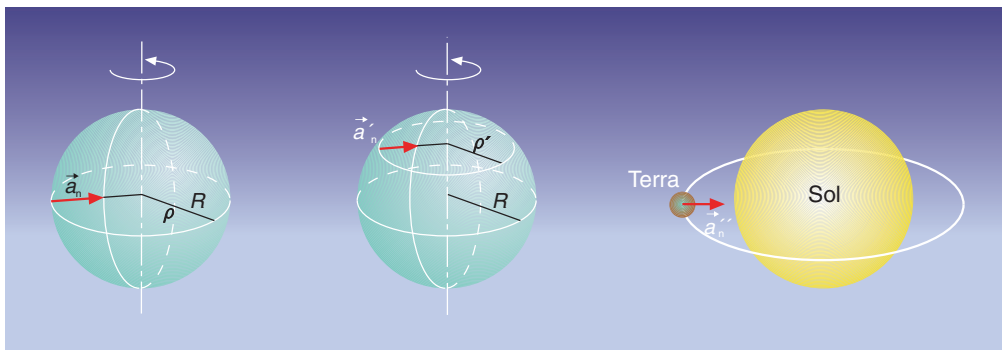
Imos encontrar as **ecuacións de transformación** para a posición, a velocidade e a aceleración con que se move un corpo respecto a dous sistemas de referencia inerciais. Estas ecuacións de transformación son as expresións matemáticas que permiten relacionar as observacións realizadas en sistemas de referencia distintos.

¹ A aceleración que produce o movemento de rotación da Terra nun punto situado no seu Ecuador é:

$$\left. \begin{aligned} v = \text{cte} \rightarrow \vec{a}_t = \vec{0} \\ \vec{v} \neq \text{cte} \rightarrow \vec{a} \neq \vec{0} \\ \vec{a}_n = \vec{a}_t + \vec{a}_n \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} \vec{a} = \vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{u}_n \rightarrow a_n = \frac{v^2}{\rho} \\ v = \omega \cdot \rho \end{aligned} \right\} \rightarrow a_n = \omega^2 \cdot \rho$$

$$a_n = \omega^2 \cdot \rho = \frac{(2\pi)^2}{(24 \cdot 60 \cdot 60)^2} \cdot 6,4 \cdot 10^6 = 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$$

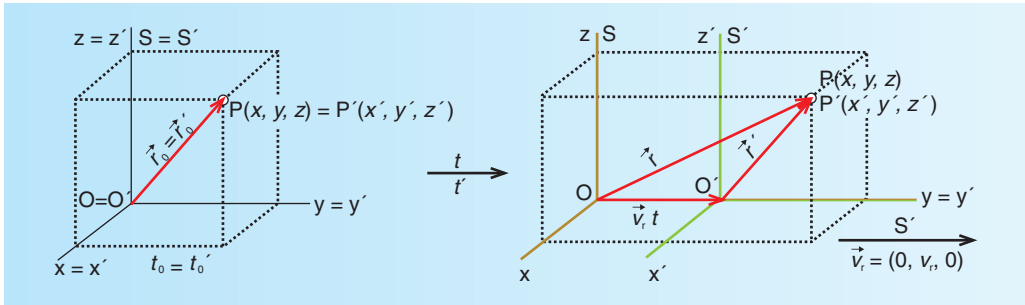
Para outro punto da superficie da Terra que non sexa do Ecuador, a a_n é menor que $3,4 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$ xa que ρ (raio de curvatura) é menor.



A aceleración da Terra a causa do seu movemento orbital en torno ao Sol é:

$$a_n = \omega^2 \cdot \rho = \left(\frac{2 \cdot \pi}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} \right)^2 \cdot 1,5 \cdot 10^{11} = 5,97 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$$

Supoñamos un sistema de referencia S' que se move, con respecto a outro sistema fixo S , cunha velocidade \vec{v}_r constante, no sentido positivo do eixe y e que os eixes dos dous sistemas de referencia son paralelos.



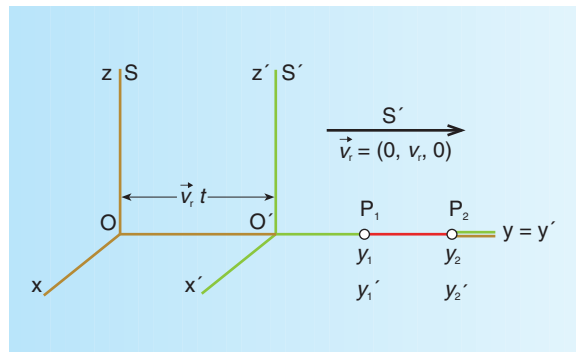
Consideramos que no instante inicial $t_0 = t'_0 = 0$ (os dous observadores poñen a funcionar os seus cronómetros) as orixes dos dous sistemas de referencia ocupan a mesma posición e, polo tanto, o vector de posición dunha partícula de masa m situada no punto P será o mesmo para os dous sistemas de referencia: $\vec{r}_0 = \vec{r}'_0$. Transcorrido un tempo t , a posición de S' respecto de S vén dada polo produto da velocidade con que se move S' con respecto a S , \vec{v}_r , polo tempo t : $\vec{v}_r \cdot t$. A relación entre os dous vectores de posición para a partícula m en movemento, observada desde os dous sistemas de referencia inerciais, S e S' , é:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}' + \vec{v}_r \cdot t \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_r \cdot t \rightarrow x' = x \\ y' &= y - v_r \cdot t \\ z' &= z \end{aligned}$$

Esta ecuación é a **transformada de Galileo** para a posición.

¿A distancia medida entre dous puntos por un observador inercial ligado ao sistema S coincide coa medida feita por outro observador, tamén inercial, ligado ao sistema S' que se move cunha velocidade \vec{v}_r con respecto ao anterior?

Consideremos que no instante inicial, momento no que os dous observadores poñen a funcionar simultaneamente os seus cronómetros, os dous sistemas de referencia S e S' coinciden e que S' se move cunha velocidade constante \vec{v}_r ao longo do eixe y . Transcorrido un tempo t os dous observadores miden a distancia que separa os dous puntos, P_1 e P_2 , que están sobre o eixe y . A distancia entre P_1 e P_2 é:



- Para o observador do sistema S : $\Delta y = y_2 - y_1$
- Para o observador do sistema S' : $\Delta y' = y'_2 - y'_1$

Agora o observador do sistema S calcula a distancia medida polo observador do sistema S' empregando a transformación de Galileo:

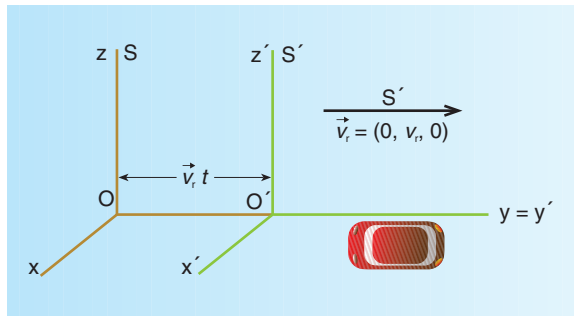
$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= y_1 - v_r \cdot t \\ y'_2 &= y_2 - v_r \cdot t \end{aligned} \right\} \rightarrow \Delta y' = y'_2 - y'_1 = (y_2 - v_r \cdot t) - (y_1 - v_r \cdot t) = y_2 - y_1 = \Delta y$$

Os dous observadores obteñen a mesma distancia, non dependendo do sistema inercial utilizado. Dise que **a distancia é unha invariante para a mecánica clásica**.

Facemos agora a derivada do vector de posición respecto do tempo:

$$\frac{d \vec{r}'}{dt} = \frac{d \vec{r}}{dt} - \frac{d(\vec{v}_r \cdot t)}{dt} \rightarrow \frac{d \vec{r}'}{dt} = \frac{d \vec{r}}{dt} - \vec{v}_r \cdot \frac{dt}{dt} \rightarrow \vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_r$$

Esta é a transformada de Galileo para a velocidade. Vemos que **a velocidade** medida polos dous observadores é distinta: difire na velocidade relativa que hai entre eles; polo tanto, **non é unha invariante**: non obtemos a mesma velocidade para un corpo cando o observamos desde distintos sistemas de referencia inerciais. Así, a velocidade dun coche que se despraza por unha recta de estrada é distinta para un observador parado na propia estrada (sistema S) que para outro observador que se move cunha velocidade \vec{v}_r , na dirección e sentido do coche (sistema S').



Derivando respecto do tempo a expresión da velocidade calculamos a aceleración con que se move un punto P en ambos sistemas:

$$\frac{d \vec{v}'}{dt} = \frac{d \vec{v}}{dt} - \frac{d \vec{v}_r}{dt} \rightarrow \vec{a}' = \vec{a} - \vec{0} \rightarrow \vec{a}' = \vec{a}$$

Esta é a transformada de Galileo para a aceleración.

A aceleración é unha invariante: ten o mesmo valor en todos os sistemas inerciais. Se ademais supoñemos que a masa m dun corpo non varía; a segunda lei de Newton é válida para todos os sistemas de referencia inerciais: $m \cdot \vec{a}' = m \cdot \vec{a} \rightarrow \vec{F}' = \vec{F}$.

3. EXPERIENCIA DE MICHELSON-MORLEY

No século XIX comprobábase a natureza ondulatoria da luz. Como as ondas coñecidas até entón necesitaban dun medio material para propagarse, tamén se pensaba na necesidade dun medio material para as ondas electromagnéticas. Supúxose a existencia dun medio hi-

potético, chamado éter, que ademais sería un sistema de referencia en repouso absoluto, sendo a velocidade da luz con respecto a el de 300000 km/s. Este éter estaría enchendo todo o espazo e a Terra moveríase respecto a el cunha velocidade \vec{v}_r , e este movemento influirá na velocidade da luz.

Así, para un observador situado sobre a Terra, supoñendo que esta se move na mesma dirección e sentido que a luz, cunha velocidade \vec{v}_r con respecto ao éter; a velocidade da luz con respecto á Terra, \vec{c}' , segundo a adición clásica de velocidades, será:

$$\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v}_r$$

sendo \vec{c} a velocidade da luz con respecto ao éter, que estaría en repouso absoluto.

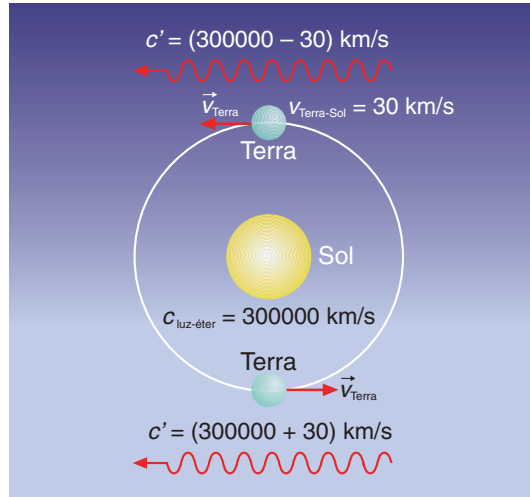
Se a Terra se movera na mesma dirección e en sentido contrario ao da luz teríamos: $\vec{c}' = \vec{c} + \vec{v}_r$

Isto é o que ocorre coas ondas mecánicas: se o observador se move con respecto ao medio en que se propaga unha onda mecánica, a velocidade medida é distinta da que se obtén cando se encontra en repouso.

Se se medise a velocidade da luz cando esta ten o sentido de movemento da Terra, c' , coñeceríase a velocidade da Terra con respecto ao sistema de referencia éter, v_r .

Por outra parte, se a velocidade da luz fose distinta para diferentes sistemas de referencia inerciais, as ecuacións de Maxwell serían válidas para o sistema de referencia éter (que estaría en repouso absoluto) e para calquera outro que estivese en repouso con respecto a el, pero terían que modificarse para outros sistemas que se movesen con respecto ao éter.

Resulta interesante medir a velocidade da luz en distintos sistemas inerciais. Con este fin, en 1887, Michelson e Morley constrúen un interferómetro con dous brazos de igual lonxitude e dispostos en direccións perpendiculares. Nel, un feixe de luz ao chegar ao punto de intersección dos brazos é dividido en dous raios, un deles viaxa no brazo que ten a dirección de movemento da Terra e o outro faino no brazo perpendicular ao anterior. O resultado foi que o tempo que tardaba a luz en percorrer ambos brazos era sempre o mesmo, independentemente da dirección. O resultado desta experiencia demostra que a velocidade con que se propaga a luz no baleiro é constante en todas as direccións e é independente do sistema inercial elixido: é unha invariante.



4. INTERPRETACIÓN DE EINSTEIN. TEORÍA DA RELATIVIDADE RESTRINXIDA OU ESPECIAL

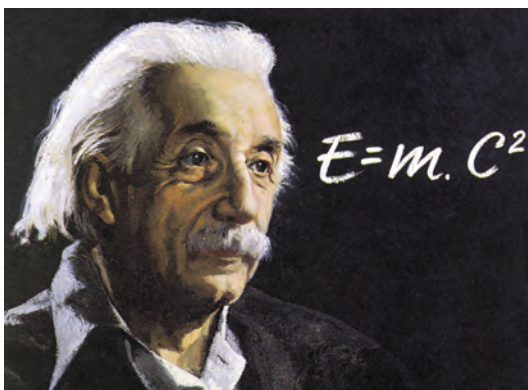
As transformacións de Galileo non poden explicar a constancia da velocidade da luz.

De forma independente, os físicos Fitzgerald, en 1889, e Lorentz, en 1892, intentaron interpretar o resultado da experiencia de Michelson-Morley, supoñendo que os corpos que se moven a través do éter se contraen na dirección do movemento (sen que sufran modificación ás súas dimensións transversais). Deste modo, o brazo do interferómetro de Michelson-Morley, que se encontra na dirección de movemento da Terra, contrae a súa lonxitude nunha cantidade igual á necesaria para compensar a redución da velocidade da luz, de forma que o espazo percorrido pola luz é menor no sentido do “vento do éter”, chegando ao mesmo tempo que a que se propaga noutra dirección.

Lorentz estableceu as ecuacións que permiten pasar os datos dun sistema de referencia inercial a outro sistema tamén inercial (ecuacións de transformación de Lorentz) e segue admitindo a existencia do éter e o movemento absoluto dos corpos con respecto a este medio.

No entanto, esta explicación e outras que se deron naquela época non eran consistentes cos feitos que se coñecían.

Einstein, antes de ter coñecemento da experiencia de Michelson-Morley, xa abandona a idea do éter e, en consecuencia, non hai un sistema de referencia absoluto que permita definir o movemento absoluto, aparecendo a **teoría da relatividade**. Esta teoría, referida ao movemento en sistemas inerciais, foi enunciada por Einstein no ano 1905 e coñécese como **relatividade especial ou restrinxida**². Baséase en dous postulados:



- As leis da física son as mesmas en todos os sistemas de referencia inerciais e exprésanse mediante ecuacións análogas. Este postulado rexeita a existencia do movemento absoluto.
- A velocidade da luz no baleiro é a mesma en todos os sistemas de referencia inerciais, calquera que sexa a velocidade da fonte e a do observador. Isto indica que as transformacións de Galileo non son válidas, tendo que tomar novas transformacións para pasar dun sistema inercial a outro.

Partindo destes dous postulados Einstein deduciu en 1905 as ecuacións que con anterioridade obtivera Lorentz supoñendo a contracción dos corpos móbiles no éter, ecuacións que son coñecidas co nome de **transformación de Lorentz** (e non de Einstein, por ser obtidas primeiramente por Lorentz).

² Máis tarde, o propio Einstein, amplía a teoría incluíndo sistemas non inerciais e a gravitación, aparecendo no ano 1916 o que se coñece como **relatividade xeral**.

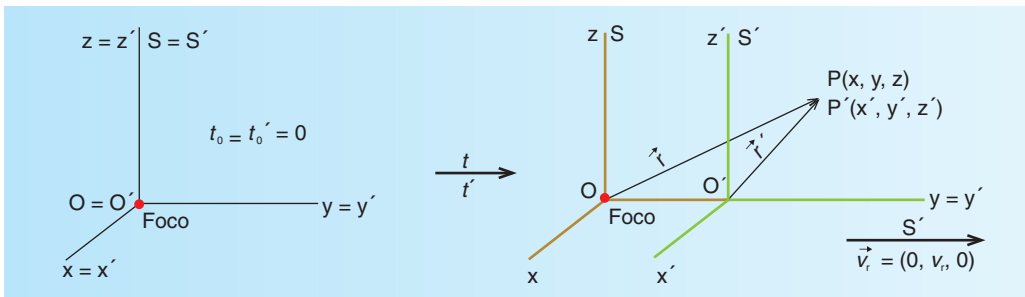
5. TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ. CONSECUENCIAS

Supoñamos un sistema de referencia, S' , que se move con respecto a outro fixo, S , cunha velocidade \vec{v}_r constante no sentido positivo do eixe y , e que os eixes dos dous sistemas de referencia son paralelos.

