BACHARELATO 2

Exercicios resoltos
Física

Vicente Fernández Fernández

Baía Edicións

CONSORCIO editorial GALEGO

1ª Edición Xullo 2011

Polígono de Pocomaco, 2ª Avda.
A2 / Nave 22
15190 A Coruña
Tel.: 981 174 296
Fax.: 981 915 698
comercial@baiaedicions.net

Distribución:
Consorcio Editorial Galego
Tlf.: 986 405 051. Fax: 986 404 935
pedimentos@coegal.com

Edita: Baía Edicións

ISBN: 978-84–9995-011-2

D. LEGAL: C 1786-2011

Índice

Presentación

As cuestións e problemas que se resolven a continuación corresponde ao manual dirixido á materia de Física de Segundo Curso de Bacharelato (Baía Edicións, 2009). Este texto foi elaborado tendo en conta o Decreto 126/2008, que establece o currículo de Bacharelato na Comunidade Autónoma de Galicia.

Como enfrontar a resolución dun exercicio?

Para a resolución dun problema non abonda con saber a parte teórica correspondente, senón que é necesario sabela aplicar no contexto do exercicio. A súa resolución debe empezar cunha lectura comprensiva do enunciado, identificando os datos e as incógnitas e facendo unha representación simbólica e gráfica. A continuación intentarase relacionar, mediante as ecuacións adecuadas, as incógnitas e os datos. Finalmente substituiranse as cantidade numéricas, faranse os cálculos e expresaranse os resultados coas correspondentes cifras significativas e unidades.

Desexo que o tratamento aquí dado sexa de utilidade para quen faga uso deste manual, agradecendo todas as observacións que se indiquen para a súa mellora.

Vicente Fernández Fernández

Tema 2. CAMPO GRAVITATORIO

EXERCICIOS (Cuestións)

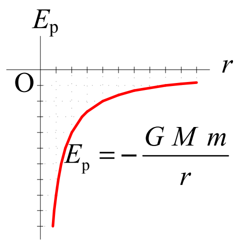
1.- Mapa conceptual dos contidos do tema.

Solución: Ver páxina 94 do texto "Física" de 2º de Bacharelato, Ed. Baía.

2.- Di como varía a enerxía potencial gravitatoria dunha masa puntual *m*, que está no campo gravitatorio doutra masa puntual *M*, con respecto á distancia. Fai a representación gráfica correspondente.

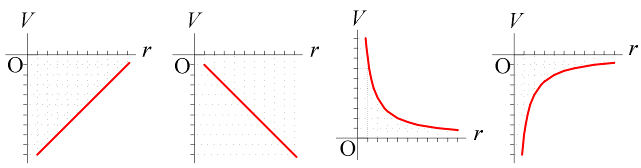
Solución:

Supoñamos unha masa M creadora do campo gravitatorio. A enerxía potencial gravitatoria, E_p, dunha masa puntual m situada no campo gravitatorio de M vén dada pola expresión: $E_p = -\frac{G\,M\,m}{r}$, sendo G a constante de gravitación universal e r a distancia que separa as masas M e m. Polo tanto, a enerxía potencial gravitatoria da masa m aumenta (diminúe en valor absoluto) co aumento da distancia r que separa ambas masas, tomando o valor cero no infinito.



A gráfica que resulta de representar E_p fronte a r é unha hipérbole, como a que se indica na figura.

3.- Das seguintes gráficas xustifica cal representa, en función da distancia, o potencial gravitatorio creado por unha masa puntual situada en O.



Solución:

O potencial gravitatorio V creado por unha masa puntual m vén dado pola expresión: $V = -\frac{G\,M}{r}$, sendo G a constante de gravitación universal e r a distancia que separa a masa m do punto onde queremos coñecer o potencial. A representación desta ecuación é a dunha hipérbole, na que o valor dunha das variables crece (diminúe en valor absoluto) a medida que aumenta o valor da outra variable, $-V \cdot r =$ constante, e viceversa, tendo por gráfica a última das catro representadas.

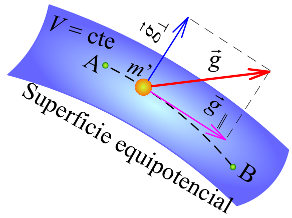
4.- Como é a dirección da intensidade do campo gravitatorio en relación ás superficies equipotenciais? Xustifica a resposta.

Solución:

A intensidade de campo gravitatorio, $\vec{g}$, é sempre perpendicular ás superficies equipotenciais.

Se tivese outra dirección calquera poderíase descompoñer na dirección da superficie, $\vec{g}_{\parallel}$, e na perpendicular a esta, $\vec{g}_{\perp}$, e no desprazamento dunha masa *m*' ó longo da superficie equipotencial desenvolvería un traballo: $W_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F_{\parallel} \cdot (r_{\mathrm{B}} - r_{\mathrm{A}})_{\parallel} = m' \cdot g_{\parallel} \cdot (r_{\mathrm{B}} - r_{\mathrm{A}}) \neq 0$.

Como o traballo desenvolto pola forza do campo ó longo dunha superficie equipotencial é nulo: $W_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} = -\Delta E_{\mathrm{p}} = -(E_{\mathrm{pB}} - E_{\mathrm{pA}}) = -m' \cdot (V_{\mathrm{pB}} - V_{\mathrm{pA}}) = -m' \cdot \Delta V = -m' \cdot 0 = 0$, concluímos que a **dirección da intensidade do campo gravitatorio $\vec{g}$ é perpendicular ás superficies equipotenciais**.



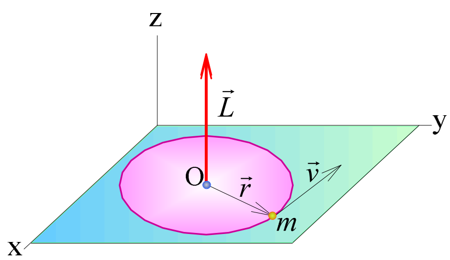
5.- Unha partícula de masa *m* describe un movemento circular uniforme. Contesta razoadamente se o momento angular desta partícula con respecto ó centro da circunferencia que describe é constante.

Solución:

O momento angular $\vec{L}$ dunha partícula de masa *m*, que se move cunha velocidade $\vec{v}$, respecto a un punto O, vén dado pola expresión: $\vec{L} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v})$, sendo $\vec{r}$ o vector que une o punto O cun punto calquera da liña de acción do vector $\vec{v}$.

Recordando que no m.c.u.:

· A $\vec{v}$ da partícula é de módulo, *v*, constante e de dirección tanxente á traxectoria da circunferencia que describe; o raio, *r*, da circunferencia é constante e o ángulo formado por $\vec{v}$ e $\vec{r}$ vale 90º; resulta que o módulo de $\vec{L}$ é constante: $L = r \cdot m \cdot v = \text{cte}$.

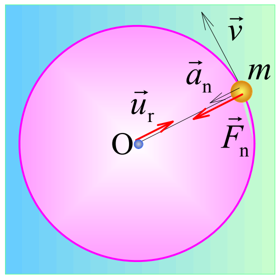


· A traxectoria da partícula *m* que describe o movemento é plana e como a dirección de $\vec{L}$ é perpendicular ó plano determinado por $\vec{v}$ e $\vec{r}$ (plano da circunferencia), a dirección de $\vec{L}$ permanece constante.

· O sentido de xiro da partícula *m* que describe o movemento é sempre o mesmo e como o sentido de $\vec{L}$ é o de avance dun sacarrollas que leve $\vec{r}$ sobre $\vec{v}$ polo camiño máis curto, este non varía.

En consecuencia, $\vec{L}$ **é constante**.

Tamén podemos facer o razoamento de que $\vec{L}$ é constante recordando que no m.c.u.:



$$\left.\begin{array}{l} v = \text{cte.} \rightarrow \vec{a}_{\mathrm{t}} = \vec{0} \\ \vec{v} \neq \overrightarrow{\text{cte.}} \rightarrow \vec{a} \neq \vec{0} \\ \vec{a} = \vec{a}_{\mathrm{t}} + \vec{a}_{\mathrm{n}} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{a} = \vec{a}_{\mathrm{n}}$$

E, en consecuencia, a forza que causa o m.c.u. é unha forza normal á traxectoria, apuntado en todo momento cara ó centro da circunferencia, tratándose dunha forza central, sendo o seu momento angular, con respecto ó centro de forzas, constante:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\left(\vec{r}\ \mathrm{x}\left(m\vec{v}\right)\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\ \mathrm{x}\left(m\,\vec{v}\right)+\vec{r}\ \mathrm{x}\ \frac{\mathrm{d}\left(m\,\vec{v}\right)}{\mathrm{d}t}\\
&\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}\\
&\frac{\mathrm{d}\left(m\,\vec{v}\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}
\end{aligned}\right\}\rightarrow\ \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}\ \mathrm{x}\left(m\,\vec{v}\right)+\vec{r}\ \mathrm{x}\ \vec{F}$$

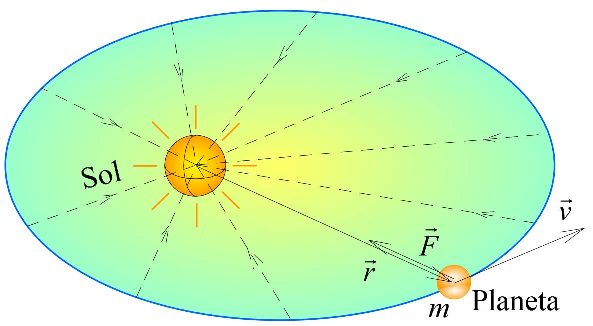
Como o vector $\left(m\cdot\vec{v}\right)$ é múltiplo do vector $\vec{v}$ (ambos vectores son paralelos), o produto vectorial destes vectores é nulo: $\vec{v}\ \mathrm{x}\left(m\cdot\vec{v}\right)=\vec{0}$. Por outro lado, como a partícula se move baixo unha forza central, e o seu momento angular $\vec{L}$ o calculamos con respecto ó centro de forzas, a forza $\vec{F}$ e o vector $\vec{r}$ teñen a mesma dirección (forman un ángulo de 180º) e o produto vectorial destes vectores tamén é nulo: $\vec{r}\ \mathrm{x}\ \vec{F}=\vec{0}$. En consecuencia resulta:

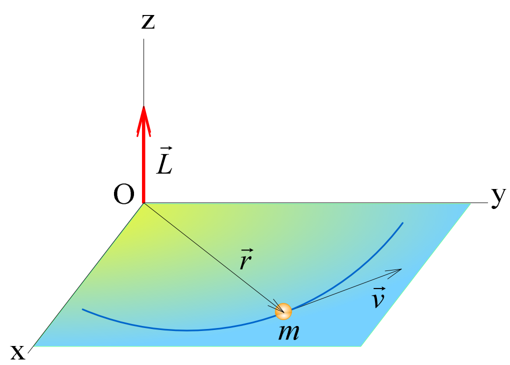
$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{0}\quad\rightarrow\quad\vec{L}=\overrightarrow{\mathrm{cte}}$$

6.- Xustifica o feito de que os planetas no seu movemento orbital ó redor do Sol describan órbitas planas e sempre xiren no mesmo sentido.

Solución:

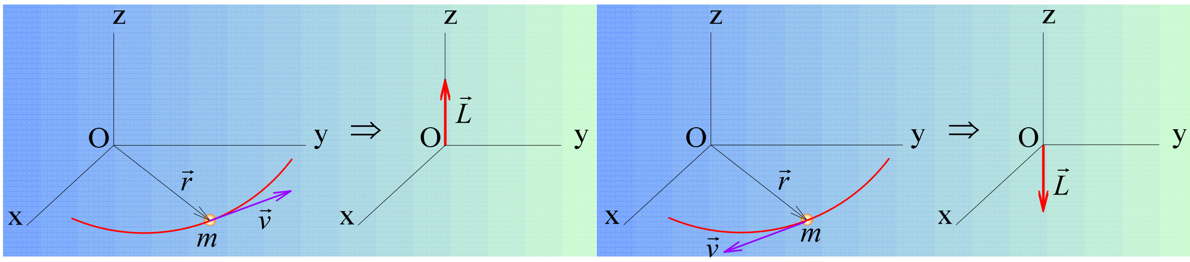
A forza que rexe o movemento planetario é unha forza central. E sabemos que o momento angular $\vec{L}$ dunha partícula *m* que se move baixo unha forza central, con respecto ó centro de forzas, se conserva: $\vec{L}=\overrightarrow{\mathrm{cte}}$.





Como $\vec{L}$ é perpendicular ó plano determinado por $\vec{r}$ e $\vec{v}$, sendo $\vec{r}$ o vector que une o punto respecto ó cal se calcula $\vec{L}$ cun punto calquera da liña de acción do vector $\vec{v}$; para que a súa dirección permaneza constante, o planeta ten que ter unha **traxectoria plana**, xa que senón $\vec{L}$ cambiaría de dirección.

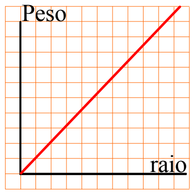
E ó ser o sentido de $\vec{L}$ constante, que é o de avance dun sacarrollas que leve $\vec{r}$ sobre $\vec{v}$ polo camiño máis curto; o planeta ten que xirar sempre no **mesmo sentido**, xa que se cambiara o sentido de xiro do planeta tamén cambia o sentido de $\vec{L}$.



7.- Un corpo de masa *m* está na superficie dun planeta de raio *r*. Se o raio do planeta varía (aumentando ou diminuíndo), permanecendo constante a súa densidade, variará o peso do corpo?

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Peso} = m\,g \\ \left.\begin{array}{l} g = \dfrac{G\,M}{r^2} \\ \left.\begin{array}{l} M = \rho\,V \\ V = \dfrac{4}{3}\pi\,r^3 \end{array}\right\} \rightarrow M = \rho\,\dfrac{4}{3}\pi\,r^3 \end{array}\right\} \rightarrow g = \dfrac{G\,\rho\,\dfrac{4}{3}\pi\,r^3}{r^2} = G\,\rho\,\dfrac{4}{3}\pi\,r \end{array}\right\} \rightarrow \text{Peso} = m\,\frac{4}{3}\pi\,r\,\rho\,G$$



O peso do corpo varía, aumentando de forma directamente proporcional ó raio do planeta, peso = cte·*r*, como se indica na gráfica.

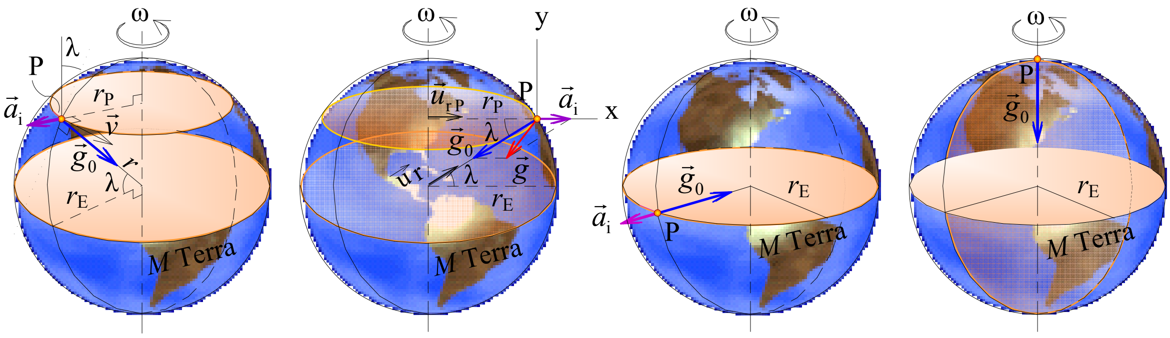
8.- Se a Terra fose unha esfera perfecta, o peso observado dunha masa *m* tería o mesmo valor en todos os puntos da súa superficie?

Solución:

Para o caso da cuestión, ó ser o raio da Terra constante para calquera punto P da súa superficie, a aceleración da gravidade debido á distancia r $\left(g_0 = \dfrac{G\,M}{r^2}\right)$ non varía co punto P considerado. Sen embargo, debido á rotación da Terra, un punto da súa superficie, con respecto a un sistema de referencia inercial, móvese cunha velocidade $\vec{v}$, que é constante en módulo pero non en dirección, debido a unha aceleración normal, $\vec{a}_\text{n}$, de valor: $\vec{a}_\text{n} = -\dfrac{v^2}{r_\text{P}}\vec{u}_{r\text{P}} = -\omega^2\,r_\text{P}\,\vec{u}_{r\text{P}}$, sendo r_P o raio da circunferencia que describe o punto P ó longo de 1 día e $\vec{u}_{r\text{P}}$ o vector unitario de $\vec{r}_\text{P}$.

O punto P é acelerado $(\vec{a}_\text{n})$ e un observador situado nel pertence a un sistema de referencia non inercial, o cal introduce a aceleración de inercia, $\vec{a}_\text{i}$, de valor: $\vec{a}_\text{i} = -\vec{a}_\text{n}$.

Como a aceleración de inercia é directamente proporcional a r_P ($a_\text{i} = \omega^2 \cdot r_\text{P}$), o seu valor diminúe a medida que nos acercamos cara ós Polos e como a aceleración resultante que actúa nun punto P é: $\vec{g}_\text{resultante} = \vec{g}_0 + \vec{a}_\text{i}$, resulta que a aceleración da gravidade non ten o mesmo valor en todos os puntos da superficie terrestre.



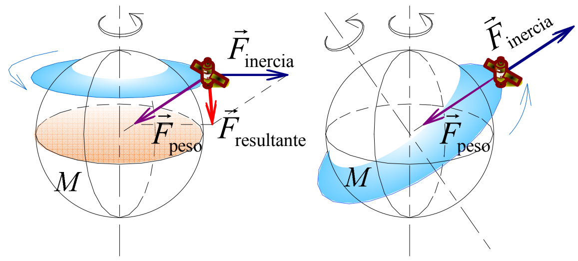
9.- Dise que unha órbita dun satélite artificial é estable cando esta corta á esfera terrestre nun círculo máximo. Porque non o é en caso contrario?

Solución:

Para un observador que viaxa no satélite artificial, as forzas que actúan sobre el son:

· A forza do peso, dirixida cara ó centro da Terra.

· A forza de inercia: dirixida na dirección radial da órbita que describe o satélite e cara a fóra.



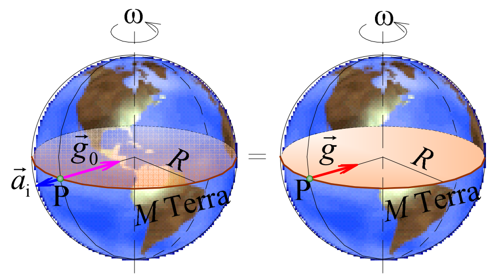
Estas dúas forzas só se anulan cando sexan de igual módulo e dirección, dándose soamente esta última condición cando a órbita do satélite corta á esfera terrestre nun círculo máximo. De non darse esta circunstancia, para un observador que viaxa no satélite, a resultante das forzas que actúan sobre el non é nula e a órbita non é estable.

10.- Coñecida a masa da Terra, *M*, e o raio ecuatorial, *R*, coa formula $(G\,M)/R^2$ obtemos para a intensidade da gravidade nun punto do Ecuador terrestre o valor de 9,821 N/kg. Realizada no Ecuador a medida por procedementos experimentais (péndulo) obtense o valor de 9,791 N/kg. Por que?

Solución:

Debido á rotación da Terra, un punto P do Ecuador terrestre posúe unha velocidade lineal, $\vec{v}$, que é de módulo constante e de dirección variable, e un observador situado en P posúe unha aceleración de inercia, $\vec{a}_i$, de valor: $\vec{a}_i = \dfrac{v^2}{R}\vec{u}_R = \omega^2\, R\, \vec{u}_R$, sendo *R* o raio do Ecuador e ω a velocidade angular de xiro da Terra.

O valor de g_0 = 9,821 N kg^{-1} obtido coa expresión $g_0 = \frac{G\,M}{R^2}$ corresponde á forza exercida pola masa da Terra, M, sobre a unidade de masa situada á distancia R. Sen embargo, o valor experimental de g = 9,791 N kg^{-1} é o módulo da suma vectorial de $\vec{g}_0$ e $\vec{a}_i$: $\vec{g} = \vec{g}_0 + \vec{a}_i \rightarrow g = g_0 - a_i$ De aí a diferenza no valor de g teórico (9,821 N kg^{-1}) e experimental (9,791 N kg^{-1}).

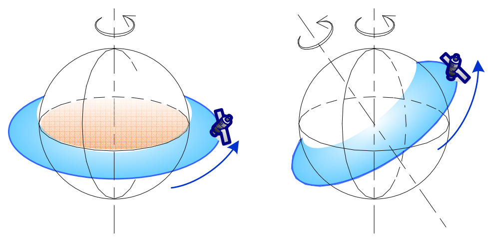


11.- Queremos colocar un satélite artificial en órbita estacionaria ó redor da Terra de tal forma que sempre se encontre na vertical dun mesmo punto (satélite xeoestacionario). Pode situarse un destes satélites na vertical de calquera punto? Razoa a resposta.

Solución:

Para que o satélite estea en órbita estacionaria, a órbita ten que cortar á esfera terrestre nun círculo máximo (ver cuestión 9). Para que ademais se encontre sempre na vertical dun mesmo punto terrestre esixe:

· Que a órbita estea sobre o Ecuador terrestre. De non cumprirse esta condición, ó non coincidir o eixe de rotación da Terra co do satélite, a proxección do satélite non coincide con un único punto sobre a superficie da Terra (independentemente da velocidade que posúa).



· Que o satélite posúa a mesma velocidade angular que a Terra. Aínda que o satélite se encontre nunha órbita ecuatorial e estacionaria, para que estea sempre sobre a mesma vertical terrestre, ten que posuír unha velocidade angular de rotación igual á do corpo sobre o cal orbita.

12.- Supoñamos un planeta cun período orbital de 27 anos e raio 1,34 · 10^{12} m. Que período orbital terá outro planeta que describe unha órbita de raio metade?

Solución:

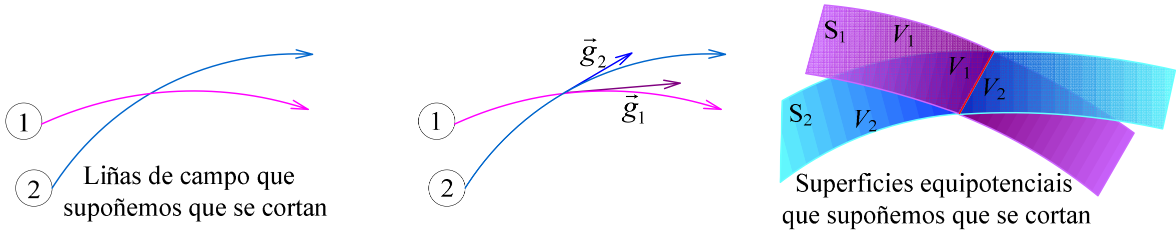
Recordando a terceira lei de Kepler temos:

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \quad \rightarrow \quad \frac{27^2}{\left(1{,}34 \cdot 10^{12}\right)^3} = \frac{T_2^2}{\left(\frac{1{,}34 \cdot 10^{12}}{2}\right)^3} \quad \rightarrow \quad T_2 = 9{,}6 \text{ anos}$$

13.- Poden cortarse dúas liñas de forza dun campo gravitatorio?; e dúas superficies equipotenciais?

Solución:

O campo gravitatorio pode representarse graficamente por medio dunhas liñas imaxinarias, chamadas **liñas de forza**, as cales son tanxentes en cada punto á dirección do vector intensidade de campo, asignándolle o mesmo sentido que o do vector $\vec{g}$. En consecuencia, dúas liñas de forza nunca se cortan nun punto. Se isto sucedera, no punto de intersección, o vector intensidade de campo, $\vec{g}$, tería que ser tanxente simultaneamente a ambas liñas, o que significaría dous valores de $\vec{g}$ no mesmo punto; feito que non é posible porque nun punto correspóndelle un único valor (principio de superposición).

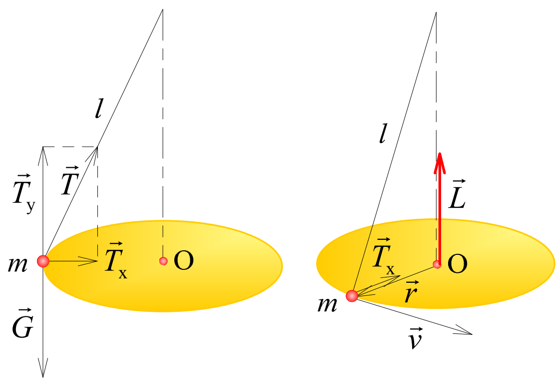


Igual ocorre coas superficies equipotenciais (lugar xeométrico dos puntos do espazo que teñen o mesmo valor de potencial). De cortarse, nos puntos de corte habería dous valores distintos de potencial, situación que tampouco é posible.

14.- Unha partícula de masa *m* está colgada dun fío ideal de lonxitude *l*, describindo nun plano horizontal unha circunferencia de raio *r*, sendo *r*<*l*, cunha velocidade $\vec{v}$, constante en módulo. Razoa se o seu momento angular é constante con respecto: a) ó centro da circunferencia que describe; b) ó punto de suspensión (extremo do fío do que colga a masa *m*).

Solución:

a) Sobre a partícula de masa *m* actúa a forza do peso, $\vec{G}$, e a forza de tensión, $\vec{T}$, do fío. Se descompoñemos $\vec{T}$ na dirección vertical, $\vec{T}_y$, e na dirección horizontal, $\vec{T}_x$, vemos que a compoñente $\vec{T}_y$ se anula con $\vec{G}$ (na dirección vertical a masa *m* está e repouso) e a forza resultante que actúa sobre a partícula é $\vec{T}_x$, que en cada instante ten a dirección do vector de posición $\vec{r}$ que une o centro da circunferencia co móbil.



Derivando respecto ó tempo a expresión do momento angular, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, resulta:

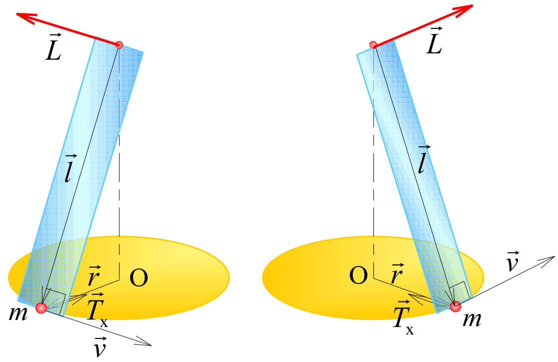
$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\vec{r} \times \vec{p})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{0} + \vec{r} \times \vec{F}$$

Como $\vec{r}$ e $\vec{F}$ forman un ángulo de 180º resulta: $\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{L} = \overrightarrow{\mathrm{cte}}$.

En consecuencia, **o momento angular da partícula *m***, respecto ó centro da circunferencia que describe, **é constante**.

Tamén chegamos ó mesmo resultado se recordamos que a forza que causa o movemento circular uniforme é central e **o momento angular** dunha partícula que se move baixo unha forza central, con respecto ó centro de forzas, **é constante**.

b) Se se toma como orixe de momentos o punto de suspensión; o momento angular $\vec{L}$ vén dado pola expresión: $\vec{L} = \vec{l} \times \vec{p}$, sendo $\vec{l}$ o vector que vai desde o punto de suspensión ata a masa m que se move coa velocidade $\vec{v}$ (en módulo e dirección coincide co fío do que colga a partícula). Como a dirección de $\vec{L}$ é a da perpendicular ó plano que determina $\vec{l}$ e $\vec{v}$, e este plano cambia a medida que a masa m se move, a dirección de $\vec{L}$ non é constante e, en consecuencia, $\vec{L}$ non é constante.



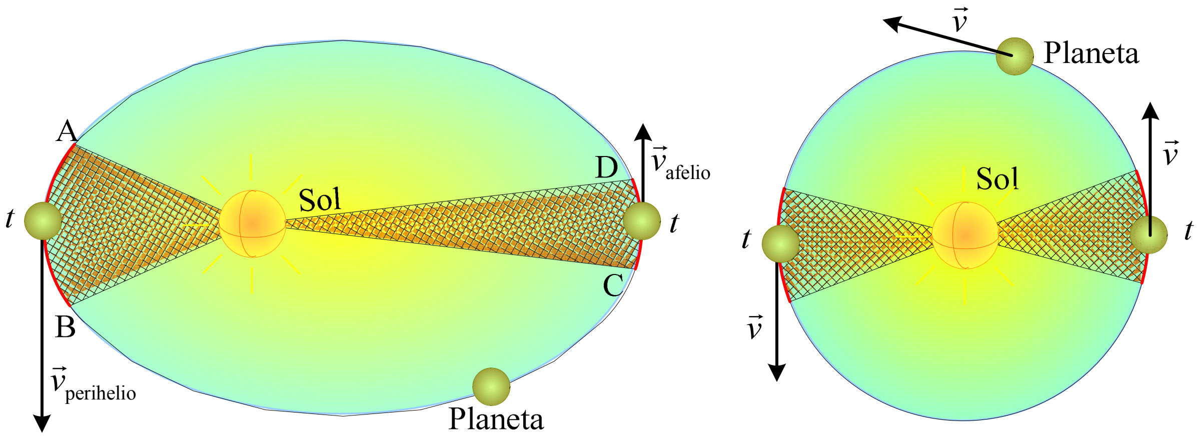
Se estudamos a variación do momento angular no tempo resulta:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\left(\vec{l} \times \vec{p}\right)}{dt} = \frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{p} + \vec{l} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} + \vec{l} \times \vec{F} \neq \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{L} \neq \overrightarrow{\text{cte}}$$

15.- Razoa se o módulo da velocidade orbital dun planeta é constante para o caso de que consideremos: a) órbita elíptica e b) órbita circular. E o valor da velocidade, $\vec{v}$?

Solución:

Segundo a segunda lei de Kepler, o raio vector que une o centro do Sol co planeta varre áreas iguais en tempos iguais: $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2\,m} = \text{cte.}$, onde $\frac{dA}{dt}$ é a velocidade areolar e L é o módulo do momento angular do planeta de masa m con respecto ó centro do Sol. En consecuencia, para dous puntos da órbita elíptica temos: $\frac{L_1}{2\,m} = \frac{L_2}{2\,m} \rightarrow L_1 = L_2 \rightarrow r_1 \cdot m \cdot v_1 \cdot \text{sen}\,\alpha_1 = r_2 \cdot m \cdot v_2 \cdot \text{sen}\,\alpha_2$. Para o caso dos puntos máis afastados da órbita elíptica (afelio e perihelio), $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$ e, en consecuencia, $r_1 \cdot v_1 = r_2 \cdot v_2$. Como $r_1 \neq r_2 \Rightarrow v_1 \neq v_2$: **No caso de órbitas elípticas, cando o satélite está máis preto do Sol leva máis velocidade que cando está máis afastado del**.



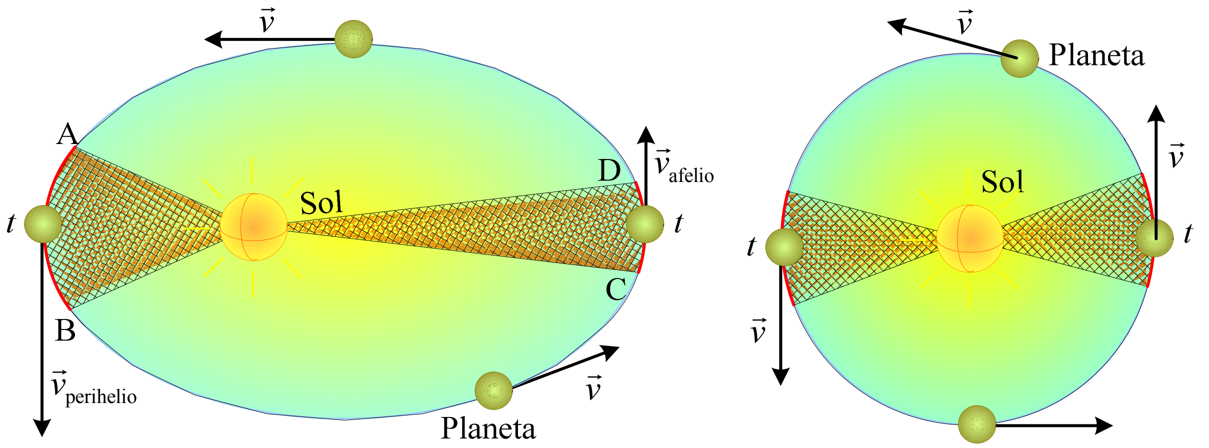
A igual resultado chegamos se recordamos que a forza que mantén ó planeta xirando ó redor do

Sol é unha forza central e, en consecuencia, o seu momento angular $\vec{L}$ respecto ó centro do Sol é constante: $\vec{L} = \overrightarrow{\text{cte}} \quad \rightarrow \quad L = \text{cte.}$. Polo tanto, para dous puntos da órbita elíptica temos: $L_1 = L_2$, e, como xa xustificamos anteriormente, $v_1 \neq v_2$.

Para o caso de órbitas circulares, o módulo do raio vector do planeta é o mesmo para calquera punto da súa traxectoria orbital e describe un movemento circular uniforme (**v = constante**).

Tamén podemos facer o razoamento recordando a velocidade orbital dun planeta en función do raio da órbita: $v = \sqrt{g \cdot r_{\text{órbita}}} = \sqrt{\dfrac{G\,M}{r_{\text{órbita}}}}$. Se a órbita se considera elíptica, $r_{\text{órbita}}$ é distinto para cada punto da súa traxectoria e, en consecuencia, o módulo da velocidade, v, non é constante. Se a órbita é circular, $r_{\text{órbita}}$ é constante e v tamén.

Sen embargo, **o vector velocidade, $\vec{v}$, varía nos dous tipos de órbita**, xa que é un vector tanxente á traxectoria en cada punto.



16.- Se aumentara a velocidade de rotación da Terra, variaría o peso observado dunha masa *m* para un punto do Ecuador terrestre? E para un punto do Polo?

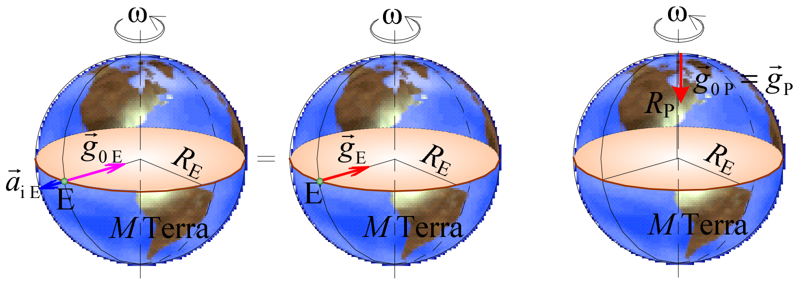
Solución:

Un punto da superficie do Ecuador, debido á rotación da Terra, ten unha velocidade $\vec{v}$, que é de módulo constante e de dirección variable, posuíndo unha aceleración normal. Un sistema de referencia ligado ó Ecuador é non inercial: é acelerado, e sobre unha masa *m*, para un observador deste sistema de referencia, actúa a forza con que a Terra a atrae e a forza de inercia, resultando:

$$\vec{F}_{\text{resultante}} = \vec{F}_0 + \vec{F}_{\text{i}} \quad \rightarrow \quad m\,\vec{g}_{\text{resultante}} = m\,\vec{g}_0 + m\,\vec{a}_{\text{i}}$$

$$g_{\text{E}} = g_{0\,\text{E}} - a_{\text{i E}} = \frac{G\,M_{\text{T}}}{R_{\text{E}}^2} - \frac{v^2}{R_{\text{E}}} = \frac{G\,M_{\text{T}}}{R_{\text{E}}^2} - \omega^2\,R_{\text{E}}$$

Nesta expresión facilmente se ve que, para un punto do Ecuador, ó aumentar a velocidade de rotación da Terra, ω, diminúe o valor da aceleración da gravidade (aumenta o subtraendo).



Para un punto do Polo a expresión anterior queda da forma:

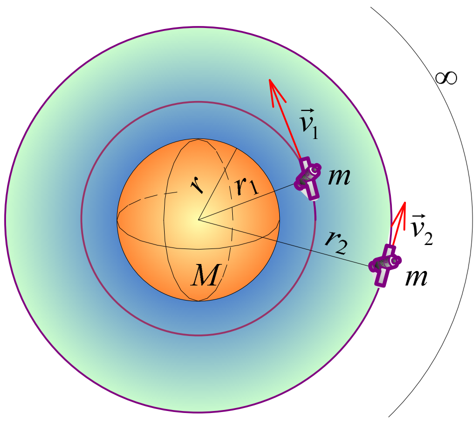
$$g_{\mathrm{P}} = g_{0\,\mathrm{P}} - a_{\mathrm{i\,P}} = \frac{G\,M_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{P}}^2} - \omega^2 \cdot r = \frac{G\,M_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{P}}^2} - \omega^2 \cdot 0 = \frac{G\,M_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{P}}^2}$$

Resulta que no Polo a aceleración da gravidade é independente da velocidade de rotación da Terra.

17.- Temos un satélite de masa *m* en órbita estacionaria de raio r_1 ó redor da Terra (de masa *M*) e querémolo pasar a unha nova órbita estacionaria de raio r_2 (maior que r_1). Obtén a expresión da velocidade que lle hai que comunicar para logralo, indicando a dirección en que se lle comunica. Nota: considera como datos g_0 e *r* (raio da Terra) e supón que o rozamento é nulo.

Solución:

A enerxía que lle falta ó satélite para pasar da órbita 1 á órbita 2, ímoslla comunicar en forma de velocidade (enerxía cinética). Para chegar á súa expresión en función das magnitudes que nos aparecen no enunciado da cuestión, recordaremos que o campo gravitatorio é conservativo, conservándose a enerxía mecánica, E_{m}.



$$E_{\mathrm{m}1} = E_{\mathrm{m}2} \quad \rightarrow \quad E_{\mathrm{k}1} + E_{\mathrm{p}1} = E_{\mathrm{k}2} + E_{\mathrm{p}2}$$

$$\frac{1}{2}\,m\,v_1^2 + \left(-\frac{G\,M\,m}{r_1}\right) = \frac{1}{2}\,m\,v_2^2 + \left(-\frac{G\,M\,m}{r_2}\right)$$

$\vec{v}_2$ é a velocidade de xiro do satélite na órbita 2 e $\vec{v}_1$ é a velocidade que necesita o satélite na órbita 1 para que poida alcanzar a órbita 2. Unha parte desta velocidade necesaria xa a posúe o satélite: é a velocidade de xiro, $\vec{v}_{1\,\mathrm{xiro}}$, e outra parte témoslla que comunicar, $\vec{v}_{\mathrm{a\ comunicar}}$: $\vec{v}_1 = \vec{v}_{1\,\mathrm{xiro}} + \vec{v}_{\mathrm{a\ comunicar}}$.