Consideramos que os observadores ligados a estes sistemas de referencia sincronizan a cero os seus cronómetros no momento en que coinciden as orixes dos dous sistemas, que á súa vez coinciden cun foco luminoso que emite nese instante un brillo de luz. Pasado un tempo t , para o observador situado en S , a luz chega a un punto P , percorrendo o espazo $r = c \cdot t$.

Para o observador situado en S' , o raio de luz percorrerá o espazo r' nun tempo t' : $r' = c \cdot t'$.

Como a velocidade da luz é constante e $r \neq r'$ resulta que $t \neq t'$, feito que non está de acordo coas transformacións de Galileo.



Lorentz resolveu o problema cunhas novas ecuacións de transformación. Estas ecuacións permiten a un observador inercial do sistema S' interpretar a información procedente doutro observador inercial do sistema S , e viceversa.

As ecuacións de transformación de Lorentz para o sistema S' son:

$$x' = x; \quad y' = \gamma(y - v_r \cdot t); \quad z' = z; \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v_r}{c^2} \cdot y\right); \quad \text{sendo } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c^2}}}$$

Estas son as expresións que nos relacionan as medidas efectuadas dun suceso que ten lugar nas coordenadas (x, y, z, t) de S coas (x', y', z', t') de S' .

Se se quere facer a transformación das medidas feitas no sistema S' ao sistema S hai que cambiar v_r por $-v_r$ e intercambiar as coordenadas (primas e non primas).

Destas ecuacións dedúcese que:

- Se $v_r = 0$ ou $v_r \ll c$ as transformacións de Lorentz redúcense ás de Galileo.
- Non é posíbel igualar (e menos superar) a velocidade da luz, c . De ser $v_r = c$, a constante γ sería infinita e se $v_r > c$ sería imaxinaria, co que as transformacións de Lorentz non terían sentido físico.

5.1. Simultaneidade

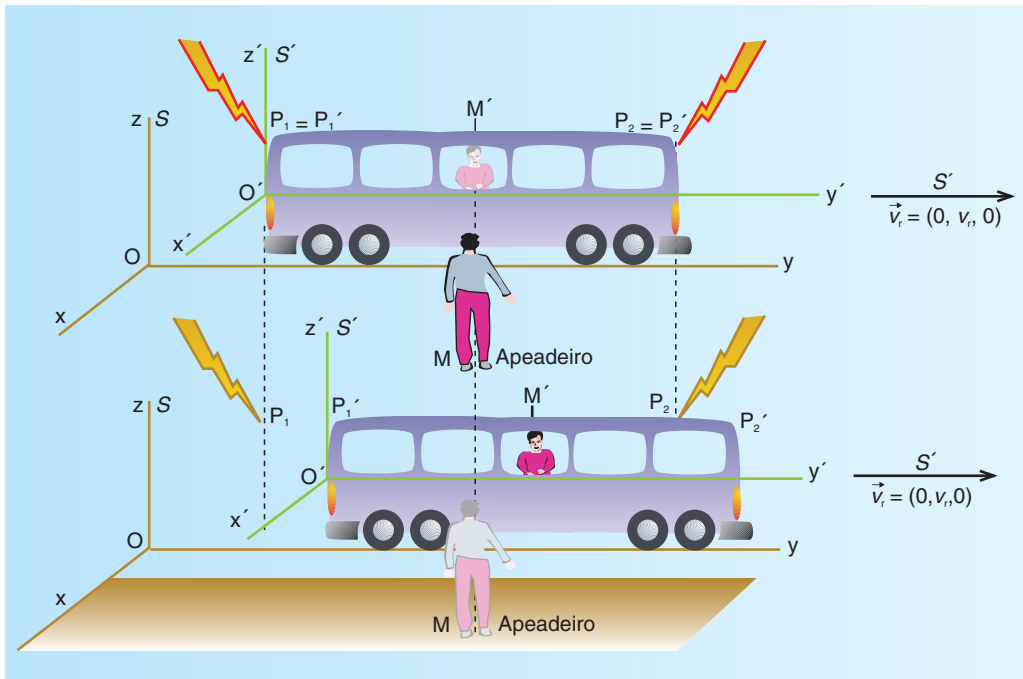
Imos empezar distinguindo simultaneidade no mesmo punto e simultaneidade a distancia.

Dous sucesos teñen lugar simultaneamente no mesmo punto P cando son observados ao mesmo tempo por calquera observador.

Non ocorre o mesmo coa simultaneidade a distancia. Esta pode definirse dicindo que un suceso que ten lugar nun punto P_1 é simultáneo con outro suceso que ocorre no punto P_2 se un observador fixo situado á mesma distancia de P_1 e P_2 os percibe ao mesmo tempo.

Para saber se dous sucesos simultáneos con respecto a un sistema S o son con respecto a outro sistema S' que se move, respecto a S, con velocidade constante, \vec{v}_r , no sentido positivo do eixe y' imos recordar un dos experimentos mentais do propio Einstein.

Imaxinemos que caen dous raios simultaneamente nos puntos P_1 e P_2 (extremos dun vagón de tren) do sistema S: é dicir, son vistos ao mesmo tempo por un observador situado no apeadeiro, punto M, a igual distancia de P_1 e de P_2 .



Como as distancias P_1M e P_2M percorridas polos dous lóstregos son iguais e a velocidade da luz é constante, o tempo que tardan en chegar ao observador do apeadeiro é o mesmo.

Sexan P_1' e P_2' os dous puntos do sistema S' que coinciden con P_1 e P_2 no momento en que ocorren os fenómenos considerados e sexa M' o punto medio de $P_1'P_2'$ (centro do vagón).

Como o observador situado en M' , que está no vagón en movemento, se despraza cara a P_2 e se afasta de P_1 durante o tempo en que se propagan os sinais luminosos procedentes de P_1

e P_2 , o viaxeiro percibirá o fenómeno producido en P_2 antes que o que tivo lugar en P_1 xa que para chegar a M' a luz que vén de P_1 ten que percorrer un camiño (contado no sistema S) máis longo que o procedente de P_2 , aínda que os raios caeran a igual distancia del. Polo tanto, dous feitos simultáneos con respecto a un sistema non o son para outro sistema que se move con respecto ao primeiro; de aquí dedúcese que o tempo medido para un sistema é característico do mesmo, isto é: cada sistema de referencia ten o seu tempo propio. O tempo non é absoluto senón relativo.

Exercicio resolto

- Un autobús viaxa por unha estrada recta á velocidade de 108 km/h. Cando pasa por diante dunha marquesiña, na que hai un home, caen dous raios na estrada, un a 600 m diante do autobús e outro a 600 m detrás do autobús. Calcula o tempo que transcorre até que os dous raios son observados polo home da marquesiña e por un dos viaxeiros.

Solución:

O home que está na marquesiña ve os dous lóstregos ao mesmo tempo, xa que os dous raios percorren a mesma distancia (600 m) coa mesma velocidade ($3 \cdot 10^8$ m s⁻¹).

$$t = \frac{s}{v} \rightarrow t_{\text{home}} = \frac{600}{3 \cdot 10^8} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

O viaxeiro pertence a un sistema de referencia inercial, que se move cunha velocidade relativa de 108 km/h con respecto ao sistema de referencia do home, acercándose con esta velocidade cara ao raio que cae diante do autobús e afastándose co mesmo valor de velocidade do raio que cae na parte posterior do autobús. Polo tanto vai ver antes o raio de diante do autobús que o de atrás.

A luz do raio anterior é observada polo viaxeiro nun tempo t_1 . Neste tempo o autobús percorre un espazo, que é: $30 \cdot t_1$ m. En consecuencia, o espazo percorrido polo lóstrego é: $600 - 30 \cdot t_1$, espazo que percorre coa velocidade de $3 \cdot 10^8$ m/s, polo que:

$$s = v \cdot t \rightarrow 600 - 30 \cdot t_1 = 3 \cdot 10^8 \cdot t_1 \rightarrow t_1 = \frac{600}{3 \cdot 10^8 + 30} \text{ s}$$

O lóstrego posterior é visto polo viaxeiro nun tempo t_2 , percorrendo o espazo $600 + 30 \cdot t_2$ coa velocidade de $3 \cdot 10^8$ m/s:

$$s = v \cdot t \rightarrow 600 + 30 \cdot t_2 = 3 \cdot 10^8 \cdot t_2 \rightarrow t_2 = \frac{600}{3 \cdot 10^8 - 30} \text{ s}$$

O viaxeiro observa os dous raios en instantes distintos.

Os dous raios do exemplo só son simultáneos para o observador fixo. Para que os sucesos fosen simultáneos para o observador móbil, ademais de ter lugar no mesmo instante, tiñan que ocorrer no mesmo punto, por exemplo, que os dous raios caeran na estrada a 600 m diante do autobús.

5.2. Dilatación do tempo

Consideremos un sistema de referencia móbil, S' , que se move con respecto a outro fixo, S , cunha velocidade constante \vec{v}_r no sentido positivo do eixe y , e que os eixes dos dous sistemas de referencia son paralelos.

Supoñamos dous sucesos que teñen lugar no mesmo punto y' con respecto ao sistema S' nos instantes t_1' e t_2' . O intervalo entre os dous sucesos é: $t' = t_2' - t_1'$. Este tempo, medido polo observador do sistema S' , que viaxa xunto ao reloxo que se utiliza para facer as medidas, é o chamado **tempo propio**.

Para o observador situado no sistema S , os dous sucesos ocorren en lugares distintos, y_1 e y_2 , xa que o sistema S' se move unha distancia $v_r(t_2 - t_1)$, sendo $(t_2 - t_1)$ o intervalo de tempo transcorrido entre os dous sucesos, medido polo observador do sistema S . Estes tempos obtémolos aplicando a transformación de Lorentz na que y' é constante:

$$t_1 = \gamma \cdot \left(t_1' + \frac{v_r}{c^2} \cdot y' \right) \quad \text{e} \quad t_2 = \gamma \cdot \left(t_2' + \frac{v_r}{c^2} \cdot y' \right)$$

e o intervalo entre os dous sucesos é: $t = t_2 - t_1 = \gamma(t_2' - t_1')$.

Comparando as expresións de t e t' resulta que:

$$t = \gamma \cdot t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c^2}}} \cdot t'$$

Como $\gamma > 1$, resulta que $t > t'$: $t_{\text{movemento}} > t_{\text{propio}}$

O tempo dun suceso medido polo observador ligado ao sistema S' (observador en repouso relativo con respecto ao suceso) é menor que o que mediría o observador ligado ao sistema S (observador en movemento relativo con respecto ao suceso). É dicir, un reloxo en movemento relativo con respecto ao suceso mide un tempo maior que outro reloxo en situación estacionaria con respecto ao suceso. Este aumento temporal é o que se coñece como **dilatación do tempo**, e foi observado experimentalmente³.

Exercicio resolto

- Supoñamos que unha nave espacial viaxa á velocidade de 200000 km/s e o tempo que tarda (medido na propia nave) en almorzar un astronauta é de 8,5 minutos. Calcula o tempo que medirá un observador situado na Terra en repouso.

Solución:

O tempo que medirá o observador situado na Terra é:

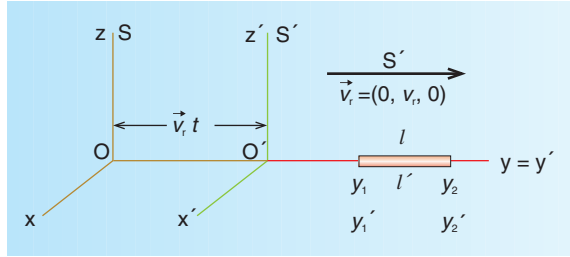
$$t = \gamma \cdot t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c^2}}} \cdot t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{200\,000^2}{300\,000^2}}} \cdot 8,5 = 11,4 \text{ minutos}$$

³ Un curioso experimento fíxose no ano 1971. Consistiu en catro reloxos atómicos de cesio que deron a volta completa á Terra en avións a reacción, unha vez cara ao oeste e outra cara ao este. Aínda que as velocidades son moito menores que a da luz, ao comparar os tempos medidos polos reloxos que viaxaran cos que se deixaran na Terra, observáronse diferenzas de tempo que coinciden co previsto pola teoría da relatividade.

5.3. Contracción da lonxitude

Consideremos un sistema de referencia, S' , que se move con respecto a outro fixo, S , cunha velocidade constante \vec{v}_r no sentido positivo do eixe y , e que os eixes dos dous sistemas de referencia son paralelos.

Supoñamos unha barra en repouso con respecto ao sistema de referencia S' colocada na dirección do eixe $O'y'$. A lonxitude da barra medida neste sistema de referencia S' (no cal se encontra en repouso) chámase **lonxitude propia** e vale: $\Delta y' = y_2' - y_1' = l'$.



Para o observador situado no sistema S , a barra móvese coa velocidade \vec{v}_r e, para facer a medida da súa lonxitude, ten que marcar simultaneamente os seus extremos, porque senón o movemento modificaría a observación, sendo: $\Delta y = y_2 - y_1 = l$.

Recordando as transformacións de Lorentz temos:

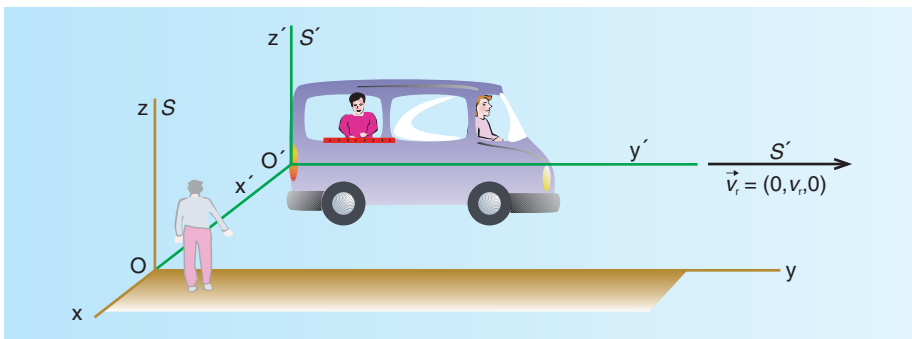
$$\left. \begin{aligned} y_2' &= \gamma \cdot (y_2 - v_r \cdot t) \\ y_1' &= \gamma \cdot (y_1 - v_r \cdot t) \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} y_2' - y_1' &= \gamma \cdot (y_2 - y_1) \\ y_2' - y_1' &= \Delta y' = l' \\ y_2 - y_1 &= \Delta y = l \end{aligned} \right\} \rightarrow l' = \gamma \cdot l$$

Como $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c^2}}} > 1$ resulta que $l' > l$: $l_{\text{propia}} > l_{\text{movemento}}$

A lonxitude dun obxecto, l , medida por un observador inercial pertencente a un sistema de referencia con respecto ao cal o obxecto está en movemento é menor que a lonxitude, l' , medida por outro observador inercial pertencente a un sistema de referencia no cal o obxecto se encontra en repouso. Este efecto é o que se chama **contracción da lonxitude**.

Exercicio resolto

- ▶ Unha hipotética “furgoneta” móvese por unha estrada recta e horizontal, á velocidade de 120000 km/s. Un viaxeiro mide o longo e o alto dunha ventá obtendo os valores de 160 cm e 90 cm, respectivamente. Calcula os valores das medidas que fará unha persoa que está parada na beirarrúa.



Solución:

Na dirección vertical a ventá non se move e a medida que fan os dous observadores é a mesma. Porén, a lonxitude paralela ao desprazamento vese afectada pola velocidade, e a lonxitude medida polo observador que está parado na beirarrúa é:

$$l_{\text{movemento}} = \sqrt{1 - \frac{120\,000^2}{300\,000^2}} \cdot 160 = 146,6 \text{ cm}$$

▶ **O paradoxo dos xemelgos**

Se de dous irmáns xemelgos, un fai unha viaxe espacial a gran velocidade e o outro se queda en Terra, ao volverse a encontrar, cal é máis vello?

Solución:

O paradoxo dos xemelgos é un experimento mental que analiza a distinta percepción do tempo entre dous observadores que están en movemento relativo.

Segundo a relatividade especial, o tempo minorízase coa velocidade. Visto desde a Terra, a nave está en movemento e o tempo pasa máis lentamente na nave que na Terra. En consecuencia, cando se volvan encontrar, o irmán que quedou na Terra é máis vello que o que fixo a viaxe.