Primeiro imos obter v_1, para despois obter a velocidade a comunicar.

$$\left.\begin{array}{l} v_1^2 = v_2^2 - 2\,G\,M\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1}\right) \\ v_2 = v_{\text{de xiro na órbita 2}} = \sqrt{\dfrac{G\,M}{r_2}} \\ G\,M = g_0\,r^2 \end{array}\right\} \rightarrow\; v_1^2 = \frac{g_0\,r^2}{r_2} - 2\,g_0\,r^2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \rightarrow v_1^2 = g_0\,r^2\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

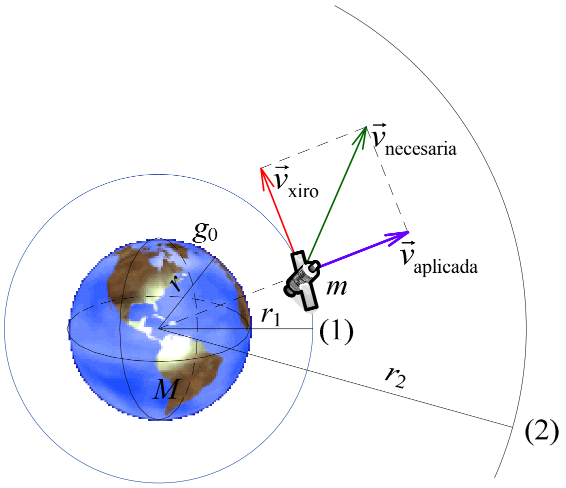
Recordando que: $\vec{v}_1 = \vec{v}_{1\,\text{xiro}} + \vec{v}_{\text{a comunicar}}$; o valor da $\vec{v}_{\text{a comunicar}}$ ó satélite vai depender da dirección en que se lle aplique. Así:

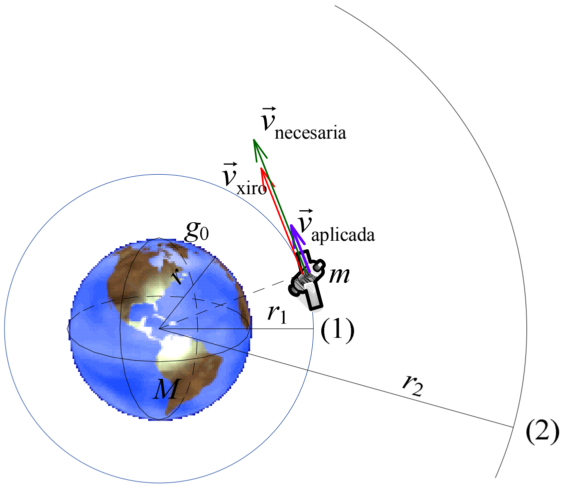
· Se a $\vec{v}_{\text{a comunicar}}$ ten a mesma dirección e sentido que a $\vec{v}_{1\,\text{de xiro}}$, o seu valor será:

$$v_{\text{a comunicar}} = v_1 - v_{1\,\text{xiro}} = \sqrt{g_0\,r^2\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} - \sqrt{\frac{g_0\,r^2}{r_1}}$$

· Se a $\vec{v}_{\text{a comunicar}}$ é perpendicular á $\vec{v}_{1\,\text{de xiro}}$, o seu valor é:

$$v_{\text{a comunicar}} = \sqrt{v_1^2 - v_{1\,\text{xiro}}^2} = \sqrt{g_0\,r^2\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) - \frac{g_0\,r^2}{r_1}} = \sqrt{g_0\,r^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$





18.- A segunda lei de Kepler equivale a enunciar: a) que o momento cinético dun planeta con respecto ó Sol é constante; b) que soamente o módulo do momento cinético dun planeta con respecto ó Sol é constate; c) que non nos dá ningunha información respecto ó momento cinético.

Solución:

A segunda lei de Kepler dinos que o raio vector que une o centro do Sol cun planeta varre áreas iguais en tempos iguais: $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \text{constante}$. A expresión $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$ coñécese como velocidade areolar e relaciónase co módulo do momento angular $\vec{L}$ dun planeta de masa m con respecto ó centro do Sol segundo a expresión: $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \dfrac{L}{2\,m}$. Relacionando estas dúas igualdades resulta:

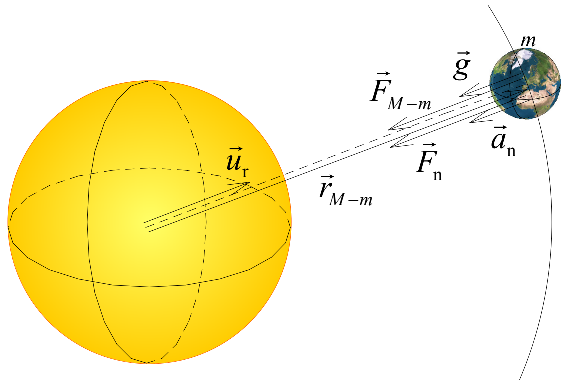
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\text{cte.}\\ \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\dfrac{L}{2\,m}\end{array}\right\}\rightarrow\ \dfrac{L}{2\,m}=\text{cte.}\ \rightarrow\ L=\text{constante}\ \ (\text{Ítem b})$$

19.- Deduce a terceira lei de Kepler a partir da lei da gravitación universal, supoñendo órbitas circulares.

Solución:

A terceira lei de Kepler di que o cociente entre o cadrado do tempo que un planeta emprega en dar unha volta completa ó redor do Sol (período, *T*) e o cubo do semieixe maior da súa órbita, *r*, é o mesmo para todos os planetas: $\dfrac{T^2}{r^3}=k$.

A lei da gravitación universal establece a forza, $F_{\text{M-m}}$, con que dúas masas, *M* e *m*, separadas unha distancia *r*, se atraen: $F_{M-m}=G\,\dfrac{M\,m}{r^2}$, onde *G* é a constante de gravitación universal. Para o caso de que as masas sexan a do Sol e a dun planeta, esta forza gravitatoria é a forza centrípeta necesaria que actúa sobre o planeta para que este describa unha órbita circular: $\vec{F}_{\text{Sol-planeta}}=m_{\text{planeta}}\cdot\vec{a}_{\text{normal}}$.



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{G\,M\,m}{r^2}=m\,\dfrac{v^2}{r}\\ \left.\begin{array}{l}v=\omega\cdot r\\ \omega=\dfrac{2\,\pi}{T}\end{array}\right\}\rightarrow\ v=\dfrac{2\,\pi\,r}{T}\end{array}\right\}\rightarrow\ \dfrac{G\,M}{r^2}=\dfrac{4\,\pi^2\,r}{T^2}\ \rightarrow\ \dfrac{T^2}{r^3}=\dfrac{4\,\pi^2}{G\,M}=\text{cte.}$$

20.- Cal é o significado físico da constante de gravitación universal?

Solución:

A constante de gravitación universal, *G*, aparece na lei de gravitación universal: $\vec{F}_{M-m}=-G\,\dfrac{M\,m}{r^2}\,\vec{u}_r$, sendo $F_{M\text{-}m}$ o valor da forza con que se atraen as masas *M* e *m*, separadas á distancia *r*. Para saber o significado que ten a constante de gravitación basta substituír na expresión anterior as masas polo valor de 1 kg e a distancia pola de 1 m, resultando que *G* representa a forza con que dúas masas de 1 kg cada unha, situadas á distancia de 1 m, se atraen, sendo este valor de $6{,}67\cdot10^{-11}$ N.

21.- Colgamos dun fío unha masa *m* (chumbada). A dirección do fío pasa exactamente polo centro da Terra?

Solución:

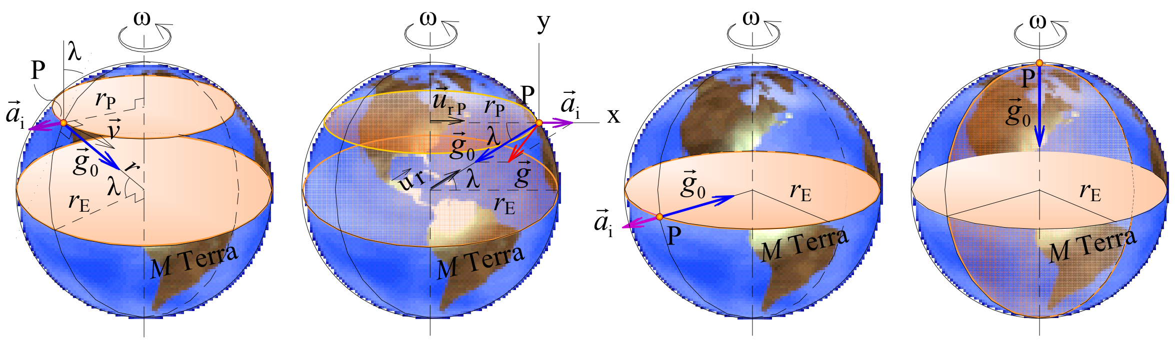
Unha masa m colgada dun fío sobre a superficie da Terra está sometida:

· Á forza con que a Terra a atrae: peso da chumbada. Esta forza está dirixida cara ó centro da Terra.

· Á forza de inercia, debido a que a masa m xira solidariamente coa Terra. A Terra rota cunha velocidade angular ω constante e cada punto da súa superficie ten unha velocidade lineal $\vec{v}$, que é de módulo constante e de dirección variable, posuíndo unha aceleración normal $\vec{a}_n$, de módulo constante:

$$\left.\begin{array}{l} v = \text{cte.} \rightarrow \vec{a}_t = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{u}_t = \vec{0} \\ \vec{v} \neq \overrightarrow{\text{cte.}} \rightarrow \vec{a} \neq \vec{0} \\ \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \end{array}\right\} \rightarrow \vec{a} = \vec{a}_n \rightarrow a = a_n = \frac{v^2}{r} = \text{cte., xa que } v \text{ e } r \text{ son constantes}$$

Esta aceleración normal ten a dirección do raio da circunferencia que describe (paralelo terrestre) e está dirixida cara ó centro da circunferencia, sendo a aceleración de inercia de igual dirección e de sentido contrario.



Como o valor de v e r diminúen a medida que nos afastamos do Ecuador e nos acercamos ós Polos, imos relacionar a aceleración de inercia coa velocidade angular:

$$\left.\begin{array}{l} a_i = \dfrac{v^2}{r} \\ v = \omega \cdot r \end{array}\right\} \rightarrow a_i = \omega^2 \cdot r$$

En consecuencia, a aceleración inercia é nula nos Polos (r = 0) e máxima no Ecuador ($r = r_E$), onde ten a mesma dirección que $\vec{g}$. Polo tanto, nestes dous casos, a dirección da forza resultante que actúa sobre a chumbada apunta cara ó centro da Terra e a dirección do fío pasa exactamente por este punto. Para calquera outro punto da superficie terrestre, a forza de interacción entre masas e a forza de inercia non teñen a mesma dirección e a súa suma (forza resultante) ten unha dirección que non coincide coa do centro da Terra, polo que a dirección do fío desvíase da do centro da Terra.

22.- Unha mesma masa m está situada na superficie do Sol, da Terra e da Lúa. Estuda razoadamente en que caso pesará máis. Datos: $r_{Sol}>r_{Terra}>r_{Lúa}$; $M_{Sol}>M_{Terra}>M_{Lúa}$; supón que: $\rho_{Sol} = \rho_{Terra} = \rho_{Terra}$.

Solución:

$$F_{\text{peso no Sol}} = m \cdot g_{\text{do Sol}} = m \cdot \frac{G\,M_{\text{Sol}}}{r_{\text{Sol}}^2}$$

$$F_{\text{peso na Terra}} = m \cdot g_{\text{da Terra}} = m \cdot \frac{G\,M_{\text{Terra}}}{r^2_{\text{Terra}}}$$

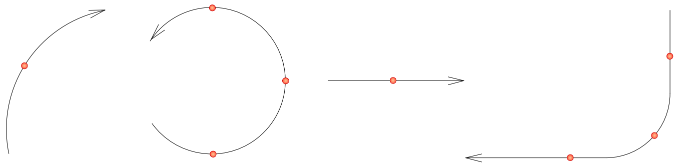
$$F_{\text{peso na Lúa}} = m \cdot g_{\text{da Lúa}} = m \cdot \frac{G\,M_{\text{Lúa}}}{r^2_{\text{Lúa}}}$$

Como M_{Sol} e r_{Sol} son maiores, respectivamente, que M_{Terra} e r_{Terra} (e $M_{\text{Lúa}}$ e $r_{\text{Lúa}}$); coas anteriores expresións non sabemos cal dos astros atrae con máis forza a unha masa m. Por esta razón imos escribir a masa do Sol, a masa da Terra e a masa da Lúa en función dos seus respectivos raios:

$$\left.\begin{array}{l} F_{\text{peso}} = m \cdot \dfrac{G\,M_{\text{astro}}}{r^2_{\text{astro}}} \\[2ex] \left.\begin{array}{l} M_{\text{astro}} = \rho \cdot V \\ V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3_{\text{astro}} \end{array}\right\} \rightarrow M_{\text{astro}} = \rho \cdot \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3_{\text{astro}} \end{array}\right\} \rightarrow F_{\text{peso}} = m \cdot G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_{\text{astro}} = \text{cte} \cdot r_{\text{astro}}$$

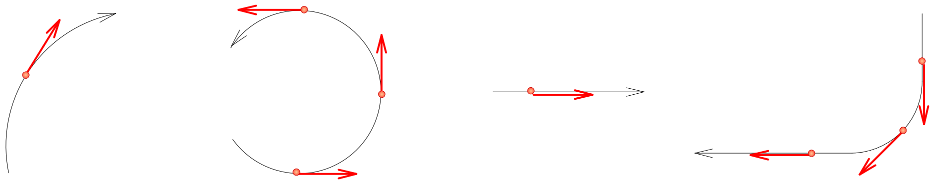
Á luz da expresión anterior, vemos que o peso da masa m é directamente proporcional ó raio do astro sobre o que estea situada. Polo tanto, recordando que $r_{\text{Sol}} > r_{\text{Terra}} > r_{\text{Lúa}}$, resulta que a masa m pesa máis na superficie do Sol.

23.- Considera que as liñas do gráfico representan liñas de forza dun campo conservativo. Debuxa, de forma razoada, a intensidade do campo conservativo nos puntos marcados sobre as liñas.



Solución:

Un campo conservativo, como é o campo gravitatorio, pode representarse graficamente por medio dunhas liñas imaxinarias, chamadas liñas de forza, as cales son tanxentes en cada punto á dirección do vector intensidade de campo, asignándolles o mesmo sentido que o vector intensidade. Para o caso dos puntos sinalados nas liñas de forza que aparecen na cuestión, o vector intensidade de campo é o que a continuación se indica.

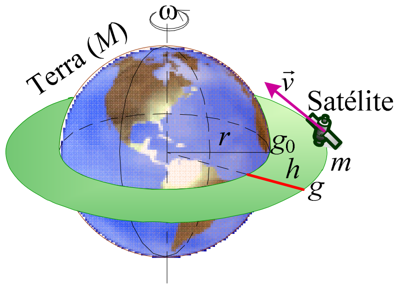


24.- Para un satélite xeoestacionario ó redor da Terra, a altura á que orbita sobre a superficie da Terra: a) ten un único valor; b) pode ter distintos valores con tal de que (na órbita na que se encontre o satélite) a forza con que a Terra o atrae sexa de igual módulo e dirección e de sentido contrario á forza de inercia; c) pode ter calquera valor con tal de que orbite sobre o Ecuador terrestre.

Solución:

Un satélite está nunha órbita xeoestacionaria cando orbita sobre un mesmo punto da vertical terrestre nunha órbita estable. Isto obriga a que o seu período de revolución T coincida co período de rotación da Terra. Relacionamos agora T con h (altura sobre a superficie da Terra):

$$\left.\begin{array}{l} T=\dfrac{2\pi}{\omega} \\ \omega=\dfrac{v_{\text{xiro}}}{(r+h)} \end{array}\right\} \rightarrow T=\dfrac{2\pi}{\dfrac{v_{\text{xiro}}}{(r+h)}} \quad \left.\begin{array}{l} \\ v_{\text{xiro}}=\sqrt{\dfrac{G\,M}{(r+h)}} \end{array}\right\} \rightarrow T=\dfrac{2\pi(r+h)}{\sqrt{\dfrac{G\,M}{(r+h)}}}$$



Como M, masa da Terra, r, raio da Terra, G, constante da gravitación universal, e T, período de rotación da Terra e do satélite, son constantes; obriga a que h, altura sobre a superficie da Terra, sexa constante e, en consecuencia, o ítem correcto é o a)

25.- Para o caso dun satélite xeoestacionario en torno á Terra, o vector de posición do satélite respecto ó centro da Terra, en cantos puntos da súa superficie a pode cortar?

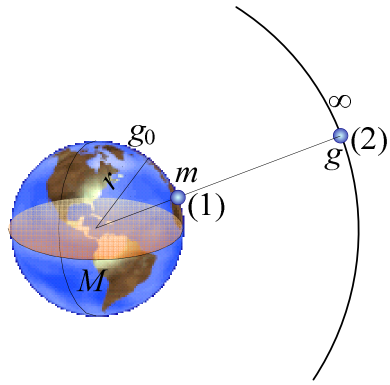
Solución:

Un satélite dise xeoestacionario cando está en órbita estacionaria sobre un mesmo punto da vertical terrestre. Isto obriga a que o satélite orbite sobre o Ecuador terrestre e o faga coa mesma velocidade angular que a Terra. Polo tanto, o vector de posición do satélite respecto ó centro da Terra soamente pode cortar á súa superficie nun único punto.

26.- Dous planetas teñen a mesma densidade, pero distinto raio. A velocidade de escape será: a) igual para os dous planetas; b) maior para o planeta de maior raio; c) maior para o planeta de menor raio.

Solución:

Para conseguir que un obxecto de masa m, que está na superficie dun planeta de masa M, escape da atracción gravitatoria de M é necesario dotar ó obxecto dunha velocidade mínima, v, chamada **velocidade de escape**, de modo que a enerxía cinética correspondente iguale ó traballo necesario para levar o obxecto desde a superficie do planeta ata o infinito.



Como a forza gravitatoria é conservativa, a enerxía mecánica consérvase para calquera punto do campo gravitatorio: $E_{\text{m}1}=E_{\text{m}2}$.

$$E_{\text{m}1}=E_{\text{m}2} \quad\rightarrow\quad E_{\text{k}1}+E_{\text{p}1}=E_{\text{k}2}+E_{\text{p}2}$$

$$\frac{1}{2}m\,v_1^2+\left(-\frac{G\,M\,m}{r}\right)=0+\;0$$

$$\frac{1}{2} m\, v_1^2 = \frac{G\, M\, m}{r} \;\rightarrow\; v_1 = \sqrt{\frac{2\, G\, M}{r}} = v_{\text{escape}}$$

Nesta expresión da velocidade de escape, a medida que aumenta o raio r do planeta tamén aumenta a súa masa M, polo que procedemos a escribir unha magnitude en función da outra:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} M = \rho \cdot V \\ V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \end{array}\right\} \rightarrow\; M = \rho \cdot \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \\ \qquad\qquad v_{\text{escape}} = \sqrt{\dfrac{2\, G\, M}{r}} \end{array}\right\} \rightarrow\; v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2\, G\, \rho\, \frac{4}{3}\, \pi\, r^3}{r}} \;\rightarrow\; v_{\text{escape}} = \text{cte} \cdot r$$

Resulta que a velocidade de escape desde a superficie dun planeta é directamente proporcional ó seu raio e, en consecuencia, o ítem correcto é o b).

27.- Un corpo de masa *m* e outro de masa 2*m*, para escapar do campo gravitatorio terrestre, necesitan: a) maior cantidade de movemento o de masa 2*m*; b) igual enerxía cinética; c) maior velocidade o de masa 2*m*.

Solución:

Segundo acabamos de ver na cuestión anterior, a velocidade de escape v dun obxecto de masa m, desde a superficie dun planeta de masa M e raio r, vén dada pola expresión: $v_{\text{escape}} = \sqrt{\dfrac{2\, G\, M}{r}}$

Vemos que a velocidade de escape non depende da masa do obxecto que se lanza, polo que o ítem c) non é a solución correcta da cuestión.

Recordando que a enerxía cinética, E_k, dunha masa m que se move cunha velocidade $\vec{v}$ vén dada pola expresión: $E_k = ½ \cdot m \cdot \vec{v}^2 = ½ \cdot m \cdot v^2$, resulta que:

$$\left.\begin{array}{l} E_{k1} = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{escape}}^2 \\ E_{k2} = \dfrac{1}{2} \cdot 2\, m \cdot v_{\text{escape}}^2 \end{array}\right\} \rightarrow\; E_{k2} > E_{k1}$$

A enerxía cinética da masa 2m é maior que a da masa m, non sendo correcta a opción b).

Recordando que a cantidade de movemento $\vec{p}$, dunha masa m que se move cunha velocidade $\vec{v}$, vén dada pola expresión: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$, resulta que:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{p}_1 = m \cdot \vec{v}_{\text{escape}} \\ \vec{p}_2 = 2\, m \cdot \vec{v}_{\text{escape}} \end{array}\right\} \rightarrow\; \vec{p}_2 > \vec{p}_1$$

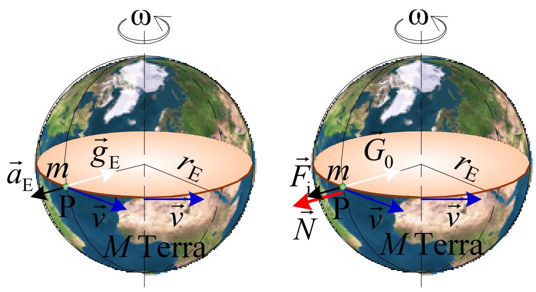
Polo tanto, a opción a) é a correcta.

28.- Se a duración de 1 día terrestre fose a de 1 h, 24 min e 25 s (en vez de 24 horas); cal

sería o peso dunha masa *m* situada no Ecuador terrestre? Dato: $r_{Ecuador} = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $g_{0\ Ecuador} = 9{,}8$ m s^{-2}.

Solución:

Un observador situado no Ecuador terrestre, con respecto a un sistema de referencia inercial, móvese cunha velocidade $\vec{v}$, que é de módulo constante (v = cte ⇒ a_t = 0) e de dirección variable ($a_n = v^2/r$ = cte). En consecuencia está sometido a unha aceleración e pertence a un sistema de referencia non inercial e ten que introducir a correspondente forza de inercia, $\vec{F}_i$, para que se lle cumpran as leis de Newton.



As forzas que actúan sobre a masa *m* son: a forza de inercia, $\vec{F}_i$, a forza con que a superficie de apoio terma dela, $\vec{N}$, (que é o peso da masa *m*) e a forza de interacción entre masas (a forza con que a Terra a atrae), $\vec{G}_0$. Para un observador que se move solidariamente coa masa *m*, a masa está en repouso e a segunda lei de Newton queda da forma: $\vec{F}_i + \vec{N} + \vec{G}_0 = \vec{0}$.

$$\left.\begin{array}{l} F_i = m \cdot a_i \\ a_i = a_n = \dfrac{v^2}{r} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} F_i = m \cdot \dfrac{v^2}{r} \\ v = \omega \cdot r \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} F_i = m \cdot \omega^2 \cdot r \\ \omega = \dfrac{\varphi}{t} \rightarrow \omega = \dfrac{2\pi}{T} \end{array}\right\} \rightarrow F_i = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r$$

$$F_i = m \cdot \frac{4\pi^2}{(1 \cdot 60 \cdot 60 + 24 \cdot 60 + 25)^2} \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 \rightarrow F_i = m \cdot 9{,}8 \text{ N}$$

$$G_0 = m \cdot g_0 \rightarrow G_0 = m \cdot 9{,}8 \text{ N}$$

$$\vec{F}_i + \vec{N} + \vec{G}_0 = \vec{0} \rightarrow F_i + N - G_0 = 0 \rightarrow m \cdot 9{,}8 + N - m \cdot 9{,}8 = 0 \rightarrow N = 0 \text{ N}$$

29.- Defínese o quilogramo peso como a forza con que a Terra atrae á masa de 1 quilogramo, situada á 45º de latitude e ó nivel do mar. Por que na definición se fai referencia á latitude e ó nivel do mar?

Solución:

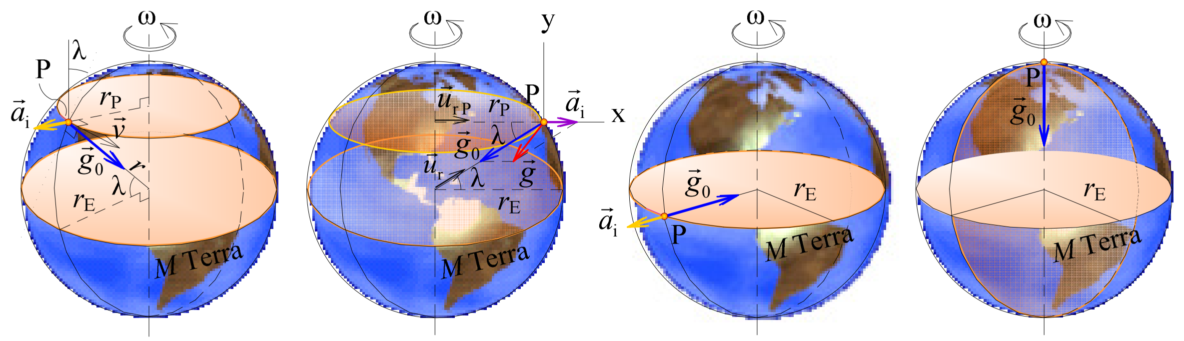
A forza $\vec{F}$ con que a Terra de masa *M* atrae a unha masa *m* vén dada pola segunda lei de Newton: $\vec{F} = m \cdot \vec{g}$, sendo $\vec{g}$ a intensidade do campo gravitatorio terrestre.

A masa *m* rota solidariamente coa Terra cunha velocidade $\vec{v}$, que é de módulo constante e de dirección variable, estando sometida a unha aceleración normal, $\vec{a}_n$. Un sistema de referencia ligado á Terra é non inercial (é acelerado) e, para un observador deste sistema de referencia, a masa *m* está sometida:

· Á forza con que a masa da Terra a atrae: $-G\,\dfrac{M\cdot m}{r^2}\cdot\vec{u}_r$, sendo r a distancia que vai desde o centro da Terra ata o centro da masa m, que se esta está na superficie da Terra ten o valor do correspondente raio terrestre. Como r diminúe a medida que nos desprazamos desde o Ecuador cara ós Polos debido ó achatamento da Terra, esta forza aumenta coa latitude. Ademais, para unha mesma latitude, o valor que lle corresponde é maior nunha sima (menor r) que no cumio dunha montaña (maior r).

· Á correspondente forza de inercia: $\vec{F}_{\mathrm{i}}=m\cdot\vec{a}_{\mathrm{i}}$, sendo $\vec{a}_{\mathrm{i}}=-\vec{a}_{\mathrm{n}}\ \rightarrow\ a_{\mathrm{i}}=\omega^2\cdot r_{\text{paralelo}}$, onde r_{paralelo} e o raio da circunferencia que corresponde ó paralelo terrestre que pasa polo punto en que está a masa m. Polo tanto, o valor de a_{i} depende da posición do punto da Terra que se considere, diminuíndo a medida que nos desprazamos desde o Ecuador cara ós Polos, tomando o valor cero nos Polos: $a_{\mathrm{i\,Polos}}=\omega\cdot 0=0$.

O resultado é que o valor de $\vec{g}_0$ diminúe coa altitude e aumenta coa latitude e o valor de $\vec{a}_{\mathrm{i}}$



diminúe coa latitude, que xunto ó feito de que $\vec{g}=\vec{g}_0+\vec{a}_{\mathrm{i}}$ resulta que o valor de $\vec{g}$ diminúe coa altitude e aumenta coa latitude, polo que **na definición do quilogramo peso é necesario facer referencia á altitude e á latitude**.

30.- Martín di que a forza con que a Terra de masa *M* atrae a unha nave espacial de masa *m* que está en órbita estacionaria de raio *r* se calcula coa fórmula: $F_{M-m}=m\cdot g=m\cdot\dfrac{G\,M}{r^2}$. No entanto, María di que esta forza se calcula coa expresión: $F_{M-m}=m\cdot a_{\mathrm{n}}=m\cdot\dfrac{v_{\text{xiro}}^2}{r}$. Comenta a veracidade destas opinións.

Solución:

A nave espacial, que no seu movemento orbital ten un movemento circular uniforme, posúe unha aceleración:

$$\left.\begin{array}{l} v=\text{cte.}\ \rightarrow\ \vec{a}_{\mathrm{t}}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{u}_{\mathrm{t}}=\vec{0}\\ \vec{v}\neq\overrightarrow{\text{cte.}}\ \rightarrow\ \vec{a}\neq\vec{0}\\ \vec{a}=\vec{a}_{\mathrm{t}}+\vec{a}_{\mathrm{n}}\end{array}\right\}\rightarrow\ \vec{a}=\vec{a}_{\mathrm{n}}\ \rightarrow\ a=a_{\mathrm{n}}=\frac{v^2}{r}=\text{cte., xa que } v \text{ e } r \text{ son constantes}$$

A nave espacial móvese cunha aceleración normal, dirixida cara ó centro da Terra, que é consecuencia da forza que a Terra exerce sobre a nave. E como $F=m{\cdot}a$ resulta:

$$F_{M-m}=m\cdot a_{\mathrm{n}}=m\cdot\frac{v_{\text{xiro}}^2}{r}$$

Tamén sabemos que a forza de atracción gravitatoria que unha masa M exerce sobre outra m obtense multiplicando a intensidade de campo gravitatorio, g, de M no punto onde está m polo valor desta: $F_{M\text{-}m} = m \cdot g$, sendo $g = \frac{G\,M}{r^2}$, resultando a expresión: $F_{M-m} = m \cdot \frac{G\,M}{r^2}$, que é a forma escalar da lei de Newton da gravitación universal.

En consecuencia, as dúas opinións, a de Martín e a de María, son correctas.

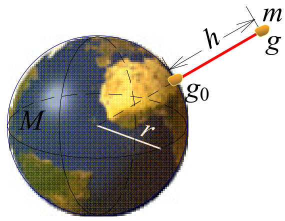
EXERCICIOS (Problemas)

1.- Se un corpo pesa 100 N cando está na superficie da Terra, a que altura pesará a metade? Nota: resolve o problema cos datos, primeiro, do apartado a) e, despois, cos do apartado b).

a) G = 6,67 · 10^{-11} N m^2 kg^{-2}, M_{Terra} = 5,98 · 10^{24} kg.

b) R_{Terra} = r = 6,37 · 10^6 m.

Solución:



a) A forza con que a Terra de masa M e raio r atrae a un corpo de masa m situado á altura h da superficie da Terra vén dada pola lei da gravitación universal: $F_{M-m} = \frac{G\,M\,m}{(r+h)^2} \rightarrow F_{M-m} = m\,g$, sendo g o valor da intensidade do campo gravitatorio terrestre á altura h.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Na superficie da Terra}: 100 = m \cdot 9{,}8 \\ \text{Á altura } h:\ 50 = m \cdot g_h\end{array}\right\} \rightarrow \frac{100}{50} = \frac{9{,}8}{g_h} \rightarrow g_h = 4{,}9\ \text{m s}^{-2}$$

$$g_h = \frac{G\,M}{(r+h)^2} \rightarrow 4{,}9 = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{(r+h)^2} \rightarrow r + h = 9{,}02 \cdot 10^6\ \text{m}$$

Para calcular h falta coñecer r, que obtemos con g_0 e os datos do problema:

$$g_0 = \frac{G\,M}{r^2} \rightarrow 9{,}8 = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{r^2} \rightarrow r = 6{,}38 \cdot 10^6\ \text{m}$$

$$h = 9{,}02 \cdot 10^6 - 6{,}38 \cdot 10^6 \rightarrow \boxed{h = 2{,}64 \cdot 10^6\ \text{m}}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} m\,g_h = m\dfrac{G\,M}{(r+h)^2} \\ m\,g_0 = m\dfrac{G\,M}{r^2}\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}\dfrac{m\,g_h}{m\,g_0} = \dfrac{r^2}{(r+h)^2} \\ m\,g_h = \dfrac{1}{2} m\,g_0\end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{(6{,}37 \cdot 10^6)^2}{(r+h)^2} \rightarrow r + h = 9{,}01 \cdot 10^6\ \text{m}$$

$$h = 9{,}01 \cdot 10^6 - 6{,}37 \cdot 10^6 \rightarrow \boxed{h = 2{,}64 \cdot 10^6\ \text{m}}$$

2.- A masa da Lúa é 1/81 a masa da Terra e o seu raio 1/4 do raio terrestre. Canto vale g na superficie da Lúa?

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} g_{0\,\mathrm{L}}=\dfrac{G\,M_{\mathrm{L}}}{r_{\mathrm{L}}^2} \\ g_{0\,\mathrm{T}}=\dfrac{G\,M_{\mathrm{T}}}{r_{\mathrm{T}}^2} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{g_{0\,\mathrm{L}}}{g_{0\,\mathrm{T}}}=\frac{M_{\mathrm{L}}}{M_{\mathrm{T}}}\cdot\frac{r_{\mathrm{T}}^2}{r_{\mathrm{L}}^2} \rightarrow \frac{g_{0\,\mathrm{L}}}{9{,}8}=\frac{1}{81}\cdot 4^2 \rightarrow \boxed{g_{0\,\mathrm{L}}=1{,}94\ \mathrm{m\,s^{-2}}}$$

3.- Que altura máxima alcanzará un proxectil lanzado verticalmente desde a superficie da Terra cunha velocidade de 20 m s^{-1}? E se se lanza con esa mesma velocidade desde a superficie do Sol, que altura alcanzará? Datos: $M_{\mathrm{Sol}} = 324440 \cdot M_{\mathrm{Terra}}$; $r_{\mathrm{Sol}} = 108 \cdot r_{\mathrm{Terra}}$.

Solución:

Como a velocidade de lanzamento do proxectil é pequena, este vaise desprazar nas proximidades da superficie do corpo desde o que se lanza coa aceleración constante da gravidade e o movemento que toma é rectilíneo uniformemente decelerado. Aplicando as ecuacións deste movemento temos:

Desde a superficie da Terra:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{h}_{\mathrm{T}}=\vec{v}_0\cdot t+\dfrac{1}{2}\cdot\vec{g}_{0\,\mathrm{T}}\cdot t^2 \rightarrow h_{\mathrm{T}}=20\cdot t-\dfrac{1}{2}\cdot 9{,}8\cdot t^2 \\ \vec{v}_{\mathrm{f}}=\vec{v}_0+\vec{g}_{0\,\mathrm{T}}\cdot t \rightarrow 0=20-9{,}8\cdot t \rightarrow t=2{,}04\ \mathrm{s} \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{h_{\mathrm{T}}=20{,}4\ \mathrm{m}}$$

Desde a superficie do Sol:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{h}_{\mathrm{S}}=\vec{v}_0\cdot t+\dfrac{1}{2}\cdot\vec{g}_{0\,\mathrm{S}}\cdot t^2 \rightarrow h_{\mathrm{S}}=20\cdot t-\dfrac{1}{2}\cdot g_{0\,\mathrm{S}}\cdot t^2 \\ \vec{v}_{\mathrm{f}}=\vec{v}_0+\vec{g}_{0\,\mathrm{S}}\cdot t \rightarrow 0=20-g_{0\,\mathrm{S}}\cdot t \end{array}\right\}$$

Para poder resolver o sistema falta coñecer g na superficie do Sol, $g_{0\,\mathrm{S}}$, que calculamos relacionándoa con $g_{0\,\mathrm{T}}$:

$$\left.\begin{array}{l} g_{0\,\mathrm{S}}=\dfrac{G\,M_{\mathrm{S}}}{r_{\mathrm{S}}^2} \\ g_{0\,\mathrm{T}}=\dfrac{G\,M_{\mathrm{T}}}{r_{\mathrm{T}}^2} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{g_{0\,\mathrm{S}}}{g_{0\,\mathrm{T}}}=\frac{M_{\mathrm{S}}}{M_{\mathrm{T}}}\cdot\frac{r_{\mathrm{T}}^2}{r_{\mathrm{S}}^2} \rightarrow \frac{g_{0\,\mathrm{S}}}{9{,}8}=\frac{324440\,M_{\mathrm{T}}}{M_{\mathrm{T}}}\cdot\frac{r_{\mathrm{T}}^2}{(108\cdot r_{\mathrm{T}})^2} \rightarrow g_{0\,\mathrm{S}}=272{,}6\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} h_{\mathrm{S}}=20\cdot t-\dfrac{1}{2}\cdot g_{0\,\mathrm{S}}\cdot t^2 \\ 0=20-g_{0\,\mathrm{S}}\cdot t \\ g_{0\,\mathrm{S}}=272{,}6\ \mathrm{m\,s^{-2}} \end{array}\right\} \rightarrow t=0{,}07\ \mathrm{s}\ \text{e}\ \boxed{h=0{,}73\ \mathrm{m}}$$

4.- Que altura máxima alcanzará, prescindindo da presenza da atmosfera, un "proxectil" lanzado verticalmente cunha velocidade de 10 km/s. Datos: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; $M_{\mathrm{T}} = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg; $r_{\mathrm{T}} = 6370$ km.

Solución:

Cando a velocidade coa que se lanza o "proxectil" e, en consecuencia, a altura que alcanza é pequena, a aceleración da gravidade é constante, podendo utilizar as ecuacións do movemento rectilíneo uniformemente variado. Esta situación non é a que ten lugar para o enunciado do problema.

Pero o campo gravitatorio no que se move o proxectil é conservativo, podendo establecer o principio de conservación da enerxía mecánica, E_{m}:

$$E_{\text{m}1} = E_{\text{m}2} \quad \rightarrow \quad E_{\text{k}1} + E_{\text{p}1} = E_{\text{k}2} + E_{\text{p}2}$$

A enerxía inicial que posúe o proxectil de masa m ó ser lanzado cunha velocidade v_1 = 10 km/s é a suma da súa enerxía cinética e potencial.

$$E_{\text{m}1} = \frac{1}{2} m\, v_1^2 + \left(-\frac{G\,M\,m}{r_1} \right)$$

sendo G a constante de gravitación universal, M a masa da Terra, r_1 o seu raio e m a masa do corpo que se lanza.