Se o estudo se fai desde a nave, é o irmán que quedou na Terra o que se move, pasando para el o tempo máis lentamente. Agora, o xemelgo da nave é o máis vello.

O paradoxo está en que os dous xemelgos esperan ver ao seu outro irmán máis novo. Que sucede?

Debemos decatarnos de que o xemelgo que viaxa non pertence a un sistema de referencia inercial: acelera ao iniciar a viaxe, ao dar volta, ao chegar á Terra etc. Este observador non pode aplicar a relatividade especial.

Para resolver o suposto paradoxo hai que ter en conta a contracción espacial na dirección do movemento.

Imaxinemos unha variación de escenario: unha nave espacial, que se move a velocidade constante, pasa moi cerca da Terra, instante en que se sincroniza un reloxo na Terra con outro na nave. Cando a nave pasa polas proximidades dun novo planeta, que tempo medirán ambos reloxos?

Agora os sistemas de referencia, tanto o ligado á Terra como á nave, son inerciais e pódese aplicar en ambos sistemas a relatividade especial.

Para o viaxeiro da nave, é o resto do Universo o que se move e este observador verá que a distancia Terra-novo planeta se contrae, sendo, para el, esta distancia menor que para o observador que está na Terra (este verá que a lonxitude da nave en movemento é máis pequena que cando está en repouso). E como o viaxeiro percorre menos espazo, tarda menos tempo e envellece menos.

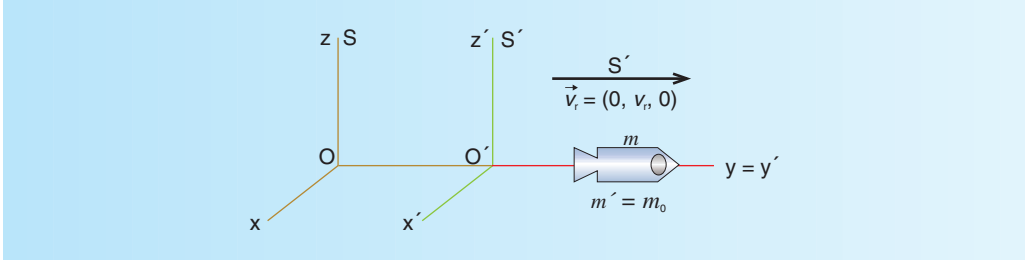
6. MASA E ENERXÍA RELATIVISTAS. EQUIVALENCIA

Antes da teoría da relatividade de 1905, algúns resultados experimentais facían pensar que a masa dunha partícula aumentaba coa velocidade.

Einstein chegou á conclusión de que o valor da masa dunha partícula é distinta segundo sexa medida por un observador en repouso ou en movemento, segundo a ecuación:

$$m = \gamma \cdot m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c^2}}}$$

sendo m_0 a masa da partícula en repouso relativo con respecto ao observador, tamén chamada **masa propia**, (na mecánica de Newton era a masa inercial) e m a masa cando se move coa velocidade v_r en relación ao observador e chámase **masa relativista**.



Como $\gamma > 1$ resulta que: $m_{\text{relativista}} > m_{\text{propia}}$: a masa dunha partícula medida por un observador inercial en movemento relativo con respecto á partícula é maior que a masa medida por outro observador en repouso relativo en relación á partícula.

A masa non é unha invariante, dependendo da velocidade. O incremento de masa coa velocidade non significa que a partícula aumente o número de átomos ou de moléculas, senón que aumenta a medida da súa inercia.

Se $v_r \ll c$, a masa relativista coincide coa masa en repouso.

Se $v_r = c$, a masa da partícula faise infinita e a forza necesaria para acelerala é infinita. Por isto ningunha masa pode moverse á velocidade da luz.

O desenvolvemento en serie da constante γ é:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c^2}}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v_r^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v_r^4}{c^4} + \dots$$

Se $v_r \ll c$ (para velocidades da orde do 30% da velocidade da luz ou inferiores) é suficiente quedarnos cos dous primeiros sumandos da expresión anterior, resultando:

$$m \approx \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v_r^2}{c^2}\right) m_0 = m_0 + \frac{1}{2} \frac{m_0 \cdot v_r^2}{c^2} \rightarrow (m - m_0) c^2 = \frac{1}{2} m_0 \cdot v_r^2$$

sendo $\frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot v_r^2$ a expresión clásica da enerxía cinética (E_k).

$$E_k = (m - m_0) c^2 = \Delta m \cdot c^2$$

Esta expresión, a pesar das aproximacións feitas, ten validez xeral e constitúe a expresión relativista da **enerxía cinética** dun corpo de masa m_0 en repouso. Consta de:

- O termo $m_0 \cdot c^2$, que representa a enerxía relativista do corpo en repouso ou **enerxía propia**. O seu valor non depende da velocidade da partícula.
- O termo $m \cdot c^2$, que representa a enerxía relativista total, E : $E = m \cdot c^2 = E_k + m_0 \cdot c^2$, e depende da velocidade da partícula. A expresión $E = m \cdot c^2$ é a ecuación de Einstein para a **equivalencia masa-enerxía**. Así, se un sistema intercambia co entorno unha enerxía ΔE , a súa masa debe cambiar na cantidade equivalente $\Delta E/c^2$.

Exercicio resolto

- Unha partícula de 1 mg de masa, en repouso, posúe unha velocidade de $2 \cdot 10^8$ m/s. Calcula a súa enerxía relativista total.

Solución:

A expresión da enerxía relativista é: $E = m \cdot c^2 = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c^2}}} \cdot c^2$, sendo m_0 a masa

da partícula en repouso, v_r a súa velocidade e c a velocidade da luz. Substituíndo obtense:

$$E = \frac{1 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{1 - \frac{(2 \cdot 10^8)^2}{(3 \cdot 10^8)^2}}} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 1,2 \cdot 10^{11} \text{ J}$$

Tamén se pode resolver o exercicio recordando que: $E_{\text{total}} = E_{0 \text{ (propia)}} + E_k$.

$$E_{\text{total}} = m_0 \cdot c^2 + \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot v_r^2 \rightarrow E_{\text{total}} = 1 \cdot 10^{-6} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot (2 \cdot 10^8)^2 \rightarrow$$

$$E_{\text{total}} = 1,1 \cdot 10^{11} \text{ J}$$

Exercicio resolto

- Ten masa un fotón de luz?

Solución:

Recordando a ecuación de Einstein para a equivalencia masa-enerxía, $E = m \cdot c^2$; ao fotón de frecuencia ν e enerxía $E = h \cdot \nu$ correspóndelle a masa equivalente de:

$$\left. \begin{array}{l} E = m \cdot c^2 \\ E = h \cdot \nu \end{array} \right\} \rightarrow m = \frac{h \cdot \nu}{c^2}$$

e para os resultados experimentais todo sucede como se o fotón en movemento se comportase como unha partícula material de masa $m = \frac{h \cdot \nu}{c^2}$.

En repouso a masa do fotón é nula; de non ser así non podería moverse á velocidade da luz. Pero o fotón non pode existir en repouso.


EXERCICIOS
 (cuestións)

1. Mapa conceptual dos contidos do tema.
2. Razoa se dous sucesos que ocorren no mesmo instante en dous lugares diferentes son simultáneos para:
 - a) Un observador fixo, situado no punto medio dos dous sucesos.
 - b) Un observador que se move cunha velocidade \vec{v} cara a un dos sucesos, estando no instante en que se producen no punto medio dos dous sucesos.
3. Unha barra de 1 m de longa móvese paralelamente á súa lonxitude cunha velocidade \vec{v} , con respecto a un observador en repouso. Comenta como será, (maior, menor ou igual) a lonxitude da barra para este observador.
4. Un astronauta de 30 anos fai unha viaxe interplanetaria á velocidade de $2 \cdot 10^8$ m/s. Cando retorna á Terra observa que o tempo que aquí transcorreu foi de 25 anos. Razoa cal das seguintes idades será a do astronauta: a) maior a 55 anos, b) igual a 55 anos e c) menor de 55 anos.
5. Que demostra a experiencia de Michelson-Morley?
6. Un viaxeiro dunha nave espacial, que leva a velocidade de $0,8 \cdot c$, sendo c a velocidade da luz, mide a lonxitude do lateral da nave obtendo un valor de l m. A lonxitude que medirá un observador exterior (en repouso) é: a) $0,6 l$ m; b) $l/0,6$ m; c) $0,8 l$; d) l m. Elix a opción que consideres correcta.
7. O viaxeiro da nave anterior mide o tempo necesario para percorrer unha distancia l , obtendo un valor de t' segundos. O tempo que medirá o observador exterior será: a) $t = 1,67 t'$ s; b) $t = 0,6 t'$ s; c) $t = t'$ s. Elix a opción que consideres correcta.
8. Un reloxo nun sistema de referencia S' , para o cal o suceso ten lugar nun mesmo punto e se move cunha velocidade constante \vec{v} con respecto a outro sistema de referencia S , que está en repouso, vai: a) máis rápido no sistema de referencia S ; b) máis lento no sistema de referencia S ; c) á mesma velocidade nos dous sistemas de referencia. Elix a opción que consideres correcta.
9. Se medimos o noso pulso na Terra (en repouso) e despois mentres viaxamos cunha velocidade \vec{v} , de acordo coa teoría especial da relatividade, notaremos que a súa cadencia é: a) igual; b) diminúe; c) aumenta. Elix a opción que consideres correcta.
10. Cando nos acercamos a unha fonte de luz cunha velocidade constante \vec{v} , a velocidade da fonte de luz é: a) menor; b) maior; c) a mesma. Elix a opción que consideres correcta.
11. Se unha luz intermitente se move uniformemente cara a nós, observaremos que os intervalos de luz, a medida que están máis cerca de nós, a) diminúen de frecuencia; b) aumentan de frecuencia; c) teñen igual frecuencia. Elix a opción que consideres correcta.
12. Unha nave espacial pasa por diante da Lúa, que consideramos en repouso. Un observador situado na Lúa encontra que a masa da nave é maior que cando esta estaba en repouso. En consecuencia, un astronauta da nave espacial encontra que a masa da Lúa é: a) a mesma que a medida polo observa-

dor da Lúa; b) menor que a medida polo observador da Lúa; c) maior que a medida polo observador da Lúa. Elixe a opción que consideres correcta.

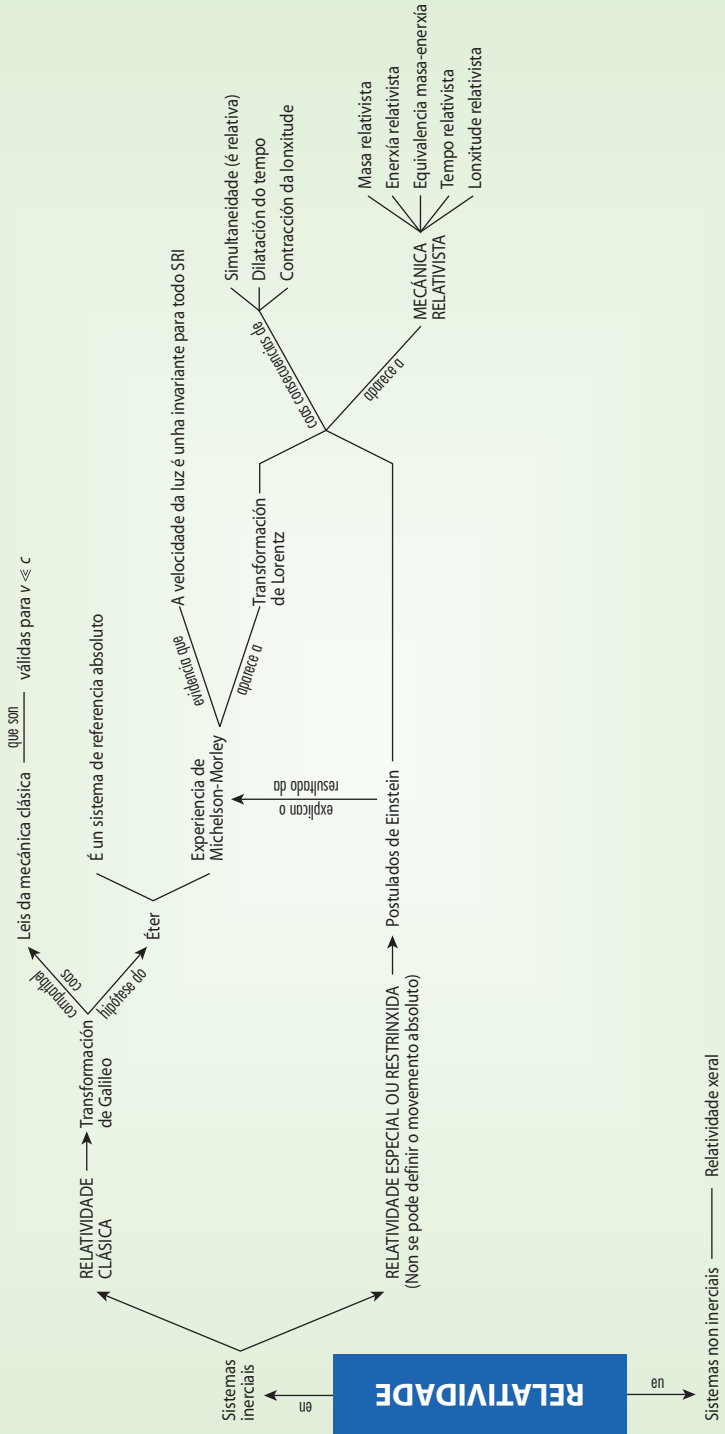
13. Se a enerxía dunha partícula en repouso é de 800 MeV e nun determinado instante a súa enerxía é de 1050 MeV; a enerxía cinética da partícula é: a) 250 MeV; b) 800 MeV; c) 1050 MeV; d) 1850 MeV. Elixe a opción que consideres correcta.
14. Un sistema de referencia S' móvese cunha velocidade \vec{v}_r constante con respecto a un sistema de referencia inercial S . Un observador pertencente ao sistema S mide a duración dun suceso que ten lugar nun mesmo punto con respecto ao sistema S . O tempo medido polo observador pertencente ao sistema S' , en relación ao tempo medido polo observador S , é: a) maior; b) menor; c) igual; d) non se teñen datos suficientes para coñecer a relación de ambos tempos.
15. Un sistema de referencia S' móvese cunha velocidade \vec{v}_r constante con respecto a un sistema de referencia inercial S . Un observador do sistema S mide a lonxitude dunha barra, que pertence a este sistema, na dirección do movemento do sistema S' . A lonxitude medida polo observador pertencente ao sistema S' , con respecto á lonxitude medida polo observador S , é: a) maior; b) menor; c) igual; d) non se teñen datos suficientes para coñecer a relación de ambas lonxitudes.
16. Un home (observador 1), pertencente a un sistema de referencia inercial, móvese cunha velocidade \vec{v}_r constante con respecto a outro home (observador 2), e leva na súa man unha barra, e cando mide a súa dimensión horizontal, que coincide coa dirección do movemento obtén un valor de 3 m. Máis tarde deixa caer, verticalmente ao chan e desde unha altura de 2 m, a barra e mide o seu tempo de caída, sendo de 0,64 s. Comenta como será (maior, menor ou igual) a lonxitude da barra, a altura desde a que cae e o tempo de caída para o observador (2).
17. Un home (observador 1) móvese cunha velocidade \vec{v}_r constante con respecto a outro home (observador 2), que está en repouso. Este segundo observador ten na súa man unha barra e cando mide a súa dimensión horizontal, que coincide coa dirección de \vec{v}_r , obtén un valor de 3 m. Máis tarde deixa caer, verticalmente ao chan e desde unha altura de 2 m, a barra e mide o seu tempo de caída, sendo de 0,64 s. Comenta como será (maior, menor ou igual) a lonxitude da barra, a altura desde a que cae e o tempo de caída para o observador (1).
18. Desde a plataforma dun aeroporto medimos a lonxitude dun avión, sendo de l m. Este avión ponse en voo e pasa por diante nosa a gran velocidade. Se agora nós e un viaxeiro do avión medimos a súa lonxitude, esta será: a) maior para nós, $l_{\text{nós}} > l$, e igual para o viaxeiro, $l_{\text{viaxeiro}} = l$; b) maior, tanto para nós, $l_{\text{nós}} > l$, como para o viaxeiro, $l_{\text{viaxeiro}} > l$; c) menor, tanto para nós, $l_{\text{nós}} < l$, como para o viaxeiro, $l_{\text{viaxeiro}} < l$; d) menor para nós, $l_{\text{nós}} < l$, e igual para o viaxeiro, $l_{\text{viaxeiro}} = l$; e) ningunha das opcións anteriores.
19. Unha nave espacial pasa a gran velocidade por diante da Terra, que consideramos en repouso. Para un observador situado na Terra e para un astronauta da nave resulta que: a) a masa da nave para o observador é menor que para o astronauta; b) a masa da nave para o observador é maior que para o astronauta; c) a masa da Terra para o astronauta é menor que para o observador; d) a masa da Terra para o astronauta é maior que para o observador; e) a masa da nave é a mesma, tanto para o observador como para o astronauta; f) a masa da Terra é a mesma, tanto para o observador como para o astronauta. Elixe de forma razoada a/s opción/s que consideres correcta/s.

20. Unha nave espacial, nave 1, móvese coa velocidade constante \vec{v}_1 e unha segunda nave, nave 2, móvese coa velocidade \vec{v}_2 , tamén constante. A medida da lonxitude dun obxecto, pertencente á nave 1, na dirección do movemento é: a) maior para un observador pertencente á nave 1; b) maior para un observador pertencente á nave 2; c) iguais para ambos observadores; d) non se pode saber para cal dos dous observadores será maior xa que non se sabe cal das dúas velocidades é maior; e) non se pode establecer ningunha relación porque ningún dos observadores está en repouso. Elixo razaoadamente a/s opción/s que consideres correcta/s.



- Un vehículo espacial afástase da Terra cunha velocidade de $0,5c$. Desde a Terra envíase un sinal luminoso, cuxa velocidade é medida pola tripulación, obtendo un valor de: a) $1,5c$; b) c ; c) $0,5c$. (Setembro 07).
- A ecuación de Einstein $E = mc^2$ implica que: a) unha determinada masa m necesita unha enerxía E para poñerse en movemento; b) a enerxía E é a que ten unha masa m que se move á velocidade da luz; c) E é a enerxía equivalente a unha determinada masa. (Setembro 05).
- Un vehículo espacial afástase da Terra cunha velocidade de $0,5c$ ($c =$ velocidade da luz). Desde a Terra mándase un sinal obtendo o valor: a) $0,5c$; b) c ; c) $1,5c$. (Xuño 04)
- Segundo a teoría da relatividade, dous observadores en sistemas de referencia inerciais miden: a) a mesma velocidade da luz; b) o mesmo espazo; c) o mesmo tempo. (Xuño 01).
- Segundo Einstein, a velocidade da luz no baleiro: a) é constante para sistemas de referencia en repouso, b) é constante independentemente do sistema de referencia inercial escollido, c) depende da velocidade do foco emisor. (Xuño 98).

Mapa conceptual do Tema 10



Tema

11

Física nuclear e partículas atómicas



1. O núcleo atómico
2. Defecto de masa nuclear
3. Desintegracións α , β e γ
4. Reaccións nucleares: fisión e fusión
5. Estabilidade nuclear
6. Decaemento exponencial e vida media

7. Partículas elementais e forzas fundamentais

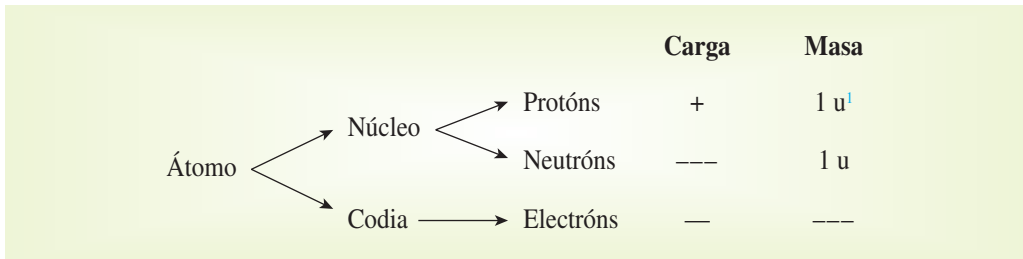
Exercicios

Exercicios de selectividade

Mapa conceptual dos contidos do tema

1. O NÚCLEO ATÓMICO

Sabemos que:



A evidencia experimental da existencia do núcleo ten lugar en 1896 coa observación de Becquerel da **radioactividade**, que consiste na emisión de partículas por parte dos núcleos de certos átomos (xa que experimentalmente se comproba que non depende de factores externos aos que se poida someter a substancia no laboratorio, tales como variacións de temperatura, presión etc., o que fai pensar que ten lugar nas partes máis internas dos átomos).

Ao número de protóns dun átomo chámase **número atómico**² (Z) e caracteriza o elemento, de modo que se dous átomos teñen o mesmo número atómico pertencen ao mesmo elemento.

Ao número de **nucleóns** (denominación común a protóns e neutróns por encontrarse ambos no núcleo) chámase **número másico**³ (A).



Antoine Henri Becquerel (1852-1908).

Estes números indícanse en torno ao símbolo do elemento da seguinte forma:



onde X é o símbolo do elemento.

Dous átomos que teñan igual número atómico (pertencen por tanto ao mesmo elemento) e diferente número de masa dise que son átomos **isótopos**. Os átomos isótopos dun mesmo elemento teñen as mesmas propiedades químicas, pero distintas propiedades nucleares.

Todos os núcleos que teñan os mesmos valores de Z e A constitúen unha especie nuclear particular, chamada **núclido** ou **nucleido**.

Os isótopos radioactivos de calquera elemento chámanse **radioisótopos**.

¹ u é o símbolo da unidade de masa atómica, que hoxe en día se toma como a doceava parte da masa do $C-12$.

² Ao número atómico tamén se lle chama **número protónico**.

³ Ao número másico tamén se lle chama **número nucleónico**.

O raio, R , do núcleo dun átomo pode calcularse coa expresión $R = 1,2 \cdot 10^{-15} \cdot A^{1/3}$, en metros. Trátase dunha fórmula empírica onde A é o número másico, resultando que:

- O volume dos núcleos é directamente proporcional á súa masa.
- A densidade é a mesma⁴ para todos os núcleos cun valor moi grande⁵, de preto de $10^{17} \text{ kg m}^{-3}$. Isto supón unha densidade de 10^{14} veces maior que a de calquera corpo, o cal pon en evidencia que a materia é practicamente espazo baleiro⁶, resultando que o tamaño do núcleo é unhas 10000 veces máis pequeno que o tamaño do átomo ao que pertence.

2. DEFECTO DE MASA NUCLEAR

Se pensamos que as forzas que hai entre os nucleóns dun átomo son soamente de natureza eléctrica e gravitatoria, non se pode explicar que os núcleos sexan estábeis (a forza eléctrica de repulsión entre os protóns é moito maior que a forza gravitatoria de atracción entre protóns e neutróns). Hai que pensar noutras forzas entre os nucleóns de intensidade superior ás mencionadas: son as chamadas **forzas nucleares de interacción forte**, que teñen lugar entre protón-protón, neutrón-neutrón e protón-neutrón. Esta interacción é a máis intensa de todas, pero de moi curto alcance: 10^{-15} m , aproximadamente, sendo desprezábel a distancias maiores.

Podería pensarse que a masa M dun núcleo se obtén sumando Z veces a masa do protón e N veces a masa do neutrón. No entanto, a masa do núcleo dun átomo é sempre inferior á suma das masas dos nucleóns que o constitúen. Esta diferenza de masa é a que se coñece como **defecto de masa nuclear**, podendo calcularse coa expresión:

$$\Delta m = Z(m_p + m_e) + (A - Z)m_n - M_{\text{átomo}} = Zm_p + (A - Z)m_n - M_{\text{núcleo}}$$

sendo Z o número atómico e A o número másico.

$$^4 \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3} = \frac{m}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (1,2 \cdot 10^{-15} \cdot A^{1/3})^3} = \frac{m}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1,2^3 \cdot 10^{-15 \cdot 3} \cdot A}$$

Por ser os nucleóns (protóns e neutróns) moito máis pesados que os electróns, pódese considerar que toda a masa do átomo está concentrada no núcleo, co que:

$$\rho = \frac{M \cdot A}{\text{Cte} \cdot A} = \text{cte}', \text{ sendo } M \text{ a masa dun protón ou dun neutrón.}$$

⁵ A densidade dun núcleo é:

$$\rho = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot A}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (1,2 \cdot 10^{-15})^3 \cdot A} = 2,3 \cdot 10^{17} \text{ kg m}^{-3}$$

Un fragmento de materia nuclear do tamaño dunha pelota de pimpón pesaría dous billóns de kg.

⁶ $\rho_{\text{núcleo}} \approx 10^{14} \cdot \rho_{\text{átomo}} \rightarrow \frac{m_{\text{núcleo}}}{V_{\text{núcleo}}} \approx 10^{14} \frac{m_{\text{átomo}}}{V_{\text{átomo}}}$, como $m_{\text{núcleo}} \approx m_{\text{átomo}}$, podemos escribir:

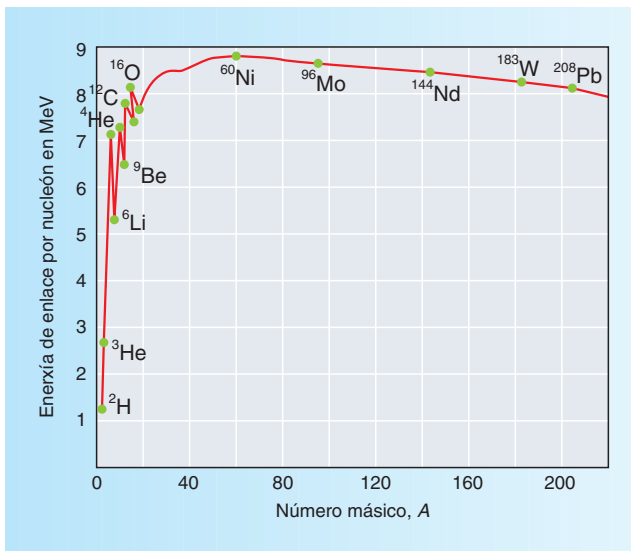
$$\frac{1}{V_{\text{núcleo}}} \approx 10^{14} \frac{1}{V_{\text{átomo}}} \rightarrow V_{\text{átomo}} \approx 10^{14} \cdot V_{\text{núcleo}} \rightarrow \frac{4}{3} \pi \cdot R_{\text{átomo}}^3 \approx 10^{14} \frac{4}{3} \pi \cdot R_{\text{núcleo}}^3 \rightarrow$$

$$R_{\text{átomo}}^3 \approx 10^{14} R_{\text{núcleo}}^3 \rightarrow R_{\text{átomo}} \approx 4,6 \cdot 10^4 R_{\text{núcleo}}$$

Para ver o significado deste defecto de masa recordemos a equivalencia entre masa e enerxía, segundo a fórmula de Einstein (1905): $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$, onde $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ é a velocidade da luz no baleiro.

Se Δm representa a variación de masa do núcleo dun átomo, ao produto $\Delta m \cdot c^2$ correspóndelle a enerxía liberada na formación dese núcleo a partir dos seus constituíntes e denomínase **enerxía de enlace**. Representa a enerxía mínima que hai que subministrar a un núcleo para descompoñelo nos seus nucleóns.

Ao cociente entre a enerxía de enlace dun núcleo e o número de nucleóns que posúe é a **enerxía de enlace por nucleón**. Representa a enerxía necesaria para extraer un nucleón do núcleo e indica o seu grao de estabilidade: canto maior sexa a enerxía de enlace por nucleón maior estabilidade.



A representación da enerxía de enlace por nucleón en función do número de masa indícanos que a enerxía aumenta rapidamente na zona dos elementos máis lixeiros (para A desde 1 até 20), a continuación segue aumentando máis lentamente até alcanzar o valor máximo ao redor de $A = 56$. E, por último, para valores maiores de A, a enerxía por nucleón diminúe lentamente. Vemos que os núcleos máis pesados (caso do U, Pu, ...) cando se dividan en núcleos máis lixeiros –fisión– (Kr, Ba, ...) liberarán enerxía no proceso.

De igual maneira, a unión de núcleos lixeiros (H, ...) para formar outros máis pesados (He, ...) –fusión– tamén vai acompañada de liberación de enerxía.

Exercicio resolta

- ▶ Calcula o defecto de masa e a enerxía de enlace nuclear do helio. Datos: ${}^4_2\text{He} = 4,002603$, $m_e = 5,486 \cdot 10^{-4} \text{ u}$, $m_p = 1,007276 \text{ u}$, $m_n = 1,008665 \text{ u}$, $1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Solución:

Calculamos primeiramente a masa do núcleo de helio restándolle á masa do átomo a masa dos electróns que posúe:

$$4,002603 - 2 \cdot 5,486 \cdot 10^{-4} = 4,001506 \text{ u}$$

Agora obtemos a masa de dous protóns e dous neutróns, que son os nucleóns que posúe o helio:

$$2 \cdot 1,007276 + 2 \cdot 1,008665 = 4,031882 \text{ u}$$

O defecto de masa nuclear é: $4,031882 - 4,001506 = 0,030376 \text{ u}$, correspondéndolle a enerxía de enlace nuclear:

$$0,030376 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 4,5382 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

- Calcula o defecto de masa nuclear, a enerxía de enlace nuclear expresada en xulios e en eV e a enerxía de enlace por nucleón do $^{55}_{25}\text{Mn}$. Datos: Masa atómica relativa do $^{55}\text{Mn} = 54,93800$, $m_e = 0,0005486$ u; $m_p = 1,007276$ u, $m_n = 1,008665$ u; $1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg; carga $e^- = -1,602 \cdot 10^{-19}$ C.

Solución:

Ao igual que no exercicio anterior, o defecto de masa podémolo coñecer calculando primeiramente a masa do núcleo de magnesio e restándolle despois a masa dos nucleóns que o forman. O ^{55}Mn ten 30 neutróns e 25 electróns e protóns. Se á masa atómica do magnesio lle restamos a masa de 25 electróns, obtemos a masa do núcleo:

$$54,93800 - 25 \cdot 0,0005486 = 54,92429 \text{ u}$$

A masa de 25 protóns e 30 neutróns é:

$$25 \cdot 1,007276 + 30 \cdot 1,008665 = 55,44185 \text{ u}$$

O defecto de masa é:

$$55,44185 - 54,92429 = 0,51756 \text{ u}$$

A enerxía de enlace nuclear é:

$$E = m \cdot c^2 = 0,51756 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 7,7322 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

O eV é a enerxía que adquire un electrón cando se somete á diferenza de potencial de 1 voltio ($W = Q \cdot V = e \cdot V$). Se relacionamos a carga do electrón coa unidade de carga no SI, teremos expresados os xulios (J) en unidades de eV:

$$E = 7,7322 \cdot 10^{-11} \text{ C V} = 7,7322 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1}{1,602 \cdot 10^{-19}} \text{ eV} = 4,8266 \cdot 10^8 \text{ eV}$$

A enerxía de enlace por nucleón será a enerxía de enlace de 1 núcleo dividida polo número de nucleóns (25 protóns + 30 neutróns):

$$\frac{4,8266 \cdot 10^8}{55} = 8,776 \cdot 10^6 \frac{\text{eV}}{\text{nucleón}}$$

3. DESINTEGRACIONES α , β E γ

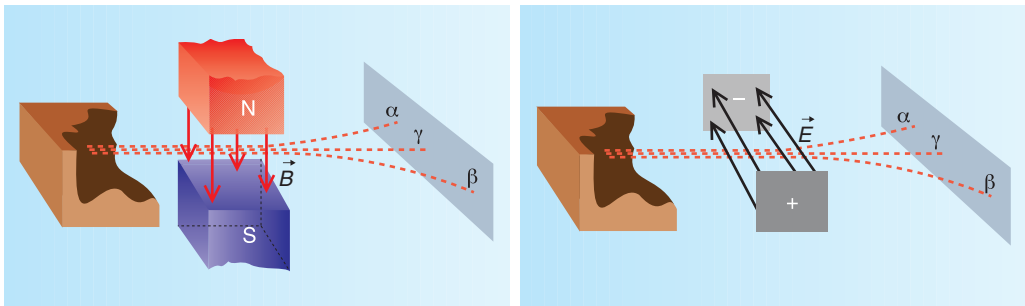
Enténdese por **desintegración radioactiva**, ou **radioactividade natural**, o fenómeno consistente na emisión espontánea de partículas ou fotóns por parte dalgunhas substancias. Foi Becquerel, no ano 1896, quen observou por primeira vez este fenómeno ao darse conta de que certos sales de uranio ennegrecían –impresionaban– as placas fotográficas (aínda que estas estivesen na total escuridade).