A medida que o proxectil ascende, a súa velocidade diminúe, sendo nula á altura h, na que se detén. Nese punto a súa enerxía é só potencial, de valor:

$$E_{\text{m}2} = -\frac{G\,M\,m}{r_1 + h}$$

A conservación da enerxía mecánica permítenos escribir a seguinte igualdade:

$$\frac{1}{2} m\, v_1^2 + \left(-\frac{G\,M\,m}{r_1} \right) = -\frac{G\,M\,m}{r_1 + h}$$

Despexamos agora a altura h:

$$\frac{v_1^2\, r_1 - 2\,G\,M}{2\,r_1} = -\frac{G\,M}{r_1 + h} \;\rightarrow\; r_1 + h = -\frac{2\,r_1\,G\,M}{v_1^2\, r_1 - 2\,G\,M} \;\rightarrow\; h = -\frac{2\,r_1\,G\,M}{v_1^2\, r - 2\,G\,M} - r_1$$

$$h = \frac{-2 \cdot 6370 \cdot 10^3 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{\left(10 \cdot 10^3\right)^2 \cdot 6370 \cdot 10^3 - 2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}} - 6370 \cdot 10^3 \;\rightarrow\; \boxed{h = 2{,}52 \cdot 10^7 \text{ m}}$$

Se a velocidade fose maior á velocidade de escape (11,2 km/s), o proxectil sairía do campo gravitatorio terrestre e non retornaría á Terra e a altura que se obtería por aplicación do principio de conservación da enerxía mecánica sería negativa: un resultado sen sentido.

5.- A masa da Lúa é 0,0123 veces a masa da Terra e o seu raio 0,25 o raio terrestre. Que masa habería que colocar na Lúa para que pesase o mesmo que pesa na Terra un corpo de 500 g?

Solución:

A forza con que unha masa M atrae a outra masa m vén dada pola lei da gravitación universal: $F_{M-m} = \frac{G\,M\,m}{r^2} \rightarrow F_{M-m} = m\,g$, sendo g o valor da intensidade do campo gravitatorio da masa M no punto onde se encontra a masa m.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Na Lúa: } F_{M_L-m}=m\cdot g_L\\ \text{Na Terra: } F_{M_T-m}=0{,}5\cdot g_T\\ \text{Como: } F_{M_L-m}=F_{M_T-m}\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{l} m\cdot g_L=0{,}5\,.\,g_T\\ g_L=\dfrac{G\,M_L}{r_L^2}\\ g_T=\dfrac{G\,M_T}{r_T^2}\end{array}\right\}\rightarrow m=0{,}5\cdot\frac{M_T}{M_L}\cdot\frac{r_L^2}{r_T^2}$$

$$m=0{,}5\cdot\frac{1}{0{,}0123}\cdot 0{,}25^2\ \rightarrow\ \boxed{m=2{,}54\ \text{kg}}$$

6.- Con que forza atrae a Terra a unha masa de 6,7 · 10^{22} **kg situada a 100 m de altura? E con que forza atrae a Terra á Lúa? Datos:** $M_{\text{Lúa}}$ **= 6,7 · 10**^{22} **kg;** $r_{\text{medio da órbita da Lúa arredores da Terra}}$ **= 3,84 · 10**^{8} **m;** r_{Terra} **= 6,37 · 10**^{6} **m.**

Solución:

A forza $F_{M\text{-}m}$ con que a Terra de masa M e raio r atrae a un corpo de masa m situado a unha altura h da superficie da Terra vén dada pola lei da gravitación universal: $F_{M-m}=\dfrac{G\,M\,m}{(r+h)^2}\ \rightarrow\ F_{M-m}=m\,g$, sendo g o valor da intensidade do campo gravitatorio terrestre á altura á que se encontra m. Cando a masa m se atopa á altura de 100 m sobre a superficie da Terra, o valor de g coincide co da superficie da Terra e ten o valor xa coñecido de 9,8 m s^{-2}, resultando:

$$F=6{,}7\cdot 10^{22}\cdot 9{,}8\ \rightarrow\ \boxed{F=6{,}57\cdot 10^{23}\ \text{N}}$$

Cando a distancia da masa m á superficie da Terra é grande, o valor de g diminúe e haino que calcular cos datos do problema.

$$\left.\begin{array}{l} F_{\text{T-L}}=\dfrac{G\,M_T\,m_L}{(r_T+h)^2}\\ g_{0\,T}=\dfrac{G\,M_T}{r_T^2}\ \rightarrow\ G\,M_T=g_{0\,T}\cdot r_T^2\end{array}\right\}\rightarrow F_{\text{T-L}}=\frac{g_{0\,T}\cdot r_T^2\cdot m_L}{(r+h)^2}$$

$$F_{\text{T-L}}=\frac{9{,}8\cdot\left(6{,}37\cdot 10^6\right)^2\cdot 6{,}7\cdot 10^{22}}{\left(3{,}84\cdot 10^8\right)^2}\ \rightarrow\ \boxed{F_{\text{T-L}}=1{,}8\cdot 10^{20}\ \text{N}}$$

7.- Cal será o período de oscilación dun péndulo simple na superficie lunar se o seu período de oscilación na Terra é de 1 segundo? Dato: $g_{\text{Lúa}}$ **= 1,94 m/s**^{2}**.**

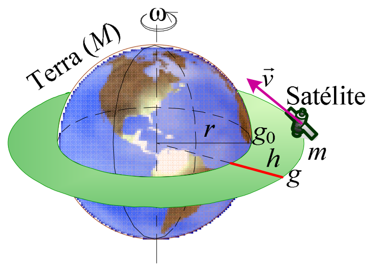
Solución:

$$\left.\begin{array}{l} T_L = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_L}} \rightarrow T_L = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{1,94}} \\ \\ T_T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_T}} \rightarrow l = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{9,8}} \rightarrow l = 0,25\ \text{m} \end{array}\right\} \rightarrow T_L = 2\pi\sqrt{\dfrac{0,25}{1,94}} \rightarrow \boxed{T_L = 2,25\ \text{s}}$$

8.- Lánzase un satélite co propósito de colocalo nunha órbita xeoestacionaria. Calcula: a) O valor da altura da órbita onde evoluciona o satélite e b) O módulo da velocidade do satélite nesa órbita. Datos: g_0 = 9,8 m/s^2; r_T = 6370 km.

Solución:

a) Dado que o satélite se quere colocar nunha órbita xeoestacionario, ademais de ser estable, o que significa: $F_{peso} = F_{inercia}$, o seu período de revolución, $T_{satélite}$, coincide co da Terra, T_{Terra}: $T_{satélite} = T_{Terra}$ = 86400 s.



$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{m\,v^2}{r+h} = m\,g \\ v = \omega\,(r+h) \\ g = \dfrac{G\,M}{(r+h)^2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{[\omega(r+h)]^2}{r+h} = \dfrac{G\,M}{(r+h)^2} \\ g_0 = \dfrac{G\,M}{r^2} \rightarrow G\,M = g_0\,r^2 \\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{\left[\dfrac{2\pi}{T}(r+h)\right]^2}{r+h} = \dfrac{g_0\,r^2}{(r+h)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{4\pi^2\,(r+h)}{86400^2} = \dfrac{9,8\,r^2}{(r+h)^2} \rightarrow r+h = 4,22\cdot 10^7\ \text{m} \\ r = 6370\cdot 10^3\ \text{m} \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{h = 3,58\cdot 10^7\ \text{m}}$$

b) $v = \omega(r+h) \rightarrow v = \dfrac{2\pi}{T}(r+h) \rightarrow v = \dfrac{2\pi}{86400}\cdot 4,22\cdot 10^7 \rightarrow \boxed{v = 3,07\cdot 10^3\ \text{m s}^{-1}}$

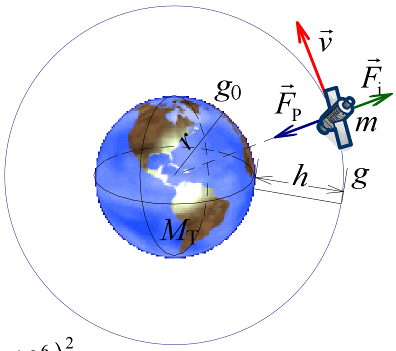
9.- Determina a velocidade orbital dunha cápsula situada a unha altura de 350 km sobre a superficie terrestre. Cal é o seu período de revolución? Compárese o valor da súa aceleración centrípeta co valor de *g* a esa distancia da Terra. Que consecuencias se poden extraer deste resultado? Datos: r_{Terra} = 6,37·10^6 m; g_0 = 9,81 m/s^2.

Solución:

Para un observador situado no satélite (sistema de referencia non inercial) resulta que:

$$\vec{F}_{peso} + \vec{F}_{inercia} = \vec{0} \rightarrow F_{peso} = F_{inercia} \rightarrow m\cdot g = m\cdot\frac{v^2}{r+h} \rightarrow v = \sqrt{g\,(r+h)}$$

$$v=\sqrt{g\left(6{,}37\cdot 10^{6}+350\cdot 10^{3}\right)}$$



Como non temos o dato da aceleración da gravidade terrestre, g, á altura de 350 km, imos relacionar este valor co que ten na superficie da Terra, g_0, (que sempre o supoñeremos coñecido).

$$\left.\begin{array}{l} g=\dfrac{G\,M_T}{(r+h)^2} \\ g_0=\dfrac{G\,M_T}{r^2}\end{array}\right\} \rightarrow \frac{g}{g_0}=\frac{r^2}{(r+h)^2} \rightarrow \frac{g}{9{,}81}=\frac{\left(6{,}37\cdot 10^{6}\right)^2}{\left(6{,}37\cdot 10^{6}+350\cdot 10^{3}\right)^2} \rightarrow \boxed{g=8{,}82\ \mathrm{m\,s^{-2}}}$$

$$v=\sqrt{8{,}82\cdot\left(6{,}37\cdot 10^{6}+350\cdot 10^{3}\right)} \rightarrow \boxed{v=7{,}70\cdot 10^{3}\ \mathrm{m\,s^{-1}}}$$

$$\left.\begin{array}{l} T=\dfrac{2\pi}{\omega} \\ v=\omega(r+h)\end{array}\right\} \rightarrow T=\frac{2\pi(r+h)}{v}$$

$$T=\frac{2\pi\left(6{,}37\cdot 10^{6}+350\cdot 10^{3}\right)}{7{,}70\cdot 10^{3}} \rightarrow \boxed{T=5{,}48\cdot 10^{3}\ \mathrm{s}}$$

$$a_n=\frac{v^2}{r+h} \rightarrow a_n=\frac{\left(7{,}70\cdot 10^{3}\right)^2}{6{,}37\cdot 10^{6}+350\cdot 10^{3}} \rightarrow \boxed{a_n=8{,}82\ \mathrm{m\,s^{-2}}}$$

Vemos que g = a_n e, para un sistema de referencia inercial, a única forza que actúa sobre a cápsula é a forza con que a Terra a atrae, sendo de dirección normal á da velocidade de xiro. Polo tanto a cápsula está en caída libre pero, debido á velocidade tanxencial que posúe, segue na órbita circular correspondente con movemento circular uniforme:

$$\left.\begin{array}{l} W=\int F\cdot \mathrm{d}r\cdot\cos 90^{\circ}=0 \\ W=\Delta E_k\end{array}\right\} \rightarrow 0=\Delta E_k \rightarrow v=\mathrm{cte.} \rightarrow \text{movemento uniforme}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} v=\mathrm{cte.} \rightarrow \vec{a}_t=\vec{0} \\ \vec{v}\neq\overrightarrow{\mathrm{cte.}} \rightarrow \vec{a}\neq\vec{0} \\ \vec{a}=\vec{a}_t+\vec{a}_n \end{array}\right\} \rightarrow \vec{a}=\vec{a}_n=\dfrac{v^2}{r+h}\cdot\vec{u}_n \rightarrow a_n=\dfrac{v^2}{r+h} \\ \hfill a_n=g=\mathrm{cte.} \\ \hfill v=\mathrm{cte.} \end{array}\right\} \rightarrow r+h=\mathrm{cte.} \rightarrow \text{circunferencia}$$

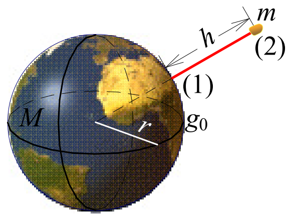
Un observador que viaxa na cápsula (sistema de referencia non inercial) está en repouso, sendo nula a resultante das forzas que actúan sobre el, encontrándose nunha **situación de ingravidez**.

10.- Unha pedra de 40 kg, que inicialmente se encontra en repouso, deixase caer sobre a superficie da Terra desde unha altura de: a) 50 m e b) 6,37 · 10⁶ m. Calcula a velocidade que terá ó chegar á superficie da Terra se non se ten en conta o efecto de freado da atmosfera. Dato: r_{Terra} =

$6{,}37 \cdot 10^6$ m.

Solución:

a) A pedra descende coa aceleración constante da gravidade na superficie da Terra, cun movemento rectilíneo uniformemente acelerado (m.r.u.a.). Aplicando as ecuacións deste movemento temos:



$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_{\mathrm{f}} = \vec{v}_0 + \vec{g}\cdot t \;\rightarrow\; v_{\mathrm{f}} = 9{,}8\cdot t \\ \vec{r} = \vec{v}_0\cdot t + \dfrac{1}{2}\cdot\vec{g}\cdot t^2 \;\rightarrow\; 50 = \dfrac{1}{2}\cdot 9{,}8\cdot t^2 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{v_{\mathrm{f}} = v_1 = 31{,}4\ \mathrm{m\,s^{-1}}}$$

b) Neste caso, a aceleración de descenso non é constante e non se poden utilizar as ecuacións do m.r.u.a. Agora facemos uso do carácter conservativo do campo gravitatorio:

$$E_{\mathrm{m}2} = E_{\mathrm{m}1} \;\rightarrow\; E_{\mathrm{p}2} = E_{\mathrm{k}1} + E_{\mathrm{p}1} \;\rightarrow\; \left(-\frac{G\,M\,m}{r_2}\right) = \frac{1}{2}\,m\,v_1^2 + \left(-\frac{G\,M\,m}{r_1}\right)$$

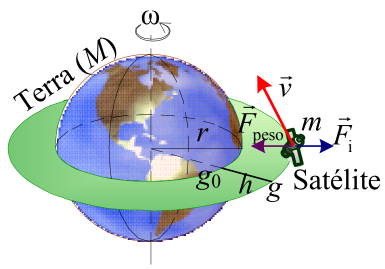
$$\left.\begin{array}{l} v_1^2 = \dfrac{2\,G\,M}{r_1} - \dfrac{2\,G\,M}{r_2} \\ r_1 = r_{\mathrm{Terra}} \\ r_2 = 2\,r_{\mathrm{Terra}} \\ G\,M = g_0\,r_{\mathrm{Terra}}^2 \end{array}\right\} \rightarrow v_1^2 = \frac{2\,g_0\,r_{\mathrm{Terra}}^2}{r_{\mathrm{Terra}}} - \frac{2\,g_0\,r_{\mathrm{Terra}}^2}{2\cdot r_{\mathrm{Terra}}} \;\rightarrow\; v_1^2 = 2\,g_0\,r_{\mathrm{Terra}} - g_0\,r_{\mathrm{Terra}} = g_0\,r_{\mathrm{Terra}}$$

$$v_1 = \sqrt{g_0\,r_{\mathrm{Terra}}} \;\rightarrow\; v_1 = \sqrt{9{,}8\cdot 6{,}37\cdot 10^6} \;\rightarrow\; \boxed{v_1 = 7{,}90\cdot 10^3\ \mathrm{m\,s^{-1}}}$$

11.- Un satélite de 100 kg xira ó redor da Terra nunha órbita circular a unha altura de 3200 km. Sabendo que a esa altura o valor da aceleración da gravidade é 4/9 do valor que ten na superficie terrestre, calcula: a) A velocidade e a enerxía cinética do satélite e b) O período no satélite dun péndulo que bate segundos ($T = 2$ s) na superficie terrestre. Datos: $r_{\mathrm{T}} = 6370$ km; $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$.

Solución:

a) Para un observador situado no satélite (sistema de referencia non inercial) resulta que:



$$\vec{F}_{\mathrm{peso}} + \vec{F}_{\mathrm{inercia}} = \vec{0} \;\rightarrow\; F_{\mathrm{peso}} - F_{\mathrm{inercia}} = 0 \;\rightarrow\; F_{\mathrm{peso}} = F_{\mathrm{inercia}}$$

$$m\cdot g = m\cdot\frac{v^2}{r+h} \;\rightarrow\; v = \sqrt{g\,(r+h)}$$

$$v = \sqrt{\frac{4}{9}\cdot 9{,}8\cdot\left(6{,}37\cdot 10^6 + 3200\cdot 10^3\right)} \rightarrow \boxed{v = 6456\ \mathrm{m\,s^{-1}}}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m\, v^2 \;\rightarrow\; E_k = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 6456^2 \;\rightarrow\; \boxed{E_k = 2{,}1 \cdot 10^9\ \text{J}}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} T_s = 2\,\pi \sqrt{\dfrac{l}{g_{\text{T á altura do satélite}}}} \;\rightarrow\; T_s = 2\,\pi \sqrt{\dfrac{l}{\frac{4}{9} \cdot 9{,}8}} \\ T_T = 2\,\pi \sqrt{\dfrac{l}{g_{\text{T na súa superficie}}}} \;\rightarrow\; 2 = 2\,\pi \sqrt{\dfrac{l}{9{,}8}} \;\rightarrow\; l = 1{,}0\ \text{m} \end{array}\right\} \rightarrow\; T_s = 2\,\pi \sqrt{\dfrac{1{,}0}{\frac{4}{9} \cdot 9{,}8}} \;\rightarrow\; \boxed{T_L = 3{,}0\ \text{s}}$$

Este período é o que corresponde á altura á que está o satélite, xa que no propio satélite a situación é de ingravidez e o período é infinito, non oscilando o péndulo.

12.- Cal é, como mínimo, a velocidade que é preciso comunicar a un obxecto situado a 1000 km de altura sobre a superficie da Terra para que escape do campo gravitatorio desta? Cal debe ser a dirección da velocidade? Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; $M_T = 5{,}99 \cdot 10^{24}$ kg; $r_T = 6370$ km.

Solución:

Escapar do campo gravitatorio terrestre equivale a desprazar o corpo ó infinito. Supoñendo que o obxecto estea en repouso, como a forza gravitatoria é conservativa, temos :

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} \;\rightarrow\; \frac{1}{2} m\, v_1^2 + \left(-\frac{G\, M\, m}{r_T + h_1} \right) = 0 + 0$$

$$v = \sqrt{\frac{2\, G\, M}{r_T + h_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}99 \cdot 10^{24}}{(6{,}37 + 1) \cdot 10^6}} \;\rightarrow\; \boxed{v = 10{,}4 \cdot 10^3\ \text{m s}^{-1}}$$

Sen embargo, o máis razoable é que o obxecto se encontre en órbita, de modo que será necesario comunicarlle unha velocidade adicional $\left(\vec{v}_{\text{adicional}}\right)$ á que xa posúe $\left(\vec{v}_{\text{orbital}}\right)$ para que alcance en total unha enerxía cinética igual ó traballo necesario para levar o satélite desde a altura r+h ata o infinito, $W_{r+h\rightarrow\infty}$. A velocidade total, $\vec{v}_{\text{necesaria}}$, será:

$$\vec{v}_{\text{necesaria}} = \vec{v}_{\text{orbital}} + \vec{v}_{\text{adicional}}$$

O módulo da $\vec{v}_{\text{adicional}}$ depende da súa dirección. Supoñamos que as velocidades adicional e orbital son perpendiculares. En tal caso:

$$v^2_{\text{necesaria}} = v^2_{\text{orbital}} + v^2_{\text{adicional}} \;\rightarrow\; \left(10{,}4 \cdot 10^3\right)^2 = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}99 \cdot 10^{24}}{7370000} + v^2_{\text{adicional}}$$

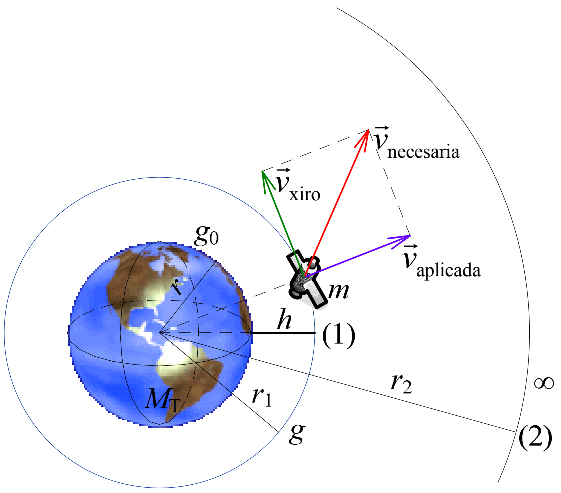
$$\boxed{v_{\text{adicional}} = 7{,}35 \cdot 10^3\ \text{m s}^{-1}}$$

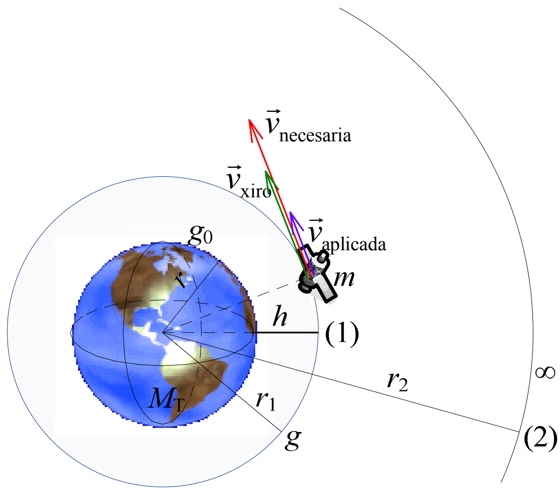
Se a enerxía comunicada ($E_{\text{k adicional}}$) a calculamos como diferenza da enerxía necesaria ($E_{\text{k necesaria}}$) e a enerxía que posúe ($E_{\text{k orbital}}$), a **velocidade a comunicar** ten que ser **na dirección perpendicular á velocidade orbital**, xa que:

$$E_{\text{k adicional}} = E_{\text{k necesaria}} - E_{\text{k orbital}} \rightarrow \frac{1}{2} m\, v_{\text{adicional}}^2 = \frac{1}{2} m\, v_{\text{necesaria}}^2 - \frac{1}{2} m\, v_{\text{orbital}}^2$$

$$v_{\text{adicional}}^2 = v_{\text{necesaria}}^2 - v_{\text{orbital}}^2 \rightarrow v_{\text{necesaria}}^2 = v_{\text{adicional}}^2 + v_{\text{orbital}}^2$$

Esta igualdade só se cumpre se a $\vec{v}_{\text{adicional}}$ e a $\vec{v}_{\text{orbital}}$ son perpendiculares. Como a $\vec{v}_{\text{orbital}}$ é tanxente á traxectoria, a $\vec{v}_{\text{adicional}}$ que temos que comunicar vai ter unha dirección radial (perpendicular á órbita do satélite) e cara a fóra.





Se a **velocidade adicional** a aplicamos **na dirección da velocidade de xiro**, e co sentido desta, o seu valor calculámolo da forma:

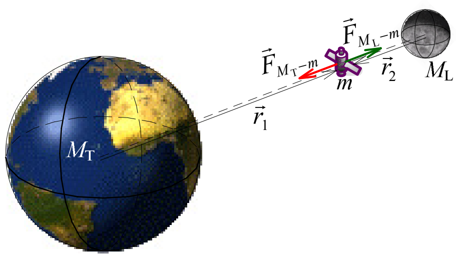
$$v_{\text{adicional}} = v_{\text{necesaria}} - v_{\text{orbital}} \rightarrow v_{\text{adicional}} = 10{,}4 \cdot 10^3 - 7{,}4 \cdot 10^3 \rightarrow \boxed{v_{\text{adicional}} = 3{,}0 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}}$$

xa que $v_{\text{orbital}} = \sqrt{\dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}99 \cdot 10^{24}}{7370 \cdot 10^3}} = 7{,}4 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$

13.- En que punto da liña recta que une a Terra e a Lúa se equilibran as atraccións que exercen sobre un corpo? Distancia entre os centros dos dous astros: 384400 km. Dato: M_{Terra} = 81 veces a masa da Lúa.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} F_{M_T - m} = \dfrac{G\, M_T\, m}{r_1^2} \\ F_{M_L - m} = \dfrac{G\, M_L\, m}{r_2^2} \\ F_{M_T - m} = F_{M_L - m} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{M_T}{r_1^2} = \dfrac{M_L}{r_2^2} \\ r_1 + r_2 = 384400 \cdot 10^3 \text{ m} \\ M_T = 81\, M_L \end{array}\right\} \rightarrow$$



$$\boxed{r_1 = 345960 \text{ km e } r_2 = 38440 \text{ km}}$$

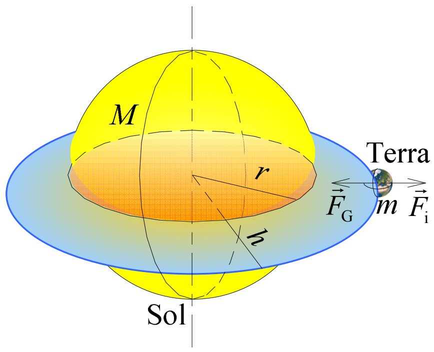
14.- Calcula a masa do Sol sabendo que a Terra describe unha órbita circular arredor del, sendo a distancia entre o Sol e a Terra 1,495 · 10⁸ km. Dato: *G* = 6,67 · 10⁻¹¹ N m² kg⁻².

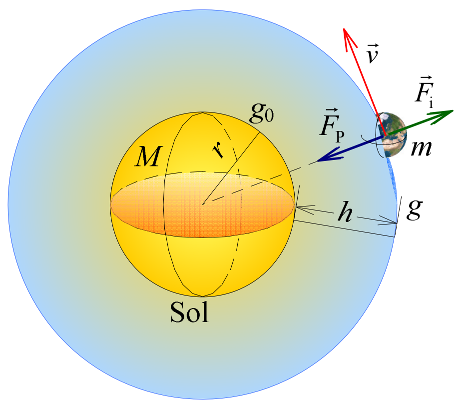
Solución:

A Terra está en órbita estacionaria ó redor do Sol e para un observador ligado á Terra cúmprese que: $\vec{F}_{\text{Sol-Terra}} + \vec{F}_{\text{inercia}} = \vec{0} \rightarrow F_{\text{Sol-Terra}} - F_{\text{inercia}} = 0 \rightarrow F_{\text{Sol-Terra}} = F_{\text{inercia}}$.

$$m_{\text{Terra}} \cdot g_{\text{Sol}} = m_{\text{Terra}} \cdot \frac{v^2}{(r_{\text{Sol}} + h)} \rightarrow v = \sqrt{g_{\text{Sol}} \cdot (r_{\text{Sol}} + h)}$$

$$\left.\begin{aligned} v &= \sqrt{g\,(r+h)} \\ g &= \frac{G\,M}{(r+h)^2} \end{aligned}\right\} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G\,M}{(r+h)}}$$





Tomaremos como dato o tempo *T* que a Terra tarda en dar unha volta completa ó redor do Sol: *T* = 365 días.

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \frac{2\,\pi}{T} \\ v &= \omega\,(r+h) \\ v &= \sqrt{\frac{G\,M}{r+h}} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{2\,\pi}{T}(r+h) = \sqrt{\frac{G\,M}{(r+h)}} \rightarrow M = \frac{4\,\pi^2}{T^2} \cdot \frac{(r+h)^3}{G}$$

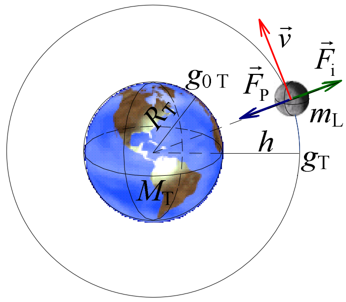
$$M = \frac{4\,\pi^2}{(365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)^2} \cdot \frac{(1{,}495 \cdot 10^{11})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} \rightarrow \boxed{M = 1{,}9866 \cdot 10^{30} \text{ kg}}$$

15.- A distancia Terra-Lúa é aproximadamente 60 R_T. Calcula: a) a velocidade lineal da Lúa na súa rotación arredor da Terra; b) o período de rotación (en días) da Lúa. Datos: *G* = 6,67 · 10⁻¹¹ N m² kg⁻²; M_T = 5,98 · 10²⁴ kg; R_T = 6400 km. (*Selectividade COU*; *set. 02*).

Solución:

a) A Lúa describe órbitas circulares estacionarias ó redor da Terra e para un observador situado na Lúa (sistema de referencia non inercial) hai de cumprirse que:

$$\vec{F}_{\text{peso}} + \vec{F}_{\text{inercia}} = \vec{0} \rightarrow F_{\text{peso}} - F_{\text{inercia}} = 0 \rightarrow F_{\text{peso}} = F_{\text{inercia}}$$



$$m_{\text{L}} \cdot g = m_{\text{L}} \cdot \frac{v^2}{R_{\text{T}} + h} \rightarrow v = \sqrt{g\,(R_{\text{T}} + h)}$$

$$\left.\begin{aligned} v &= \sqrt{g\,(R_{\text{T}} + h)} \\ g &= \frac{G\,M_{\text{T}}}{(R_{\text{T}} + h)^2} \end{aligned}\right\} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G\,M_{\text{T}}}{R_{\text{T}} + h}}$$

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot\ 5{,}98 \cdot 10^{24}}{60 \cdot 6400 \cdot 10^3}} \rightarrow \boxed{v = 1019{,}2 \text{ m s}^{-1}}$$

b)

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{2\,\pi}{\omega} \\ \omega &= \frac{v}{R_{\text{T}} + h} \end{aligned}\right\} \rightarrow T = \frac{2\,\pi}{v}(R_{\text{T}} + h) \rightarrow T = \frac{2\,\pi}{1019{,}2} \cdot 60 \cdot 6400 \cdot 10^3$$

$$\boxed{T = 2366091{,}1 \text{ s} = 27{,}4 \text{ días}}$$

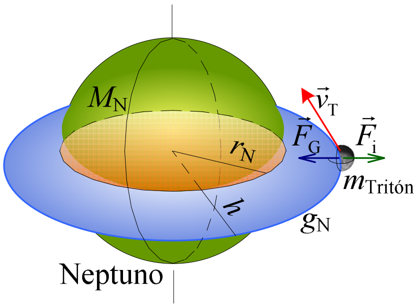
16.- Tritón é un dos satélites coñecidos de Neptuno e ten a particularidade de ser o único de todo o sistema solar que gravita en sentido retrógrado. Describe unha órbita circular de raio $r = 3{,}55 \cdot 10^5$ km e tarda 5 días e 21 horas en completar unha volta. Determina: a) a masa de Neptuno; b) a distancia que percorrerá en 5 s un corpo que, partindo do repouso, cae libremente na proximidade da súa superficie. Datos: Raio de Neptuno, $R_{\text{N}} = 24000$ km; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}. (*Selectividade COU*; *xuño 01*).

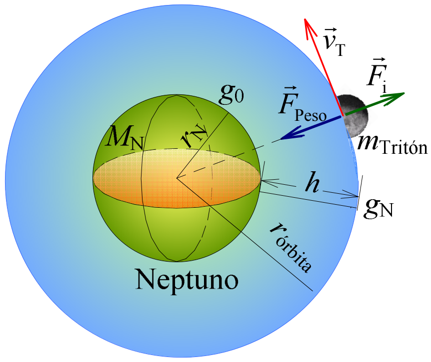
Solución:

a) Tritón está en órbita estacionaria ó redor de Neptuno e para un observador ligado ó satélite (sistema de referencia non inercial) cúmprese que: $\vec{F}_{\text{peso}} + \vec{F}_{\text{inercia}} = \vec{0} \rightarrow F_{\text{peso}} = F_{\text{inercia}}$.

$$m_{\text{Tritón}} \cdot g_{\text{Neptuno}} = m_{\text{Tritón}} \cdot \frac{v^2_{\text{Tritón}}}{(r_{\text{Neptuno}} + h)} \rightarrow v^2_{\text{Tritón}} = g_{\text{Neptuno}} \cdot (r_{\text{Neptuno}} + h)$$

$$\left.\begin{aligned} v^2_{\text{Tritón}} &= g_{\text{Neptuno}} \cdot r_{\text{órbita}} \\ g_{\text{N na órbita}} &= \frac{G\,M_{\text{N}}}{r^2_{\text{órbita}}} \end{aligned}\right\} \rightarrow v^2_{\text{Tritón}} = \frac{G\,M_{\text{N}}}{r_{\text{órbita}}}$$



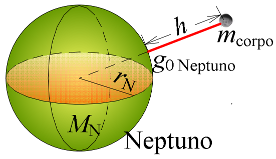


Co dato do tempo T que Tritón tarda en dar unha volta completa ó redor de Neptuno podemos calcular a súa velocidade angular ω e relacionar este valor coa velocidade lineal de xiro, v: $v = \omega \cdot r_{órbita}$.

$$\left.\begin{array}{l} v_{Tritón} = \dfrac{2\,\pi}{T} \\ v_{Tritón} = \omega_{Tritón} \cdot r_{órbita} \\ v^2_{Tritón} = \dfrac{G\,M_{Neptuno}}{r_{órbita}} \end{array}\right\} \rightarrow \left(\frac{2\,\pi}{T}\,r_{órbita}\right)^2 = \frac{G\,M_{Neptuno}}{r_{órbita}} \rightarrow M_{Neptuno} = \frac{4\,\pi^2}{T^2} \cdot \frac{r^3_{órbita}}{G}$$

$$M_{Neptuno} = \frac{4\,\pi^2}{\left((5 \cdot 24 + 21) \cdot 60 \cdot 60\right)^2} \cdot \frac{\left(3{,}55 \cdot 10^8\right)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} \rightarrow \boxed{M_{Neptuno} = 1{,}03 \cdot 10^{26}\ \text{kg}}$$

b) En 5 s, o corpo descende (coa aceleración constante da gravidade na superficie de Neptuno, $g_{0\,Neptuno}$) unha altura h cun movemento rectilíneo uniformemente acelerado (m.r.u.a.). Aplicando as ecuacións deste movemento resulta:



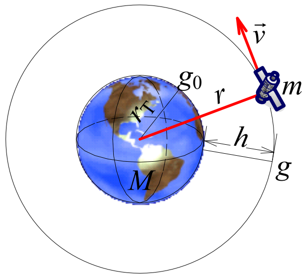
$$\left.\begin{array}{l} \vec{h} = \vec{v}_0 \cdot t + \dfrac{1}{2} \cdot \vec{g}_{Neptuno} \cdot t^2 \rightarrow h = \dfrac{1}{2} \cdot g_{0\,Neptuno} \cdot 5^2 \\ g_{0\,N} = \dfrac{G\,M_N}{r_N^2} \rightarrow g_{0\,N} = \dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}03 \cdot 10^{26}}{\left(2400 \cdot 10^3\right)^2} = 11{,}9\ \text{m s}^{-2} \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{h_T = 148{,}8\ \text{m}}$$

17.- Un satélite de masa 200 kg encóntrase en órbita circular de raio *r* ó redor do centro da Terra. Se a enerxía potencial a esa distancia é de $-2 \cdot 10^9$ J, a) determina o raio e b) calcula a velocidade do satélite. Datos: gravidade terrestre g = 10 m s^{-2}; r_T = 6400 km. (*Selectividade COU*; *set. 00*).

Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{l} E_{\mathrm{p}} = -\dfrac{G\,M\,m}{r_{\mathrm{T}}+h} = -\dfrac{G\,M\,m}{r} \rightarrow -2\cdot 10^{9} = -\dfrac{G\,M\,200}{r} \\ g_0 = \dfrac{G\,M}{r_{\mathrm{T}}^2} \rightarrow G\,M = g_0\,r_{\mathrm{T}}^2 \rightarrow G\,M = 10\cdot\left(6400\cdot 10^3\right)^2 \end{array}\right\} \rightarrow$$



$$r = \frac{10\cdot\left(6400\cdot 10^3\right)^2\cdot 200}{2\cdot 10^9} \rightarrow \boxed{r = 4{,}1\cdot 10^7\ \mathrm{m}}$$

b) Para un observador situado no satélite (sistema de referencia non inercial) hai de cumprirse que: $\vec{F}_{\text{peso}} + \vec{F}_{\text{inercia}} = \vec{0} \rightarrow F_{\text{peso}} = F_{\text{inercia}} \rightarrow m\cdot g = m\cdot\dfrac{v^2}{r+h} \rightarrow v = \sqrt{g\,(r+h)}$.

$$\left.\begin{array}{l} v = \sqrt{g\,(r+h)} \\ g = \dfrac{G\,M}{(r+h)^2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} v = \sqrt{\dfrac{G\,M}{r+h}} \\ G\,M = g_0\,r_{\mathrm{T}}^2 \end{array}\right\} \rightarrow v = \sqrt{\frac{g_0\,r_{\mathrm{T}}^2}{(r+h)}}$$

$$v = \sqrt{\frac{10\cdot\left(6400\cdot 10^3\right)^2}{4{,}1\cdot 10^7}} \rightarrow \boxed{v = 3{,}16\cdot 10^3\ \mathrm{m\,s^{-1}}}$$

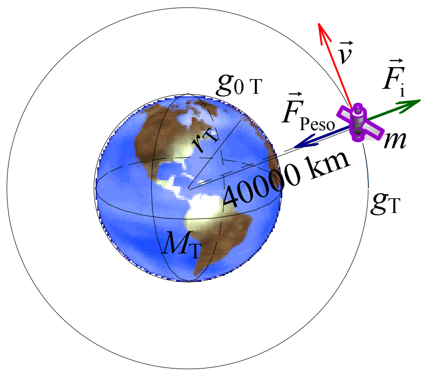
18.- Un satélite xira en órbita circular ó redor da Terra a 40000 km de distancia do seu centro. Se houbese outro satélite xirando tamén en órbita circular, coa mesma velocidade como a anterior, pero ó redor da Lúa, a) a que distancia do centro da Lúa estaría situado? e b) cal dos dous xiraría con maior período? Dato: a masa da Lúa é 0,0123 veces a da Terra. (*Selectividade COU*; *xuño 00*).