Ao principio pensábase que o uranio era a única substancia radioactiva, pero dous anos máis tarde, 1898, o matrimonio Curie descubriu un novo elemento radioactivo: o polonio. Nese mesmo ano encontran tamén o radio. En 1904 xa se coñecían unha vintena de elementos radioactivos, grazas fundamentalmente a Rutherford e Soddy.

Cando as radiacións emitidas por unha substancia radioactiva se fan pasar a través dun campo magnético, obsérvase que:

- Parte se desvía lixeiramente nun sentido.
- Parte se desvía máis fortemente en sentido contrario.
- E parte non sofre desviación ningunha.

Rutherford distinguiu estes tres compoñentes cos nomes de raios alfa (α), raios beta (β) e raios gamma (γ), respectivamente.



Estas mesmas desviacións obsérvanse se cambiamos o campo magnético por un campo eléctrico, \vec{E} .

Como os raios β^- se desvían no mesmo sentido que os raios catódicos, Becquerel pensou que era como se de electróns se tratara (ano 1900). Como no núcleo non hai electróns, suponse que todo sucede como se un neutrón se desintegra en: un protón, un electrón (que é a radiación β^- emitida) e un antineutrino, $\bar{\nu}$ ⁷.

Como os raios α se desvían en sentido oposto aos raios β^- e só lixeiramente, facía pensar que tiñan carga positiva e gran masa. Rutherford, no ano 1903, supón que se trataba de núcleos de helio: partículas con catro unidades de número de masa e dúas unidades de número atómico. No ano 1909 confirma experimentalmente esta suposición.

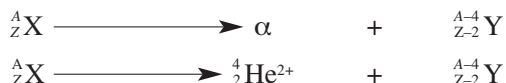
Os raios γ foron descubertos por Paul Villard no ano 1900. Como non resultaban desviados por campos eléctricos nin magnéticos, decidiuse que se trataba dunha radiación electromagnética, da mesma natureza que a luz ou os RX. Emítese cando un núcleo que se encontra nun estado excitado, que ocorre habitualmente tras producirse unha desintegración radioactiva α ou β , pasa a outro de menor enerxía.

Dado que os raios α e β son en realidade partículas, hoxe en día substitúese o termo de raio polo de **partícula** (partículas α e partículas β , respectivamente) e séguese utilizando o de **raio** (ou **radiación**) γ .

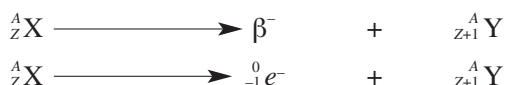
⁷ Esta nova partícula, de masa nula en repouso e sen carga, xustifícase pola necesidade de que se conserve a cantidade de movemento e a enerxía. No proceso de desintegración protónica, p^+ , aparece un neutrón, n , un positrón, e^+ , e un neutrino, ν : ${}_1^1p^+ \rightarrow {}_0^1n + {}_1^0e^+ + {}_0^0\nu$. Os núcleos que emiten partículas e^+ (tamén simbolizadas por β^+) son ricos en protóns e non existen na natureza pero, ás veces, aparecen nos procesos radioactivos artificiais.

Dadas as características das partículas α e β^- e a dos raios γ , sucede que:

- Cando un núcleo emite unha partícula α aparece un novo núcleo con dúas unidades menos de número atómico e catro de número de masa, dando lugar á aparición dun elemento diferente.



- Cando un núcleo emite unha partícula β^- aparece un novo núcleo dunha unidade máis de número atómico e de igual número máscico.



(Pensa que $n \rightarrow p + e^- + \text{antineutrino}$, sendo e^- a partícula β^- emitida, aparecendo un protón máis no núcleo)⁸.

- Cando un átomo emite un raio γ , diminúe o seu contido enerxético pero non varía o seu número atómico nin de masa.

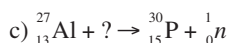
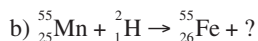
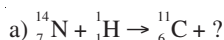


Estes tres enunciados constitúen as **leis do desprazamento radioactivo ou leis de Soddy**.

Seguindo estas regras, os núclidos radioactivos transfórmanse en novos núclidos. Con frecuencia ocorre que os núclidos obtidos son, á súa vez, radioactivos, desintegrándose a continuación até que se chega a un núclido estábel. O conxunto de núclidos radioactivos que, derivando do mesmo núclido inicial (proxenitor) e por desintegración en cadea rematan no mesmo núclido estábel, constitúen o que se chama unha **serie radioactiva**.

Exercicio resolto

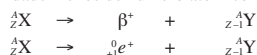
- Completa as seguintes reaccións nucleares:



Solución:

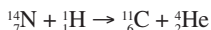
- a) A suma dos subíndices da esquerda é $7 + 1 = 8$. Nas reacción nucleares consérvase o número atómico, polo que serán iguais nos dous membros da ecuación. Como o subíndice coñecido nos produtos da reacción é 6 resulta que o número atómico da partícula que se obtén é de dúas unidades: $Z = 2$.

⁸ Hai núcleos que emiten positróns (partículas β^+) en vez de electróns (partículas β^-). O positrón é de características análogas ao electrón, pero con carga positiva: é un "electrón positivo". Os núcleos que así se desintegran convértense en novos núcleos de unha unidade menos de número atómico e de igual número máscico:



A suma dos superíndices dos reactivos é $14 + 1 = 15$. A igual que ocorre co número atómico, o número másico tamén se conserva. Polo tanto, como o superíndice coñecido do produto obtido é de 11, o número másico da partícula que se obtén é de 4 unidades: $A = 4$.

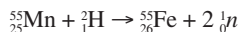
A especie química obtida nunha reacción nuclear de 2 unidades de número atómico e de 4 unidades de número másico é o núcleo do átomo de ${}^4_2\text{He}$.



b) No primeiro membro: $A = 55 + 2 = 57$; $Z = 25 + 1 = 26$.

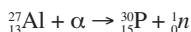
No segundo membro: $A = 55 + x = 57 \rightarrow x = 2$; $Z = 26 + y = 26 \rightarrow y = 0$.

A especie química de número atómico 0 é o neutrón, que posúe unha unidade de número másico. Polo tanto trátase de 2 neutróns.



c) Nas reaccións nucleares consérvase a carga: $13 + x = 15 + 0 \rightarrow x = 2$, e tamén se conserva o número másico: $27 + y = 30 + 1 \rightarrow y = 4$.

Trátase da partícula alfa: α , e a reacción total é:



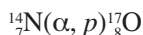
4. REACCIÓNS NUCLEARES: FISIÓN E FUSIÓN

Enténdese por reacción nuclear calquera proceso polo cal un núcleo cambia a súa composición, ben por ganancia-perda de nucleóns ou por conversión neutrón-protón. Por extensión tamén se consideran reaccións nucleares os procesos nos que un núcleo gaña ou perde enerxía sen alterar a súa composición.

A primeira reacción nuclear producida artificialmente tivo lugar no ano 1919 cando Rutherford bombardeou nitróxeno con partículas α , tendo lugar a seguinte reacción:



que en notación simplificada é:



onde N é o núcleo inicial, α a partícula incidente, p a partícula emitida e O o núcleo final⁹.

Dentro das reaccións nucleares podemos distinguir as de **fisión** e **fusión**.

A **fisión** nuclear consiste na división dun núcleo pesado en dous fragmentos (núcleos) de masa intermedia cando se bombardea cunha partícula pequena (en xeral, un neutrón). Tres exemplos de tales reaccións son:

⁹ Recordar que nas reaccións nucleares a suma dos superíndices (números de masa) e subíndices (números atómicos) e a mesma a ambos lados da ecuación. Isto significa que se conserva a carga e o número total de nucleóns; non se conserva a masa manifestándose a súa diferenza en forma de enerxía.



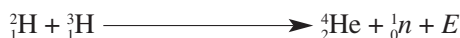
(Na fisión do uranio-235 pódense xerar até un cento de núcleos atómicos distintos).

Na reacción de fisión libérase unha gran cantidade de enerxía por conversión de masa en enerxía, segundo a ecuación de Einstein: $E = m \cdot c^2$.

Tamén aparecen novos neutróns capaces de continuar en cadea a reacción iniciada. Se esta reacción se controla temos o fundamento dos reactores nucleares, onde se produce unha gran cantidade de enerxía en forma de calor, que posteriormente se transforma en enerxía eléctrica nas centrais nucleares. Se a reacción discorre de forma incontrolada, trátase dunha bomba atómica.

O uranio máis susceptíbel de experimentar a fisión é o U-235, un isótopo pouco abundante na natureza¹⁰, polo que hai que concentralo, obtendo o que se coñece como uranio enriquecido.

As **reaccións de fusión** consisten na unión de dous núcleos lixeiros para dar outro máis pesado, sendo a masa dos produtos da reacción menor que a dos reactivos, desprendéndose durante o proceso unha enorme cantidade de enerxía. Un exemplo é:



A fusión ten a vantaxe de ser máis enerxética que a fisión e de carecer de residuos radioactivos. No entanto, non hai centrais nucleares de fusión en funcionamento de maneira análoga ás existentes de fisión. A razón está en que para que se produza a fusión é necesario que os núcleos choquen entre si a gran velocidade para vencer a repulsión coulombiana entre os núcleos, o que significa unha grande enerxía, que se consegue cando a temperatura do gas que os contén é superior a 100 millóns de graos Celsius (aparecendo o estado do plasma¹¹, é dicir: núcleos e electróns libres). Tales temperaturas danse no interior das estrelas e as reaccións de fusión que nelas teñen lugar son a orixe da enerxía que despenden.

Na actualidade existen reactores experimentais de fusión que non son rendíbeis ao consumir máis enerxía da que producen.

Unha aplicación bélica da enerxía de fusión fíxose nos anos cincuenta utilizando unha bomba de fisión (atómica) para conseguir a enerxía inicial necesaria. O resultado é a bomba H ou bomba de hidróxeno.

¹⁰ O uranio-235 representa un 0,7% nunha mostra de uranio natural, na que o uranio-238 é o isótopo máis abundante: 99,3% do total.

¹¹ Pode dicirse que o estado de plasma é como se fose un novo estado da materia, distinto dos xa coñecidos de sólido, líquido e gasoso. Para entender en que consiste este novo estado, imos tomar como exemplo a molécula de hidróxeno. A temperatura ambiente é un gas, formado por moléculas diatómicas. Se se eleva a temperatura deste gas até varios miles de graos Celsius, as moléculas rómpanse en átomos, pero se a temperatura é da orde do millón de graos, o electrón abandona o átomo, quedando separados os núcleos e os electróns, movéndose todos eles a enormes velocidades, aparecendo o estado de plasma. Como a temperatura é tan alta, aparece a dificultade de construír un recinto que, contendo o plasma, non se funda.

- No Sol ten lugar a seguinte reacción de fusión: $4\ ^1_1\text{H} \rightarrow\ ^4_2\text{He} + 2\ ^0_1e + 2\ \nu + E$, onde 0_1e é un positrón. Se as masas atómicas de ^1_1H , ^4_2He e 0_1e son, respectivamente: 1,007825, 4,002604 e 0,000549 u, estando incluídas as masas dos electróns nos dous primeiros valores; calcula a enerxía liberada ao consumirse 2 kg de hidróxeno. Datos: $1\ \text{u} = 1,66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$; $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ partículas/mol, $c = 3 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}$.

Solución:

Á temperatura á que ten lugar a reacción de fusión (centos de millóns de graos Celsius) os electróns teñen abandonados os átomos aos que pertencían, sendo soamente os núcleos dos átomos os que experimentan a reacción de fusión. Para o caso do problema, a partir de 4 núcleos de hidróxeno fórmase un núcleo de helio, desprendéndose 2 positróns, 2 neutrinos e enerxía.

$$\begin{aligned}\Delta m &= (4 m_{\text{H}} - 4 m_{e^-}) - [(m_{\text{He}} - 2 m_{e^-}) + (2 m_{\nu})] = 4 m_{\text{H}} - 4 m_{e^-} - m_{\text{He}} \\ \Delta m &= 4 \cdot 1,007825 - 4 \cdot 0,000549 - 4,002604 = 0,026500\ \text{u} \\ E &= m c^2 = 0,026500 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 3,9591 \cdot 10^{-12}\ \text{J}\end{aligned}$$

Esta enerxía é liberada na fusión de 4 átomos de hidróxeno, que equivalen a: $4 \cdot 1,007825 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} = 6,69196 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$ de hidróxeno. Polo tanto, a enerxía liberada no consumo de 2 kg será:

$$\frac{3,9591 \cdot 10^{-12} \cdot 2}{6,69196 \cdot 10^{-27}} = 1,1832 \cdot 10^{15}\ \text{J}$$

Se queremos usar o dato do número de Avogadro fariamos:

$$\begin{aligned}2\ \text{kg} &= 2000\ \text{g} \rightarrow \frac{2000}{1,007825}\ \text{mol} \rightarrow 2000 \frac{\text{mol}}{1,007825} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \frac{\text{átomos}}{\text{mol}} = \\ &= 1,195 \cdot 10^{27}\ \text{átomos de H en 2 kg}\end{aligned}$$

Agora relacionamos a enerxía liberada por 4 átomos de hidróxeno co número de átomos que hai en 2 kg que se consumen de hidróxeno:

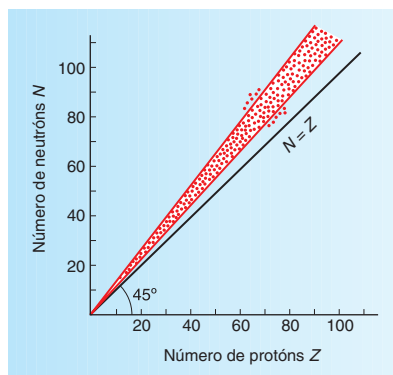
$$\frac{1,195 \cdot 10^{27} \cdot 3,9591 \cdot 10^{-12}}{4} = 1,1828 \cdot 10^{15}\ \text{J}$$

5. ESTABILIDADE NUCLEAR

Hoxe en día coñécense máis de mil núcleos diferentes dos que a cuarta parte son estábeis. Que regularidade teñen os núcleos dos átomos estábeis? Obsérvase que:

- Núcleos de número atómico par son moito máis numerosos que os de número atómico impar.
- Núcleos de número másico par son máis abundantes que os de número másico impar.
- Os núcleos estábeis teñen igual ou maior número de neutróns que de protóns (se exceptuamos ^1_1H e ^3_2He) sendo os máis abundantes aqueles para os que esta relación é menor de

1,2, non encontrándose núcleos estábeis para valores maiores de 1,6¹². No gráfico represéntase a banda de estabilidade dos núcleos. Un núcleo fóra da banda de estabilidade do gráfico tende a converterse en estábel, desintegrándose espontaneamente noutro núcleo máis próximo a esta banda. Se o núcleo está á esquerda da rexión de estabilidade é porque posúe un exceso de neutróns (ou un defecto de protóns). Polo contrario, se está a dereita é porque ten un exceso de protóns (ou unha deficiencia de neutróns).



En resumo, vemos que a estabilidade dun átomo depende da relación protón-neutrón.

6. DECAEMENTO EXPONENCIAL E VIDA MEDIA

A radioactividade consiste na emisión espontánea de partículas por parte dos núcleos de certos átomos. É un proceso aleatorio e non podemos predicir cando un determinado átomo se desintegrará e emitirá radiacións, pero podemos aplicar as leis da estatística a un gran número de átomos radioactivos.

O número de átomos que se desintegran (dN) é directamente proporcional ao número de átomos presentes (N) e ao tempo (dt).

$$dN = -\lambda \cdot N \cdot dt$$

O signo menos indica que a medida que pasa o tempo o número de átomos sen desintegrar é cada vez menor ($N_f < N_0$). A **constante de desintegración** ou **constante radioactiva**, λ , depende do tipo de substancia. Integrando obtense a lei de desintegración radioactiva:

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = \int_0^t -\lambda \cdot dt \rightarrow \ln [N]_{N_0}^N = -\lambda [t]_0^t \rightarrow N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

sendo N_0 o número de átomos sen desintegrar no instante inicial e N o número que hai no instante t . Vemos que este número diminúe exponencialmente.

Ex. resollo

- Dispónse de 64 g de ³²P radioactivo cunha constante de desintegración de $5,5 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$. Calcula as desintegracións que se producen en: a) 29,2 días e b) 1 s. Dato: $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ partículas/mol.

Solución:

O número de desintegración nun tempo obtense restando ao número de átomos iniciais o número de átomos que quedan ao transcorrer ese tempo: $-\Delta N = N_0 - N_f = N_0 - N_0 \cdot e^{-\lambda t} = N_0 \cdot (1 - e^{-\lambda t})$.

¹² Os núcleos de número atómico pequeno posúen aproximadamente o mesmo número de protóns que de neutróns, mentres que a medida que vai aumentando o número atómico, o número de neutróns é maior que o de protóns para diminuír a repulsión eléctrica entre os protóns. Cando a relación neutróns/protóns é demasiado grande, o núcleo é inestábel e estabilízase convertendo un neutrón en un protón e un electrón (máis un antineutrino).

a) Empezamos calculando o número de átomos iniciais:

$$N_0 = \frac{64}{32} \text{ mol } 6,022 \cdot 10^{23} \frac{\text{átomos}}{\text{mol}} = 1,204 \cdot 10^{24} \text{ átomos}$$

Número de desintegracións que se producen en 29,2 días é:

$$-\Delta N = 1,204 \cdot 10^{24} \cdot (1 - e^{-(5,5 \cdot 10^{-7} \cdot 29,2 \cdot 24 \cdot 3600)}) = 9,03 \cdot 10^{23} \text{ desintegracións}$$

b) O número de desintegracións que se producen en 1 s é:

$$-\Delta N = 1,204 \cdot 10^{24} \cdot (1 - e^{-(5,5 \cdot 10^{-7} \cdot 1)}) = 6,62 \cdot 10^{17} \text{ desintegracións}$$

$\left| \frac{dN}{dt} \right| = -\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N$ é a chamada **actividade**, A , ou **velocidade de desintegración** da

substancia e representa o número de desintegracións que ocorren en cada unidade de tempo. No SI a súa unidade é o **becquerel** (Bq) que é a actividade dunha substancia que estatisticamente produce unha desintegración por segundo. Anteriormente ao Bq definiuse o **curio**, **Ci**, que é a actividade dun gramo de radio (produce $3,7 \cdot 10^{10}$ desintegracións por segundo).

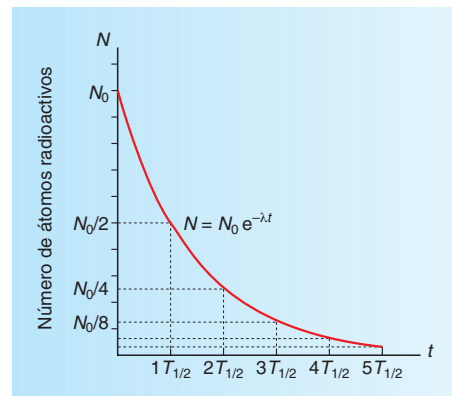
Se multiplicamos pola constante radioactiva λ os dous membros da expresión da desintegración radioactiva resulta: $\lambda \cdot N = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$. Co concepto de actividade, esta igualdade podémola escribir como: $A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$, vendo que a actividade decrece exponencialmente co tempo.

Defínese o **período de semidesintegración**, $T_{1/2}$, como o tempo necesario para que unha substancia radioactiva se reduza á metade. É dicir, para $t = T_{1/2} \Rightarrow N = N_0/2$ e, en consecuencia:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot T_{1/2}}$$

Tomando logaritmos neperianos:

$$\ln \frac{1}{2} = -\lambda \cdot T_{1/2} \rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$



O período de semidesintegración dunha substancia radioactiva é sempre o mesmo.

Exercicio resollo

► No exercicio anterior calcula o período de semidesintegración e, para o caso a), os gramos de substancia desintegrada, comparando este resultado co que se obtén a partir do concepto de período de semidesintegración.

Solución:

A relación do período de semidesintegración, $T_{1/2}$, coa constante radioactiva, λ , é: $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{5,5 \cdot 10^{-7}} = 1,26 \cdot 10^6 \text{ s} = 14,6 \text{ días}$$

O número de átomos que se desintegran en 29,2 días é:

$$-\Delta N = N_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t} \right) = 1,204 \cdot 10^{24} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{14,6} \cdot 29,2} \right) = 9,03 \cdot 10^{23} \text{ desintegracións}$$

Esta cantidade de $9,03 \cdot 10^{23}$ átomos desintegrados corresponde a:

$$\frac{9,03 \cdot 10^{23} \text{ átomos}}{6,022 \cdot 10^{23} \text{ átomos/mol}} \cdot 32 \text{ g/mol} = 48,0 \text{ g}$$

Nun tempo $T_{1/2} = 14,6$ días desintégrose a metade da mostra. Como o tempo de $t = 29,2$ días é dúas veces o período de semidesintegración ($t/T_{1/2} = 29,2/14,6 = 2$) a cantidade de substancia que se desintegra é:

$$\frac{N_0}{2} + \frac{N_0/2}{2} = \frac{64}{2} + \frac{64/2}{2} = 48 \text{ g}$$

resultado que coincide co obtido anteriormente.

O período de semidesintegración non debe de confundirse coa **vida media**, τ , que é o tempo de vida medio de todos os átomos presentes. Obtense sumando a vida de todos os átomos e dividindo polo seu número.

Para achar o tempo total de vida da mostra, consideramos que se en $t = 0$ hai N_0 núcleos e en $t = t$ hai N núcleos; os núcleos desintegrados en t segundos son $N - N_0 = \Delta N \rightarrow dN$ (cando as variacións son moi pequenas). Cada un destes núcleos desintegrados viviu t segundos e o tempo total vivido polos $N - N_0$ núcleos que se desintegran é: $t \cdot dN$. Se integramos para valores de N entre N_0 e 0, obtemos o tempo total vivido polos núcleos totais da mostra: $\int_{N_0}^0 t \cdot dN$. Se agora dividimos polo número total de átomos temos a **vida media**:

$$\tau = \frac{\int_{N_0}^0 t \, dN}{N_0}$$

Nesta integral hai dúas variábeis. Pasamos a escribir unha en función da outra. Como o número de átomos que se desintegran (dN) é directamente proporcional ao número de átomos presentes (N) e ao tempo (dt), temos:

$$dN = -\lambda \cdot N \cdot dt$$

e como o número de átomos presentes nun instante concreto vén dado pola expresión: $N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$, resulta:

$$dN = -\lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot dt$$

A expresión que nos serve para calcular a vida media é:

$$\tau = -\frac{1}{N_0} \int_0^\infty \lambda N_0 e^{-\lambda t} t \, dt = -\lambda \int_0^\infty t e^{-\lambda t} \, dt$$

que ao integrar por partes¹³ resulta: $\tau = \frac{1}{\lambda}$.

¹³ Fágase $t = u$ e $dv = \lambda e^{-\lambda t} dt$, co que resulta: $du = dt$ e $v = -e^{-\lambda t}/\lambda$.

A integral tómasse desde 0 até ∞ xa que a desintegración é un proceso ao azar e un determinado átomo pode vivir un tempo “ t ” comprendido entre 0 e ∞ .

Vemos que a vida media é a inversa da constante de desintegración e ao relacionala co período de semidesintegración $\left(T = \frac{\ln 2}{\lambda}\right)$ resulta que: $T_{1/2} = \ln 2 \cdot \tau$.

Exercicio resolto

- 0^{234}_{90}Th ten un período de semidesintegración de 24,1 días. Cal é a constante de desintegración deste núcleo?

Solución:

Sabemos que: $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$. Por tanto, despegando na igualdade, resulta:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0,693}{24,1} = 0,0288 \text{ días}^{-1}$$

Exercicio resolto

- Unha mostra radioactiva ten unha actividade de 2000 desintegracións por segundo nun instante determinado e unha actividade de 400 desintegracións por segundo 90 minutos máis tarde. Calcula a constante de desintegración desta substancia radioactiva.

Solución:

A velocidade de desintegración radioactiva dunha substancia é: $-\frac{dN}{dt} = \left|\frac{dN}{dt}\right| = \lambda \cdot N$, onde N

é o número de núcleos presentes, t o tempo de desintegración e λ a constante de desintegración.

Cos datos do problema podemos escribir:

$$-\frac{dN}{dt} = 2000 = \lambda \cdot N$$

$$-\frac{dN}{dt} = 400 = \lambda \cdot N' = \lambda \cdot N \cdot e^{-\lambda t}$$

Dividindo as dúas ecuación anteriores resulta:

$$\frac{2000}{400} = \frac{1}{e^{-\lambda t}} = e^{\lambda t} \rightarrow \ln\left(\frac{2000}{400}\right) = \lambda \cdot 90 \cdot 60 \rightarrow \lambda = 2,98 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

7. PARTÍCULAS ELEMENTAIS E FORZAS FUNDAMENTAIS

Se as propiedades dunha partícula se poden explicar teoricamente supoñendo que está composta por partículas máis elementais, considérase que a partícula non é elemental.

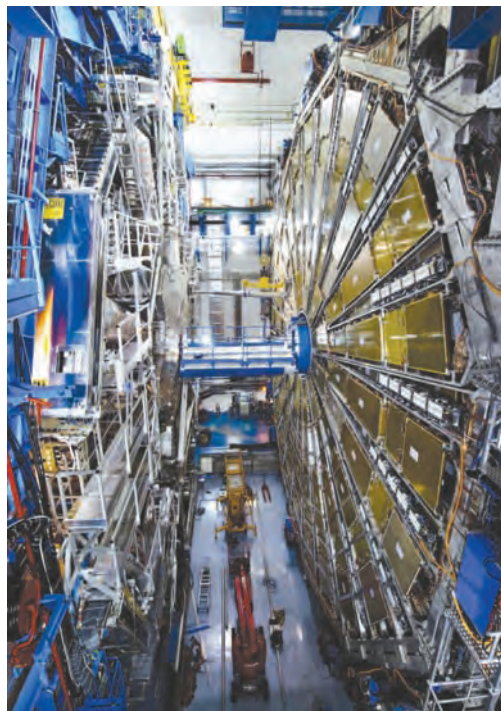
Á metade da década de 1930 pensábase que as partículas entón coñecidas: protón, neutrón, electrón, neutrino, positrón e fotón, eran partículas elementais. Nas décadas posteriores, o

descubrimiento de novas partículas aumenta considerabelmente. De acordo coa súa interacción dominante, clasifícanse en catro grupos:

- **Leptóns.** A este grupo pertence o electrón, o muón, o tauón (partícula tau) e os seus tres correspondentes neutrinos.
- **Barións.** Neste grupo, entre outras moitas partículas, podemos citar o protón e o neutrón.
- **Mesóns.** Como o pión, o kaón etc.
- **Bosóns portadores.** A este grupo pertence o fotón.

Os barións e os mesóns experimentan as catro interaccións: forte, débil, electromagnética e gravitatoria e, por esta razón, coñécese colectivamente como **hadróns**. Os leptóns non son sensíbeis ás interaccións fortes.

Resulta lóxico pensar que todas estas diferentes partículas, que proveñen do núcleo ao interaccionar con partículas enerxéticas, non poden ser os compoñentes máis elementais da materia. En 1964 e de forma independente, os físicos George Zweig e M. Gell-Mann propoñen que os hadróns están formados por compoñentes máis pequenos, que Gell-Mann chamou **quarks** (hoxe en día acéptase a existencia de seis tipos de quarks). Os barións están compostos por tres quarks e os mesóns son combinación dun quark e un antiquark.



O LHC (Gran Colisionador de Hadróns) é un acelerador de partículas creado polo CERN (Centro Europeo de Investigación Nuclear), cerca de Xenebra (Suíza).

Actualmente considérase que as partículas elementais son os quarks e os leptóns, ademais das súas correspondentes antipartículas e as partículas portadoras das interaccións entre elas (bosóns portadores). Estas partículas portadoras, xunto á interacción en que participan, son as que se indican na seguinte táboa:

INTERACCIÓN	PORTADORES	PARTÍCULAS ELEMENTAIS SOBRE AS QUE ACTÚAN
Gravitacional	Gravitón	Leptóns e Quarks
Débil	W⁺, W⁻, Z⁰	Leptóns e Quarks
Electromagnética	Fotón	Leptóns* e Quarks
Forte	Gluón	Quarks

* Os leptóns neutros, neutrinos, non experimentan as interaccións electromagnéticas

Na natureza existen **catro interaccións** (ou forzas) **fundamentais**. Son:

A **gravitacional**. É a máis débil de todas as interaccións e afecta a todas as partículas que posúen masa. Para que a súa influencia sexa considerable é necesario que as masas involucradas sexan grandes. Se ben é a forza preponderante a escala macroscópica, a nivel das partículas elementais é desprezable en relación ás outras interaccións.

A **electromagnética**. Afecta a todas as partículas que posúen carga eléctrica. Grazas a ela pódense explicar os fenómenos eléctricos, os magnéticos, a interacción entre a luz e a materia, as ondas electromagnéticas, a estrutura interna da materia a escala atómica e molecular, así como a química.

A **forte**, tamén coñecida como **nuclear forte**. É a interacción máis intensa. Debido á carga positiva dos protóns, para que estes se encontren estábeis no núcleo debe existir unha forza que os reteña máis *forte* que a electromagnética. A interacción forte é a responsábel de manter unidos os protóns e neutróns que subsisten no núcleo atómico, vencendo a repulsión electromagnética entre os protóns, á vez que fai que os neutróns permanezan unidos entre si, o mesmo que aos protóns.

A **débil**, tamén coñecida como **nuclear débil**. É moito máis intensa que a gravitatoria pero menos que a electromagnética. Existen 6 clases de quarks e 6 tipos de leptóns, pero toda a materia estábel está composta unicamente por dúas clases de quarks (que son os de menor masa) e o electrón (as demais partículas só se observan na radiación cósmica que alcanza a Terra e nos laboratorios de alta enerxía). Isto débese aos decaementos, desaparecendo a partícula que decae e, á súa vez, aparecen novas partículas de menor masa. A interacción débil é a responsábel de que ocorran os decaementos dos quarks e leptóns máis masivos cara aos menos masivos.

Aínda que é habitual falar de catro tipos de interacción, recordaremos que a electromagnética e a débil están unificadas na **electrodébil**. Esta unificación foi postulada en 1960 por Glashow, Salam e Weinberg.


EXERCICIOS
(cuestións)

1. Mapa conceptual dos contidos do tema.
2. Os raios γ rompen o núcleo de ${}^9_4\text{Be}$ para formar ${}^8_3\text{Li}$. Que outra partícula se obtén e por que? (*Selectividade COU; setembro 94*).
3. A masa dos núcleos dos átomos non coincide exactamente coa masa dos nucleóns constituíntes. Por que? (*Selectividade COU; xuño 93*).
4. Analoxías e diferenza entre fisión e fusión nuclear. (*Selectividade COU; xuño 93*).
5. É o mesmo a vida media dunha substancia radioactiva que o período de semidesintegración? Que relación gardan?
6. A distancia á que están os protóns no núcleo atómico é moi pequena e, en consecuencia, a repulsión coulombiana é moi grande; como se xustifica a estabilidade nuclear?
7. Que tipo de forzas manteñen unidas as partículas do núcleo dun átomo?
8. Os procesos de fusión e fisión nuclear van acompañados de grandes cantidades de enerxía. Por outro lado, cando se queima unha determinada cantidade de butano, tamén se desprende enerxía. En ambos casos, de onde procede esta enerxía?
9. Fai unha representación gráfica da actividade dunha substancia radioactiva en función do tempo.
10. Se coñeces o número de desintegracións dunha substancia radioactiva que se produce nun tempo t , para un tempo dobre ($2t$), poderemos obter o número de desintegracións multiplicando por 2 o número de desintegracións que teñen lugar no tempo t ?
11. Como se interpreta o feito de que un núcleo atómico emita partículas beta (${}^0_{-1}e$) se no núcleo só existen protóns e neutróns?
12. Indica o número de protóns e de neutróns que compoñen os seguintes núcleos: ${}^{35}_{17}\text{Cl}$, ${}^{37}_{17}\text{Cl}$, ${}^{238}_{92}\text{U}$, ${}^{235}_{92}\text{U}$, ${}^{20}_{10}\text{Ne}$. Algúns destes átomos son isótopos?
13. Transcorrido un tempo igual ao da vida media, a actividade dunha substancia radioactiva redúcese nunha porcentaxe. De entre as seguintes opcións elixe a que consideres correcta: a) 50,0%, b) 36,8%, c) non se pode saber sen coñecer a cantidade de substancia radioactiva.
14. Responde á cuestión anterior para un tempo igual ao do período de semidesintegración.
15. Dunha mostra orixinal de N_0 kg dunha substancia radioactiva, transcorrido un tempo dobre ao do seu período de semidesintegración, quedan sen desintegrar: a) $3/4 N_0$ kg; b) $2/3 N_0$ kg; c) $1/2 N_0$ kg; d) $1/4 N_0$ kg. Elix a opción que consideres correcta.
16. Se o período de semidesintegración do radio é de 1590 anos, a súa vida media é: a) $\tau = 2293,9$ anos; b) $\tau = 795,0$ anos; c) $\tau = 4,36 \cdot 10^{-4}$ anos $^{-1}$; d) $\tau = 2293,9$ anos $^{-1}$. Elix a opción que consideres correcta.
17. Ao bombardear núcleos de ${}^9_4\text{Be}$ con partículas α obtense ${}^{12}_6\text{C}$. Escribe a reacción nuclear correspondente.