Solución:

a) Para un observador situado no satélite en órbita estacionaria (sistema de referencia non inercial), as forzas que sobre el actúan son: A forza con que a Terra o atrae (peso), $\vec{F}_G$, e a forza de inercia, $\vec{F}_{\mathrm{i}}$, estando nunha situación de repouso, resultando:

$$\vec{F}_{\text{peso}} + \vec{F}_{\text{inercia}} = \vec{0} \rightarrow F_{\text{peso}} = F_{\text{inercia}} \rightarrow m\cdot g = m\cdot\frac{v^2}{r+h} \rightarrow v = \sqrt{g\,(r+h)}$$

$$\left.\begin{array}{l} v = \sqrt{g\,(r+h)} \\ g = \dfrac{G\,M}{(r+h)^2} \end{array}\right\} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G\,M}{r+h}}$$

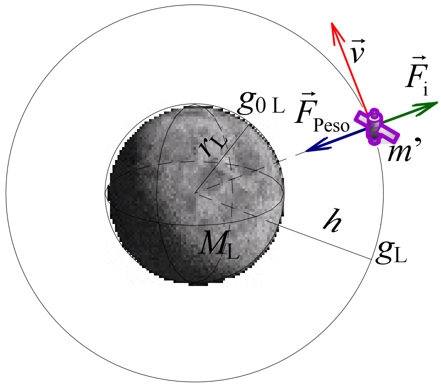


No caso do satélite ó redor da Terra:

$$v = \sqrt{\frac{G\,M_{\mathrm{T}}}{40000\cdot 10^3}}$$

No caso do satélite ó redor da Lúa:

$$v = \sqrt{\frac{G\,M_L}{r_L + h}}$$



Relacionando estas dúas igualdades:

$$\frac{M_T}{40000 \cdot 10^3} = \frac{M_L}{r_L + h}$$

Recordando que: $M_L = 0{,}0123\ M_T$, resulta:

$$\boxed{r_L + h = 492000\ \text{m}}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} T = \dfrac{2\,\pi}{\omega} \\ \omega = \dfrac{v}{(r+h)} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} T = \dfrac{2\,\pi\,(r+h)}{v} \\ v = \sqrt{\dfrac{G\,M}{(r+h)}} \end{array}\right\} \rightarrow T = \frac{2\,\pi\sqrt{(r+h)^3}}{\sqrt{G\,M}}$$

No caso do satélite ó redor da Terra: $T_T = \dfrac{2\,\pi\sqrt{\left(40000 \cdot 10^3\right)^3}}{\sqrt{G\,M_T}}$

No caso do satélite ó redor da Lúa: $T_L = \dfrac{2\,\pi\sqrt{492000^3}}{\sqrt{G\,M_L}}$

Relacionando estas dúas igualdades temos:

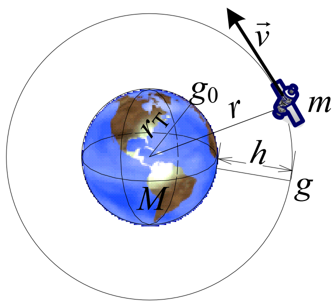
$$\frac{T_T}{T_L} = \sqrt{\frac{\left(40000 \cdot 10^3\right)^3}{492000^3}} \cdot \sqrt{0{,}0123} \rightarrow \frac{T_T}{T_L} = 81{,}3 \rightarrow \boxed{T_{\text{do satélite ó redor da Terra}} > T_{\text{do satélite ó redor da Lúa}}}$$

19.- O laboratorio espacial MIR, de 18600 kg, describe unha órbita circular case rasante, a unha altura de 360 km sobre a superficie terrestre. Calcula: a) o número de voltas que dá ó redor da Terra en 1 día, b) a súa enerxía mecánica. Datos: r_T = 6400 km; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}. (*Selectividade COU; Set. 99*).

Solución:

a) Empezamos calculando o tempo que tarda o satélite en dar unha volta completa ó redor da Terra:

$$\left.\begin{array}{l} T = \dfrac{2\pi}{\omega} \\ v = \omega(r_T + h) \\ v = \sqrt{\dfrac{G\,M}{r_T + h}} \end{array}\right\} \rightarrow T = \frac{2\pi(r_T + h)}{\sqrt{\dfrac{G\,M}{(r_T + h)}}}$$



$$T = \frac{2\pi(6400\cdot10^3 + 360\cdot10^3)}{\sqrt{\dfrac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{(6400\cdot10^3 + 360\cdot10^3)}}} \rightarrow T = 5526{,}7\text{ s}$$

Número de voltas n en un día é: $n = \dfrac{1\text{ volta}}{5526{,}7\text{ s}}\cdot 24\cdot60\cdot60\text{ s} \rightarrow \boxed{n = 15{,}6\text{ voltas}}$

b) $E_m = E_k + E_p$

$$\left.\begin{array}{l} E_m = \dfrac{1}{2}m\,v_{\text{xiro}}^2 + \left(-\dfrac{G\,M\,m}{r_T + h}\right) \\ v = \sqrt{\dfrac{G\,M}{(r_T + h)}} \end{array}\right\} \rightarrow E_m = \frac{1}{2}m\frac{G\,M}{(r_T + h)} - \frac{G\,M\,m}{(r_T + h)} \rightarrow E_m = -\frac{1}{2}\frac{G\,M\,m}{(r_T + h)}$$

$$E_m = -\frac{1}{2}\cdot\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot18600}{6400\cdot10^3 + 360\cdot10^3} \rightarrow \boxed{E_m = -5{,}5\cdot10^{11}\text{ J}}$$

20.- A masa da Lúa é 0,0123 veces a masa da Terra e o seu raio é 0,25 veces o raio terrestre. a) Que masa haberá que colocar na Lúa para que pese o mesmo que pesa na Terra unha masa de 500 g? b) Se a velocidade de escape na Terra é de 11,2 km s^{-1}, cal será o seu valor na Lúa? (g = 9,81 m s^{-2}). (*Selectividade COU; Xuño 99*).

Solución:

a) A forza F con que unha masa M atrae a outra masa m vén dada pola lei da gravitación universal: $F = G\dfrac{M\,m}{r^2} \rightarrow F = m\,g$, sendo g o valor da intensidade do campo gravitatorio da masa M no punto onde se encontra a masa m.

$$m = 0{,}5\cdot\frac{1}{0{,}0123}\cdot0{,}25^2 \rightarrow \boxed{m = 2{,}54\text{ kg}}$$

b) $E_{\text{mecánica na superficie da Lúa}} = E_{\text{mecánica no infinito}}$

$$\frac{1}{2}m\,v^2 + \left(-\frac{G\,M\,m}{r}\right) = 0 \rightarrow v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{r}}$$

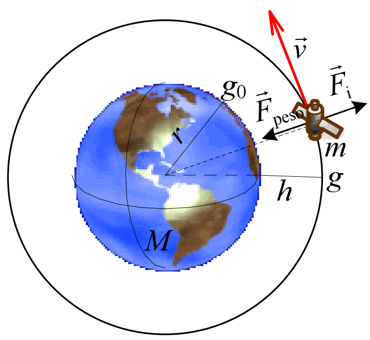
$$\left.\begin{array}{l} v_{\text{escape na Lúa}} = \sqrt{\dfrac{2\,G\,M_{\text{L}}}{r_{\text{L}}}} \\ v_{\text{escape na Terra}} = \sqrt{\dfrac{2\,G\,M_{\text{T}}}{r_{\text{T}}}} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{v_{\text{escape na Lúa}}}{v_{\text{escape na Terra}}} = \sqrt{\frac{M_{\text{L}}}{M_{\text{T}}} \cdot \frac{r_{\text{T}}}{r_{\text{L}}}}$$

$$v_{\text{escape na Lúa}} = 11{,}2 \cdot \sqrt{0{,}0123 \cdot \frac{1}{0{,}25}} \rightarrow \boxed{v_{\text{escape na Lúa}} = 2{,}48 \text{ km s}^{-1}}$$

21.- Un satélite artificial describe unha órbita circular ó redor da Terra, a unha altura sobre a superficie terrestre de 3185 km. Calcula: a) a velocidade de translación do satélite e b) o período de revolución. Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}, $r_{\text{T}} = 6370$ km, $M_{\text{T}} =$ $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg. (*Selectividade COU; Xuño 98*).

Solución:

a) Para un observador que viaxe no satélite (sistema de referencia non inercial) hai de cumprirse que: $\vec{F}_{\text{peso}} + \vec{F}_{\text{inercia}} = \vec{0}$



$$F_{\text{peso}} = F_{\text{inercia}} \rightarrow m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{r+h} \rightarrow v = \sqrt{g\,(r+h)}$$

$$\left.\begin{array}{l} v = \sqrt{g\,(r+h)} \\ g = \dfrac{G\,M}{(r+h)^2} \end{array}\right\} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G\,M}{(r+h)}}$$

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6370 \cdot 10^3 + 3185 \cdot 10^3}} \rightarrow \boxed{v = 6461 \text{ m s}^{-1}}$$

b) Ó ter como dato a velocidade de xiro do satélite, v, relacionamos esta magnitude co período T:

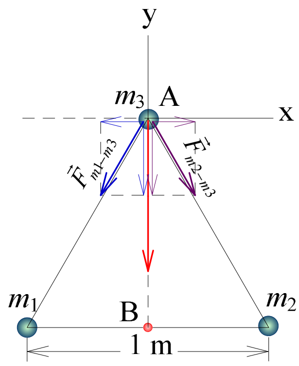
$$\left.\begin{array}{l} T = \dfrac{2\,\pi}{\omega} \\ \omega = \dfrac{v}{r+h} \end{array}\right\} \rightarrow T = \frac{2\,\pi\,(r+h)}{v} \rightarrow T = \frac{2\,\pi\left(6370 \cdot 10^3 + 3185 \cdot 10^3\right)}{6461} \rightarrow \boxed{T = 9287 \text{ s}}$$

22.- Tres masas puntuais de 10^3 kg cada unha, están fixas non vértices dun triángulo equilátero de 1 m de lado. Acha: a) a forza que actúa sobre unha calquera delas; b) se se deixa en liberdade unha das masas, que velocidade terá cando pase polo punto medio das outras dúas? Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}. (*Selectividade COU*; *Set. 97).*

Solución:

a)

$$\vec{F}_{M-m} = -G\,\frac{M\,m}{r^2}\,\vec{u}_r \;\rightarrow\; F_{M-m} = G\,\frac{M\,m}{r^2}\,u_r$$



$$F_{m1-m3} = F_{m2-m3} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{10^3\cdot 10^3}{1^2}$$

$$F_{m1-m3} = F_{m2-m3} = 6{,}67\cdot 10^{-5}\ \text{N}$$

$$F_{\text{total}} = 2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-5}\cdot\cos 30^{\circ} \;\rightarrow\; \boxed{F_{\text{total}} = 1{,}16\cdot 10^{-4}\ \text{N}}$$

$$\boxed{\vec{F}_{\text{total}} = -1{,}16\cdot 10^{-4}\ \vec{j}\ (\text{N})}$$

b)

$$\left.\begin{aligned} W_{\text{A}}^{\text{B}} &= \Delta E_{\text{k}} = E_{\text{k B}} - E_{\text{k A}} \\ W_{\text{A}}^{\text{B}} &= -\Delta E_{\text{p}} = -\left(E_{\text{p B}} - E_{\text{p A}}\right) \end{aligned}\right\} \rightarrow E_{\text{k B}} - E_{\text{k A}} = -\left(E_{\text{p B}} - E_{\text{p A}}\right) \rightarrow E_{\text{k B}} = E_{\text{p A}} - E_{\text{p B}}$$

$$E_{\text{p A}} = -\frac{G\,m_1\,m_3}{r_{1-\text{A}}} - \frac{G\,m_2\,m_3}{r_{2-\text{A}}} \;\rightarrow\; E_{\text{p A}} = -\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 10^3\cdot 10^3}{1}\cdot 2 = -1{,}33\cdot 10^{-4}\ \text{J}$$

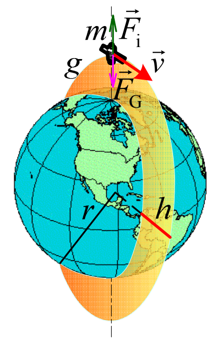
$$E_{\text{p B}} = -\frac{G\,m_1\,m_3}{r_{1-\text{B}}} - \frac{G\,m_2\,m_3}{r_{1-\text{B}}} \;\rightarrow\; E_{\text{p B}} = -\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 10^3\cdot 10^3}{0{,}5}\cdot 2 = -\,2{,}66\cdot 10^{-4}\ \text{J}$$

$$\left.\begin{aligned} E_{\text{k B}} &= E_{\text{p A}} - E_{\text{p B}} \\ E_{\text{k B}} &= \frac{1}{2}\cdot 10^3\cdot v_{\text{B}}^2 \\ E_{\text{p A}} - E_{\text{p B}} &= 1{,}33\cdot 10^{-4}\ \text{J} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{1}{2}\cdot 10^3\cdot v_{\text{B}}^2 = 1{,}33\cdot 10^{-4} \rightarrow \boxed{v_{\text{B}} = 5{,}2\cdot 10^{-4}\ \text{m s}^{-1}}$$

23.- Os NOAA son unha familia de satélites meteorolóxicos norteamericanos que orbitan a Terra pasando sobre os Polos, cun período aproximado de 5 horas. Calcula: a) a altura á que orbitan sobre a superficie da Terra; b) a velocidade coa que o fan . Datos: Masa da Terra: M_T = 5,96 · 10^{24} kg. Raio da Terra r_T = 6370 km. Constante de gravitación universal: G = 6,67 · 10^{-11} N m² kg⁻². (*Selectividade COU*; *xuño 96*).

Solución:

a) Como o satélite describe órbitas circulares estacionarias; para un observador que viaxe no satélite (sistema de referencia non inercial) hai de cumprirse que:



$$\vec{F}_{\text{peso}} + \vec{F}_{\text{inercia}} = \vec{0} \;\rightarrow\; F_{\text{peso}} = F_{\text{inercia}} \;\rightarrow\; m\cdot g = m\cdot\frac{v^2}{r+h} \;\rightarrow\; v = \sqrt{g\,(r+h)}$$

Relacionamos a velocidade lineal de xiro do satélite coa velocidade angular, a cal escribimos en función do período de revolución:

$$\left.\begin{array}{l} v=\omega(r+h) \\ \omega=\dfrac{2\pi}{T} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} v=\dfrac{2\pi}{T}(r+h) \\ v=\sqrt{g(r+h)} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{g(r+h)}=\dfrac{2\pi}{T}(r+h) \\ g=\dfrac{G\,M}{(r+h)^2} \end{array}\right\} \rightarrow (r+h)=\sqrt[3]{\frac{G\,M\,T^2}{4\,\pi^2}}$$

$$(r+h)=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}96\cdot 10^{24}\cdot (5\cdot 60\cdot 60)^2}{4\,\pi^2}} \rightarrow (r+h)=1{,}484\cdot 10^7\ \text{m}$$

$$h=1{,}484\cdot 10^7-6370\cdot 10^3 \rightarrow \boxed{h=8{,}47\cdot 10^6\ \text{m}}$$

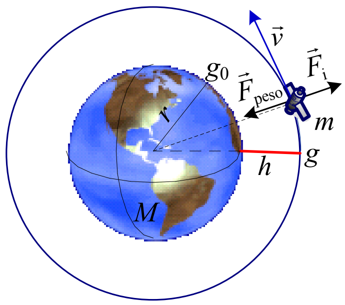
b)

$$\left.\begin{array}{l} v=\sqrt{g(r+h)} \\ g=\dfrac{G\,M}{(r+h)^2} \end{array}\right\} \rightarrow v=\sqrt{\frac{G\,M}{(r+h)}} \rightarrow v=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}96\cdot 10^{24}}{1{,}484\cdot 10^7}} \rightarrow \boxed{v=5{,}18\cdot 10^3\ \text{m s}^{-1}}$$

24.- Un satélite de comunicacións de 1 t describe órbitas circulares ó redor da Terra cun período de 90 min. Calcula: a) a altura á que se atopa sobre a Terra e b) a súa enerxía total. Datos: Raio da Terra, r_T = 6400 km; masa da Terra, M_T = 5,96 · 10^{24} kg; constante de gravitación universal, G = 6,67 · 10^{-11} N m^2 kg^{-2}. (*Selectividade COU*; *set. 95*).

Solución:

a) Este apartado é igual ó do problema anterior, polo que xa utilizamos a expresión alí obtida:



$$(r+h)=\sqrt[3]{\frac{G\,M\,T^2}{4\,\pi^2}}$$

$$(r+h)=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}96\cdot 10^{24}\cdot (90\cdot 60)^2}{4\,\pi^2}}$$

$$(r+h)=6{,}649\cdot 10^6\ \text{m}$$

$$h=6{,}649\cdot 10^6-6400\cdot 10^3 \rightarrow \boxed{h=2{,}49\cdot 10^5\ \text{m}}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} E_{\mathrm{m}} = E_{\mathrm{p}} + E_{\mathrm{k}} \\ E_{\mathrm{p}} = -\dfrac{G\,M\,m}{(r+h)} \\ E_{\mathrm{k}} = \dfrac{1}{2}\,m\,v^2 \\ v = \sqrt{\dfrac{G\,M}{r+h}} \end{array}\right\} \rightarrow\ E_{\mathrm{m}} = -\frac{G\,M\,m}{2\,(r+h)}$$

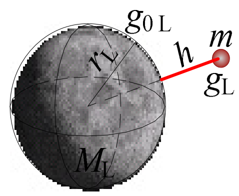
$$E_{\mathrm{m}} = -\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,96\cdot 10^{24}\cdot 1000}{2\cdot 6,649\cdot 10^{6}} \rightarrow \boxed{E_{\mathrm{m}} = -2,99\cdot 10^{10}\ \mathrm{J}}$$

25.- A Lúa ten unha masa aproximada de 6,7 · 10^{22} kg e o seu raio é de 16 · 10^{5} m. Acha: a) A distancia que percorrerá en 5 segundos un corpo que cae libremente na proximidade da súa superficie e b) O período de oscilación na superficie lunar dun péndulo que ten un período na Terra de 2 segundos. Dato: *G* = 6,67 · 10^{-11} N m^{2} kg^{-2}. (*Selectividade COU*; *xuño 94*).

Solución:

a) O corpo descende coa aceleración constante da gravidade na superficie da Lúa, $g_{0\mathrm{L}}$, cun movemento rectilíneo uniformemente acelerado (m.r.u.a.). Aplicando as ecuacións deste movemento temos:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{h} = \vec{v}_0\,t + \dfrac{1}{2}\,\vec{g}\,t^2 \ \rightarrow\ h = \dfrac{1}{2}\,g_{0\mathrm{L}}\,5^2 \\ g_{0\mathrm{L}} = \dfrac{G\,M_{\mathrm{L}}}{r_{\mathrm{L}}^2} \ \rightarrow\ g_{0\mathrm{L}} = \dfrac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 6,7\cdot 10^{22}}{\left(16\cdot 10^{5}\right)^2} = 1,75\ \mathrm{m\,s^{-2}} \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{h = 21,9\ \mathrm{m}}$$



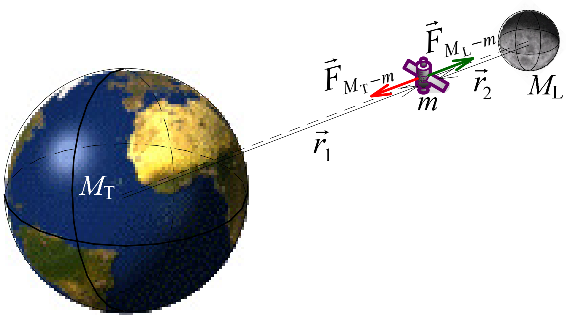
b)

$$\left.\begin{array}{l} T_{\mathrm{L}} = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_{0\,\mathrm{L}}}} \ \rightarrow\ T_{\mathrm{L}} = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{l}{1,75}} \\ T_{\mathrm{T}} = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_{0\,\mathrm{T}}}} \ \rightarrow\ 2 = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{l}{9,8}} \ \rightarrow\ l = 1,0\ \mathrm{m} \end{array}\right\} \rightarrow\ T_{\mathrm{L}} = 2\,\pi\sqrt{\frac{1,0}{1,75}} \ \rightarrow\ \boxed{T_{\mathrm{L}} = 4,75\ \mathrm{s}}$$

26.- Cando se envía un satélite á Lúa, é situado nunha órbita que corta a recta que une os centros da Terra e da Lúa por un punto tal que as dúas forzas que experimenta o satélite pola atracción dos dous astros son iguais. Cando o satélite se encontra neste punto, calcula: a) A distancia á que está do centro da Terra e b) A relación entre as enerxías potencias do satélite, debida á Terra e á Lúa. Datos: A masa da Terra é 81 veces a da Lúa e a distancia do centro da Terra ó da Lúa é de 384 · 10^{6} m. (*Selectividade COU*; *Xuño 93*).

Solución:

a)



$$\left.\begin{array}{l} F_{M_T-m} = \dfrac{G\,M_T\,m}{r_1^2} \\ F_{M_L-m} = \dfrac{G\,M_L\,m}{r_2^2} \\ F_{M_T-m} = F_{M_L-m} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} \dfrac{M_T}{r_1^2} = \dfrac{M_L}{r_2^2} \\ r_1 + r_2 = 384 \cdot 10^6 \text{ m} \\ M_T = 81\,M_L \end{array}\right\} \to \boxed{r_1 = 345{,}16 \cdot 10^6 \text{ m}}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} E_{p\,T} = -\dfrac{G\,M_T\,m}{(r_T + h_T)} \\ E_{p\,L} = -\dfrac{G\,M_L\,m}{(r_L + h_L)} \end{array}\right\} \to \frac{E_{p\,T}}{E_{p\,L}} = \frac{M_T}{M_L} \cdot \frac{(r_L + h_L)}{(r_T + h_T)}$$

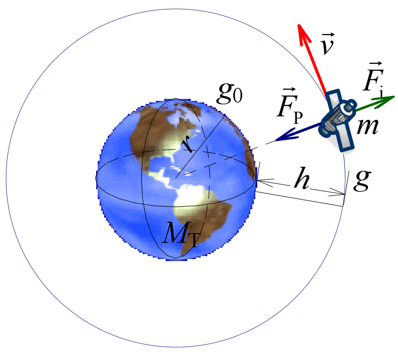
$$\frac{E_{p\,T}}{E_{p\,L}} = 81 \cdot \frac{(384 \cdot 10^6 - 345{,}16 \cdot 10^6)}{345{,}16 \cdot 10^6} \to \boxed{\frac{E_{p\,T}}{E_{p\,L}} = 9}$$

27.- Un satélite de 2000 kg de masa xira arredor da Terra cunha órbita circular de raio $6{,}6 \text{x} 10^6$ m. O raio medio da Terra é $6{,}4 \text{ x } 10^6$ m e a súa masa é $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg. a) Determina o período do satélite. b) Cal é a enerxía total mínima que debe aplicarse ó satélite para levalo a unha distancia "infinita" da Terra? NOTA: Toma *G* = $6{,}67 \text{ x } 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}. (*Selectividade COU*; *set. 92*).

Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{l} T = \dfrac{2\,\pi}{\omega} \\ \omega = \dfrac{v}{(r+h)} \\ F_{\text{inercia}} = F_{\text{peso}} \to v = \sqrt{\dfrac{G\,M_T}{(r+h)}} \end{array}\right\} \to T = \frac{2\,\pi\,(r+h)}{\sqrt{\dfrac{G\,M_T}{(r+h)}}}$$



$$T = \frac{2\,\pi\left(6{,}6\cdot 10^{6}\right)}{\sqrt{\dfrac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{6{,}6\cdot 10^{6}}}} \rightarrow \boxed{T = 5{,}33\cdot 10^{3}\ \text{s}}$$

b)

$$E_{\text{m do satélite na órbita}} = E_{\text{m do satélite no }\infty} \rightarrow E_{\text{k do satélite na órbita}} + E_{\text{p do satélite na órbita}} = 0$$

$$E_{\text{k necesaria do satélite na órbita}} + \left(-\frac{G\,M_{\text{T}}\,m}{r+h}\right) = 0 \rightarrow E_{\text{k necesaria}} = \frac{G\,M_{\text{T}}\,m}{r+h}$$

$$E_{\text{k necesaria}} = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 2000}{6{,}6\cdot 10^{6}} \rightarrow E_{\text{k necesaria}} = 1{,}21\cdot 10^{11}\ \text{J}$$

O satélite está en órbita e xa posúe a enerxía cinética correspondente á velocidade de xiro, que vale:

$$\left.\begin{array}{l} E_{\text{k xiro}} = \dfrac{1}{2}\,m\,v_{\text{xiro}}^{2} \\ v_{\text{xiro}} = \sqrt{\dfrac{G\,M_{\text{T}}}{(r+h)}} \end{array}\right\} \rightarrow E_{\text{k xiro}} = \frac{1}{2}\,m\,\frac{G\,M_{\text{T}}}{(r+h)}$$

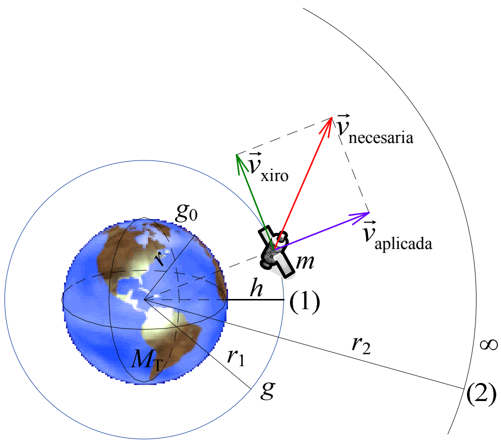
A enerxía que lle hai que comunicar ó satélite, que vai ser en forma de enerxía cinética, vai depender da dirección en que se lle aplique a velocidade. Se a velocidade a aplicamos na dirección perpendicular á velocidade de xiro temos:

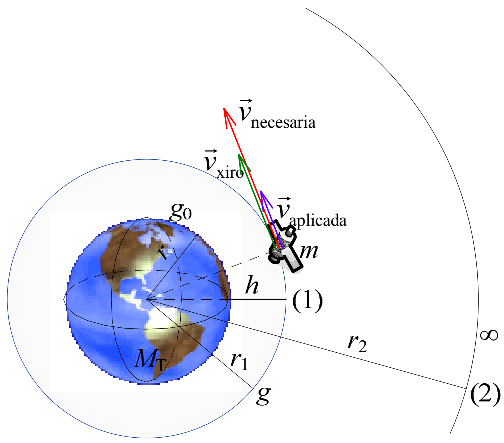
$$\vec{v}_{\text{necesaria}} = \vec{v}_{\text{xiro}} + \vec{v}_{\text{aplicada}} \xrightarrow{\text{dirección } \vec{v}_{\text{xiro}} \text{ perpendicular a } \vec{v}_{\text{aplicada}}} v_{\text{necesaria}}^{2} = v_{\text{xiro}}^{2} + v_{\text{aplicada}}^{2}$$

A enerxía cinética correspondente a cada un destes termos de velocidade é:

$$\frac{1}{2}\,m\,v_{\text{necesaria}}^{2} = \frac{1}{2}\,m\,v_{\text{xiro}}^{2} + \frac{1}{2}\,m\,v_{\text{aplicada}}^{2} \rightarrow E_{\text{k necesaria}} = E_{\text{k xiro}} + E_{\text{k aplicada}}$$

$$E_{\text{k aplicada}} = E_{\text{k necesaria}} - E_{\text{k xiro}} \rightarrow E_{\text{k aplicada}} = 1{,}21\cdot 10^{11} - 6{,}04\cdot 10^{10} \rightarrow \boxed{E_{\text{k aplicada}} = 6{,}06\cdot 10^{10}\ \text{J}}$$





Se a velocidade a aplicamos na mesma dirección e sentido que a velocidade de xiro do satélite, este valor calculámolo coa expresión: $v_{\text{aplicada}} = v_{\text{necesaria}} - v_{\text{xiro}}$.

$$\left.\begin{array}{l} v_{\text{aplicada}} = \sqrt{\dfrac{2\,E_{\text{k necesaria}}}{m}} - \sqrt{\dfrac{G\,M_{\text{T}}}{(r+h)}} \\ E_{\text{k necesaria}} = \dfrac{G\,M_{\text{T}}\,m}{(r+h)} \end{array}\right\} \rightarrow v_{\text{aplicada}} = \sqrt{\dfrac{G\,M_{\text{T}}}{(r+h)}} \cdot \left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$v_{\text{aplicada}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6{,}6 \cdot 10^{6}}} \cdot \left(\sqrt{2}-1\right) \rightarrow v_{\text{aplicada}} = 3220 \text{ m s}^{-1}$$

E a enerxía a comunicar vale:

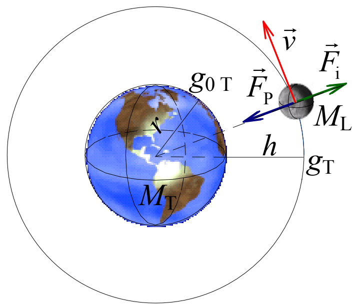
$$E_{\text{k aplicada}} = \frac{1}{2}\,m\,v_{\text{aplicada}}^2 \rightarrow E_{\text{k aplicada}} = \frac{1}{2} \cdot 2000 \cdot 3220^2 \rightarrow \boxed{E_{\text{k aplicada}} = 1{,}04 \cdot 10^{10} \text{ J}}$$

28.- Supoñendo que a Lúa xira ó redor da Terra cun período de 27 días a unha distancia de $3{,}8 \cdot 10^8$ m, calcula: a) a masa da Terra e b) a enerxía que cómpre para afastar unha distancia infinita á Lúa da Terra, se a masa da Lúa é $M_L = 7{,}34 \cdot 10^{22}$ kg? Nota: Constante de Gravitación Universal $G = G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N m² kg⁻². (*Selectividade COU*; *xuño 92*).

Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{r} F_{\text{inercia}} = F_{\text{peso}} \rightarrow v = \sqrt{\dfrac{G\,M_{\text{T}}}{(r+h)}} \\ v = \omega\,(r+h) \\ \omega = \dfrac{2\,\pi}{T} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{2\,\pi}{T}(r+h) = \sqrt{\frac{G\,M_{\text{T}}}{(r+h)}}$$



$$\frac{4\,\pi^2}{T^2} \cdot (r+h)^2 = \frac{G\,M_{\text{T}}}{(r+h)} \rightarrow M_{\text{T}} = \frac{4\,\pi^2}{T^2} \cdot \frac{(r+h)^3}{G}$$

$$M_{\text{T}} = \frac{4\,\pi^2}{(27 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)^2} \cdot \frac{\left(3{,}8 \cdot 10^8\right)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} \rightarrow \boxed{M_{\text{T}} = 5{,}96 \cdot 10^{24} \text{ kg}}$$

b)

$$E_{\text{m da Lúa na órbita}} = E_{\text{m da Lúa no }\infty} \rightarrow E_{\text{k necesaria da Lúa na órbita}} + E_{\text{p da Lúa na órbita}} = 0$$

$$E_{\text{k necesaria da Lúa na órbita}} + \left(-\frac{G\,M_{\text{T}}\,M_{\text{L}}}{r+h}\right) = 0 \rightarrow E_{\text{k necesaria}} = \frac{G\,M_{\text{T}}\,M_{\text{L}}}{r+h}$$

$$E_{\text{k necesaria}} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}96 \cdot 10^{24} \cdot 7{,}34 \cdot 10^{22}}{3{,}8 \cdot 10^{8}} \rightarrow E_{\text{k necesaria}} = 7{,}68 \cdot 10^{28} \text{ J}$$

A Lúa está en órbita e xa posúe a enerxía cinética correspondente á velocidade de xiro, que vale:

$$\left.\begin{aligned} E_{\text{k xiro}} &= \frac{1}{2} M_{\text{L}}\, v_{\text{xiro}}^2 \\ v_{\text{xiro}} &= \sqrt{\frac{G\, M_{\text{T}}}{(r+h)}} \end{aligned}\right\} \rightarrow E_{\text{k xiro}} = \frac{1}{2} M_{\text{L}} \frac{G\, M_{\text{T}}}{(r+h)}$$

$$E_{\text{k xiro}} = \frac{1}{2} \cdot 7{,}34 \cdot 10^{22} \cdot \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}96 \cdot 10^{24}}{3{,}8 \cdot 10^{8}} \rightarrow E_{\text{k xiro}} = 3{,}84 \cdot 10^{28}\ \text{J}$$

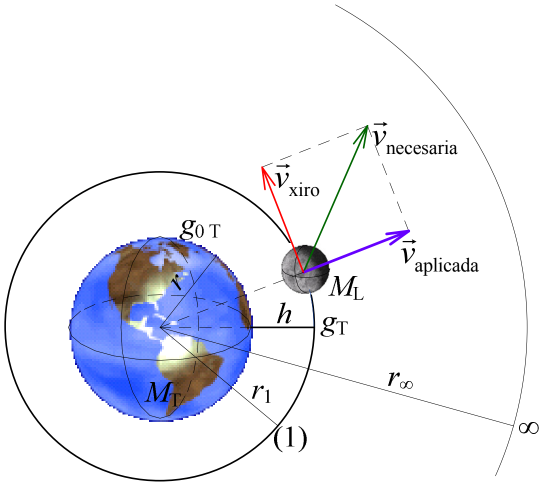
A enerxía que hai que comunicar á Lúa, que vai ser en forma de enerxía cinética, vai depender da dirección en que se lle aplique a velocidade. Se a velocidades a aplicamos na dirección perpendicular á velocidade de xiro temos:

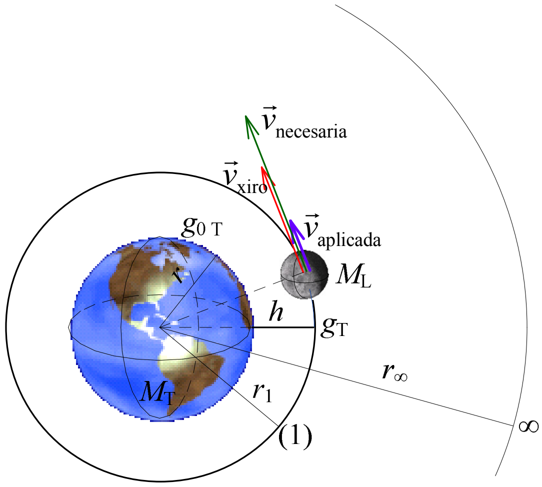
$$\vec{v}_{\text{necesaria}} = \vec{v}_{\text{xiro}} + \vec{v}_{\text{aplicada}} \xrightarrow{\text{dirección } \vec{v}_{\text{xiro}} \text{ perpendicular a } \vec{v}_{\text{aplicada}}} v_{\text{necesaria}}^2 = v_{\text{xiro}}^2 + v_{\text{aplicada}}^2$$

A enerxía cinética correspondente a cada un destes termos de velocidade é:

$$\frac{1}{2} M_{\text{L}}\, v_{\text{necesaria}}^2 = \frac{1}{2} M_{\text{L}}\, v_{\text{xiro}}^2 + \frac{1}{2} M_{\text{L}}\, v_{\text{aplicada}}^2 \rightarrow E_{\text{k necesaria}} = E_{\text{k xiro}} + E_{\text{k aplicada}}$$

$$E_{\text{k aplicada}} = E_{\text{k necesaria}} - E_{\text{k xiro}} \rightarrow E_{\text{k aplicada}} = 7{,}68 \cdot 10^{28} - 3{,}84 \cdot 10^{28} \rightarrow \boxed{E_{\text{k aplicada}} = 3{,}84 \cdot 10^{28}\ \text{J}}$$





Se a velocidade a aplicamos na mesma dirección e sentido que a velocidade de xiro da Lúa, o seu valor calculámolo coa expresión: $v_{\text{aplicada}} = v_{\text{necesaria}} - v_{\text{xiro}}$.

$$\left.\begin{aligned} & v_{\text{aplicada}} = v_{\text{necesaria}} - v_{\text{xiro}} \\ & E_{\text{m}\,1} = E_{\text{m}\,\infty} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot M_{\text{L}} \cdot v_{\text{neces}}^2 - \frac{G\, M_{\text{T}}\, M_{\text{L}}}{(r+h)} = 0 \rightarrow v_{\text{neces}} = \sqrt{\frac{2\, G\, M_{\text{T}}}{(r+h)}} \\ & F_{\text{inercia}} = F_{\text{peso}} \rightarrow M_{\text{L}} \cdot \frac{v_{\text{xiro}}^2}{(r+h)} = M_{\text{L}} \cdot \frac{G\, M_{\text{T}}}{(r+h)^2} \rightarrow v_{\text{xiro}} = \sqrt{\frac{G\, M_{\text{T}}}{(r+h)}} \end{aligned}\right\} \rightarrow v_{\text{apli}} = \sqrt{\frac{G\, M_{\text{T}}}{(r+h)}} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)$$

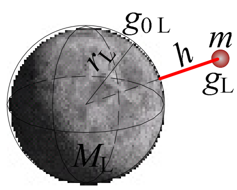
$$v_{\text{aplicada}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,96 \cdot 10^{24}}{3,8 \cdot 10^{8}}} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) \rightarrow v_{\text{aplicada}} = 4,24 \cdot 10^{2}\ \text{m s}^{-1}$$

E a enerxía a comunicar vale:

$$E_{\text{k aplicada}} = \frac{1}{2} M_{\text{L}}\, v_{\text{aplicada}}^{2} \rightarrow E_{\text{k aplicada}} = \frac{1}{2} \cdot 7,34 \cdot 10^{22} \cdot \left(4,24 \cdot 10^{2}\right)^{2} \rightarrow \boxed{E_{\text{k aplicada}} = 6,60 \cdot 10^{27}\ \text{J}}$$

29.- Sabendo que a masa da Lúa é aproximadamente 6,7·10^{22} kg e o seu raio 16·10^{5} m, calcula: a) A distancia que percorrerá en un segundo un corpo que se deixa caer cunha velocidade inicial nula nun punto próximo a superficie da Lúa e b) O período de oscilación, na superficie lunar, dun péndulo que ten na Terra un período de un segundo. Nota: Constante de Gravitación Universal *G* = 6,67·10^{-11} N m^{2} kg^{-2}. (*Selectividade COU*; *xuño 92*).

Solución:



a) O corpo descende coa aceleración constante da gravidade na superficie da Lúa, cun movemento rectilíneo uniformemente acelerado (m.r.u.a.). Aplicando as ecuacións deste movemento temos:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{h} = \vec{v}_0\, t + \frac{1}{2} \vec{g}_{0\,\text{L}}\, t^2 \rightarrow h = \frac{1}{2} g_{0\,\text{L}}\, 5^2 \\ g_{0\,\text{L}} = \frac{G\, M_{\text{L}}}{r_{\text{L}}^2} \rightarrow g_{0\,\text{L}} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,7 \cdot 10^{22}}{\left(16 \cdot 10^{5}\right)^2} = 1,75\ \text{m s}^{-2} \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{h = 0,88\ \text{m}}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} T_{\text{L}} = 2\,\pi \sqrt{\frac{l}{g_{0\,\text{L}}}} \rightarrow T_{\text{L}} = 2\,\pi \sqrt{\frac{l}{1,75}} \\ T_{\text{T}} = 2\,\pi \sqrt{\frac{l}{g_{0\,\text{T}}}} \rightarrow 1 = 2\,\pi \sqrt{\frac{l}{9,8}} \rightarrow l = 0,25\ \text{m} \end{array}\right\} \rightarrow T_{\text{L}} = 2\,\pi \sqrt{\frac{0,25}{1,75}} \rightarrow \boxed{T_{\text{L}} = 2,37\ \text{s}}$$

30.- Un corpo en caída libre presenta unha aceleración de 5,85 m s^{-2} sobre a superficie dun planeta cun raio de 0,27 veces o raio terrestre. Calcula: a) A relación de masa deste planeta á da Terra e b) a velocidade, en m s^{-1}, e o período, en segundos, que debería posuír un satélite dese planeta para describir unha órbita circular de raio igual a 10 raios terrestres? Nota: Toma: $g_{\text{na superficie da Terra}}$ = 9,81 m s^{-2}, $r_{\text{da Terra}}$ = 6371 km. (*Selectividade COU*; *xuño 91*).

Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{l} g_{0\,\text{planeta}} = \frac{G\, M_{\text{planeta}}}{r_{\text{planeta}}^2} \\ g_{0\,\text{Terra}} = \frac{G\, M_{\text{Terra}}}{r_{\text{Terra}}^2} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{M_{\text{planeta}}}{M_{\text{Terra}}} = \frac{g_{0\,\text{planeta}}}{g_{0\,\text{Terra}}} \cdot \frac{r_{\text{planeta}}^2}{r_{\text{Terra}}^2}$$

$$\frac{M_{\text{planeta}}}{M_{\text{Terra}}} = \frac{5,85}{9,81} \cdot 0,27^2 \rightarrow \boxed{\frac{M_{\text{planeta}}}{M_{\text{Terra}}} = 4,35 \cdot 10^{-2}}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} v = \sqrt{g_{h\,\text{p}} \cdot (r_{\text{p}} + h)} \\ \left.\begin{array}{l} g_{h\,\text{p}} = \dfrac{G \cdot M_{\text{p}}}{(r_{\text{p}} + h)^2} \\ g_{0\,\text{p}} = \dfrac{G \cdot M_{\text{p}}}{r_{\text{p}}^2} \end{array}\right\} \rightarrow g_{h\,\text{p}} = \dfrac{g_{0\,\text{p}} \cdot r_{\text{p}}^2}{(r_{\text{p}} + h)^2} \end{array}\right\} \rightarrow v = \sqrt{\frac{g_{0\,\text{p}} \cdot r_{\text{p}}^2}{(r_{\text{p}} + h)}}$$

$$v = \sqrt{\frac{5,85 \cdot (0,27 \cdot 6371 \cdot 10^3)^2}{10 \cdot 6371 \cdot 10^3}} \rightarrow \boxed{v = 521,2 \text{ m s}^{-1}}$$

$$\left.\begin{array}{l} T = \dfrac{2\,\pi}{\omega} \\ \omega = \dfrac{v}{(r + h)} \end{array}\right\} \rightarrow T = \frac{2\,\pi (r + h)}{v} \rightarrow T = \frac{2\,\pi \cdot 10 \cdot 6371 \cdot 10^3}{521,2} \rightarrow \boxed{T = 767649 \text{ s}}$$

31.- Un péndulo ideal ten un período de oscilación de $T = 1$ s na superficie terrestre. O mesmo péndulo tarda $t = 16,4$ s en dar 10 oscilacións na superficie do planeta Marte. Se a masa de Marte é $M = 0,65 \cdot 10^{24}$ kg, calcula: a) O raio de Marte, r_{M}, supoñendo que é un planeta esférico e b) a relación que debe existir entre as lonxitudes de dous péndulos, $l_{\text{M}}/l_{\text{T}}$, para que teñan o mesmo período de oscilación? Nota: l_{M} = lonxitude do péndulo en Marte; l_{T} = lonxitude do péndulo na Terra; toma na superficie terrestre $g_{0\,\text{T}} = 10$ m s^{-2}; a constante de Gravitación Universal $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}. (*Selectividade COU*; *set. 90*).

Solución:

a)

$$g_{0\,\text{M}} = \frac{G\,M_{\text{M}}}{r_{\text{M}}^2} \rightarrow r_{\text{M}} = \sqrt{\frac{G\,M_{\text{M}}}{g_{0\,\text{M}}}} \rightarrow r_{\text{M}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 0,65 \cdot 10^{24}}{g_{0\,\text{M}}}}$$

$$\left.\begin{array}{l} T_{\text{M}} = 2\,\pi \sqrt{\dfrac{l}{g_{0\,\text{M}}}} \rightarrow \dfrac{16,4}{10} = 2\,\pi \sqrt{\dfrac{l}{g_{0\,\text{M}}}} \\ T_{\text{T}} = 2\,\pi \sqrt{\dfrac{l}{g_{0\,\text{T}}}} \rightarrow 1 = 2\,\pi \sqrt{\dfrac{l}{10}} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{16,4}{10} = \sqrt{\frac{10}{g_{0\,\text{M}}}} \rightarrow g_{0\,\text{M}} = 3,7 \text{ m s}^{-1}$$

$$r_{\text{M}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 0,65 \cdot 10^{24}}{3,7}} \rightarrow \boxed{r_{\text{M}} = 3,4 \cdot 10^6 \text{ m}}$$

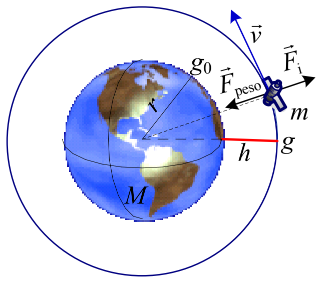
b)

$$\left.\begin{array}{l} T_{\mathrm{M}}=2\,\pi\sqrt{\dfrac{l_{\mathrm{M}}}{g_{0\,\mathrm{M}}}} \\ T_{\mathrm{T}}=2\,\pi\sqrt{\dfrac{l_{\mathrm{T}}}{g_{0\,\mathrm{T}}}} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{T_{\mathrm{M}}}{T_{\mathrm{T}}}=\sqrt{\frac{l_{\mathrm{M}}}{l_{\mathrm{T}}}\cdot\frac{g_{0\,\mathrm{T}}}{g_{0\,\mathrm{M}}}} \rightarrow 1=\frac{l_{\mathrm{M}}}{l_{\mathrm{T}}}\cdot\frac{10}{3,7} \rightarrow \frac{l_{\mathrm{M}}}{l_{\mathrm{T}}}=\frac{3,7}{10} \rightarrow \boxed{\frac{l_{\mathrm{M}}}{l_{\mathrm{T}}}=0,37}$$

32.- Un satélite artificial describe órbitas estacionarias circulares arredor da Terra a unha distancia de 300 km da superficie terrestre. Calcula: a) A velocidade do satélite en m s^{-1} e b) O tempo que tarda o satélite (en minutos) en dar unha volta completa arredor da Terra. Toma: Raio da Terra, r = 6370 km; na superficie terrestre, g_0 = 9,8 m s^{-2}. (*Selectividade COU*; *xuño 90*).

Solución:

a)



$$\left.\begin{array}{l} F_{\mathrm{peso}}=F_{\mathrm{inercia}} \rightarrow m\,g=m\dfrac{v^2}{(r+h)} \\ \left.\begin{array}{l} g=\dfrac{G\cdot M}{(r+h)^2} \\ g_0=\dfrac{G\cdot M}{r^2} \end{array}\right\} \rightarrow g=\dfrac{g_0\cdot r^2}{(r+h)^2} \end{array}\right\} \rightarrow v=\sqrt{\frac{g_0\cdot r^2}{(r+h)}}$$

$$v=\sqrt{\frac{9,8\cdot\left(6370\cdot10^3\right)^2}{6370\cdot10^3+300\cdot10^3}} \rightarrow \boxed{v=7721\ \mathrm{m\,s^{-1}}}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} T=\dfrac{2\,\pi}{\omega} \\ \omega=\dfrac{v}{(r+h)} \end{array}\right\} \rightarrow T=\frac{2\,\pi\,(r+h)}{v}$$

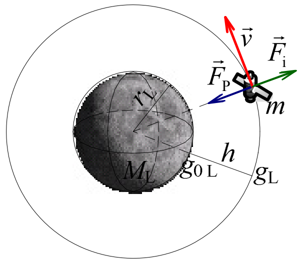
$$T=\frac{2\,\pi\left(6370\cdot10^3+300\cdot10^3\right)}{7721} \rightarrow \boxed{T=5425,2\ \mathrm{s}=90,4\ \text{minutos}}$$

33.- Sabendo que a masa da Terra é 81 veces a masa da Lúa e a aceleración da gravidade na superficie terrestre é 6 veces superior á aceleración da gravidade na superficie lunar, calcula: a) A velocidade dun satélite que se move nunha órbita circular estable en torno á Lúa a unha altura de 3200 km da súa superficie e b) O peso do satélite nesa órbita se a súa masa é 10000 kg. Datos: Raio da Terra = 6370 km; G = 6,67·10^{-11} N m^2 kg^{-2}; g = 9,8 m s^{-2}. (*Selectividade COU*; *set. 89*).

Solución:

a)

$$\vec{F}_{\text{peso}} + \vec{F}_{\text{inercia}} = \vec{0} \;\rightarrow\; F_{\text{peso}} - F_{\text{inercia}} = 0 \;\rightarrow\; F_{\text{peso}} = F_{\text{inercia}}$$



$$m \cdot g_L = m \cdot \frac{v^2}{r_L + h} \;\rightarrow\; v = \sqrt{g_L\,(r_L + h)}$$

$$\left.\begin{array}{l} v = \sqrt{g_L\,(r_L + h)} \\ g_L = \dfrac{G\,M_L}{(r_L + h)^2} \end{array}\right\} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G\,M_L}{(r_L + h)}} \;\rightarrow\; v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot M_L}{(r_L + 3200 \cdot 10^3)}}$$

$$\left.\begin{array}{l} M_L = \dfrac{M_T}{81} \\ g_{0\,T} = \dfrac{G\,M_T}{r_T^2} \end{array}\right\} \rightarrow M_L = \frac{g_{0\,T} \cdot r_T^2}{81 \cdot G} \;\rightarrow\; M_L = \frac{9{,}8 \cdot \left(6370 \cdot 10^3\right)^2}{81 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}} \;\rightarrow\; M_L = 7{,}36 \cdot 10^{22}\ \text{kg}$$

$$\left.\begin{array}{l} g_{0\,T} = \dfrac{G\,M_T}{r_T^2} \\ g_{0\,L} = \dfrac{G\,M_L}{r_L^2} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{g_{0\,T}}{g_{0\,L}} = \frac{M_T}{M_L} \cdot \frac{r_L^2}{r_T^2} \;\rightarrow\; r_L = \sqrt{\frac{g_{0\,T}}{g_{0\,L}} \cdot \frac{M_L}{M_T} \cdot r_T^2}$$

$$r_L = \sqrt{6 \cdot \frac{1}{81} \cdot \left(6370 \cdot 10^3\right)^2} \;\rightarrow\; r_L = 1{,}73 \cdot 10^6\ \text{m}$$

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}}{\left(1{,}73 \cdot 10^6 + 3200 \cdot 10^3\right)}} \;\rightarrow\; \boxed{v = 997\ \text{m s}^{-1}}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Peso} = m\,g_L \\ g_L = \dfrac{G\,M_L}{(r_L + h)^2} \end{array}\right\} \rightarrow \text{Peso} = m \cdot \frac{G\,M_L}{(r_L + h)^2} \;\rightarrow\; \text{Peso} = 10000 \cdot \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}}{\left(1{,}73 \cdot 10^6 + 3200 \cdot 10^3\right)^2}$$

$$\boxed{\text{Peso} = 2019\ \text{N}}$$

34.- Calcula o traballo feito pola forza gravitatorio dunha masa m_1 = 4 · 10^4 kg sita no punto (0,0) cando outra masa m_2 = 2 · 10^3 kg vai desde o punto (20,0) ata o punto (0,50). Nota: As coordenadas danse en metros. Dato: G = 6,67 · 10^{-11} N m^2 kg^{-2}.

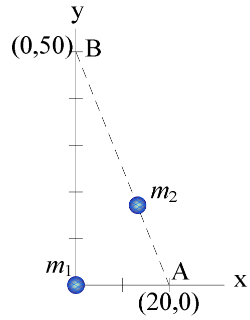
Solución:

$$W_A^B = -\Delta E_p = -\left(E_{p\,B} - E_{p\,A}\right) = -\left(-\frac{G\,m_1\,m_2}{r_B} + \frac{G\,m_1\,m_2}{r_A}\right)$$

$$E_{\text{p A}} = \frac{-6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 4 \cdot 10^{4} \cdot 2 \cdot 10^{3}}{20} \rightarrow E_{\text{p A}} = -2{,}67 \cdot 10^{-4}\ \text{J}$$

$$E_{\text{p B}} = \frac{-6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 4 \cdot 10^{4} \cdot 2 \cdot 10^{3}}{50} \rightarrow E_{\text{p B}} = -1{,}07 \cdot 10^{-4}\ \text{J}$$

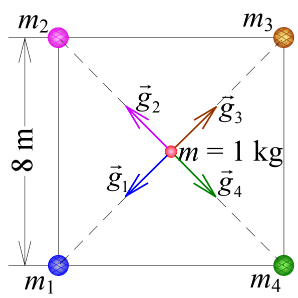
$$W_{\text{A}}^{\text{B}} = -\left(-1{,}07 \cdot 10^{-4} + 2{,}67 \cdot 10^{-4}\right) \rightarrow \boxed{W_{\text{A}}^{\text{B}} = -1{,}60 \cdot 10^{-4}\ \text{J}}$$



35.- Catro masas iguais de 20 g cada unha están situadas nos vértices dun cadrado de 8 m de lado. Calcula a intensidade de campo gravitatorio creada por estas masas no centro do cadrado.

Solución:

$$\left.\begin{aligned} &\vec{g} = \sum_{i=1}^{i=4} \vec{g}_i = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 + \vec{g}_4 \\ &g_i = \frac{G\, m_i}{r_i^2} \rightarrow g_1 = g_2 = g_3 = g_4 \\ &\vec{g}_1 = -\vec{g}_3 \text{ e } \vec{g}_2 = -\vec{g}_4 \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{\vec{g} = \vec{0}\left(\text{N kg}^{-1}\right)}$$



36.- Para o caso do problema anterior, calcula, no centro do cadrado, o valor do potencial gravitatorio. Dato: G = 6,67 · 10^{-11} N m^2 kg^{-2}.

Solución:

$$V = \sum_{i=1}^{i=4} V_i = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

$$V_i = -\frac{G\, m_i}{r_i} \rightarrow V_i = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{4^2 + 4^2}} \rightarrow V_i = -2{,}36 \cdot 10^{-13}\ \text{J Kg}^{-1}$$

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_4 \rightarrow V = 4 \cdot \left(-2{,}36 \cdot 10^{-13}\right) \rightarrow \boxed{V = -9{,}44 \cdot 10^{-13}\ \text{J kg}^{-1}}$$

37.- No problema anterior, canto vale o traballo feito pola forza do campo cando unha masa de 200 g vai desde o centro do cadrado ata o infinito? Este traballo é feito pola forza do campo de forma espontánea?

Solución:

$$\left.\begin{aligned} &W_{\text{centro}}^{\infty} = -\Delta E_{\text{p}} = -\left(E_{\text{p}\,\infty} - E_{\text{p centro}}\right) = E_{\text{p centro}} \\ &E_{\text{p centro}} = V_{\text{centro}} \cdot m \end{aligned}\right\} \rightarrow W_{\text{centro}}^{\infty} = V_{\text{centro}} \cdot m$$

$$W_{\text{centro}}^{\infty} = -\ 9{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 200 \cdot 10^{-3} \rightarrow \boxed{W_{\text{centro}}^{\infty} = -\ 1{,}88 \cdot 10^{-13}\ \text{J}}$$

O traballo obtido é negativo: a forza do campo e o desprazamento son de sentido contrario $\left(W=\int_{\text{centro}}^{\infty}\vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}=-\int_{\text{centro}}^{\infty}F\,\mathrm{d}r\right)$ e o traballo non é feito de forma espontánea pola forza do campo. A masa de 200 g desprázase desde o centro do cadrado ata o infinito debido a unha forza exterior.

38.- Dúas masas: m_1 = 600 kg e m_2 = 500 kg, están situadas, respectivamente, nos puntos (5,0) e (0,3), coordenadas que veñen dadas en unidades de quilómetros. Calcula:

a) A intensidade de campo gravitatorio no punto (0,0).

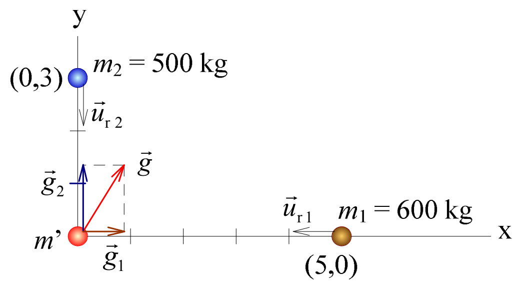
b) A forza gravitacional que actúa sobre unha terceira masa m_3 = 300 kg situada no punto (0,0).

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻².

Solución:

a)

$$\vec{g}_i=-\frac{G\,M_i}{r_i^2}\,\vec{u}_{ri}$$



$$g_1=\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 600}{\left(5\cdot 10^3\right)^2}\;\rightarrow\; g_1=1{,}6\cdot 10^{-15}\ \text{N kg}^{-1}$$

$$g_2=\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 500}{\left(3\cdot 10^3\right)^2}\;\rightarrow\; g_2=3{,}7\cdot 10^{-15}\ \text{N kg}^{-1}$$

$$\vec{g}=\vec{g}_1+\vec{g}_1\;\rightarrow\;\vec{g}=1{,}6\cdot 10^{-15}\,\vec{i}\,+3{,}7\cdot 10^{-15}\,\vec{j}\;\left(\text{N kg}^{-1}\right)$$

$$\boxed{g=4{,}0\cdot 10^{-15}\ \text{N kg}^{-1}}$$

$$\boxed{\alpha=66{,}6^{\circ};\ \text{co sentido do primeiro cuadrante}}$$

b)

$$\vec{F}=m\cdot\vec{g}\;\rightarrow\;\vec{F}=300\cdot\left(1{,}6\cdot 10^{-15}\,\vec{i}+3{,}7\cdot 10^{-15}\,\vec{j}\right)$$

$$\boxed{\vec{F}=4{,}8\cdot 10^{-13}\,\vec{i}\,+11{,}1\cdot 10^{-13}\,\vec{j}\,(\text{N})}$$

$$\boxed{F=1{,}2\cdot 10^{-12}\ \text{N; con igual dirección e sentido que }\vec{g}}$$

39.- Calcula, para as masas do problema anterior, o potencial gravitatorio no punto (0,0) e a enerxía potencial que adquire unha masa de 300 kg sita no punto (0,0).

Solución:

$$\left.\begin{array}{l}
V_{\text{total}} = \sum\limits_{\text{i}=1}^{\text{i}=\text{n}} V_{\text{i}} \\
V_{\text{i}} = -\dfrac{G\,M_{\text{i}}}{r_{\text{i}}} \\
V_1 = -\dfrac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 600}{5 \cdot 10^{3}} = -0,8 \cdot 10^{-11}\ \text{J kg}^{-1} \\
V_2 = -\dfrac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 500}{3 \cdot 10^{3}} = -1,1 \cdot 10^{-11}\ \text{J kg}^{-1}
\end{array}\right\} \rightarrow \boxed{V = -1,9 \cdot 10^{-11}\ \text{J kg}^{-1}}$$

$$E_{\text{p}} = V \cdot m \;\rightarrow\; E_{\text{p}} = -1,9 \cdot 10^{-11} \cdot 300 \;\rightarrow\; \boxed{E_{\text{p}} = -5,7 \cdot 10^{-9}\ \text{J}}$$

EXERCICIOS DE SELECTIVIDADE (Cuestións)

Razoa as respostas ás seguintes cuestións:

1.- O traballo realizado por unha forza conservativa: a) diminúe a enerxía potencial; b) diminúe a enerxía cinética; c) aumenta a enerxía mecánica. *(Xuño 08).*

Solución:

Se a forza é conservativa sabemos que:

· $E_m = E_k + E_p =$ cte. e, polo tanto, $\Delta E_m = \Delta E_k + \Delta E_p = 0$

· $W_{F \text{ conservativa}} = \vec{F}_{\text{conservativa}} \cdot \Delta \vec{r} = F_{\text{conservativa}} \cdot \Delta r \cdot \cos \alpha = -\Delta E_p$

Se o traballo que desenvolve a $\vec{F}_{\text{conservativa}}$ é de forma espontánea, cos α>0 e $W_{F \text{ conservativa}}>0$ (por exemplo, cando unha masa *m* cae desde unha altura *h* no campo gravitatorio terrestre). Neste caso resulta:

$$\left.\begin{array}{l} W > 0 \\ \Delta E_p = -W \end{array}\right\} \rightarrow \Delta E_p < 0 \rightarrow E_{\text{p final}} < E_{\text{p inicial}}$$

Este resultado correspóndese co ítem a) da cuestión.

Estudamos agora como varía a enerxía cinética:

$$\left.\begin{array}{l} E_{\text{k f}} + E_{\text{p f}} = E_{\text{k 0}} + E_{\text{p 0}} \\ E_{\text{p f}} < E_{\text{p 0}} \end{array}\right\} \rightarrow E_{\text{k final}} > E_{\text{k inicial}}$$

Se o traballo que desenvolve a $\vec{F}_{\text{conservativa}}$ non é de forma espontánea, cos α<0 e $W_{F \text{ conservativa}}<0$ (por exemplo, cando no campo gravitatorio terrestre subimos a velocidade constante unha masa *m* ou cando lanzamos verticalmente cara arriba a masa *m*, alcanzando unha altura *h*). Neste caso resulta:

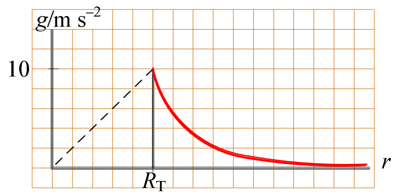
$$\left.\begin{array}{l} W_{F \text{ conservativa}} < 0 \\ \Delta E_p = -W_{F \text{ conservativa}} \end{array}\right\} \rightarrow \Delta E_p > 0 \rightarrow E_{\text{p final}} > E_{\text{p inicial}}$$

2.- En relación coa gravidade terrestre, unha masa *m*: a) pesa máis na superficie que a 100 km de altura; b) pesa menos; c) pesa igual. *(Xuño 08).*

Solución:

O peso *G* dunha masa *m*, situada no campo gravitatorio terrestre, calcúlase coa expresión: $G = m\, g$, sendo *g* a intensidade de campo (aceleración da gravidade terrestre).

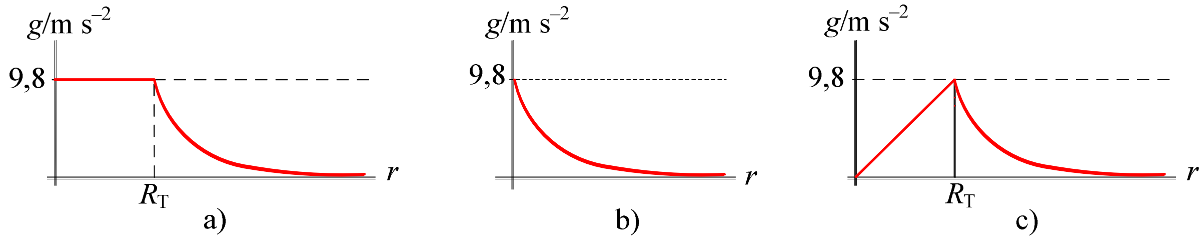
O valor de *g* nun punto relaciónase coa distancia *r*, que hai desde o punto ata o centro da Terra, segundo a expresión: $g = \dfrac{G\,M}{r^2}$, sendo M a masa da Terra e G a constante de gravitación universal.



Se o punto P está na superficie da Terra, r toma o valor do raio da Terra, R_T, e se o punto está a unha altura h sobre a superficie da Terra, r toma o valor de R_T+h. O resultado é que g é inversamente proporcional ó cadrado da distancia, $g = \dfrac{\text{cte.}}{r^2}$, e, en consecuencia, a representación gráfica de g fronte á distancia ó centro da Terra, r, é a que á marxe se indica.

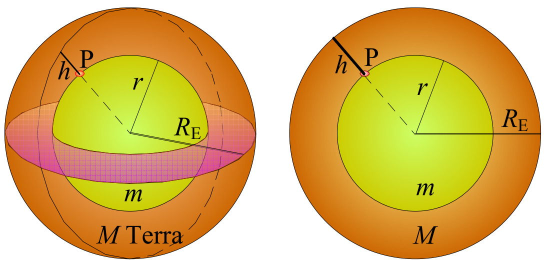
Concluímos que, en relación coa gravidade terrestre, unha masa m **pesa máis na superficie terrestre que a 100 km de altura**.

3.- Supoñendo a Terra como unha esfera perfecta, homoxénea de raio R_T; cal é a gráfica que mellor representa a variación da gravidade, g, coa distancia ó centro da Terra. *(Set. 07)*.



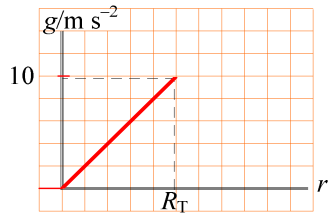
Solución:

Supoñamos un punto P no interior da Terra, a unha profundidade h respecto á súa superficie.



A intensidade de campo gravitatorio no punto P vén dada pola expresión: $g = \dfrac{G\,m}{r^2}$, sendo m a masa da esfera que, tendo por centro ó da Terra, pasa polo punto onde queremos coñecer g. Como a medida que r diminúe tamén diminúe o valor de m, para saber como varía o valor de g con r imos expresar m en función de r. Con este fin recordamos que $m = \rho \cdot V$, sendo ρ a densidade da Terra, que ó ser homoxénea ten un valor constante, e V o seu volume que, en función de r, é: $V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$. En consecuencia resulta: $m = \rho \cdot \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$. Substituíndo na expresión de g temos:

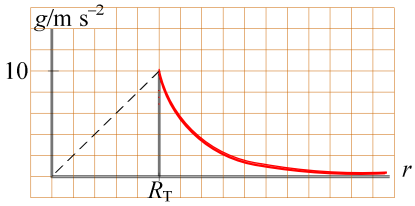
$$g = \frac{G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi\, r^3}{r^2} \rightarrow g = G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi\, r \rightarrow g = \text{cte} \cdot r$$



Vemos que o valor de g, para puntos interiores da Terra, aumenta de forma directamente proporcional co valor de r, correspondéndolle a representación gráfica que á marxe se indica.

Para un punto P da superficie da Terra, r coincide co raio desta e g toma o valor máximo.

Para puntos exteriores á superficie da Terra, a expresión de g, para un punto P que está a unha altura h da súa superficie, é: $g=\frac{G\,M}{r^2}$, sendo M a masa da Terra e r a distancia que hai desde o seu centro ata o punto onde calculamos o valor de g ($r=R_T+h$, sendo R_T o raio da Terra). O resultado é que g é inversamente proporcional ó cadrado da distancia, $g=\frac{\text{cte.}}{r^2}$, e, en consecuencia, a representación gráfica de g fronte á distancia ó centro da Terra, r, é a que á marxe se indica.



Concluímos que, con respecto á distancia ó centro da Terra, a gráfica que mellor representa a variación do valor da gravidade $\vec{g}$ coa distancia ó centro da Terra é a do ítem c).

4.- Se dous planetas distan do Sol *R* e 4*R*, respectivamente, os seus períodos de revolución son: a) *T* e 4*T*; b) *T* e *T*/4; c) *T* e 8*T*. *(Set. 07).*

Solución:

Recordando a terceira lei de Kepler, sabemos que o cociente entre o cadrado do tempo que tarda un planeta en dar unha volta arredor do Sol (período, T) e o cubo do semieixe maior da súa órbita, r, (que, nunha aproximación circular, corresponde co raio dunha circunferencia), é o mesmo para todos os planetas: T^2/r^3 = cte. En consecuencia resulta:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{T_1^2}{r_1^3}=\dfrac{T_2^2}{r_2^3}\\ r_1=R\\ r_2=4\,R\end{array}\right\}\rightarrow\ \frac{T_1^2}{R^3}=\frac{T_2^2}{(4\,R)^3}\ \rightarrow\ T_1^2\cdot 64\,R^3=T_2^2\cdot R^3\ \rightarrow\ 8\,T_1=T_2$$

Polo tanto, se o período de revolución do planeta de raio R é T, o período que lle corresponde ó planeta de raio 4R é 8T. Este resultado é o que se corresponde co **ítem c) da cuestión**.

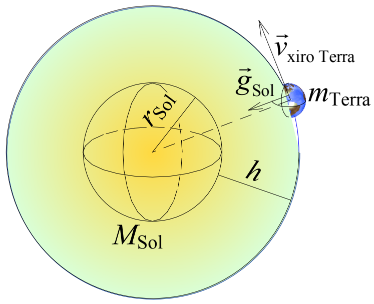
5.- Se por unha causa interna a Terra sufrise un colapso gravitatorio e reducise o seu raio á metade mantendo constante a masa, o seu período de revolución arredor do Sol sería: a) o mesmo; b) 2 anos; c) 0,5 anos. *(Xuño 07).*

Solución:

Considerando que a Terra no seu movemento orbital arredor do Sol segue unha traxectoria circular, o movemento que posúe é circular **uniforme** e o seu período T de revolución pode calcularse da forma:

$$\left.\begin{array}{r}v=\dfrac{s}{t}\;\rightarrow\; v_{\text{xiro Terra}}=\dfrac{2\,\pi\,(r_{\mathrm{T}}+h_{\mathrm{T-S}})}{T}\;\rightarrow\; T=\dfrac{2\,\pi\,(r_{\mathrm{T}}+h_{\mathrm{T-S}})}{v_{\text{xiro Terra}}}\\[2ex] v_{\text{xiro Terra}}=\sqrt{\dfrac{G\,M_{\mathrm{Sol}}}{(r_{\mathrm{T}}+h_{\mathrm{T-S}})}}\end{array}\right\}\rightarrow T=2\,\pi\sqrt{\dfrac{(r_{\mathrm{T}}+h_{\mathrm{T-S}})}{G\,M_{\mathrm{Sol}}}}$$

Se o raio da órbita permanece constante: o que diminúe r_{T} auméntao $h_{\mathrm{T-S}}$, de modo que $r_{\mathrm{T}}+h_{\mathrm{T-S}}$ = cte; o período de rotación da Terra arredor do Sol permanece constante. A órbita da Terra ó redor do Sol non se ve alterada pola hipotética concentración de masa da Terra: Aínda que esta se converta en puntual, concentrándose no seu centro, non se altera a interacción gravitatoria Terra-Sol e, polo tanto, tampouco se alteran os efectos dinámicos ou de movemento da Terra.

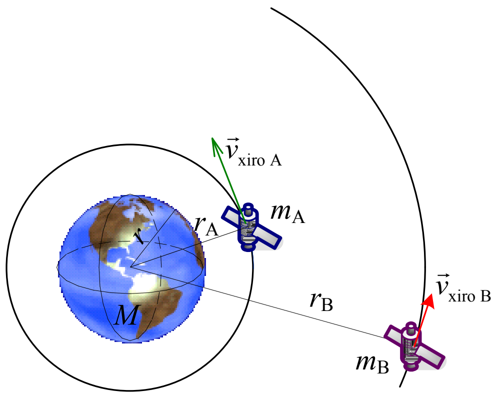


En consecuencia, **non haberá modificación ningunha no período de revolución da Terra ó redor do Sol** (ítem a).

6.- Dous satélites de comunicación A e B con diferentes masas ($m_{\mathrm{A}}>m_{\mathrm{B}}$) xiran arredor da Terra con órbitas estables de diferente raio, sendo $r_{\mathrm{A}}<r_{\mathrm{B}}$: a) A xira con maior velocidade lineal; b) B ten menor período de revolución; c) os dous teñen a mesma enerxía mecánica. *(Xuño 07).*

Solución:

a) A velocidade de xiro v_{xiro} dun satélite de masa m nunha órbita estable de raio r ó redor da Terra de masa M vén dada pola expresión: $v_{\text{xiro}}=\sqrt{\dfrac{G\,M}{r}}$



$$\left.\begin{array}{l}v_{\text{xiro A}}=\sqrt{\dfrac{G\,M}{r_{\mathrm{A}}}}\\[2ex] v_{\text{xiro B}}=\sqrt{\dfrac{G\,M}{r_{\mathrm{B}}}}\\[2ex] r_{\mathrm{A}}<r_{\mathrm{B}}\end{array}\right\}\rightarrow\; v_{\text{xiro A}}>v_{\text{xiro B}}$$

b) Os satélites describen as orbitas circulares con movemento uniforme e o seu período T de rotación pode relacionarse co raio da órbita e a velocidade de xiro da seguinte forma:

$$\left.\begin{array}{r}v=\dfrac{s}{t}\;\rightarrow\; v_{\text{xiro satélite}}=\dfrac{2\,\pi\,r_{\text{órbita}}}{T_{\text{satélite}}}\;\rightarrow\; T_{\text{satélite}}=\dfrac{2\,\pi\,r_{\text{órbita}}}{v_{\text{xiro satélite}}}\\[2ex] r_{\mathrm{A}}<r_{\mathrm{B}}\\ v_{\mathrm{A}}>v_{\mathrm{B}}\end{array}\right\}\rightarrow\; T_{\text{satélite A}}<T_{\text{satélite B}}$$

c) Sumando a enerxía cinética e potencial do satélite obtemos a súa enerxía mecánica:

$$\left.\begin{array}{l} E_{\mathrm{m}} = -\dfrac{1}{2} G \dfrac{M_{\text{Terra}}\, m_{\text{satélite}}}{r_{\text{órbita}}} \\ r_{\mathrm{A}} < r_{\mathrm{B}} \\ m_{\mathrm{A}} > m_{\mathrm{B}} \end{array}\right\} \rightarrow E_{\mathrm{m\,A}} > E_{\mathrm{m\,B}}$$

7.- No campo gravitatorio: a) o traballo realizado pola forza gravitacional depende da traxectoria, b) as liñas de campo pódense cortar, c) consérvase a enerxía mecánica. (*Set. 06*).

Solución:

En xeral, o traballo dunha forza depende dos puntos entre os cales se realiza e da traxectoria seguida entre eses puntos. Cando a forza é central e, polo tanto, conservativa, como é o caso da forza gravitacional, o traballo que desenvolve soamente depende dos puntos inicial e final e é independente da traxectoria.

Por outro lado diremos que dúas liñas de campo nunca se cortan. As liñas de campo son tanxentes en cada punto ó vector intensidade de campo, $\vec{g}$. En consecuencia, de cortarse dúas liñas de campo, o vector intensidade tería que ser tanxente simultaneamente a ambas liñas, o que significaría dous valores de $\vec{g}$ no mesmo punto; feito que non é posible porque nun punto hai un único valor (principio de superposición): $\vec{g}_{\text{total}} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \cdots$

No campo gravitatorio, as forzas que actúan sobre unha partícula *m* poden ser conservativas e non conservativas. Só no caso de que as forzas sexan conservativas, o traballo feito entre dous puntos, $W_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}$, pódese obter como a variación da enerxía cinética, ΔE_{k}, ou como a variación da enerxía potencial cambiada de signo, $-\Delta E_{\mathrm{p}}$, resultando que a enerxía mecánica se conserva:

$$\left.\begin{array}{l} W_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} = \Delta E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{k\,B}} - E_{\mathrm{k\,A}} \\ W_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} = -\Delta E_{\mathrm{p}} = -\left(E_{\mathrm{p\,B}} - E_{\mathrm{p\,A}}\right) \end{array}\right\} \rightarrow E_{\mathrm{k\,B}} - E_{\mathrm{k\,A}} = -\left(E_{\mathrm{p\,B}} - E_{\mathrm{p\,A}}\right) \rightarrow E_{\mathrm{k\,B}} + E_{\mathrm{p\,B}} = E_{\mathrm{k\,A}} + E_{\mathrm{p\,A}} = \text{cte.}$$

Para o caso de que no campo gravitatorio só consideremos a forza gravitatoria, si se cumpre o ítem c).

8.- Se a unha altura de 500 m sobre a Terra se colocan dous obxectos, un de masa *m* e outro de masa 2*m*, e se deixan caer libremente (en ausencia de rozamentos e empuxes), cal chegará antes ó chan?: a) o de masa *m*; b) o de masa 2*m*; c) os dous ó mesmo tempo. (*Xuño 06*).

Solución:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m'} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 = \dfrac{m\,g}{m} \rightarrow a_1 = g \\ a_2 = \dfrac{2\,m\,g}{2\,m} \rightarrow a_2 = g \end{array}\right.$$

Como a aceleración de caída é a mesma para os dous obxectos, para percorrer o mesmo espazo *h* invisten o mesmo tempo *t* ($h = ½\, g\, t^2$), como se recolle no ítem c).

Tamén podemos xustificar a resposta recordando que, nas condicións da cuestión, a forza que actúa sobre os obxectos é conservativa, cumpríndose: $E_{\text{m inicial}} = E_{\text{m final}} \rightarrow E_{\mathrm{p0}} = E_{\mathrm{kf}}$:

$$m' \, g \, h_0 = ½ \, m' \, v_f^2 \rightarrow g \, h_0 = ½ \, v_f^2 \rightarrow v \text{ non é función da masa do obxecto,}$$

e recordando que $\vec{v}_f = \vec{v}_0 + \vec{g} \cdot t \;\rightarrow\; \vec{v}_f = \vec{g} \cdot t$ temos que:

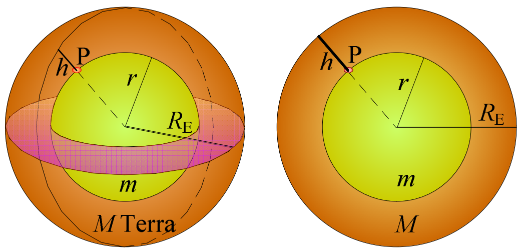
$$\left.\begin{array}{l} v_m = g \, t_m \\ v_{2m} = g \, t_{2m} \\ v_m = v_{2m} \end{array}\right\} \rightarrow t_m = t_{2m}$$

***t* non depende da masa do obxecto** que se deixa caer.

9.- Como varía *g* desde o centro da Terra ata a súa superficie (supoñendo a densidade constante)?: a) é constante: $g = (G \, M_T)/R_T^2$; b) aumenta linealmente coa distancia *r* desde o centro da Terra: $g = (g_0 \, r)/R_T$; c) varía coa distancia *r* desde o centro da Terra segundo: $g = (G \, M_T)/(R_T + r)^2$. (*Set. 05*).

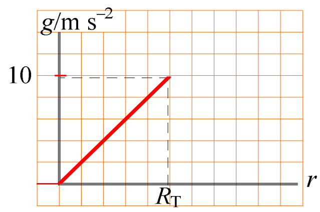
Solución:

Supoñamos un punto P no interior da Terra, a unha profundidade *h* respecto á súa superficie.