18. Unha substancia radioactiva desintégrese segundo a expresión: $N = N_0 e^{-(7,913 \cdot 10^{-4} \cdot t)}$, en unidades do SI. Calcula o seu período de semidesintegración.
19. A actividade dunha substancia radioactiva pasa a valer nun tempo t o valor de $1/16$ do seu valor inicial: $A = A_0/16$. Se a súa vida media é de 199,1 segundos, di cal das seguintes opcións che parece a correcta para o valor de t : a) 138 días⁻¹; b) $5,02 \cdot 10^{-3}$ días; c) 552 s; d) 3185,6 días.
20. A actividade dun elemento radioactivo pasa a valer $1/64$ do seu valor inicial despois de transcorrer 48 s. En consecuencia, o seu período de semidesintegración é: a) 48 s; b) 8 s; c) 0,087 s.. Elixo de forma razoada a opción que consideres correcta.
21. Contesta razoadamente se a relación entre a actividade dunha substancia radioactiva no instante t e t' coincide coa relación do número de átomos desta substancia neses mesmos instantes (t e t').



EXERCICIOS (problemas)

1. Calcula a variación de enerxía correspondente á reacción seguinte: ${}^6_3\text{Li} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^3_1\text{H} + {}^4_2\text{He}$, sabendo que a masa atómica relativa dos átomos ${}^6\text{Li}$, ${}^3\text{H}$ e ${}^4\text{He}$, respectivamente, é: 6,01513; 3,01700 e 4,00388.
Datos: $m_n = 1,008665$ u, $1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg.

Solución:

Xa que o número de electróns é o mesmo á esquerda e á dereita da reacción, non descontaremos a masa dos electróns á masa dos átomos.

A masa da primeira parte da ecuación é:

$$6,01513 + 1,008665 = 7,023795 \text{ u}$$

A masa da segunda parte da ecuación é:

$$3,01700 + 4,00388 = 7,02088 \text{ u}$$

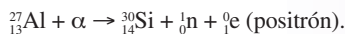
Por tanto, hai unha “desaparición” de masa de valor:

$$7,023795 - 7,02088 = 0,002915 \text{ u por átomo de Li.}$$

A esta cantidade de masa, segundo a ecuación de Einstein de conversión masa–enerxía, correspóndelle a enerxía de:

$$E = m \cdot c^2 = 0,002915 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \cdot 3^2 \cdot 10^8 = 4,355 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

2. Calcula a enerxía que se libera na reacción nuclear seguinte:



Datos: Masas atómicas relativas: ${}^{27}\text{Al} = 27,0114$; ${}^4\text{He} = 4,003880$; ${}^{30}\text{Si} = 30,00134$; $m_e = 0,0005486$ u; $m_n = 1,008665$ u; $1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg.

Solución:

A diferenza do exercicio anterior, neste caso non se pode facer unha diferenza de masas de átomos completos, xa que non hai unha igualación de electróns á esquerda e á dereita da ecuación. No primeiro

membro hai 15 electróns (13 do Al e 2 do He) mentres que no segundo hai 14 (os do Si). Representando por M as masas atómicas e por m_e e m_n as masas do electrón e neutrón, respectivamente, temos:

$$\begin{aligned}\Delta m &= [(M_{27\text{Al}} - 13 m_e) + (M_{4\text{He}} - 2 m_e)] - [(M_{30\text{Si}} - 14 m_e) + m_n + m_e] = \\ &= (M_{27\text{Al}} + M_{4\text{He}}) - M_{30\text{Si}} - 2 m_e - m_n = \\ &= 27,0114 + 4,003880 - 30,00134 - 2 \cdot 0,0005486 - 1,008665 = 0,004178 \text{ u}\end{aligned}$$

Esta cantidade de masa cando se converte en enerxía equivale a:

$$E = m \cdot c^2 = 0,004178 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 6,242 \cdot 10^{-13} \text{ J/átomo de } ^{27}\text{Al}$$

3. Calcula a enerxía liberada por mol de litio na reacción nuclear seguinte: ${}^7\text{Li} + {}^1\text{H} \rightarrow 2 {}^4\text{He}$

Datos: masa atómica relativa ${}^7\text{Li} = 7,01596$; ${}^4\text{He} = 4,00386$; ${}^1\text{H} = 1,00783$.

Solución:

A cantidade de masa convertida en enerxía é:

$$\Delta m = 7,01596 + 1,00783 - 2 \cdot 4,00386 = 0,01607 \text{ u por átomo de Li} = 0,01607 \text{ g por mol de Li.}$$

Esta masa convertida en enerxía equivale a:

$$E = m \cdot c^2 = 0,01607 \cdot 10^{-3} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 1,4463 \cdot 10^{12} \text{ J}$$

4. Ao bombardear o ${}^{24}\text{Mg}$ con partículas alfa obtense ${}^{27}\text{Al}$ e 1 protón. Calcula a enerxía da reacción cando se consumen 2 moles de magnesio. Datos: masa atómica relativa ${}^{24}\text{Mg} = 23,9924$; ${}^{27}\text{Al} = 26,9899$; ${}^4_2\text{He} = 4,0039$; ${}^1_1\text{H} = 1,00783$; $m_e = 5,486 \cdot 10^{-4} \text{ u}$; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$; $1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$; $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ partículas/mol

R: $E = -2,574 \cdot 10^{11} \text{ J}$

5. O ${}^{222}_{86}\text{Rn}$ ten un período de semidesintegración de 3,82 días. Canto tempo tarda unha mostra de 20 g deste elemento en reducirse a 4 g?

Solución:

A ecuación que nos relaciona o número de átomos finais (N) e iniciais (N_0), dunha substancia radioactiva, co tempo (t), a través da constante de desintegración (λ) é: $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$

Fáltanos coñecer λ , que calculamos coa expresión: $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$

$$\lambda = 0,693/3,82 \text{ días} = 0,1814 \text{ días}^{-1}$$

Substituíndo na ecuación do decaemento exponencial resulta:

$$\frac{4 \cdot N_A}{M({}^{222}\text{Rn})} = \frac{20 \cdot N_A}{M({}^{222}\text{Rn})} e^{-0,1814 t} \rightarrow 4 = 20 e^{-0,1814 t} \rightarrow t = 8,87 \text{ días}$$

6. O ${}^{222}_{86}\text{Rn}$ ten unha constante radioactiva $\lambda = 2,1 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$. Se dispoñemos de 2 mg desta substancia, cantos átomos se desintegran durante o sétimo día? Datos: $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ partículas/mol.

R: $N_p = 3,03 \cdot 10^{17}$ (átomos desintegrados).

7. Sabendo que o período de semidesintegración do ${}^{90}_{38}\text{Sr}$ é de 28 anos, calcula: a) a actividade de 200 g desta substancia e b) o tempo necesario para que se desintegre o 87,5% da mostra orixinal. Dato: $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ partículas/mol.

R: a) $A = 1,051 \cdot 10^{15} \text{ Bq}$; b) $t = 84$ anos.

8. Calcula a actividade de 5 mg de $^{212}_{83}\text{Bi}$ sabendo que o período de semidesintegración é de 60,5 minutos. Cantos átomos se desintegran no primeiro segundo? Dato: $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ partículas/mol.

R: $A = 2,7120 \cdot 10^{15}$ Bq; $-\Delta N = -(N_f - N_0) = 2,7118 \cdot 10^{15}$ átomos.

9. No momento da súa preparación, unha mostra de material contén 500 millóns de núcleos radioactivos, dos que a vida media é de 30 s. a) Di que é o período de semidesintegración, $T_{1/2}$, e calcula canto vale para a mostra; b) determina o número de núcleos radioactivos na mostra despois de 15 s. (*Selectividade COU; set 02*).

R: a) $T_{1/2} = 20,8$ s; b) $N = 3,03 \cdot 10^8$ núcleos.

10. O período de semidesintegración do polonio-210 é de 138 días. a) Canto vale a constante radioactiva do polonio? b) Cantos días tardará en desintegrarse o noventa por cento da mostra inicial? (*Selectividade COU; xuño 00*).

R: $\lambda = 5,023 \cdot 10^{-3}$ días $^{-1}$; b) $t = 458,41$ días.

11. Dispónse de 1 mol de ^{32}P radioactivo de período de semidesintegración de 14,6 días. a) Cantas desintegracións por segundo se producen? b) Cantos días tardará en desintegrarse o 90% do material? (*Selectividade COU; xuño 99*).

R: a) $A = 3,309 \cdot 10^{17}$ desintegracións/s; b) $t = 48,5$ días.

12. Sitúase un detector de radioactividade fronte a unha mostra radioactiva que posúe un período de semidesintegración de 60 s. No instante $t = 0$ o detector marca unha velocidade de desintegración de 2000 contas/s. Calcula: a) a constante de desintegración ou radioactiva λ , e b) a velocidade de desintegración ao cabo de 1 minuto. (*Selectividade COU; xuño 98*).

R: $\lambda = 0,012$ s $^{-1}$; b) $A = 973,5$ contas/s.

13. Un miligramo de $^{60}_{27}\text{Co}$ desintégrese de acordo coa reacción:



sendo o período de semidesintegración igual a 3,5 anos. Acha: a) a enerxía desprendida, e b) o número de desintegracións por segundo no momento inicial. Datos: $m_{\text{Co}} = 59,919010$, $m_{\text{Ni}} = 59,915439$ e $m_e = 5,486 \cdot 10^{-4}$ u, sendo $u = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg. Velocidade da luz no baleiro, $c = 3,00 \cdot 10^8$ m s $^{-1}$. (*Selectividade COU; set. 96*).

R: a) $E = 5,3637 \cdot 10^6$ J; b) $\left| \frac{dN}{dt} \right| = 6,3138 \cdot 10^{10}$ desintegracións/s

14. Unha mostra de material radioactivo contén 500 millóns de núcleos radioactivos. A vida media é de 30 s. Determina: a) o número de núcleos radioactivos que existen na mostra despois de 15 s, e b) a constante λ de decaemento exponencial, ou constante radioactiva, do núcleo. (*Selectividade COU; xuño 92*).

R: a) $N = 3,03 \cdot 10^8$ núcleos; $\lambda = 1/30$ s $^{-1}$



Razoa as respostas ás seguintes cuestións:

- ❖ O $^{237}_{94}\text{Pu}$ desintégrese, emitindo partículas alfa, cun período de semidesintegración de 45,7 días. Os días que deben transcorrer para que a mostra inicial se reduza á oitava parte son: a) 365,6; b) 91,4; c) 137,1. (*Setembro 08*).
- ❖ Un isótopo radioactivo ten un período de semidesintegración de 10 días. Se se parte de 200 g do isótopo, teranse 25 g deste ao cabo de: a) 10 días; b) 30 días c) 80 días. (*Xuño 08*).
- ❖ Cal destas reaccións nucleares é posíbel?: a) $^2_1\text{H} + ^3_1\text{H} \rightarrow ^4_2\text{He}$; b) $^{14}_7\text{N} + ^4_2\text{He} \rightarrow ^{17}_8\text{O} + ^1_1\text{H}$; c) $^{235}_{92}\text{U} + ^1_0\text{n} \rightarrow ^{141}_{56}\text{Ba} + ^{92}_{36}\text{Kr} + 2^1_0\text{n}$. (*Xuño 07*).
- ❖ Se un núcleo atómico emite unha partícula α e dúas partículas β , o seu número atómico: a) diminúe en dúas unidades; b) aumenta en dúas unidades, c) non varía. (*Xuño 07*).
- ❖ Cal das seguintes reaccións nucleares representa o resultado da fisión do $^{235}_{92}\text{U}$ cando absorbe un neutrón: a) $^{209}_{82}\text{Pb} + 5\alpha + 3p + 4n$; b) $^{90}_{38}\text{Sr} + ^{140}_{54}\text{Xe} + 6n + \beta$; c) $^{141}_{56}\text{Ba} + ^{92}_{36}\text{Kr} + 3n$. (*Setembro 06*).
- ❖ Cando se bombardea nitróxeno $^{14}_7\text{N}$ con partículas alfa xérase o isótopo $^{17}_8\text{O}$ e outras partículas. A reacción é: a) $^{14}_7\text{N} + ^4_2\alpha \rightarrow ^{17}_8\text{O} + p$; b) $^{14}_7\text{N} + ^4_2\alpha \rightarrow ^{17}_8\text{O} + n + \beta$; c) $^{14}_7\text{N} + ^4_2\alpha \rightarrow ^{17}_8\text{O} + p + n + \gamma$. (*Xuño 06*).
- ❖ Na desintegración β^- : a) o número atómico aumenta unha unidade; b) o número másico aumenta unha unidade; c) ambos permanecen constantes. (*Xuño 05*).
- ❖ Na seguinte reacción nuclear: $\gamma + ^9_4\text{Be} \rightarrow ^8_3\text{Li} + ^A_Z\text{X}$; a partícula ^A_ZX é: a) un protón; b) un neutrón; c) un electrón. (*Setembro 03*).
- ❖ Na seguinte reacción nuclear: $^{32}_{15}\text{P} \rightarrow ^A_Z\text{X} + ^0_{-1}\text{e}$, cales son os valores de A e Z do núcleo X?: a) A = 32, Z = 14; b) A = 31, Z = 16; c) A = 32, Z = 16. (*Setembro 02*).
- ❖ Se un núcleo atómico emite unha partícula alfa, α , dúas partículas beta, β , e dúas partículas gamma, γ , o seu número atómico: a) diminúe en dúas unidades; b) aumenta en dúas unidades; c) non varía. (*Xuño 02*).
- ❖ Se o núcleo dun elemento químico ^5_2X ($A = 5$ e $Z = 2$) ten unha masa total de 5,0324 u, a enerxía de enlace por nucleón é: a) positiva; b) negativa; c) nula. Datos: $1 \text{ u} = 1,49 \cdot 10^{-10} \text{ J}$; $m_p = 1,0072 \text{ u}$; $m_n = 1,0086 \text{ u}$. (*Xuño 02*).
- ❖ Un elemento químico $^{214}_{83}\text{X}$ que experimente sucesivamente unha emisión α , tres emisións β^- , e unha gamma γ , transformarase no elemento: a) $^{214}_{82}\text{Y}$; b) $^{210}_{84}\text{Y}$; c) $^{210}_{82}\text{Y}$. (*Setembro 00*).
- ❖ Na desintegración beta(-): a) emítese un electrón da parte externa do átomo; b) emítese un electrón desde o núcleo; c) emítese un neutrón. (*Xuño 99*).



- O ^{210}Po ten unha vida media $\tau = 199,09$ días. Calcula: a) o tempo necesario para que se desintegre o 70% dos átomos iniciais; b) os miligramos de ^{210}Po ao cabo de 2 anos se inicialmente había 100 mg. ($N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ partículas/mol). (Setembro 06).

R: a) $t = 240$ días; b) $m = 2,55$ mg.

- Nunha mostra de $^{131}_{53}\text{I}$ radioactivo cun período de semidesintegración de 8 días había inicialmente $1,2 \cdot 10^{21}$ átomos e actualmente só hai $0,2 \cdot 10^{20}$. Calcula: a) a antigüidade da mostra; b) a actividade da mostra transcorridos 50 días desde o instante inicial. (Xuño 06).

R: a) $t = 47,3$ días; b) $A_{50} = 1,6 \cdot 10^{13}$ Bq.

- O período $T_{1/2}$ do elemento radioactivo $^{60}_{27}\text{Co}$ é 5,3 anos e desintégrese emitindo partículas β ; calcula: a) o tempo que tarda a mostra en converterse no 70% da orixinal; b) cantas partículas β emite por segundo unha mostra de 10^{-6} g de $^{60}_{27}\text{Co}$? Dato: $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ partículas/mol. (Setembro 05).

R: a) $t = 2,73$ anos; b) $A = 4,16 \cdot 10^7$ Bq.

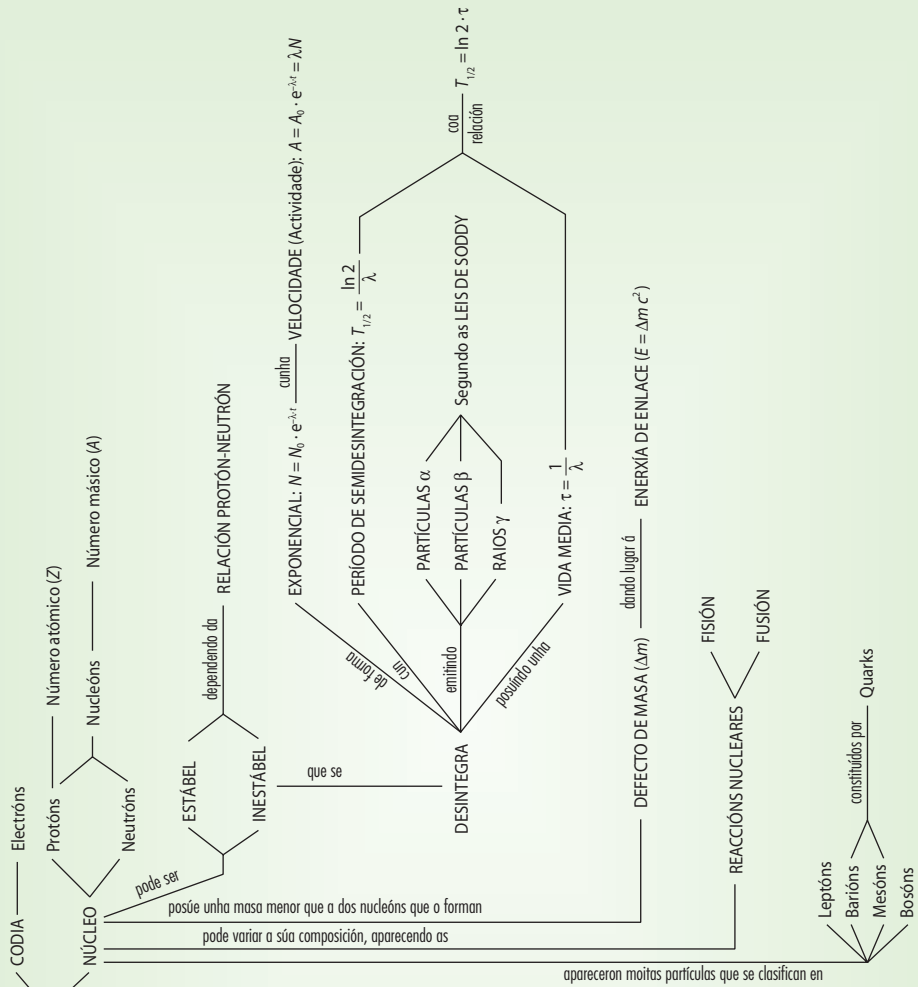
- O tritio ^3_1H é un isótopo inestábel do hidróxeno, cun período de semidesintegración $T_{1/2}$ de 12,5 anos e desintégrese emitindo unha partícula beta. Se a análise dunha mostra nunha botella de auga mostra que a actividade debida ao tritio é o 75% da que presenta a auga no manancial de orixe, calcula: a) o tempo que leva embotellada a auga da mostra; b) a actividade dunha mostra que contén 10^{-6} g de ^3_1H . Dato: $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ partículas/mol. (Setembro 04).

R: a) $t = 5,19$ anos; b) $A = 3,63 \cdot 10^8$ Bq.

- Unha mostra radioactiva diminúe desde 10^{15} a 10^9 núcleos en 8 días. Calcula: a) a constante radioactiva λ e o período de semidesintegración $T_{1/2}$; b) a actividade da mostra unha vez transcorridos 20 días desde que tiña 10^{15} núcleos. (Xuño 04).

R: a) $\lambda = 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$; $T_{1/2} = 3,5 \cdot 10^4 \text{ s}$; b) $A = 1,88 \cdot 10^{-5}$ Bq (de ser aplicábel a lei estatística da desintegración).

Mapa conceptual do Tema 11



apéndices

1. ALFABETO GREGO

NOME GREGO	LETRA GREGA	
	MINÚSCULA	MAIÚSCULA
Alfa	α	A
Beta	β	B
Gamma	γ	Γ
Delta	δ	Δ
Épsilon	ϵ	E
Dseta	ζ	Z
Eta	η	H
Zeta	θ	Θ
Iota	ι	I
Kappa	κ	K
Lambda	λ	Λ
Mi	μ	M

NOME GREGO	LETRA GREGA	
	MINÚSCULA	MAIÚSCULA
Ni	ν	N
Xi	ξ	Ξ
Ómicron	\omicron	O
Pi	π	Π
Rho	ρ	P
Sigma	σ	Σ
Tau	τ	T
Ípsilon	υ	Υ
Fi	ϕ, φ	Φ
Khi	χ	\Chi
Psi	ψ	Ψ
Omega	ω	Ω

2. DATOS DO SISTEMA SOLAR

Nome do planeta	Raio do Ecuador/m	Masa/kg	Período de rotación/s	Período orbital/s	Excentricid. da órbita	Semieixo maior/m	Número satélites
Mercurio	$2,44 \cdot 10^6$	$3,30 \cdot 10^{23}$	$5,07 \cdot 10^6$	$7,60 \cdot 10^6$	0,206	$5,79 \cdot 10^{10}$	0
Venus	$6,05 \cdot 10^6$	$4,87 \cdot 10^{24}$	$2,10 \cdot 10^7$	$1,94 \cdot 10^7$	0,007	$1,08 \cdot 10^{11}$	0
Terra	$6,38 \cdot 10^6$	$5,97 \cdot 10^{24}$	$8,62 \cdot 10^4$	$3,16 \cdot 10^7$	0,017	$1,50 \cdot 10^{11}$	1
Marte	$3,39 \cdot 10^6$	$6,42 \cdot 10^{23}$	$8,86 \cdot 10^4$	$5,94 \cdot 10^7$	0,093	$2,28 \cdot 10^{11}$	2
Xúpiter	$7,14 \cdot 10^7$	$1,90 \cdot 10^{27}$	$3,54 \cdot 10^4$	$3,74 \cdot 10^8$	0,048	$7,78 \cdot 10^{11}$	63
Saturno	$6,00 \cdot 10^7$	$5,69 \cdot 10^{26}$	$3,84 \cdot 10^4$	$9,29 \cdot 10^8$	0,056	$1,43 \cdot 10^{12}$	34
Urano	$2,61 \cdot 10^7$	$8,70 \cdot 10^{25}$	$6,20 \cdot 10^4$	$2,64 \cdot 10^9$	0,047	$2,87 \cdot 10^{12}$	27
Neptuno	$2,43 \cdot 10^7$	$1,03 \cdot 10^{26}$	$6,48 \cdot 10^4$	$5,17 \cdot 10^9$	0,009	$4,50 \cdot 10^{12}$	13
Lúa*	$1,74 \cdot 10^6$	$7,35 \cdot 10^{22}$	$2,36 \cdot 10^6$	$2,36 \cdot 10^6$	0,055	$3,84 \cdot 10^8$	—
Sol	$6,69 \cdot 10^8$	$1,99 \cdot 10^{30}$	$2,40 \cdot 10^6$	—	—	—	—

* Datos da órbita lunar con respecto á Terra.

3. NOME E SÍMBOLO DALGUNHAS MAGNITUDES FÍSICAS COAS UNIDADES DO SI

MAGNITUDE FÍSICA		UNIDADE NO SI		
NOME	SÍMBOLO	NOME	SÍMBOLO	EXPRESIÓN EN FUNCIÓN DAS UNIDADES DO SI
Aceleración lineal	a			m s^{-2}
Aceleración angular	α			$\text{s}^{-2} (\text{rad s}^{-2})$
Altura	h	metro	m	m
Ángulo plano	$\alpha, \beta, \gamma, \theta$	radián	rad	1, rad
Ángulo sólido	ω, Ω	estereorradián	sr	1, sr
Calor	q, Q	xulio	J	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$
Cantidade de substancia	n	mol	mol	mol
Cantidade de movemento	p			kg m s^{-1}
Capacidade eléctrica	C	faradio	F	$\text{A}^2 \text{s}^4 \text{kg}^{-1} \text{m}^{-2}$
Carga eléctrica	Q	coulomb	C	A s
Coefficiente lineal de absorción	a			m^{-1}
Constante de desintegración	λ			s^{-1}
Coordenadas cartesianas no espazo	x, y, z			m
Densidade (máscica)	ρ			kg m^{-3}
Densidade relativa	d			1
Enerxía	E	xulio	J	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$
Enerxía cinética	E_k, T, K	xulio	J	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$
Enerxía interna	U	xulio	J	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$
Enerxía potencial	E_p, V, ϕ	xulio	J	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$
Espazo	s	metro	m	m
Fluxo magnético	Φ	wéber	Wb	$\text{kg s}^{-2} \text{A}^{-1} \text{m}^{-2}$
Forza	F	newton	N	kg m s^{-2}
Frecuencia	ν, f	hertz	Hz	s^{-1}
Índice de refracción	n			1
Indución magnética	B	tesla	T	$\text{kg s}^{-2} \text{A}^{-1}$
Indutancia	L	henry	H	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{A}^{-2}$
Intensidade de campo eléctrico	\vec{E}			$\text{kg m}^3 \text{s}^{-3} \text{A}^{-1}$
Intensidade luminosa	I_v	candela	cd	cd
Intensidade de corrente eléctrica	I	ampere	A	A
Lonxitude	l	metro	m	m
Lonxitude de onda	λ			m
Masa	m	quilogramo	kg	kg
Masa atómica relativa	A_r			1
Masa molar relativa	M_r			1
Momento angular	L			$\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$
Momento de inercia	I			kg m^2
Número máscico	A			1
Número atómico	Z			1

MAGNITUDE FÍSICA		UNIDADE NO SI		
NOME	SÍMBOLO	NOME	SÍMBOLO	EXPRESIÓN EN FUNCIÓN DAS UNIDADES DO SI
Permeabilidade	μ			$\text{kg m s}^{-2} \text{A}^{-2}$
Período	T			s
Permitividade eléctrica	ϵ			$\text{A}^2 \text{s}^4 \text{kg}^{-1} \text{m}^{-3}$
Peso	G, W	newton	N	kg m s^{-2}
Potencia	P	vatio	W	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-3}$
Potencial eléctrico	V	voltio	V	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-3} \text{A}^{-1}$
Presión	p, P	pascal	Pa	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$
Raio	r	metro	m	m
Resistencia eléctrica	R	ohmio	Ω	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-3} \text{A}^{-2}$
Resistividade	ρ			$\text{kg m}^3 \text{s}^{-3} \text{A}^{-2}$
Superficie, área	S, A			m^2
Tempo	t	segundo	s	s
Temperatura Celsius	t	grao Celsius	$^{\circ}\text{C}$	K
Temperatura termodinámica	T	kelvin	K	K
Traballo	w, W	xulio	J	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$
Velocidade lineal	v			m s^{-1}
Velocidade angular	ω			$\text{s}^{-1} (\text{rad s}^{-1})$
Vector de posición	r			m
Volume	V			m^3

4. NOMES DOS ELEMENTOS QUÍMICOS

Ordenados alfabeticamente, cos seus símbolos, números atómicos e masas

Nome	Símbolo	Nº atómico	Masa atómica	Nome	Símbolo	Nº atómico	Masa atómica
Actinio	Ac	89	(227,0)	Lutecio	Lu	71	175,0
Aluminio	Al	13	27,0	Magnesio	Mg	12	24,3
Americio	Am	95	(243, 1)	Manganeso	Mn	25	54,9
Antimonio	Sb	51	121,8	Meitnerio	Mt	109	(268)
Argon	Ar	18	40,0	Mendelevio	Md	101	(258,1)
Arsénico	As	33	74,9	Mercurio	Hg	80	200,6
Astato	At	85	(210,0)	Molibdeno	Mo	42	95,9
Bario	Ba	56	137,3	Neodimio	Nd	60	144,2
Berilio	Be	4	9,0	Neon	Ne	10	20,2
Berquelio	Bk	97	(247,1)	Neptunio	Np	93	(237,0)
Bismuto	Bi	83	209,0	Niobio	Nb	41	92,9
Bohrio	Bh	107	(264,1)	Níquel	Ni	28	58,7
Boro	B	5	10,8	Nitróxeno	N	7	14,0
Bromo	Br	35	79,9	Nobelio	No	102	(259,1)
Cadmio	Cd	48	112,4	Osíxeno	O	8	16,0
Calcio	Ca	20	40,1	Osmio	Os	76	190,2
Californio	Cf	98	(251,1)	Ouro	Ou	79	197,0
Carbono	C	6	12,0	Paladio	Pd	46	106,4
Cerio	Ce	58	140,1	Platino	Pt	78	195,1
Cesio	Cs	55	132,9	Plutonio	Pu	94	(244,1)
Cinc (Zinc)	Zn	30	65,4	Polonio	Po	84	(209,0)
Circonio	Zr	40	91,2	Potasio	K	19	39,1
Cloro	Cl	17	35,5	Praseodimio	Pr	59	140,9
Cobalto	Co	27	58,9	Prata	Ag	47	107,9
Cobre	Cu	29	63,6	Prometio	Pm	61	144,9
Cripton	Kr	36	83,8	Protoactinio	Pa	91	231,0
Cromo	Cr	24	52,0	Radio	Ra	88	(226,0)
Curio	Cm	96	(247,1)	Radon	Rn	86	(222,0)
Chumbo	Pb	82	207,2	Renio	Re	75	186,2
Darmstadtio	Ds	110	(271)	Rodio	Rh	45	102,9
Disprosio	Dy	66	162,5	Roentgenio	Rg	111	(272)
Dubnio	Db	105	(262,1)	Rubidio	Rb	37	85,5
Einsteinio	Es	99	(252,1)	Rutenio	Ru	44	101,1
Erbio	Er	68	167,3	Rutherfordio	Rf	104	(261,1)
Escandio	Sc	21	45,0	Samario	Sm	62	150,4
Estaño	Sn	50	118,7	Seaborgio	Sg	106	(263,1)
Estroncio	Sr	38	87,6	Selenio	Se	34	79,0
Europio	Eu	63	152,0	Silicio	Si	14	28,1
Fermio	Fm	100	(257,1)	Sodio	Na	11	23,0
Ferro	Fe	26	55,9	Talio	Tl	81	204,4
Flúor	F	9	19,0	Tántalo	Ta	73	181,0
Fósforo	P	15	31,0	Tecneio	Tc	43	98,9
Francio	Fr	87	(223,0)	Telurio	Te	52	127,6
Gadolinio	Gd	64	157,2	Terbio	Tb	65	158,9
Galio	Ga	31	69,7	Titanio	Ti	22	47,9
Hafnio	Hf	72	178,5	Torio	Th	90	232,0
Hassio	Hs	108	(265,1)	Tulio	Tm	69	168,9
Helio	He	2	4,0	Ununbio*	Uub	112	(277)
Hidróxeno	H	1	1,0	Ununhexio*	Uuh	116	(289)
Holmio	Ho	67	164,9	Ununoctio*	Uuo	118	(293)
Indio	In	49	114,8	Ununquadio	Uuq	114	(289)
Iodo	I	53	126,9	Uranio	U	92	238,0
Iridio	Ir	77	192,2	Vanadio	V	23	50,9
Iterbio	Yb	70	173,0	Volframio	W	74	183,8
Itrio	Y	39	88,9	Xenon	Xe	54	131,3
Lantano	La	57	138,9	Xermanio	Ge	32	72,6
Laurencio	Lr	103	(262,1)	Xofre	S	16	32,1
Litio	Li	3	6,9				

* Para os elementos de número atómico superior a 100, a IUPAC propuxo nomes sistemáticos. Para os elementos 101-109, o 30 de agosto de 1997, aprobou os nomes indicados na táboa; en outubro de 2003 aprobou o nome do elemento 110 e en novembro de 2004 o do elemento 111. Para os elementos que non teñen asignado nome vulgar, fórmase segundo os criterios da IUPAC, cos termos latinos nil: 0, un: 1, bi: 2, tri: 3, quadrio: 4, pentio: 5 etc., terminado en -io, que é a galeguización da terminación latina -ium.

5. TÁBOA PERIÓDICA

Grupos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
1	<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <p>1 H 1,0 Hidróxeno</p> <p>← Número atómico → ← Massa atómica →</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>← Símbolo → ← Nome →</p> </div> </div>																		
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
3	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
4	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
5	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
6	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73
7	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105
	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136

Estado físico a 25 °C e 1 atm	Símbolos
Símbolos em verde	Símbolos em verde
Símbolos em amarelo	Símbolos em amarelo
Símbolos em laranja	Símbolos em laranja
Símbolos em azul	Símbolos em azul

Nota: Os valores que se indicam entre parênteses correspondem ao isótopo mais estável ou mais conhecido.