A intensidade de campo gravitatorio no punto P vén dada pola expresión: $g = \dfrac{G \, M}{r^2}$, sendo *m* a masa da esfera que, tendo por centro ó da Terra, pasa polo punto onde queremos coñecer *g*. Como a medida que *r* diminúe tamén diminúe o valor de *m*, para saber como varía o valor de *g* con *r* imos expresar *m* en función de *r*. Con este fin recordamos que $m = \rho \cdot V$, sendo ρ a densidade da Terra, que ó ser homoxénea ten un valor constante, e *V* o seu volume que, en función de *r*, é $V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$. En consecuencia resulta: $m = \rho \cdot \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$. Substituíndo na expresión de *g* temos:

$$g = \frac{G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \, r^3}{r^2} \rightarrow g = G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \, r \rightarrow g = \text{cte} \cdot r$$



Vemos que o valor de *g*, para puntos interiores da Terra, **aumenta linealmente coa distancia *r* desde o centro da Terra** ata a súa superficie, correspondéndolle a representación gráfica que á marxe se indica.

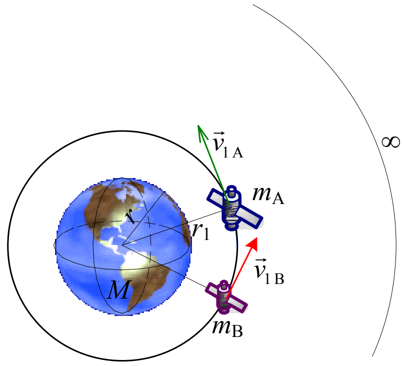
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} g = G \, \rho \, \dfrac{4}{3} \pi \, r \\ M_T = \rho \, \dfrac{4}{3} \pi \, R_T^3 \rightarrow \rho \, \dfrac{4}{3} \pi = \dfrac{M_T}{R_T^3} \end{array}\right\} \rightarrow g = G \dfrac{M_T}{R_T^3} r \\ g_0 = G \dfrac{M_T}{R_T^2} \end{array}\right\} \rightarrow g = g_0 \frac{r}{R_T}$$

10.- Dous satélites artificiais A e B de masas m_A e m_B, ($m_A = 2 \, m_B$), xiran arredor da Terra

nunha órbita circular de raio r_1: a) teñen a mesma velocidade de escape; b) teñen diferente período de rotación; c) teñen a mesma enerxía mecánica. (*Xuño 05*).

Solución:

A velocidade de escape do satélite sometido á atracción do campo gravitatorio terrestre é a velocidade adicional mínima que lle hai que comunicar para que deixe de estar sometido a dita atracción; isto é: para sacalo fóra do campo gravitatorio terrestre (para levalo ata o infinito),



A enerxía, que lle falta ós satélites para pasar desde a órbita na que están xirando ata o infinito, ímosllela comunicar en forma de velocidade (enerxía cinética). Para chegar á súa expresión, recordamos que o campo gravitatorio é conservativo, conservándose a enerxía mecánica, E_m.

$$E_{m1} = E_{m\infty} \quad \rightarrow \quad E_{k1} + E_{p1} = E_{k\infty} + E_{p\infty}$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + \left(-\frac{G\,M\,m}{r_1} \right) = 0 + 0$$

$\vec{v}_1$ a velocidade que necesita o satélite na órbita 1 para que poida alcanzar o infinito. Unha parte desta velocidade xa a posúe o satélite: é a velocidade de xiro, $\vec{v}_{1\,\text{xiro}}$, de módulo $v_{\text{xiro}} = \sqrt{\dfrac{G\,M}{r_1}}$, e outra parte témoslla que comunicar, $\vec{v}_{\text{a comunicar}}$: $\vec{v}_1 = \vec{v}_{1\,\text{xiro}} + \vec{v}_{\text{a comunicar}}$.

Primeiro imos obter v_1, para despois obter a velocidade a comunicar.

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{G\,M\,m}{r_1} \rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{r_1}}$$

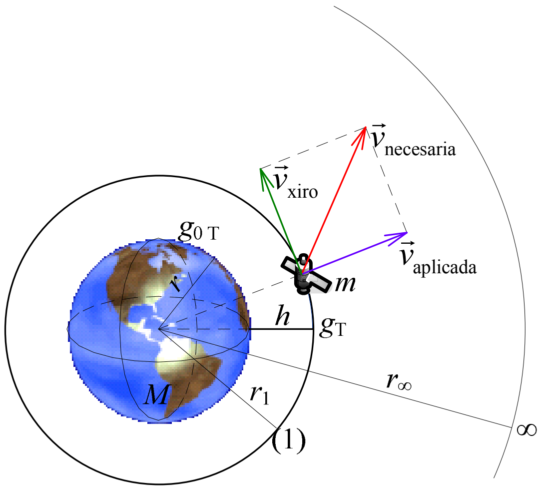
Recordando que: $\vec{v}_1 = \vec{v}_{1\,\text{xiro}} + \vec{v}_{\text{a comunicar}}$; o valor da $\vec{v}_{\text{a comunicar}}$ ó satélite vai depender da dirección en que se lle aplique. Así:

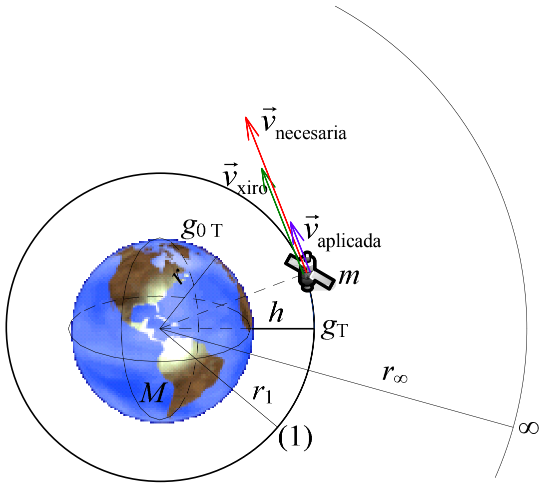
· Se a $\vec{v}_{\text{a comunicar}}$ ten a mesma dirección e sentido que a $\vec{v}_{1\,\text{xiro}}$, o seu valor é:

$$v_{\text{a comunicar}} = v_1 - v_{1\,\text{xiro}} = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{r_1}} - \sqrt{\frac{G\,M}{r_1}} = \sqrt{\frac{G\,M}{r_1}} \left(\sqrt{2} - 1 \right)$$

· Se a $\vec{v}_{\text{a comunicar}}$ é perpendicular á $\vec{v}_{1\,\text{xiro}}$, o seu valor é:

$$v_{\text{a comunicar}} = \sqrt{v_1^2 - v_{1\,\text{xiro}}^2} = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{r_1} - \frac{G\,M}{r_1}} = \sqrt{\frac{G\,M}{r_1}}$$





Vemos que **a velocidade de escape é independente da masa do satélite**, polo que o ítem a) é correcto.

A expresión do período T de rotación dun satélite de masa m que orbita arredor da Terra nunha órbita de raio r_1 é: $T = \dfrac{2\,\pi\, r_1}{\sqrt{\dfrac{g_0\, r^2}{r_1}}}$, sendo g_0 a aceleración da gravidade terrestre na súa superficie. Polo tanto, T non depende da masa do satélite que orbita, non sendo correcto o ítem b).

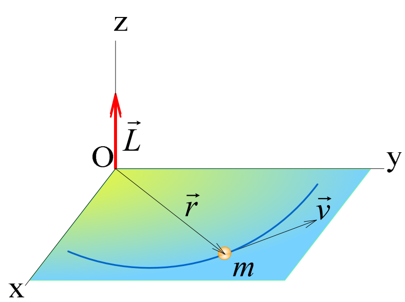
Como xa vimos antes, a enerxía mecánica dun satélite de masa m, tamén chamada enerxía de enlace, que está nunha órbita estacionaria de raio r_1 ó redor da Terra de masa M vén dada pola expresión: $E = -\dfrac{1}{2}\dfrac{G\,M\,m}{r_1}$.

Para o caso dos satélites A e B resulta: $E_{\text{A}} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{G\,M\,2\,m_{\text{B}}}{r_1}$ e $E_{\text{B}} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{G\,M\,m_{\text{B}}}{r_1}$, polo que a enerxía dos dous satélites é distinta. En consecuencia, o ítem c) non é correcto.

11.- No movemento da Terra arredor do Sol: a) consérvase o momento angular e o momento lineal; b) consérvase o momento lineal e o momento da forza que os une; c) varía o momento lineal e conservase o angular. (*Set. 04*).

Solución:

O momento angular $\vec{L}$ da Terra de masa m, no seu movemento orbital arredor do Sol, con respecto ó centro do Sol, vén dado pola expresión: $\vec{L} = \vec{r} \text{ x } (m \cdot \vec{v})$, sendo $\vec{r}$ o vector que une o centro do Sol cun punto calquera da liña de acción do vector $\vec{v}$ (velocidade da Terra).



Imos ver como varía no tempo o momento angular:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\left(\vec{r}\times(m\vec{v})\right)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\left(m\,\vec{v}\right)+\vec{r}\times\dfrac{\mathrm{d}(m\,\vec{v})}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}\\ \dfrac{\mathrm{d}(m\,\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\end{array}\right\}\rightarrow\ \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}\times\left(m\,\vec{v}\right)+\vec{r}\times\vec{F}$$

Como o vector $\left(m\,\vec{v}\right)$ é múltiplo do vector $\vec{v}$ (ambos vectores son paralelos), o produto vectorial destes vectores é nulo: $\vec{v}\times\left(m\,\vec{v}\right)=\vec{0}$. Por outro lado, como a partícula se move baixo unha forza central, e o seu momento angular $\vec{L}$ o calculamos con respecto ó centro de forzas, a forza $\vec{F}$ e o vector $\vec{r}$ teñen a mesma dirección (forman un ángulo de 180º) e o produto vectorial destes vectores tamén é nulo: $\vec{r}\times\vec{F}=\vec{0}$. En consecuencia resulta:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{0}\quad\rightarrow\quad\vec{L}=\overrightarrow{\mathrm{cte}}$$

A cantidade de movemento $\vec{p}$ dunha masa *m* que se move cunha velocidade $\vec{v}$ vén dada pola expresión: $\vec{p}=m\cdot\vec{v}$. No movemento da Terra arredor do Sol, segundo a segunda lei de Kepler, o raio vector que une o centro do Sol co planeta varre áreas iguais en tempos iguais: $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\dfrac{L}{2\,m}=\mathrm{cte.}$, onde $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$ é a velocidade areolar e *L* é o módulo do momento angular do planeta con respecto ó centro do Sol. En consecuencia, para dous puntos da órbita elíptica temos:

$$\frac{L_1}{2\,m}=\frac{L_2}{2\,m}\ \rightarrow\ L_1=L_2\ \rightarrow\ r_1\cdot m\cdot v_1\cdot\mathrm{sen}\,\alpha_1=r_2\cdot m\cdot v_2\cdot\mathrm{sen}\,\alpha_2$$

Para o caso dos puntos máis afastados da órbita elíptica (afelio e perihelio), $\alpha_1=\alpha_2=90º$ e, en consecuencia, $r_1\cdot v_1=r_2\,v_2$. Como $r_1\neq r_2\ \Rightarrow\ v_1\neq v_2$: No caso de órbitas elípticas, cando a Terra está máis preto do Sol leva máis velocidade que cando está máis afastado del. Ademais, a dirección de $\vec{v}$, que é tanxente á traxectoria da órbita do planeta, cambia continuamente.

O resultado é que **varía o momento lineal e consérvase o angular**.

12.- Arredor do Sol xiran dous planetas cuxos períodos de revolución son $3{,}66\cdot10^2$ días e $4{,}32\cdot10^3$ días respectivamente. Se o raio da órbita do primeiro é $1{,}49\cdot10^{11}$ m, a órbita do segundo é: a) a mesma; b) menor; c) maior. (*Xuño 04*).

Solución:

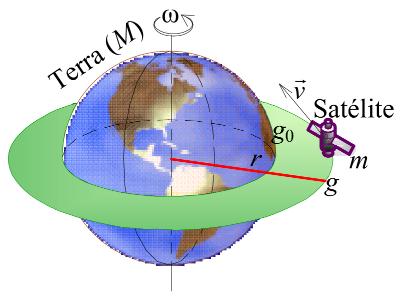
Recordando a terceira lei de Kepler, sabemos que o cociente entre o cadrado do tempo que tarda un planea en dar unha volta arredor do Sol (período, *T*) e o cubo do semieixe maior da súa órbita, *r*, (que, nunha aproximación circular, corresponde co raio dunha circunferencia), é o mesmo para todos os planetas: T^2/r^3 = cte. En consecuencia resulta:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{T_1^2}{r_1^3}=\dfrac{T_2^2}{r_2^3}\\ T_2>T_1\end{array}\right\} \rightarrow r_2>r_1$$

13.- Para un satélite xeoestacionario o raio da súa órbita obtense mediante a expresión: a) $r=\left(\dfrac{T^2\,G\,m}{4\,\pi^2}\right)^{1/3}$; b) $r=\left(\dfrac{T^2\,g_0\,r_T}{4\,\pi^2}\right)^{1/2}$; c) $r=\left(\dfrac{T\,G\,m^2}{4\,\pi^2}\right)^{1/3}$. (*Xuño 04*).

Solución:

Un satélite está nunha órbita xeoestacionaria cando orbita nunha órbita estable sobre un mesmo punto da vertical terrestre. Isto obriga a que o seu período de revolución T coincida co da Terra. Relacionamos agora T co raio r da órbita:



$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}T=\dfrac{2\,\pi}{\omega}\\ \omega=\dfrac{v_{\text{xiro}}}{r}\end{array}\right\}\rightarrow T=\dfrac{2\,\pi}{\dfrac{v_{\text{xiro}}}{r}}\\ v_{\text{xiro}}=\sqrt{\dfrac{G\,M}{r}}\end{array}\right\}\rightarrow T=\dfrac{2\,\pi\,r}{\sqrt{\dfrac{G\,M}{r}}}$$

$$T\sqrt{\frac{G\,M}{r}}=2\,\pi\,r \rightarrow T^2\cdot\frac{G\,M}{r}=4\,\pi^2\,r^2 \rightarrow r^3=\frac{T^2\,G\,M}{4\,\pi^2} \rightarrow r=\left(\frac{T^2\,G\,M}{4\,\pi^2}\right)^{1/3}$$

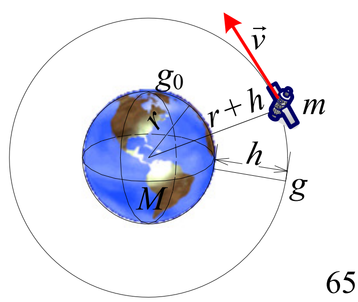
14.- Cando un satélite artificial a causa da fricción coa atmosfera reduce a súa altura con respecto á Terra, a súa velocidade lineal: a) aumente; b) diminúe; c) permanece constante. (*Set. 03*).

Solución:

A enerxía mecánica, E_m, dun satélite de masa m en órbita estacionaria ó redor da Terra, de masa M e raio r, obtense sumando a súa enerxía cinética, E_k, e potencial, E_p: $E_m = E_k + E_p$.

$$\left.\begin{array}{l}E_m=\dfrac{1}{2}\,m\,v_{\text{xiro}}^2+\left(-\dfrac{G\,M\,m}{r+h}\right)\\ v=\sqrt{\dfrac{G\,M}{(r+h)}}\end{array}\right\}\rightarrow E_m=\frac{1}{2}\,m\,\frac{G\,M}{(r+h)}-\frac{G\,M\,m}{(r+h)}\rightarrow\ \rightarrow E_m=-\frac{1}{2}\,\frac{G\,M\,m}{(r+h)}$$

Se a enerxía total E_m diminúe por fricción, o seu valor absoluto aumenta, xa que se trata dun valor negativo. Este aumento débese á diminución do raio da órbita, $(r+h)$, xa que $G\,M\,m/2$ é constante.



Recordando a velocidade de xiro dun satélite, en función do raio da órbita, $\left(v=\sqrt{\dfrac{G\,M}{r+h}}\right)$, vemos que, cando o satélite perde enerxía por fricción, **a súa velocidade lineal aumenta.**

15.- Un satélite xira arredor dun planeta describindo unha órbita elíptica. Cal das seguintes magnitudes permanece constante?: a) momento angular; b) momento lineal; c) enerxía potencial. (*Xuño 03*).

Solución:

Para os ítems a) e b) ver a resposta dada ó número 11 destas cuestións.

Para xustificar que a enerxía potencial, E_{p}, dun satélite de masa *m*, en órbita elíptica arredor dun planeta de masa *M*, non permanece constante escribimos a expresión correspondente: $E_{\text{p}}=-\dfrac{G\,M\,m}{r}$.

Como a distancia *r* do satélite ó planeta varía (órbita elíptica), a enerxía potencial non é constante.

16.- Unha partícula móvese nun campo de forzas centrais. O seu momento angular respecto ó centro de forzas: a) aumenta indefinidamente; b) é cero; c) permanece constante. (*Set. 02*).

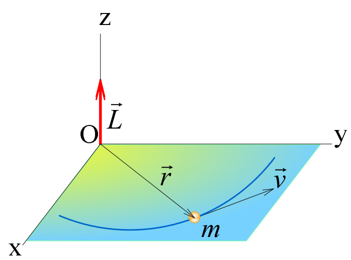
Solución:

O momento angular $\vec{L}$, dunha partícula de masa *m*, que se move cunha velocidade $\vec{v}$, respecto a un punto O, vén dado pola expresión: $\vec{L}=\vec{r}\times\left(m\cdot\vec{v}\right)$, sendo $\vec{r}$ o vector que une o punto O cun punto calquera da liña de acción do vector $\vec{v}$.

Para dicir se $\vec{L}$ aumenta indefinidamente, se é cero ou se permanece constante, imos estudar como é a súa variación no tempo:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\left(\vec{r}\times\left(m\vec{v}\right)\right)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\left(m\,\vec{v}\right)+\vec{r}\times\dfrac{\mathrm{d}\left(m\,\vec{v}\right)}{\mathrm{d}t}\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}\left(m\,\vec{v}\right)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\end{array}\right\}\rightarrow\ \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}\times\left(m\,\vec{v}\right)+\vec{r}\times\vec{F}$$

Como o vector $\left(m\cdot\vec{v}\right)$ é múltiplo do vector $\vec{v}$ (ambos vectores son paralelos), o produto vectorial destes vectores é nulo: $\vec{v}\times\left(m\cdot\vec{v}\right)=\vec{0}$. Por outro lado, como a partícula se move baixo unha forza central, e o seu momento angular $\vec{L}$ o calculamos con respecto ó centro de forzas, a forza $\vec{F}$ e o vector $\vec{r}$ teñen a mesma dirección (forman un ángulo de 180º) e o produto vectorial destes vectores tamén é nulo: $\vec{r}\times\vec{F}=\vec{0}$. En consecuencia resulta:



$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{L}=\overrightarrow{\mathrm{cte}}$$

17- A velocidade de escape que se debe comunicar a un corpo inicialmente en repouso na superficie da Terra de masa M e raio R_0 para que "escape" fóra da atracción gravitatoria é: a) maior que $\left(\frac{2\,G\,M}{R_0}\right)^{1/2}$; b) menor que $\left(\frac{2\,G\,M}{R_0}\right)^{1/2}$; c) igual a $\left(\frac{g_0}{R_0}\right)^{1/2}$. (*Xuño 02*).

Solución:

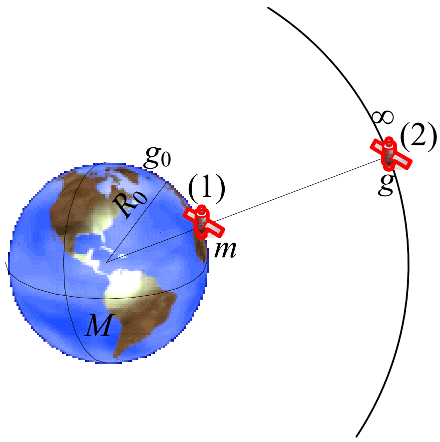
Se queremos lanzar un corpo fóra da atracción gravitacional, temos que darlle unha velocidade mínima (chamada **velocidade de escape**) para que poida saír da atracción terrestre. Esta velocidade significa unha enerxía mínima igual ó traballo necesario para levar o corpo de masa *"m"* desde a superficie terrestre ata o infinito.

Como a forza gravitatoria é conservativa, a enerxía mecánica, E_m, consérvase para calquera punto do campo gravitatorio: $E_{\mathrm{m}\,1}=E_{\mathrm{m}\,2}$.

$$E_{\mathrm{m}1}=E_{\mathrm{m}2} \quad \rightarrow \quad E_{\mathrm{k}1}+E_{\mathrm{p}1}=E_{\mathrm{k}2}+E_{\mathrm{p}2}$$

$$\frac{1}{2}\,m\,v_1^2+\left(-\frac{G\,M\,m}{R_0}\right)=0+\,0$$

$$\frac{1}{2}\,m\,v_1^2=\frac{G\,M\,m}{R_0} \quad \rightarrow \quad v_1=\sqrt{\frac{2\,G\,M}{R_0}}=v_{\mathrm{escape}}$$



onde G é a constante de gravitación universal. En función de g_0 (gravidade na superficie terrestre) temos:

$$\left.\begin{array}{l} v_\mathrm{e}=\sqrt{\dfrac{2\,G\,M}{R_0}} \\[2ex] g_0=\dfrac{G\,M}{R_0^2} \end{array}\right\} \rightarrow \; v_\mathrm{e}=\sqrt{2\,g_0\,R_0}$$

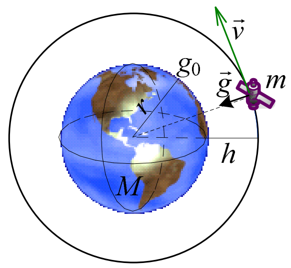
Polo tanto, a velocidade a comunicar a unha masa m para que escape do campo gravitatorio terrestre debe ser, como mínimo, a que vén dada pola expresión: $v_{\mathrm{escape}}=\sqrt{\frac{2\,G\,M}{R_0}}$. Calquera valor de velocidade superior ó que corresponde á expresión anterior, permite ó corpo escapar do campo gravitatorio terrestre: ítem a).

18.- Verías algunha vez en T.V. ós astronautas flotando dentro da súa nave. Isto é debido: a) a que non hai gravidade; b) á falta de atmosfera; c) a que a forza gravitatoria é igual á forza centrípeta. (*Set. 01*).

Solución:

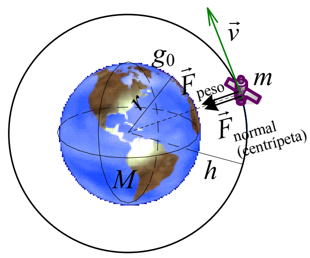
No punto onde está a nave espacial, a aceleración da gravidade, $\vec{g}$, vén dada pola expresión: $g = \frac{G\,M}{(r+h)^2}$, sendo G a constante de gravitación universal, M a masa do corpo en torno ó cal orbita a nave e (r+h) o raio da órbita. Polo tanto, na posición da nave si hai gravidade.

A nave espacial, os astronautas, ..., en órbita estacionaria ó redor da Terra, móvense cunha velocidade $\vec{v}$, que é de módulo constante (non posuíndo aceleración tanxencial) e de dirección variable (tendo unha aceleración normal, centrípeta):



$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \\ \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \\ v = \text{cte.} \rightarrow \vec{a}_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{u}_t = \vec{0} \\ \vec{v} \neq \overrightarrow{\text{cte.}} \rightarrow \vec{a} \neq \vec{0} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{a} = \vec{a}_n \rightarrow a = a_n = \frac{v^2}{r} = \text{cte.},$$

xa que v e r son constantes



Para un observador inercial á única forza que actúa sobre o satélite, sobre os astronautas, ..., é a forza normal (centrípeta), que coincide coa forza con que a Terra os atrae, peso:

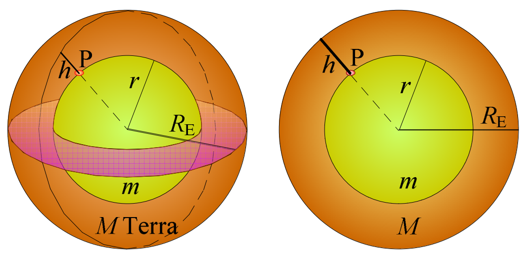
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \vec{a} = \vec{a}_n \\ \vec{a}_n = \vec{g} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{a} = \vec{a}_n = \vec{g} \\ \vec{F} = m \cdot \vec{a} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{F}_{\text{gravitatoria}} = \vec{F}_{\text{centrípeta}}$$

O que lle ocorre ós astronautas é que están sometidos á mesma aceleración da gravidade que a nave espacial e ambos, **nave e astronautas**, **caen sobre a Terra coa mesma aceleración**, coa conseguinte sensación de ingravidez.

19.- En cal destes tres puntos é maior a gravidade terrestre: a) nunha sima a 4 km de profundidade; b) no Ecuador; c) no alto do monte Everest. (*Xuño 01*).

Solución:

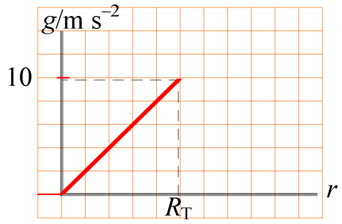
Supoñamos un punto P no interior da Terra, a unha profundidade h respecto á súa superficie.



A intensidade de campo gravitatorio no punto P vén dada pola expresión: $g = \frac{G\,m}{r^2}$, sendo m a masa da esfera que, tendo por centro ó da Terra, pasa polo punto onde queremos coñecer g. Como a medida que r diminúe tamén diminúe o valor de m, para saber como varía o valor de g con r imos expresar m en función de r. Con este fin recordamos que $m = \rho \cdot V$, sendo ρ a densidade da Terra, que supoñemos constante, e V o seu volume que, en función de r, é: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$. En consecuencia resulta:

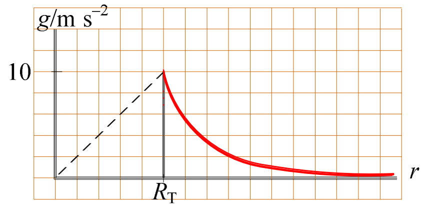
$m = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$. Substituíndo na expresión de g temos:

$$g = \frac{G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi\, r^3}{r^2} \;\rightarrow\; g = G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi\, r \;\rightarrow\; g = \text{cte} \cdot r$$



Vemos que o valor de g, para puntos interiores da Terra, aumenta de forma directamente proporcional co valor de r, correspondéndolle a representación indicada na gráfica.

Para un punto P da superficie da Terra, r coincide co raio desta e g toma o valor máximo.



Se o punto P está a unha altura h sobre a superficie da Terra, o valor da expresión de g é: $g = \frac{G\,M}{r^2}$, sendo M a masa da Terra e r a distancia que hai desde o seu centro ata o punto onde calculamos o valor de g (r = R_T+h, sendo R_T o raio da Terra). O resultado é que g é inversamente proporcional ó cadrado da distancia, $g = \frac{\text{cte.}}{r^2}$, e, en consecuencia, a representación gráfica de g fronte á distancia ó centro da Terra, r, é a que á marxe se indica.

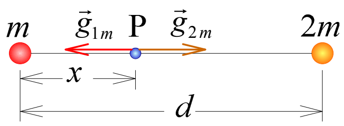
Concluímos que, con respecto á distancia ó centro da Terra, **o valor de $\vec{g}$ é máximo na súa superficie** (no Ecuador): ítem b).

20.- Dadas dúas masas *m* e 2*m* separadas unha distancia *d*, xustifica se hai algún punto intermedio da recta de unión que cumpra: a) campo nulo e potencial positivo; b) campo nulo e potencial negativo; c) campo e potencial positivos. (*Set. 00*).

Solución:

A intensidade de campo gravitatorio, $\vec{g}$, creada por unha masa m nun punto P é a forza gravitatoria que m exerce sobre a unidade de masa sita no punto considerado: $\vec{g} = -\frac{G\,m}{r^2}\,\vec{u}_r$, sendo: G a constante de gravitación universal; r a distancia que separa a masa m do punto onde queremos coñecer $\vec{g}$ e $\vec{u}_r$ o vector unitario que ten a súa orixe na masa m, coa dirección da recta que une m co punto onde estudamos $\vec{g}$ e co sentido cara ó punto.

Ó ser dúas masas, para coñecer a intensidade de campo gravitatorio total, $\vec{g}_{\text{total}}$, aplicamos o principio de superposición: $\vec{g}_{\text{total}} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$.



Para que $\vec{g}_{\text{total}} = \vec{0}$ ten que ocorrer que $\vec{g}_{1m} = -\vec{g}_{2m}$, situación que se dá para un punto intermedio da recta que une as masas m e $2m$:

$$g_{1m} = g_{2m} \;\rightarrow\; \frac{G\,m}{x^2} = \frac{G\,2\,m}{(d-x)^2} \;\rightarrow\; (d-x)^2 = 2\,x^2 \;\rightarrow\; x^2 + 2\,d\,x - d^2 = 0 \;\rightarrow\; x = -d \pm d\,\sqrt{2}$$

No punto $-d + d\,\sqrt{2}$, que está na recta que une as dúas masas, $\vec{g}_{1m}$ e $\vec{g}_{2m}$ son de igual módulo e dirección e de sentido contrario, $\vec{g}_{1m} = -\vec{g}_{2m}$, resultando que $\vec{g}_{\text{total}} = \vec{0}$. Para calquera outro punto distinto do considerado, $\vec{g}_{\text{total}} \neq \vec{0}$.

O potencial gravitatorio, V, dunha masa m nun punto P é a enerxía potencial gravitatoria, E_{p}, nese punto por unidade de masa: $V = -(G\,m)/r$ e o potencial total é: $V_{\text{total}} = V_{1m} + V_{2m}$. Esta suma sempre é negativa para todo punto da recta que une as masas m e $2m$.

Polo tanto, a solución correcta é a do ítem b).

21.- A ingravidez dos astronautas dentro dunha nave espacial débese a: a) a que non hai gravidade; b) a que a nave e o astronauta son atraídos pola Terra coa mesma aceleración; c) a que non hai atmosfera. (*Set. 99*).

Solución:

Ver a resposta da cuestión número 18.

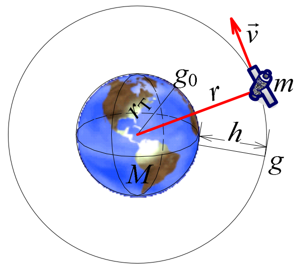
22.- Cando un satélite que está xirando arredor da Terra perde parte da súa enerxía por fricción, o raio da súa órbita é: a) maior; b) menor; c) mantense constante. (*Xuño 99*).

Solución:

A enerxía mecánica, E_{m}, dun satélite de masa m en órbita estacionaria ó redor da Terra, de masa M e raio r, obtense sumando a súa enerxía cinética, E_{k}, e potencial, E_{p}: $E_{\text{m}} = E_{\text{k}} + E_{\text{p}}$.

$$\left.\begin{aligned} E_{\text{m}} &= \frac{1}{2} m\, v_{\text{xiro}}^2 + \left(-\frac{G\,M\,m}{r_{\text{T}}+h}\right) \\ v &= \sqrt{\frac{G\,M}{(r_{\text{T}}+h)}} \end{aligned}\right\} \rightarrow E_{\text{m}} = \frac{1}{2} m \frac{G\,M}{(r_{\text{T}}+h)} - \frac{G\,M\,m}{(r_{\text{T}}+h)}$$

$$\boxed{E_{\text{m}} = -\frac{1}{2}\frac{G\,M\,m}{(r_{\text{T}}+h)}}$$



sendo $(r_{\text{T}}+h)$ o raio da órbita, r.

Se a enerxía total, E_{m}, diminúe por fricción, o seu valor absoluto aumenta, xa que se trata dun valor negativo. Este aumento débese á **diminución do raio da órbita**, $(r_{\text{T}}+h)$, xa que $G\,M\,m/2$ é constante. Esta solución é a que corresponde ó ítem b) da cuestión.

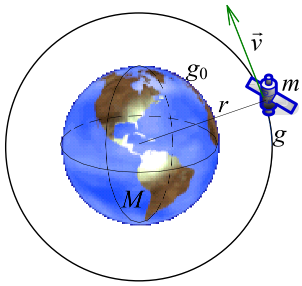
23.- Un satélite de masa *m* describe unha traxectoria circular de raio *r* ó xirar ó redor dun planeta de masa *M*. A enerxía mecánica do satélite é numericamente: a) igual á metade da súa enerxía potencial; b) igual á súa enerxía potencial; c) igual ó dobre da súa enerxía potencial. (*Set. 98*).

Solución:

A enerxía mecánica, E_{m}, dun satélite de masa m, en órbita circular de raio r ó redor dun planeta de masa M, obtense sumando a súa enerxía cinética, E_{k}, e potencial, E_{p}: $E_{\text{m}} = E_{\text{k}} + E_{\text{p}}$.

$$\left.\begin{array}{l} E_m = \frac{1}{2} m\, v_{xiro}^2 + \left(-\frac{G\,M\,m}{r}\right) \\ v = \sqrt{\frac{G\,M}{r}} \end{array}\right\} \rightarrow E_m = \frac{1}{2} m \frac{G\,M}{r} - \frac{G\,M\,m}{r}$$

$$\boxed{E_m = -\frac{1}{2}\frac{G\,M\,m}{r}}$$



O resultado é que **a enerxía mecánica do satélite**, $E_m = -\frac{G\,M\,m}{2\,r}$, **é igual á metade da súa enerxía potencial**, $E_m = -\frac{G\,M\,m}{r}$, que corresponde ó ítem a) da cuestión.

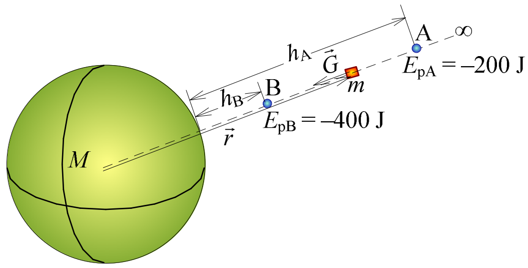
24.- Unha masa desprázase nun campo gravitatorio desde un lugar no que a súa enerxía potencial vale −200 J ata outro onde vale −400 J. Cal é o traballo realizado por ou contra o campo? a) −200 J, b) 200 J, c) −600 J. (*Xuño 98*).

Solución:

$$W_{A\,(\text{forza do campo})}^{B} = -\left(E_{p\,B} - E_{p\,A}\right) = -\Delta E_p$$

$$\left.\begin{array}{l} E_{p\,A} = -200\text{ J} \\ E_{p\,B} = -400\text{ J} \\ W_A^B = -\Delta E_p \end{array}\right\} \rightarrow W_A^B = -\left(-400 - (-200)\right)$$

$$W_A^B = 200\text{ J}$$



Este traballo é positivo e é feito de forma espontánea pola forza gravitatoria do campo.

25.- Cando sobre un corpo actúa unha forza, a aceleración que adquire é: a) proporcional á masa, b) inversamente proporcional á masa, c) só depende da forza. (*Set. 97*).

Solución:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \;\rightarrow\; \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Na segunda lei de Newton vemos que **a aceleración** $\vec{a}$ que adquire un corpo de masa m, ó que se lle aplica unha forza $\vec{F}$, **é inversamente proporcional á masa** m do corpo.

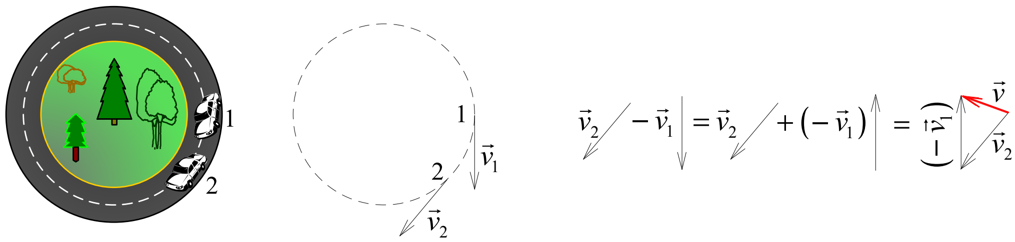
26.- Un móbil describe un movemento circular plano, co módulo da súa velocidade constante. a) Existe necesariamente unha aceleración, b) existe só se o plano non é horizontal, c) non existe por ser *v* constante. (*Xuño 97*).

Solución:

Defínese a aceleración $\vec{a}$ como: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, sendo un vector de igual dirección e sentido que $d\vec{v}$

e, en xeral, non é tanxente á traxectoria, apuntando cara á parte interior da curva. Descomponse en dúas direccións: Unha tanxente á traxectoria, $\vec{a}_\mathrm{t} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_\mathrm{t}$, que causa a variación do módulo da velocidade, e outra perpendicular á anterior, $\vec{a}_\mathrm{n} = \dfrac{v^2}{r}\,\vec{u}_\mathrm{n}$, que motiva a variación da dirección da velocidade:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \\ \vec{a} = \vec{a}_\mathrm{t} + \vec{a}_\mathrm{n} \\ v = \mathrm{cte.} \rightarrow \vec{a}_\mathrm{t} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_\mathrm{t} = \vec{0} \\ \vec{v} \neq \overrightarrow{\mathrm{cte.}} \rightarrow \vec{a} \neq \vec{0} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{a} = \vec{a}_\mathrm{n} \rightarrow a = a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{r} = \text{cte., xa que } v \text{ e } r \text{ son constantes}$$



Polo tanto, **existe necesariamente unha aceleración** (ítem a).

27.- Considérese un corpo sobre a superficie terrestre, a) a súa masa e o seu peso son os mesmos en todos os puntos da superficie, b) a súa masa, pero non o seu peso, é a mesma en todos os puntos da superficie, c) o seu peso, pero non a súa masa, é o mesmo en todos os puntos da superficie. (*Set. 96*).

Solución:

A masa m dun corpo é constante, independente do punto que se considere; sen embargo, a forza con que a Terra o atrae (peso) vai depender do punto da superficie da Terra en que se encontre debido a dúas razóns:

· A Terra de masa M non é unha esfera perfecta, aumentando o seu raio, r_T, cando nos desprazamos desde o Polo cara ó Ecuador. Por esta razón, o peso do corpo de masa m diminúe a medida que nos acercamos cara ó Ecuador: $F_0 = \dfrac{G\,M\,m}{r_\mathrm{T}^2} = m\,g_0$.

· A Terra rota cunha velocidade $\vec{v}$, que é constante en módulo pero non en dirección, aparecendo unha aceleración normal: $a_\mathrm{n} = \dfrac{v^2}{r} = \omega^2\,r$, sendo ω a velocidade angular da Terra e r o raio da órbita que describe o corpo. En consecuencia, esta aceleración é máxima no Ecuador e diminúe cara os Polos, onde é nula.

Para un observador que viaxa co corpo (sistema non inercial), as forzas que actúan sobre o corpo son: $\vec{F}_0 + \vec{F}_\mathrm{inercia}$, resultando un valor máximo nos Polos e mínimo no Ecuador.

28.- O traballo realizado por unha forza depende só dos puntos inicial e final da traxectoria, a) se as forzas son conservativas; b) independentemente do tipo de forza; c) cando non existen forzas de tipo electromagnético. (*Xuño 96*).

Solución:

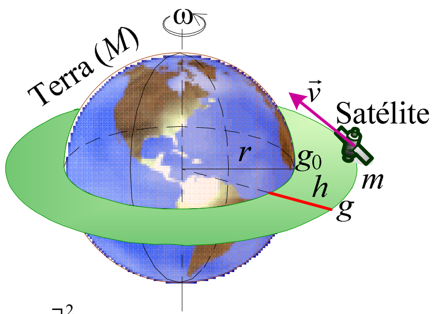
En xeral, o traballo dunha forza depende dos puntos entre os cales se realiza e do camiño seguido pola forza entre eses dous puntos. Cando o traballo realizado pola forza soamente depende dos puntos inicial e final da traxectoria, sendo independente do camiño ó longo do cal se desenvolve, dise que a forza é conservativa (ítem a).

EXERCICIOS DE SELECTIVIDADE (Problemas)

1.- Os satélites Meteosat son satélites xeoestacionarios (situados sobre o Ecuador terrestre e cun período orbital de un día). Calcula: a) a altura á que se atopan respecto á superficie terrestre; b) a forza exercida sobre o satélite; c) a enerxía mecánica. (Datos: $R_T = 6{,}38 \cdot 10^6$ m; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $m_{\text{satélite}} = 8 \cdot 10^2$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}). *(Set. 08).*

Solución:

a) Dado que o satélite se quere colocar nunha órbita xeoestacionario, ademais de ser estable, o que significa: $F_{\text{peso}} = F_{\text{inercia}}$, o seu período de revolución, $T_{\text{satélite}}$, coincide co da Terra, T_{Terra}: $T_{\text{satélite}} = T_{\text{Terra}} = 86400$ s.



$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{m\,v^2}{r+h} = m\,g \\ v = \omega(r+h) \\ g = \dfrac{G\,M}{(r+h)^2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{[\omega(r+h)]^2}{r+h} = \dfrac{G\,M}{(r+h)^2} \\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{\left[\dfrac{2\pi}{T}(r+h)\right]^2}{r+h} = \dfrac{G\,M}{(r+h)^2}$$

$$r+h = \sqrt[3]{\frac{G\,M\,T^2}{4\,\pi^2}}$$

$$\left.\begin{array}{r} r+h = \sqrt[3]{\dfrac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot86400^2}{4\cdot\pi^2}} \rightarrow r+h = 4{,}22\cdot10^7\text{ m} \\ h = 6{,}38\cdot10^6\text{ m} \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{h = 3{,}58\cdot10^7\text{ m}}$$

b) A forza que a Terra exerce sobre o satélite é a forza gravitatoria.

$$F_{\text{Terra-satélite}} = F_G = G\frac{M\,m}{(r+h)^2} \rightarrow F_G = 6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{5{,}98\cdot10^{24}\cdot800}{4{,}22\cdot10^7} \rightarrow \boxed{F_G = 179\text{ N}}$$

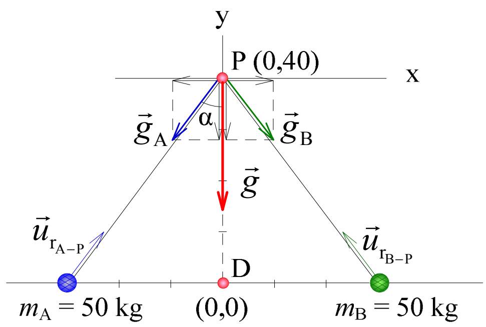
c) A enerxía mecánica do satélite é a suma da súa enerxía cinética e potencial: $E_m = E_k + E_p$

$$\left.\begin{array}{l} E_m = E_p + E_k \\ E_p = -\dfrac{G\,M\,m}{(r+h)} \\ \left.\begin{array}{l} E_k = \dfrac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 \\ v = \sqrt{\dfrac{G\,M}{(r+h)}} \end{array}\right\} \rightarrow E_k = \dfrac{1}{2}\cdot m\cdot\dfrac{G\,M}{(r+h)} \end{array}\right\} \rightarrow E_m = -\frac{1}{2}\cdot\frac{G\,M\,m}{(r+h)}$$

$$E_m = -\frac{1}{2}\cdot\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot800}{4{,}22\cdot10^7} \rightarrow \boxed{E_m = -3{,}78\cdot10^9\text{ J}}$$

2.- Dúas masas de 50 kg están situadas en A(−30,0) e B(30,0) respectivamente (coordenadas en metros). Calcula: a) o campo gravitatorio en P(0,40) e en D(0,0); b) o potencial gravitatorio en P e en D; c) para unha masa *m*, onde é maior a enerxía potencial gravitatoria, en P ou en D? (Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻²). *(Set. 08).*

Solución:



a) $\vec{g}_{total} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{g}_i$

$$\vec{g}_i = -\frac{G\,m_i}{r_i^2}\vec{u}_{r\,i}$$

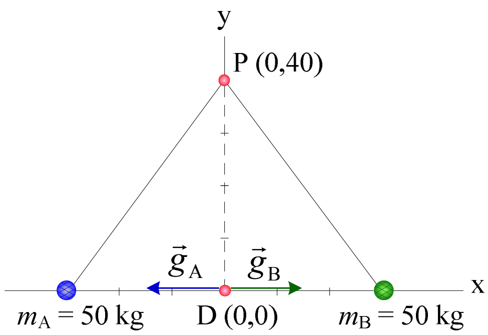
$$g_A = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 50}{\left(\sqrt{40^2 + 30^2}\right)^2} \rightarrow g_A = 1{,}33 \cdot 10^{-12}\ \text{m s}^{-2}$$

$$g_B = g_A = 1{,}33 \cdot 10^{-12}\ \text{m s}^{-2}$$

$$\vec{g}_P = -2 \cdot 1{,}33 \cdot 10^{-12} \cdot \cos\alpha\ \vec{j} = -2 \cdot 1{,}33 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{40}{50}\vec{j}\ \left(\text{m s}^{-2}\right)$$

$$\boxed{\vec{g}_P = -2{,}13 \cdot 10^{-12}\ \vec{j}\ \left(\text{m s}^{-2}\right)}$$

No punto D(0,0), a intensidade de campo gravitatorio que crean as dúas masas son vectores opostos: teñen o mesmo módulo e a mesma dirección e son de sentido contrario, e, en consecuencia, a resultante é nula: $\vec{g} = \vec{0}$.



b) Calculamos agora o potencial gravitatorio *V* que as masas situadas en A e en B crean no punto P.

$$\left.\begin{aligned} V_{total} &= \sum_{i=1}^{i=n} V_i = V_1 + V_2 \\ V_i &= -\frac{G\,m_i}{r_i} \\ V_1 &= V_2 \end{aligned}\right\} \rightarrow V_{total} = -2 \cdot \frac{G\,m}{r}$$

$$V_{P\,total} = -2 \cdot \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 50}{\sqrt{40^2 + 30^2}} \rightarrow \boxed{V_{P\,total} = -1{,}33 \cdot 10^{-10}\ \text{J kg}^{-1}}$$

De forma análoga calculamos o potencial no punto D.

$$V_{D\,total} = -2 \cdot \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 50}{30} \rightarrow \boxed{V_{D\,total} = -2{,}22 \cdot 10^{-10}\ \text{J kg}^{-1}}$$

c) A enerxía potencial gravitatoria E_p dunha masa *m* nun punto de potencial gravitatorio *V* é: $E_p = m \cdot V$. Para o caso do exercicio resulta:

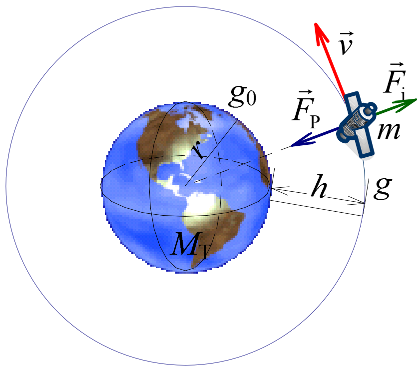
$$\left.\begin{array}{l} E_{\text{p en P}} = -1{,}33 \cdot 10^{-10} \cdot m \\ E_{\text{p en D}} = -2{,}22 \cdot 10^{-10} \cdot m \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{E_{\text{p en P}} > E_{\text{p en D}}}$$

3.- Un satélite artificial de 100 kg describe órbitas circulares a unha altura de 6000 km sobre a superficie da Terra. Calcula: a) o tempo que tarda en dar unha volta completa; b) o peso do satélite a esta altura. (Datos: g_0 = 9,80 m/s^2; r_T = 6400 km). (*Xuño 06*).

Solución:

a) O período *T* de revolución dun satélite en órbita circular arredor da Terra é o tempo que tarda en dar unha volta completa:

$$\left.\begin{array}{l} T = \dfrac{2\pi}{\omega} \\ \omega = \dfrac{v}{(r+h)} \end{array}\right\} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\dfrac{v}{(r+h)}} \rightarrow T = \frac{2\pi(r+h)}{v}$$



Escribindo a velocidade de xiro dun satélite, *v*, en función do raio da órbita do satélite, $(r+h)$, e da aceleración da gravidade terrestre na súa superficie, g_0: $v = \sqrt{\dfrac{g_0\, r^2}{(r+h)}}$,

resulta: $T = \dfrac{2\pi(r+h)}{\sqrt{\dfrac{g_0\, r^2}{(r+h)}}}$.

$$T = \frac{2\pi(6400+6000)\cdot 10^3}{\sqrt{\dfrac{9{,}80\cdot(6400\cdot 10^3)^2}{(6400+6000)\cdot 10^3}}} \rightarrow \boxed{T = 1{,}37\cdot 10^4\ \text{s}}$$

b)

$$G_{\text{do satélite á altura da órbita}} = m_{\text{satélite}} \cdot g_{\text{Terra á altura de 6000 km}}$$

$$\left.\begin{array}{l} g_{\text{Terra á altura de 6000 km}} = \dfrac{G\, M_T}{(r+h)^2} \\ g_{\text{Terra na súa superficie}} = g_0 = \dfrac{G\, M_T}{r^2} \end{array}\right\} \rightarrow g_{\text{Terra á altura de 6000 km}} = \frac{g_0 \cdot r^2}{(r+h)^2}$$

$$g_{\text{Terra á altura de 6000 km}} = \frac{9{,}80\cdot(6400\cdot 10^3)^2}{\left[(6400+6000)\cdot 10^3\right]^2} \rightarrow g_{\text{Terra á altura de 6000 km}} = 2{,}61\ \text{m s}^{-2}$$

$$G_{\text{do satélite á altura de 6000 km}} = 100\cdot 2{,}61 \rightarrow \boxed{G_{\text{do satélite á altura de 6000 km}} = 261\ \text{N}}$$

4.- O período de rotación da Terra arredor do Sol é un ano e o raio da órbita é $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m. Se Xúpiter ten un período de aproximadamente 12 anos e se o raio da órbita de Neptuno é de $4{,}5 \cdot 10^{12}$ m, calcula: a) o raio da órbita de Xúpiter; b) o período do movemento orbital de Neptuno. (*Set. 05*).

Solución:

a) Se recordamos a terceira lei de Kepler, sabemos que o cociente entre o cadrado do tempo que tarda un planea en dar unha volta arredor do Sol (período, *T*) e o cubo do semieixe maior da elipse que describe, *r*, (que, nunha aproximación circular, correspóndese co raio dunha circunferencia), é o mesmo para todos os planetas: T^2/r^3 = cte. Aplicando esta lei á Terra e a Xúpiter resulta:

$$\frac{T^2_{\text{Terra}}}{r^3_{\text{Terra}}} = \frac{T^2_{\text{Xúpiter}}}{r^3_{\text{Xúpiter}}} \rightarrow \frac{1^2}{\left(1{,}5\cdot 10^{11}\right)^3} = \frac{12^2}{r^3_{\text{Xúpiter}}} \rightarrow \boxed{r_{\text{Xúpiter}} = 7{,}9\cdot 10^{11}\ \text{m}}$$

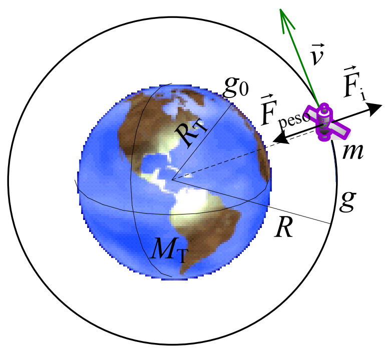
b) Aplicando a mesma lei á Terra e a Neptuno temos:

$$\frac{T^2_{\text{Terra}}}{r^3_{\text{Terra}}} = \frac{T^2_{\text{Neptuno}}}{r^3_{\text{Neptuno}}} \rightarrow \frac{1^2}{\left(1{,}5\cdot 10^{11}\right)^3} = \frac{T^2_{\text{Neptuno}}}{\left(4{,}5\cdot 10^{12}\right)^3} \rightarrow \boxed{T_{\text{Neptuno}} = 164\ \text{anos}}$$

5.- Un Satélite artificial de 64,5 kg xira arredor da Terra nunha órbita circular de raio *R* = 2,32 R_T. Calcula: a) o período de rotación do satélite; b) o peso do satélite na órbita. Datos: R_T = 6370 km; g_0 = 9,80 m/s^2). (*Xuño 05*).

Solución:

a) Operando de forma análoga a como se fixo no número 3 destes problemas resulta: $T = \dfrac{2\,\pi\,R}{\sqrt{\dfrac{g_0\,R_T^2}{R}}}$.



$$T = \frac{2\cdot\pi\cdot 6370\cdot 10^3\cdot 2{,}32}{\sqrt{\dfrac{9{,}80\cdot\left(6370\cdot 10^3\right)^2}{6370\cdot 10^3\cdot 2{,}32}}} \rightarrow \boxed{T = 1{,}79\cdot 10^4\ \text{s}}$$

b)

$$G_{\text{do satélite á altura da órbita}} = m_{\text{satélite}} \cdot g_{\text{Terra á altura da órbita}}$$

$$\left.\begin{array}{l} g_{\text{Terra á altura da órbita}} = \dfrac{G\,M_T}{R^2} \\[2ex] g_{\text{Terra na súa superficie}} = g_0 = \dfrac{G\,M_T}{R_T^2} \end{array}\right\} \rightarrow g_{\text{Terra á altura da órbita}} = \frac{g_0\cdot R_T^2}{R^2}$$

$$g_{\text{Terra á altura da órbita}} = \frac{9{,}80 \cdot \left(6370 \cdot 10^3\right)^2}{\left[\left(6370 \cdot 10^3 \cdot 2{,}32\right)\right]^2} \rightarrow g_{\text{Terra á altura da órbita}} = 1{,}82 \text{ m s}^{-2}$$

$$G_{\text{do satélite á altura da órbita}} = 64{,}5 \cdot 1{,}82 \rightarrow \boxed{G_{\text{do satélite á altura da órbita}} = 117 \text{ N}}$$

6.- A masa da Lúa respecto da Terra é 0,0112 M_T e o seu raio é r_T/4. Dado un corpo cuxo peso na Terra é de 980 N (g_0 = 9,80 m s^{-2}), calcula: a) a masa e o peso do corpo na Lúa; b) a velocidade coa que o corpo chega á superficie luar se cae desde unha altura de 100 m. (*Set. 04*)

Solución:

a) Aplicando a segunda lei de Newton, $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, calculamos a masa do corpo:

$$G_{0\,\text{T}} = m \cdot g_{0\,\text{T}} \rightarrow 980 = m \cdot 9{,}80 \rightarrow \boxed{m = 100 \text{ kg}}$$

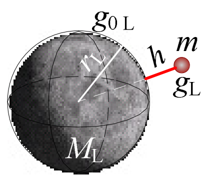
A masa dun corpo non depende do lugar no que se encontre, tendo o mesmo valor na Lúa que na Terra.

O peso do corpo na Lúa calcúlase coa expresión: $G_{\text{Lúa}} = m \cdot g_{\text{Lúa}}$, polo que é necesario coñecer previamente a intensidade do campo gravitatorio luar na superficie da Lúa.

$$\left.\begin{aligned} g_{0\,\text{L}} &= \frac{G\,M_\text{L}}{r_\text{L}^2} \\ g_{0\,\text{T}} &= \frac{G\,M_\text{T}}{r_\text{T}^2} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{g_{0\,\text{L}}}{g_{0\,\text{T}}} = \frac{M_\text{L}}{M_\text{T}} \cdot \frac{r_\text{T}^2}{r_\text{L}^2} \rightarrow g_{0\,\text{L}} = 9{,}80 \cdot 0{,}0112 \cdot 4^2 \rightarrow g_{0\,\text{L}} = 1{,}76 \text{ m s}^{-2}$$

$$G_{0\,\text{L}} = 100 \cdot 1{,}76 \rightarrow \boxed{G_{0\,\text{L}} = 176 \text{ N}}$$

b) Como a altura desde a que o corpo cae é pequena, consideramos constante a aceleración da gravidade: $g = g_{\text{na superficie da Lúa}} = 1{,}76 \text{ m s}^{-2}$.



Como a aceleración de caída é constante, o movemento é rectilíneo uniformemente acelerado e a ecuación cinemática a utilizar para calcular a velocidade de chegada é: $\vec{v}_{\text{chan}} = \vec{v}_0 + \vec{g}_{\text{Lúa}} \cdot t$.

$$v_{\text{chan}} = 0 + 1{,}76 \cdot t$$

Para calcular o tempo facemos uso da ecuación do vector desprazamento, $\Delta\vec{r}$, para este movemento: $\Delta\,\vec{r} = \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \cdot t^2 \rightarrow 100 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}76 \cdot t^2 \rightarrow t = 10{,}66 \text{ s}$

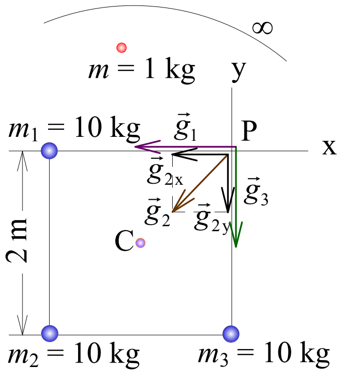
$$v_{\text{chan}} = 1{,}76 \cdot 10{,}66 \rightarrow \boxed{v_{\text{chan}} = 18{,}7 \text{ m s}^{-1}}$$

7.- En cada un dos tres vértices dun cadrado de 2 m de lado hai unha masa de 10 kg.

Calcula: a) o campo e o potencial gravitatorios creados por esas masas no vértice baleiro; b) a enerxía empregada para trasladar unha cuarta masa de 1 kg desde o infinito ó centro do cadrado. (Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻²; as masas considéranse puntuais). (*Set. 03*).

Solución:

a) A intensidade do campo gravitatorio, $\vec{g}_i$, creado por unha masa m_i nun punto situado a unha distancia r_i vén dada pola expresión: $\vec{g} = -\dfrac{G\,m_i}{r_i^2}\vec{u}_r$, sendo G a constante de gravitación universal e $\vec{u}_r$ o vector unitario na dirección que une a masa m_i co punto onde se calcula $\vec{g}_i$, co sentido que vai desde m_i ata o punto.



Como son tres as masas creadoras de campo, a intensidade total obtense aplicando o principio de superposición: $\vec{g}_{total} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{g}_i$

$$\vec{g}_i = -\frac{G\,m_i}{r_i^2}\vec{u}_{r\,i}$$

$$g_1 = g_3 = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 10}{2^2} \rightarrow g_1 = g_3 = 1{,}67\cdot 10^{-10}\ \text{N kg}^{-1}$$

$$g_2 = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 10}{\left(\sqrt{2^2+2^2}\right)^2} \rightarrow g_2 = 0{,}83\cdot 10^{-10}\ \text{N kg}^{-1}$$

$$g_{2x} = g_2\cdot\cos 45^\circ \rightarrow g_{2x} = 0{,}83\cdot 10^{-10}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow g_{2x} = 0{,}59\cdot 10^{-10}\ \text{N kg}^{-1}$$

$$g_{2y} = g_{2x}$$

$$g_x = g_1 + g_{2x} \rightarrow g_x = 1{,}67\cdot 10^{-10} + 0{,}59\cdot 10^{-10} \rightarrow g_x = 2{,}26\cdot 10^{-10}\ \text{N kg}^{-1}$$

$$g_y = g_3 + g_{2y} = g_x$$

$$\boxed{\vec{g} = -2{,}26\cdot 10^{-10}\,\vec{i} - 2{,}26\cdot 10^{-10}\,\vec{j}\ \left(\text{N kg}^{-1}\right)}$$

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2} \rightarrow g = \sqrt{\left(-2{,}26\cdot 10^{-10}\right)^2 + \left(-2{,}26\cdot 10^{-10}\right)^2} \rightarrow \boxed{g = 3{,}20\cdot 10^{-10}\ \text{N kg}^{-1}}$$

A intensidade de campo gravitatorio é un vector de módulo $3{,}20\cdot 10^{-10}$ N/kg, coa dirección da diagonal que pasa polo vértice do cadrado que non ten masa e co sentido que vai desde este vértice cara ó centro da figura.

O potencial gravitatorio V nun punto debido á presenza de varias masas, m_i, cada unha delas á unha distancia r_i do punto, obtense sumando alxebraicamente o potencial que cada unha das masas crea nese punto: $V = \sum_{i=1}^{i=3} V_i = \sum_{i=1}^{i=3}\left(-\dfrac{G\,m_i}{r_i}\right)$.

$$V_{\mathrm{P}}=-\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 10}{2}-\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 10}{\sqrt{2^2+2^2}}-\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 10}{2} \rightarrow \boxed{V_{\mathrm{P}}=-9,04\cdot 10^{-10}\ \mathrm{J\ kg^{-1}}}$$

b) As forzas gravitatorias son conservativas e o traballo que estas forzas desenvolven non depende do camiño ó longo do cal se realiza, podendo calculalo como a variación da enerxía potencial, cambiada de signo: $W_{\infty}^{\mathrm{C}}=-\Delta E_{\mathrm{p}}$.

A enerxía potencial gravitatoria dunha masa m nun punto debido á influencia de varias masas m_{i}, cada unha delas a unha distancia r_{i} da masa m, é a suma das enerxías potenciais individuais: $E_{\mathrm{p}}=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{i}=3} E_{\mathrm{p\,i}}=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{i}=3}\left(-\frac{G\, m_{\mathrm{i}}\cdot m}{r_{\mathrm{i}}}\right)$. Enerxía potencial gravitatorio no infinito: $E_{\mathrm{p\ no\ }\infty}=0\ \mathrm{J}$.

$$E_{\mathrm{p\ en\ C}}=-\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 10\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2}}\cdot 3 \rightarrow E_{\mathrm{p\ en\ C}}=-1,41\cdot 10^{-9}\ \mathrm{J}$$

$$W_{\infty\,(\text{feito pola forza do campo})}^{\mathrm{C}}=-\Delta E_{\mathrm{p}}=-\left(-1,41\cdot 10^{-9}-0\right) \rightarrow \boxed{W_{\infty}^{\mathrm{C}}=1,41\cdot 10^{-9}\ \mathrm{J}}$$

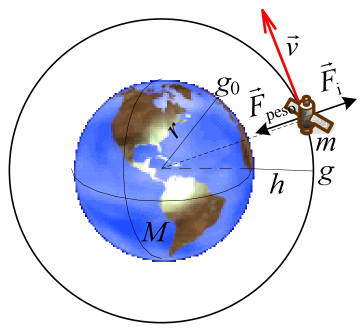
A masa de un kg desprázase espontaneamente desde ó infinito ata o centro do cadrado, ganando velocidade, debido á forza gravitatoria do campo. Se queremos que a masa se desprace sen variación de enerxía cinética temos que aplicarlle unha forza exterior que anule á forza gravitatoria. Relacionando o traballo desenvolto pola forza gravitatoria do campo co traballo exterior resulta:

$$W_{\infty\,(\text{forza exterior})}^{\mathrm{C}}=-W_{\infty\,(\text{forza campo gravitatorio})}^{\mathrm{C}} \rightarrow \boxed{W_{\infty\,(\text{forza exterior})}^{\mathrm{C}}=-1,41\cdot 10^{-9}\ \mathrm{J}}$$

8.- Un satélite artificial de 300 kg xira arredor da Terra nunha órbita circular de 36378 km de raio. Calcula: a) a velocidade do satélite na órbita; b) a enerxía total do satélite na órbita. Datos: r_{T} = 6378 km; g_0 = 9,80 m s^{-2}. (*Xuño 03*).

Solución:

a) Un satélite en órbita circular ó redor da Terra posúe unha velocidade $\vec{v}$, que é de módulo constante e de dirección variable: tanxente en cada punto á traxectoria que describe. En consecuencia, sobre o satélite actúa unha forza normal $\vec{F}_{\mathrm{n}}$, que coincide coa forza con que a Terra o atrae (sistema de referencia inercial). Para un observador situado no satélite (sistema de referencia non inercial), as forzas que sobre el actúan son:



· A forza con que a Terra o atrae: $\vec{F}_{\mathrm{peso}}=m\cdot\vec{g}$.

· A forza de inercia:

$$\vec{F}_{\mathrm{inercia}}=m\cdot(-\vec{a}_{\mathrm{n}})=m\cdot\vec{a}_{\mathrm{i}}=-m\cdot\frac{v^2}{(r+h)}\cdot\vec{u}_{\mathrm{n}}$$

Por outro lado, o observador está en repouso con respecto ó satélite e substituíndo na 2ª lei de Newton, $\vec{F}_{\mathrm{neta}}=m\cdot\vec{a}$, resulta:

$$\vec{F}_{\text{peso}} + \vec{F}_{\text{inercia}} = \vec{0} \rightarrow F_{\text{peso}} = F_{\text{inercia}} \rightarrow m\,g = m\,\frac{v^2}{r+h} \rightarrow v = \sqrt{g\,(r+h)} \quad v = \sqrt{g \cdot 36378 \cdot 10^3}$$

Como non temos o dato da aceleración da gravidade terrestre, g, á altura do satélite, imos relacionar este valor co que ten na superficie da Terra, g_0.

$$\left.\begin{array}{l} g = \dfrac{G \cdot M}{(r+h)^2} \\ g_0 = \dfrac{G \cdot M}{r^2} \end{array}\right\} \rightarrow g = \frac{g_0 \cdot r^2}{(r+h)^2} \rightarrow g = \frac{9{,}80 \cdot (6378 \cdot 10^3)^2}{(36378 \cdot 10^3)^2} = 0{,}30 \text{ m s}^{-2}$$

$$v = \sqrt{0{,}30 \cdot 36378 \cdot 10^3} \rightarrow \boxed{v = 3304 \text{ m s}^{-1}}$$

b) A enerxía (mecánica) total, E_{m}, é a suma das enerxías cinética, E_{k}, e potencial, E_{p}: $E_{\text{m}} = E_{\text{k}} + E_{\text{p}}$

$$\left.\begin{array}{l} E_{\text{m}} = \dfrac{1}{2} m\,v^2 - \dfrac{G\,M\,m}{(r+h)} \\ G\,M = g_0\,r^2 \end{array}\right\} \rightarrow E_{\text{m}} = \frac{1}{2} m\,v^2 - \frac{g_0\,r^2\,m}{(r+h)}$$

$$E_{\text{m}} = \frac{1}{2} \cdot 300 \cdot 3304^2 - \frac{9{,}80 \cdot (6378 \cdot 10^3)^2 \cdot 300}{36378 \cdot 10^3} \rightarrow \boxed{E_{\text{m}} = -1{,}65 \cdot 10^9 \text{ J}}$$

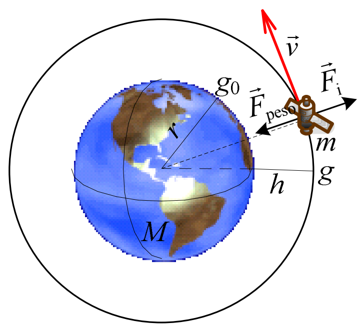
9.- Un astronauta de 75 kg xira arredor da Terra (dentro dun satélite artificial) nunha órbita situada a 10000 km sobre a superficie da Terra. Calcula: a) A velocidade orbital e o período de rotación; b) o peso do astronauta. Datos: g_0 = 9,80 m s^{-2}; R_{Terra} = 6400 km. (*Set. 02*).

Solución:

a) Para un observador situado no satélite (sistema de referencia non inercial) resulta que:

$$\vec{F}_{\text{peso}} + \vec{F}_{\text{inercia}} = \vec{0} \rightarrow F_{\text{peso}} - F_{\text{inercia}} = 0 \rightarrow F_{\text{peso}} = F_{\text{inercia}} \rightarrow m\,g = m\,\frac{v^2}{r+h} \rightarrow v = \sqrt{g\,(r+h)}$$

$$\left.\begin{array}{l} v = \sqrt{g\,(r+h)} \\ g = \dfrac{G\,M}{(r+h)^2} \end{array}\right\} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G\,M}{(r+h)}}$$



$$\left.\begin{array}{l} v = \sqrt{\dfrac{G\,M}{(r+h)}} \\ g_0 = \dfrac{G\,M}{r^2} \rightarrow G\,M = g_0 \cdot r^2 \end{array}\right\} \rightarrow v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot r^2}{(r+h)}}$$

$$v = \sqrt{\frac{9{,}80 \cdot (6400 \cdot 10^3)^2}{(6400 + 10000) \cdot 10^3}} \rightarrow \boxed{v = 4947{,}3 \text{ m s}^{-1}}$$

$$\left.\begin{array}{l} T=\dfrac{2\,\pi}{\omega} \\ \omega=\dfrac{v}{(r+h)} \end{array}\right\} \rightarrow T=\dfrac{2\,\pi}{\dfrac{v}{(r+h)}} \rightarrow T=\dfrac{2\,\pi\,(r+h)}{v}$$

$$T=\frac{2\,\pi\,(6400+10000)\cdot 10^3}{4947{,}3} \rightarrow \boxed{\boxed{T=20828{,}4\ \mathrm{s}}}$$

b)

$$G_{\text{do astronauta na órbita}}=m_{\text{astronauta}}\cdot g_{\text{Terra á altura de 10000 km}}$$

$$\left.\begin{array}{l} g_{\text{Terra á altura de 10000 km}}=\dfrac{G\,M_{\mathrm{T}}}{(r+h)^2} \\ g_{\text{Terra na súa superficie}}=g_{0\,\mathrm{T}}=\dfrac{G\,M_{\mathrm{T}}}{r^2} \end{array}\right\} \rightarrow g_{\text{Terra á altura de 10000 km}}=\frac{g_{0\,\mathrm{T}}\cdot r^2}{(r+h)^2}$$

$$g_{\text{Terra á altura de 10000 km}}=\frac{9{,}80\cdot\left(6400\cdot 10^3\right)^2}{\left[(6400+10000)\cdot 10^3\right]^2} \rightarrow g_{\text{Terra á altura de 10000 km}}=1{,}5\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

$$G_{\text{do satélite á altura de 10000 km}}=75\cdot 1{,}5 \rightarrow \boxed{\boxed{G_{\text{do satélite á altura de 10000 km}}=112{,}5\ \mathrm{N}}}$$

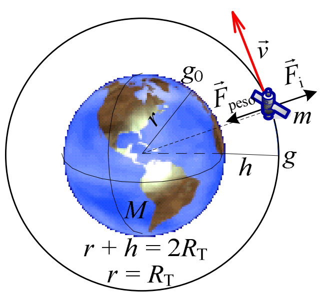
10.- Un satélite artificial describe unha órbita circular de raio 2·R_T en torno á Terra. Calcula: a) A velocidade orbital; b) o peso do satélite na órbita se na superficie da Terra pesa 5000 N (debuxa as forzas que actúan sobre o satélite). Datos: R_T = 6400 km; G = 6,67·10^{-11} N m^2 kg^{-2}; g_0 = 9,8 m s^{-2}. (*Xuño 02*).

Solución:

a) Para un observador situado no satélite (sistema de referencia non inercial) resulta que:

$$\vec{F}_{\text{peso}}+\vec{F}_{\text{inercia}}=\vec{0} \rightarrow F_{\text{peso}}=F_{\text{inercia}} \rightarrow m\,g=m\,\frac{v^2}{r+h} \rightarrow v=\sqrt{g\,(r+h)}$$

$$\left.\begin{array}{l} v=\sqrt{g\,(r+h)} \\ g=\dfrac{G\,M}{(r+h)^2} \end{array}\right\} \rightarrow v=\sqrt{\frac{G\,M}{(r+h)}}$$



$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} v=\sqrt{\dfrac{G\,M}{(r+h)}} \\ g_0=\dfrac{G\,M}{r^2} \rightarrow G\,M=g_0\cdot r^2 \end{array}\right\} \rightarrow v=\sqrt{\dfrac{g_0\cdot r^2}{(r+h)}} \\ r=R_{\mathrm{T}} \\ (r+h)=2\cdot R_{\mathrm{T}} \end{array}\right\} \rightarrow v=\sqrt{\frac{g_0\cdot R_{\mathrm{T}}}{2}}$$

$$v = \sqrt{\frac{9{,}8 \cdot 6400 \cdot 10^3}{2}} \rightarrow \boxed{v = 5600 \text{ m s}^{-1}}$$

b)

$$G_{\text{do satélite na órbita}} = m_{\text{satélite}} \cdot g_{\text{Terra á altura do satélite}}$$

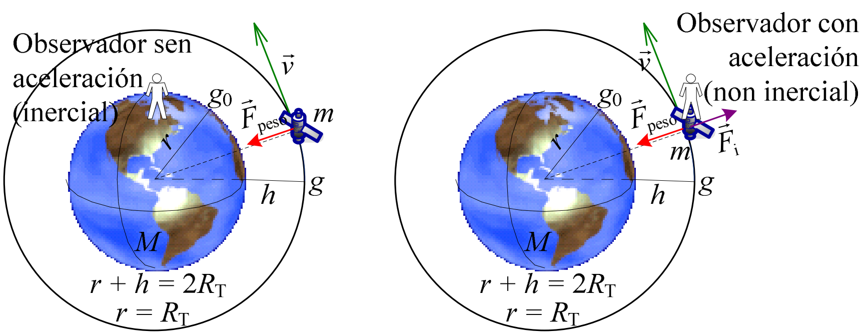
$$\left.\begin{array}{l} \text{Peso na superficie da Terra} = m_{\text{satélite}} \cdot g_{0\,\text{T}} \\ \text{Peso na superficie da Terra} = 5000 \text{ N} \\ g_{0\,\text{T}} = 9{,}8 \text{ m s}^{-2} \end{array}\right\} \rightarrow 500 = m_{\text{satélite}} \cdot 9{,}8 \rightarrow m_{\text{satélite}} = 510 \text{ kg}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} g_{\text{Terra á altura } h} = \dfrac{G\,M_{\text{T}}}{(r+h)^2} \\ (r+h) = 2\,R_{\text{T}} \end{array}\right\} \rightarrow g_{\text{Terra á altura } h} = \dfrac{G\,M_{\text{T}}}{(2\,R_{\text{T}})^2} \\ \left.\begin{array}{l} g_{\text{Terra na súa superficie}} = g_{0\,\text{T}} = \dfrac{G\,M_{\text{T}}}{r^2} \\ r = R_{\text{T}} \end{array}\right\} \rightarrow g_{0\,\text{T}} = \dfrac{G\,M_{\text{T}}}{R_{\text{T}}^{\,2}} \end{array}\right\} \rightarrow g_{\text{Terra á altura } h} = \frac{g_{0\,\text{T}} \cdot R_{\text{T}}^{\,2}}{(2\,R_{\text{T}})^2} = \frac{g_{0\,\text{T}}}{4}$$

$$g_{\text{Terra á altura } h} = \frac{9{,}80}{4} \rightarrow g_{\text{Terra á altura } h} = 2{,}45 \text{ m s}^{-2}$$

$$G_{\text{do satélite na órbita}} = 510 \cdot 2{,}45 \rightarrow \boxed{G_{\text{do satélite na órbita}} = 1249{,}5 \text{ N}}$$

As forzas que actúan sobre o satélite depende do sistema de referencia que se tome. Para un observador inercial (sen aceleración), por exemplo, para unha persoa situada na Terra, a única forza que actúa sobre o satélite é a forza con que a Terra o atrae (peso), $\vec{F}_{\text{p}}$, que é unha forza normal e é a que causa o movemento circular do satélite. Para un observador non inercial (con aceleración), por exemplo, para un astronauta, as forzas que actúan sobre o satélite son: A forza con que a Terra o atrae (peso), $\vec{F}_{\text{p}}$,

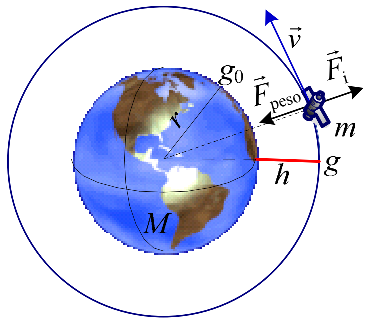


e a forza de inercia, $\vec{F}_{\text{i}}$, dando unha resultante nula.

11.- Un satélite artificial cunha masa de 200 kg móvese nunha órbita circular arredor da Terra cunha velocidade constante de 10800 km/h. Calcula: a) á que altura está situado?; b) fai un gráfico indicando que forzas actúan sobre o satélite e calcula a enerxía total. Datos: g_0 = 9,8 m s^{-2};

R_T = 6370 km. (*Set. 01*).

Solución:



a) Un satélite en órbita circular ó redor da Terra posúe unha velocidade $\vec{v}$, que é de módulo constante, v =10800 km/h, e de dirección variable: tanxente en cada punto á traxectoria que describe. En consecuencia, sobre o satélite actúa unha forza normal, $\vec{F}_n$, que coincide coa forza con que a Terra o atrae (sistema de referencia inercial). Para un observador situado no satélite (sistema de referencia non inercial), as forzas que sobre el actúan son:

· A forza con que a Terra o atrae: $\vec{F}_{peso} = m \cdot \vec{g}$.

· A forza de inercia: $\vec{F}_{inercia} = m \cdot (-\vec{a}_n) = m \cdot \vec{a}_i = -m \cdot \dfrac{v^2}{(r+h)} \cdot \vec{u}_n$

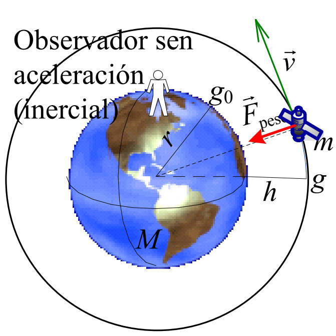
Por outro lado, o observador está en repouso con respecto ó satélite e substituíndo na 2ª lei de Newton, $\vec{F}_{neta} = m \cdot \vec{a}$, resulta:

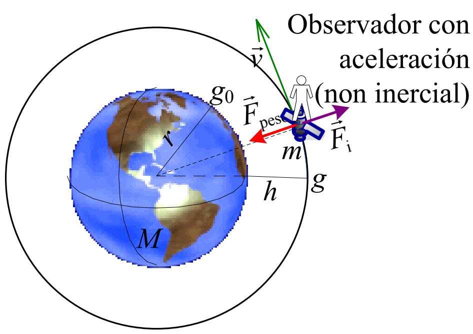
$$\vec{F}_{peso} + \vec{F}_{inercia} = \vec{0} \rightarrow F_{peso} - F_{inercia} = 0 \rightarrow F_{peso} = F_{inercia} \rightarrow m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{r+h}$$

$$\left.\begin{array}{l} g = \dfrac{v^2}{(r+h)} \\ g = \dfrac{G\,M}{(r+h)^2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{G\,M}{(r+h)^2} = \dfrac{v^2}{(r+h)} \\ G\,M = g_0\, r^2 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{g_0\, r^2}{(r+h)} = v^2 \rightarrow h = \frac{g_0\, r^2}{v^2} - r$$

$$h = \frac{9{,}8 \cdot 6370000^2}{\left(10800 \cdot \dfrac{1000}{3600}\right)^2} - 6370000 \rightarrow \boxed{h = 37813736\ \text{m}}$$

b) As forzas que actúan sobre o satélite depende do sistema de referencia que se tome. Para un observador inercial (sen aceleración), por exemplo, para unha persoa situada na Terra, a única forza que actúa sobre o satélite é a forza con que a Terra o atrae (peso), $\vec{F}_p$, que é unha forza normal á traxectoria e é a que causa o movemento circular do satélite. Para un observador non inercial (con aceleración), por exemplo, para un astronauta, as forzas que actúan sobre o satélite son: A forza con que a Terra o atrae (peso), $\vec{F}_p$, e a forza de inercia, $\vec{F}_i$, dando unha resultante nula.





$$\left.\begin{array}{l} E_m = E_k + E_p \\ E_m = \frac{1}{2} m v_{xiro}^2 + \left(-\frac{G M m}{r+h}\right) \\ v_{xiro} = \sqrt{\frac{G M}{(r+h)}} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} E_m = \frac{1}{2} m \frac{G M}{(r+h)} - \frac{G M m}{(r+h)} \\ G M = g_0 r^2 \end{array}\right\} \rightarrow E_m = -\frac{1}{2} \frac{g_0 r^2 m}{(r+h)}$$

$$E_m = -\frac{1}{2} \cdot \frac{9{,}8 \cdot 6370000^2 \cdot 200}{6370 \cdot 10^3 + 37813736} \rightarrow \boxed{E_m = -9{,}0 \cdot 10^8 \text{ J}}$$

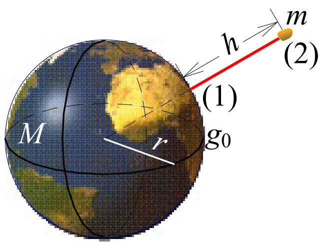
12.- Lánzase un proxectil verticalmente desde a superficie da Terra, cunha velocidade inicial de 3 km s^{-1}. Calcula: a) Que altura máxima alcanzará?; b) a velocidade orbital que é preciso comunicarlle a esa altura para que describa unha órbita circular. Datos: *G* = 6,67 · 10^{-11} N m^2 kg^{-2}; R_T = 6378 km; M_T = 5,98 · 10^{24} kg. (*Xuño 01*).

Solución:

a) Cando a velocidade coa que se lanza o "proxectil" e, en consecuencia, a altura que alcanza é pequena, a aceleración da gravidade é constante, podendo utilizar as ecuacións do movemento rectilíneo uniformemente variado. Esta situación non é a que ten lugar para o enunciado do problema.

Pero o campo gravitatorio terrestre no que se move o proxectil é conservativo, podendo establecer o principio de conservación da enerxía mecánica, E_m:

$$E_{m\,1} = E_{m\,2} \quad \rightarrow \quad E_{k\,1} + E_{p\,1} = E_{k\,2} + E_{p\,2}$$



A enerxía inicial E_{m1} que posúe o proxectil de masa m ó ser lanzado cunha velocidade v_1 = 3 km/s é a suma da súa enerxía cinética e potencial: $E_{m1} = \frac{1}{2} m v_1^2 + \left(-\frac{G M m}{r}\right)$

sendo G a constante de gravitación universal, M a masa da Terra, r o seu raio e m a masa do corpo que se lanza.

A medida que o proxectil ascende, a súa velocidade diminúe, sendo nula á altura h na que se detén. Nese punto a súa enerxía $E_{m\,2}$ é só potencial, de valor: $E_{m\,2} = -\frac{G M m}{r+h}$

A conservación da enerxía mecánica permítenos escribir a seguinte igualdade:

$$\frac{1}{2} m v^2 + \left(-\frac{G M m}{r}\right) = -\frac{G M m}{r+h}$$

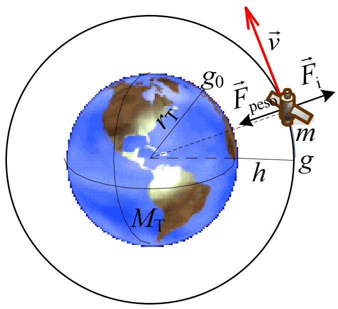
Despexamos agora a altura h:

$$\frac{v^2 r - 2 G M}{2 r} = -\frac{G M}{r+h} \rightarrow r+h = -\frac{2 r G M}{v^2 r - 2 G M} \rightarrow h = -\frac{2 r G M}{v^2 r - 2 G M} - r$$

$$h=\frac{-2\cdot 6378\cdot 10^{3}\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{\left(3\cdot 10^{3}\right)^{2}\cdot 6378\cdot 10^{3}-2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}-6378\cdot 10^{3}\ \rightarrow\ \boxed{h=4{,}95\cdot 10^{5}\ \mathrm{m}}$$

b) A velocidade que lle hai que comunicar ó proxectil á altura h é a velocidade de órbita, que hai de ter un valor tal que, para un observador situado no proxectil (sistema de referencia non inercial), a forza de inercia, $\vec{F}_{\mathrm{i}}$, sexa de igual módulo e dirección que a forza con que a Terra o atrae, $\vec{F}_{\mathrm{peso}}$ (peso do proxectil) e de sentido contrario: $\vec{F}_{\mathrm{i}}=-\vec{F}_{\mathrm{peso}}\ \rightarrow\ F_{\mathrm{i}}=F_{\mathrm{peso}}$.

$$m_{\mathrm{proxectil}}\cdot\frac{v_{\mathrm{orbital}}^{2}}{\left(r_{\mathrm{T}}+h\right)}=m_{\mathrm{proxectil}}\cdot g\ \rightarrow\ v_{\mathrm{orbital}}=\sqrt{g\cdot\left(r_{\mathrm{T}}+h\right)}$$



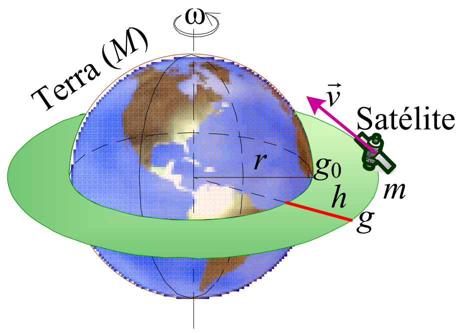
$$\left.\begin{array}{l} v_{\mathrm{orbital}}=\sqrt{g\left(r_{\mathrm{T}}+h\right)} \\ g=\dfrac{G\,M_{\mathrm{T}}}{\left(r_{\mathrm{T}}+h\right)^{2}} \end{array}\right\}\ \rightarrow\ v_{\mathrm{orbital}}=\sqrt{\frac{G\,M_{\mathrm{T}}}{\left(r_{\mathrm{T}}+h\right)}}$$

$$v=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{\left(6378000+4{,}95\cdot 10^{5}\right)}}\ \rightarrow\ \boxed{v=7{,}62\cdot 10^{3}\ \mathrm{m\,s^{-1}}}$$

13.- Deséxase por en órbita un satélite xeoestacionario de 25 kg. Calcule: a) o raio da órbita; b) as enerxías cinética, potencial e total do satélite na órbita. (Datos: G = 6,67 · 10^{-11} N m^2 kg^{-2}, M_T = 5,98 · 10^{24} kg). (*Set. 00*).

Solución:

a) Dado que o satélite se quere colocar nunha órbita xeoestacionario, ademais de ser estable, o que significa: $F_{\mathrm{peso}}=F_{\mathrm{inercia}}$, o seu período de revolución, $T_{\mathrm{satélite}}$, coincide co da Terra, T_{Terra}: $T_{\mathrm{satélite}}=T_{\mathrm{Terra}}=86400$ s.



a)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{m\,v^{2}}{r+h}=m\,g \\ v=\omega\,(r+h) \\ g=\dfrac{G\,M}{(r+h)^{2}} \end{array}\right\}\ \rightarrow\ \frac{\left[\omega\left(r+h\right)\right]^{2}}{r+h}=\frac{G\,M}{\left(r+h\right)^{2}}$$

$$\frac{4\,\pi^{2}\left(r+h\right)}{86400^{2}}=\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{\left(r+h\right)^{2}}\ \rightarrow\ \boxed{r+h=4{,}23\cdot 10^{7}\ \mathrm{m}}$$

b)

$$v=\omega\left(r+h\right)\ \rightarrow\ v=\frac{2\,\pi\left(r+h\right)}{T}\ \rightarrow\ v=\frac{2\,\pi\cdot 4{,}23\cdot 10^{7}}{86400}\ \rightarrow\ \boxed{v=3{,}08\cdot 10^{3}\ \mathrm{m\,s^{-1}}}$$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot \left(3{,}08 \cdot 10^3\right)^2 \rightarrow \boxed{E_k = 1{,}2 \cdot 10^8 \text{ J}}$$

$$E_p = -\frac{G\,M\,m}{r+h} \rightarrow E_p = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 25}{4{,}23 \cdot 10^7} \rightarrow \boxed{E_p = -2{,}4 \cdot 10^8 \text{ J}}$$

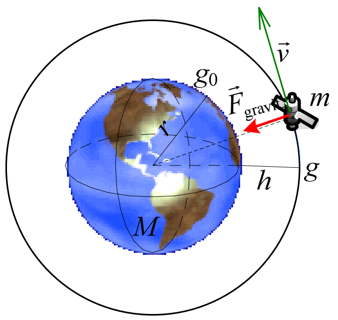
$$E_m = E_k + E_p \rightarrow E_m = 1{,}19 \cdot 10^8 - 2{,}36 \cdot 10^8 \rightarrow \boxed{E_m = -1{,}2 \cdot 10^8 \text{ J}}$$

14.- Un satélite artificial cunha masa de 200 kg móvese nunha órbita circular a $5 \cdot 10^7$ m por encima da superficie terrestre. a) Que forza gravitatoria actúa sobre o satélite?; b) cal é o período de rotación do satélite? (Datos: g_0 = 9,81 m s^{-2}; R_T = 6370 km). (*Xuño 00*).

Solución:

a)

$$\vec{F}_{\text{Terra-satélite}} = m_{\text{satélite}} \cdot \vec{g}_{\text{Terra á altura } h}$$

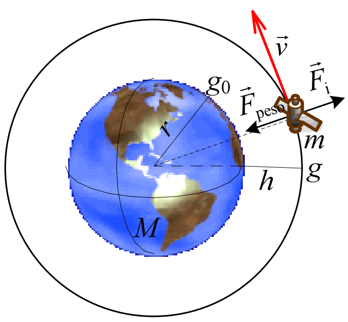


$$\left.\begin{array}{l} g_h = \dfrac{G\,M}{(r+h)^2} \\ g_0 = \dfrac{G\,M}{r^2} \end{array}\right\} \rightarrow g_h = \frac{g_0 \cdot r^2}{(r+h)^2}$$

$$\text{Peso} = 200 \cdot \frac{9{,}81 \cdot \left(6370 \cdot 10^3\right)^2}{\left(6370 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^7\right)^2} \rightarrow \boxed{\text{Peso} = 25{,}051 \text{ N}}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} T = \dfrac{2\,\pi}{\omega} \\ \omega = \dfrac{v}{(r+h)} \end{array}\right\} \rightarrow T = \frac{2\,\pi\,(r+h)}{v}$$



$$\left.\begin{array}{l} F_{\text{peso}} = F_{\text{inercia}} \rightarrow m \cdot g = m \cdot \dfrac{v^2}{(r+h)} \\ \left.\begin{array}{l} g_0 = \dfrac{G \cdot M}{r^2} \\ g = \dfrac{G \cdot M}{(r+h)^2} \end{array}\right\} \rightarrow g = \dfrac{g_0 \cdot r^2}{(r+h)^2} \end{array}\right\} \rightarrow v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot r^2}{(r+h)}}$$

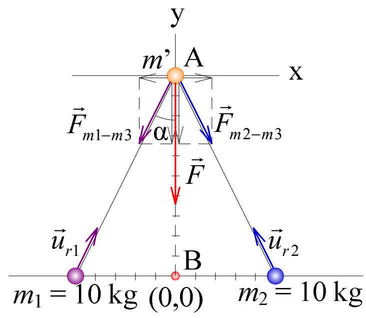
$$v = \sqrt{\frac{9{,}81 \cdot \left(6370 \cdot 10^3\right)^2}{6370 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^7}} \rightarrow \boxed{v = 2657 \text{ m s}^{-1}}$$

$$T = \frac{2\,\pi\left(6370 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^7\right)}{2657} \rightarrow \boxed{T = 133234 \text{ s}}$$

15.- **Dúas masas puntuais de 10 kg cada unha están en posicións (5,0) e (−5,0) (en metros). Unha terceira masa de 0,1 kg déixase en liberdade e con velocidade nula no punto (0,10). Calcula: a) a aceleración que actúa sobre a masa de 0,1 kg nas posicións (0,10) e (0,0); b) a velocidade da masa de 0,1 kg en (0,0). (Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}). (*Set. 99*).**

Solución:

a)



$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\vec{F}_{\text{total}} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i$$

$$\vec{F}_i = -\frac{G\, m_i\, m'}{r^2}\vec{u}_{r\,i}$$

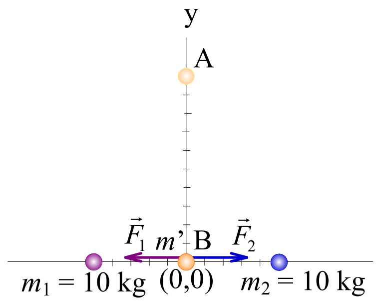
$$F_{1(0,10)} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10 \cdot 0{,}1}{\left(\sqrt{5^2 + 10^2}\right)^2} \rightarrow F_{1(0,10)} = 5{,}34 \cdot 10^{-13}\ \text{N}$$

$$F_{2(0,10)} = 5{,}34 \cdot 10^{-13}\ \text{N}$$

$$F_{(0,10)} = 5{,}34 \cdot 10^{-13} \cdot \cos\alpha \cdot 2 = 5{,}34 \cdot 10^{-13} \cdot \frac{10}{\sqrt{125}} \cdot 2$$

$$F_{(0,10)} = 9{,}55 \cdot 10^{-13}\ \text{N}$$

$$a_{(0,10)} = \frac{9{,}55 \cdot 10^{-13}}{0{,}1} \rightarrow \boxed{a_{(0,10)} = 9{,}55 \cdot 10^{-12}\ \text{m s}^{-2}}$$



$$F_{1(0,0)} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10 \cdot 0{,}1}{5^2} \rightarrow F_{1(0,0)} = 2{,}67 \cdot 10^{-12}\ \text{N}$$

$$F_{2(0,0)} = 2{,}67 \cdot 10^{-12}\ \text{N}$$

$$F_{(0,0)} = 0\ \text{N} \rightarrow \boxed{a_{(0,0)} = 0\ \text{m s}^{-2}}$$

b)

$$\left.\begin{aligned} W_A^B &= \Delta E_k = E_{k\,B} - E_{k\,A} \\ W_A^B &= -\Delta E_p = -\left(E_{p\,B} - E_{p\,A}\right) \end{aligned}\right\} \rightarrow E_{k\,B} - E_{k\,A} = -\left(E_{p\,B} - E_{p\,A}\right) \rightarrow E_{k\,B} = E_{p\,A} - E_{p\,B}$$

$$E_{p\,A} = -\frac{G\, m_1\, m'}{r_{1\,A}} - \frac{G\, m_2\, m'}{r_{2\,A}} \rightarrow E_{p\,A} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10 \cdot 0{,}1}{\sqrt{125}} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10 \cdot 0{,}1}{\sqrt{125}}$$

$$E_{p\,A} = -1{,}19 \cdot 10^{-11}\ \text{J}$$

$$E_{p\,B} = -\frac{G\, m_1\, m'}{r_{1\,B}} - \frac{G\, m_2\, m'}{r_{2\,B}} \rightarrow E_{p\,B} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10 \cdot 0{,}1}{5} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10 \cdot 0{,}1}{5}$$

$$E_{p\,B} = -2{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{J}$$

$$\left.\begin{aligned} &E_{k\,B} = E_{p\,A} - E_{p\,B} \\ &E_{k\,B} = \frac{1}{2}\cdot 0{,}1\cdot v_B^2 \\ &E_{p\,A} - E_{p\,B} = 1{,}48\cdot 10^{-11}\ \text{J} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{1}{2}\cdot 0{,}1\cdot v_B^2 = 1{,}48\cdot 10^{-11} \rightarrow \boxed{\boxed{v_B = 1{,}7\cdot 10^{-5}\ \text{m s}^{-1}}}$$

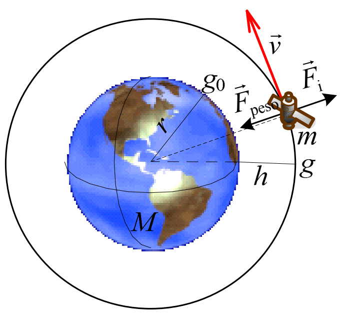
16.- Deséxase poñer en órbita un satélite artificial a unha altura de 300 km sobre a superficie terrestre. Calcula: a) a velocidade orbital que se lle ten que comunicar ó satélite; b) o período de rotación: (Datos: G = 6,67 · 10^{-11} N m^2 kg^{-2}, R_T = 6378 km, M_T = 5,98 · 10^{24} kg). (*Xuño 99*).

Solución:

a) Para un observador situado no satélite (sistema de referencia non inercial) resulta que:

$$\vec{F}_{\text{peso}} + \vec{F}_{\text{inercia}} = \vec{0} \rightarrow F_{\text{peso}} = F_{\text{inercia}} \rightarrow m\,g = m\,\frac{v^2}{r+h} \rightarrow v = \sqrt{g\,(r+h)}$$

$$\left.\begin{aligned} &v = \sqrt{g\,(r+h)} \\ &g = \frac{G\,M}{(r+h)^2} \end{aligned}\right\} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G\,M}{(r+h)}}$$



$$v = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{6378\cdot 10^3 + 300\cdot 10^3}} \rightarrow \boxed{\boxed{v = 7728{,}4\ \text{m s}^{-1}}}$$

b)

$$\left.\begin{aligned} &T = \frac{2\,\pi}{\omega} \\ &v = \omega\,(r+h) \end{aligned}\right\} \rightarrow T = \frac{2\,\pi\,(r+h)}{v}$$

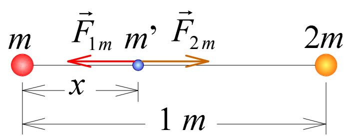
$$T = \frac{2\,\pi\left(6378\cdot 10^3 + 300\cdot 10^3\right)}{7728{,}4} \rightarrow \boxed{\boxed{T = 5426{,}5\ \text{s}}}$$

17.- Dous puntos materiais de masas m e $2\,m$ respectivamente, atópanse a unha distancia de 1 m. Busca o punto onde unha terceira masa, a) estaría en equilibrio, b) sentiría iguais forzas (módulo, dirección e sentido) por parte das dúas primeiras. (*Set. 98*).

Solución:

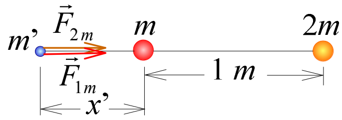
a) Equilibrio: $\vec{F}_{\text{neta}} = \vec{0}$.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \rightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \rightarrow F_1 = F_2 \rightarrow \frac{G\,m\,m'}{x^2} = \frac{G\,2\,m\,m'}{(1-x)^2}$$



$$(1-x)^2 = 2\,x^2 \rightarrow x^2 + 2\,x - 1 = 0 \rightarrow \boxed{\boxed{x}} = \begin{cases} \boxed{\boxed{0{,}41\ \text{m}}} \\ -\cancel{2{,}41}\ \text{m} \end{cases}$$

b) $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$



$$\frac{G\,m\,m'}{x'^2} = \frac{G\,2\,m\,m'}{(x'+1)^2} \rightarrow (x'+1)^2 = 2\,x'^2$$

$$x'^2 - 2\,x' - 1 = 0 \rightarrow \boxed{\boxed{x'}} = \begin{cases} -\cancel{0,41}\ \text{m} \\ \boxed{\boxed{2{,}41\ \text{m}}} \end{cases}$$

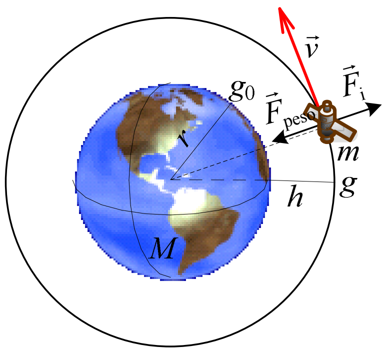
18.- A menor velocidade de xiro dun satélite na Terra, coñecida como primeira velocidade cósmica, é a que se obtería para un raio orbital igual ó raio terrestre r_T. Calcula: a) a primeira velocidade cósmica, b) o período de revolución correspondente. Datos $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}, $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, $r_T = 6{,}38 \cdot 10^6$ m. (*Xuño 98*).

Solución:

a) Para un observador situado no satélite (sistema de referencia non inercial) resulta que:

$$\vec{F}_{\text{peso}} + \vec{F}_{\text{inercia}} = \vec{0} \rightarrow F_{\text{peso}} = F_{\text{inercia}} \rightarrow m\,g = m\,\frac{v^2}{r+h} \rightarrow v = \sqrt{g\,(r+h)}$$

$$\left.\begin{aligned} v &= \sqrt{g\,(r+h)} \\ g &= \frac{G\,M}{(r+h)^2} \end{aligned}\right\} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G\,M}{(r+h)}}$$



$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6{,}38 \cdot 10^6}} \rightarrow \boxed{\boxed{v = 7906{,}8\ \text{m s}^{-1}}}$$

b)

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{2\,\pi}{\omega} \\ \omega &= \frac{v}{(r+h)} \end{aligned}\right\} \rightarrow T = \frac{2\,\pi}{\dfrac{v}{(r+h)}} \rightarrow T = \frac{2\,\pi\,(r+h)}{v}$$

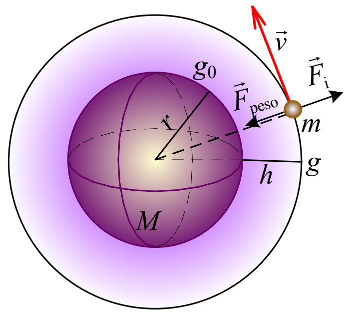
$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6{,}38 \cdot 10^6}{7906{,}8} \rightarrow \boxed{\boxed{T = 5067{,}3\ \text{s}}}$$

19.- Europa, satélite de Xúpiter, foi descuberto por Galileo en 1610. Sabendo que o raio da órbita que describe é de $6{,}7 \cdot 10^5$ km e o seu período de 3 días, 13 horas e 13 minutos, calcula: a) a velocidade de Europa relativa a Xúpiter, b) a masa de Xúpiter. Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}. (*Set. 97*).

Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{l} v=\omega(r+h) \\ \omega=\dfrac{2\pi}{T} \end{array}\right\} \rightarrow v=\frac{2\pi}{T}(r+h)$$



$$v=\frac{2\pi}{3\cdot 24\cdot 60\cdot 60+13\cdot 60\cdot 60+13\cdot 60}\cdot 6{,}7\cdot 10^5\cdot 10^3$$

$$\boxed{v=13715{,}4\ \mathrm{m\ s^{-1}}}$$

b)

$$\vec{F}_{\text{peso}}+\vec{F}_{\text{inercia}}=\vec{0} \rightarrow F_{\text{peso}}=F_{\text{inercia}}$$

$$m\,g=m\,\frac{v^2}{r+h} \rightarrow v=\sqrt{g\,(r+h)}$$

$$\left.\begin{array}{l} v=\sqrt{g\,(r+h)} \\ g=\dfrac{G\,M}{(r+h)^2} \end{array}\right\} \rightarrow v=\sqrt{\frac{G\,M}{(r+h)}} \rightarrow M=\frac{v^2\,(r+h)}{G}$$

$$M=\frac{13715{,}4^2\cdot 6{,}7\cdot 10^8}{6{,}67\cdot 10^{-11}} \rightarrow \boxed{M=1{,}89\cdot 10^{27}\ \mathrm{kg}}$$

20.- Calcula o raio que debería ter a Terra conservando a súa masa, para que a velocidade de escape fose igual á da luz, c = 300000 km s^{-1} (¡estraño furado negro!). b) Ante un colapso deste tipo, variará o período de rotación da Lúa ó redor da Terra? Datos: G = 6,67 · 10^{-11} N m^2 kg^{-2}; r_T = 6,38 · 10^6 m; M_T = 5,98 · 10^{24} kg. (*Xuño 97*).

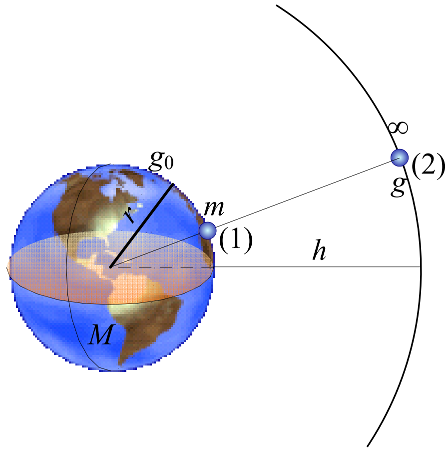
Solución:

a) Como a forza gravitatoria é conservativa, a enerxía mecánica consérvase para calquera punto do campo gravitatorio: $E_{m1}=E_{m2} \quad \rightarrow \quad E_{k1}+E_{p1}=E_{k2}+E_{p2}$.

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + \left(-\frac{G M m}{r} \right) = 0 + 0$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{G M m}{r} \rightarrow r = \frac{2 G M}{v_1^2}$$

$$r = \frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{\left(300000 \cdot 10^3\right)^2} \rightarrow \boxed{r = 8{,}9 \cdot 10^{-3} \text{ m}}$$



O valor do raio calculado anteriormente, para cando $v_{escape} = v_{luz} = c$, coñécese como raio de Schwarzschild, r_S. Un corpo de masa m, neste caso a masa da Terra, e cun raio igual ou inferior a r_S produce unha forza gravitatoria tan grande que ningunha partícula que estea na súa superficie pode escapar. A un corpo con raio igual ou menor que r_S se lle chama **furado negro**, nome que foi proposto por J. A. Wheeler en 1969.

b) O período de rotación da Lúa ó redor da Terra calcúlase da forma:

$$\left. \begin{array}{l} T = \dfrac{2\pi}{\omega} \\ \omega = \dfrac{v}{(r+h)} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} T = \dfrac{2\pi (r+h)}{v} \\ v = \sqrt{\dfrac{G M}{(r+h)}} \end{array} \right\} \rightarrow T = \frac{2\pi \sqrt{(r+h)^3}}{\sqrt{G M}}$$

Se o raio da órbita permanece constante: o que diminúe r auméntao h, de modo que $r+h$ = cte; o período de rotación da Lúa arredor da Terra permanece constante. A órbita da Lúa ó redor da Terra non se ve alterada pola hipotética concentración de masa da Terra: Aínda que esta se converta en puntual, concentrándose no seu centro, non se altera a interacción gravitatoria Lúa-Terra e, polo tanto, tampouco se alteran os efectos dinámicos ou de movemento da Lúa.

En consecuencia, **non haberá modificación algunha no período de revolución da Lúa ó redor da Terra**.

21.- A distancia Terra-Lúa é aproximadamente 60 r_T, sendo r_T o raio da Terra, igual a 6400 km. Calcula: a) a velocidade lineal da Lúa no seu movemento ó redor da Terra e b) o correspondente período de rotación en días. Datos: G = 6,67 · 10^{-11} N m^2 kg^{-2}, M_T = 5,98 · 10^{24} kg. (*Set. 96*).

Solución:

a) Para un observador situado na Lúa (sistema de referencia non inercial) resulta que:

Tema 3. CAMPO ELÉCTRICO

EXERCICIOS (Cuestións)

1.- Mapa conceptual dos contidos do tema.

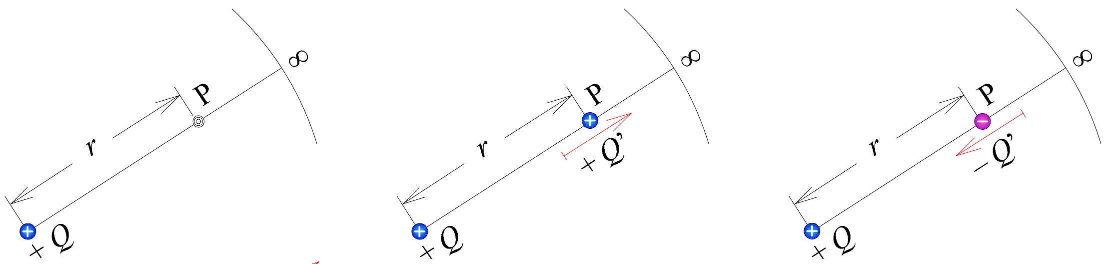
Solución:

Ver páxina 129 do texto "Física" de 2º de Bacharelato, Ed. Baía.

2.- Cal é o sentido (crecente ou decrecente) de potencial que segue de forma espontánea unha carga positiva abandonada nun campo eléctrico? E se a carga abandonada é negativa?

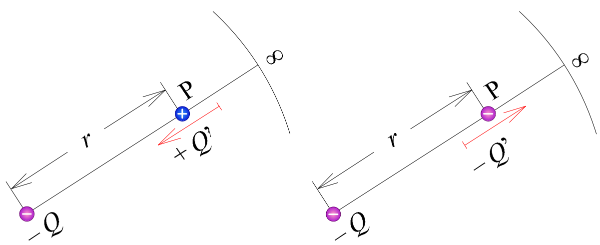
Solución:

Supoñamos que o campo eléctrico é creado por unha carga puntual positiva, $+Q$. Esta carga crea un campo eléctrico no que aparecen distintos valores de potencial, V, que diminúen co aumento da distancia, r, entre a carga Q e o punto P onde o calculamos: $V_P = \frac{k\,Q}{r}$. Unha segunda carga positiva, Q', abandonada nun punto do campo eléctrico creado por $+Q$, é repelida, desprazándose cara ó infinito; é dicir: cara a **potenciais decrecentes**.



(A frecha sinala a dirección e o sentido do desprazamento da carga Q')

Se a carga Q', abandonada no campo eléctrico creado pola carga $+Q$, é negativa, é atraída por Q, desprazándose espontaneamente cara a zonas de **potenciais crecentes**.



Se o campo eléctrico é creado por unha carga puntual negativa, $-Q$, o potencial que esta carga crea é negativo e aumenta coa distancia, r, que hai entre a carga Q creadora de campo e o punto onde o calculamos: $V_P = -\frac{k\,Q}{r}$ alcanzando o valor máximo no infinito, que é nulo. Unha segunda carga eléctrica positiva, $+Q'$, abandonada nun punto do campo eléctrico creado por $-Q$, é atraída por esta carga, desprazándose cara a ela; é dicir: desprázase espontaneamente cara a **potenciais decrecentes**. Se a carga Q' abandonada no campo creado pola carga $-Q$ é negativa, séntese repelida por esta, desprazándose espontaneamente cara ó infinito: cara a **potenciais crecentes**.

En resumo diremos que: As cargas positivas desprázanse espontaneamente das zonas de máis cara ás de menos potencial e as cargas negativas fanno das zonas de menos cara ás de máis potencial.

3.- Razoa por que o campo electrostático é conservativo. (*Selectividade COU; set. 99*).

Solución:

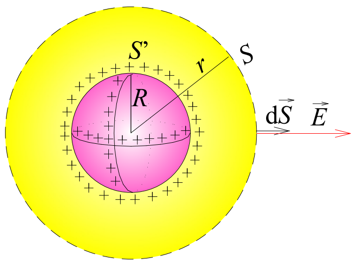
A forza eléctrica do campo electrostático creado por unha carga puntual é central, pasando a súa liña de acción por un mesmo punto fixo, chamado centro de forzas. E sabemos que o traballo desenvolto por unha forza central entre dous puntos soamente depende da posición destes, e non do camiño ó longo do cal se realiza, e estes feitos son característicos dun campo de forzas conservativo.

En función do potencial eléctrico, o traballo feito pola forza electrostática cando unha carga eléctrica Q' se despraza desde un punto A, de potencial V_A, a outro B, de potencial V_B, vén dado pola expresión: $W_A^B = -Q'(V_B - V_A)$. Nela vemos que o traballo depende dos puntos de partida e de chegada entre os cales se desenvolve, sendo independente do camiño seguido: característica que corresponde ás forzas conservativas. Se o punto de chegada coincide co que partida (ciclo) o traballo é nulo: $W_A^A = -Q'(V_A - V_A) = 0$, como corresponde ó traballo das forzas conservativas.

4.- Unha esfera maciza condutora posúe unha certa carga eléctrica: canto vale o campo e o potencial electrostático para puntos do exterior e do interior da esfera? Razoa a resposta. (*Selectividade COU; set. 98*).

Solución:

Para un punto exterior á esfera condutora, situado á distancia r do seu centro, a intensidade de campo eléctrico, $\vec{E}$, como todo vector, consta de módulo, dirección e sentido. Empezamos estudando o seu módulo, para o que:



1º: Trazamos unha superficie gaussiana, que pase polo punto onde queremos coñecer o campo $\vec{E}$ e que en calquera punto desa superficie o seu valor numérico sexa constante: unha esfera.

2º: Calculamos o fluxo do vector $\vec{E}$, que atravesa a superficie anteriormente trazada:

$$\Phi = \int_{S \text{ de Gauss}} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_{S \text{ da esfera}} E\,\mathrm{d}S \cos 0^\circ = E \int_S \mathrm{d}S = E\,S$$ [1]

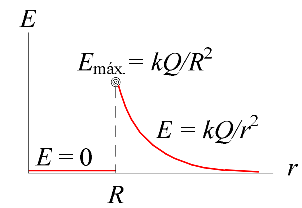
[1]

3º: Aplicamos o teorema de Gauss:

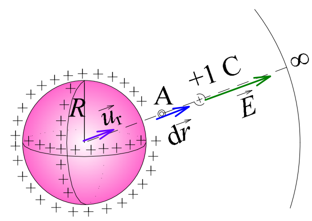
$$\left.\begin{array}{l}\Phi=\dfrac{Q}{\varepsilon}\\ \Phi=E\cdot S\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{l}E\cdot S=\dfrac{Q}{\varepsilon}\\ S=4\cdot\pi\cdot r^2\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{l}E=\dfrac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot r^2}\\ k=\dfrac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\end{array}\right\}\rightarrow E=k\ \dfrac{Q}{r^2}$$

A dirección é a do raio da esfera que teña por liña de acción a recta que pasa polo punto onde queiramos coñecer $\vec{E}$ e o seu sentido é cara ó infinito, se a carga da esfera é positiva, ou cara ó centro da esfera, se a carga é negativa.

Resulta que o campo $\vec{E}$ creado por unha carga Q, distribuída sobre unha esfera condutora en equilibrio electrostático, nun punto exterior a ela, é igual ó campo creado por esa mesma carga se fose puntual e estivese situada no centro da esfera. En función da distancia, a súa representación gráfica é a indicada na figura adxunta.



Facemos agora o estudo do potencial eléctrico para un punto exterior á esfera condutora, situado á distancia r do seu centro, considerando que o seu valor no infinito é nulo:



$$\int_r^\infty \mathrm{d}V=-\int_r^\infty \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r}\ \rightarrow\ 0-V_r=-\int_r^\infty \vec{E}_{\text{exterior}}\,\mathrm{d}\vec{r}$$

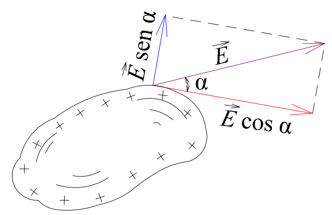
$$V_r=\int_r^\infty E_{\text{exterior}}\,\mathrm{d}r=\int_r^\infty \frac{k\cdot Q}{r^2}\cdot\mathrm{d}r=\left(-\frac{k\cdot Q}{r}\right)_r^\infty=\frac{k\,Q}{r}$$

Resulta que o potencial eléctrico, V, creado por unha carga Q distribuída sobre unha esfera condutora en equilibrio electrostático nun punto exterior a ela, é igual ó potencial creado por esa mesma carga se fose puntual e estivera situada no centro da esfera.

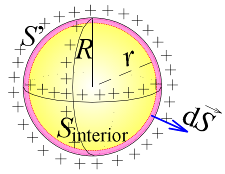
Nun condutor cargado coas cargas en equilibrio electrostático, estas están distribuídas uniformemente pola súa superficie: As cargas repélense e de estar no interior do condutor desprazaríanse ata que a distancia fose máxima; isto é: ata a súa superficie.

Ó situarse as cargas sobre a superficie do condutor, a carga encerrada por unha superficie interior é nula e recordando o concepto de fluxo e o teorema de Gauss resulta:

Nun punto exterior infinitesimalmente próximo á superficie dun conductor cargado en equilibrio, a intensidade de campo eléctrico é perpendicular á superficie. Se o campo non fose perpendicular, senón oblicuo, podémolo descompoñer en dous: un tanxente á superficie do conductor e outro perpendicular a ela. O compoñente tanxente á superficie faría mover as cargas sobre a superficie do conductor, en contra da hipótese inicial de que o conductor estaba en equilibrio.



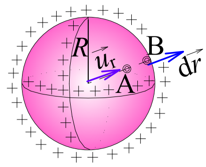
$$\left.\begin{array}{l}\Phi = \oiint_{S\ \text{esfera}} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} \\ \Phi = \dfrac{Q}{\varepsilon}\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}\oiint_{S\ \text{interior}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{Q_{\text{interior}}}{\varepsilon} \\ Q_{\text{interior}} = 0\end{array}\right\} \rightarrow E = 0$$



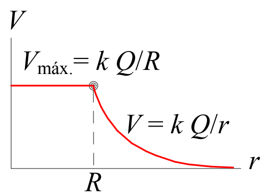
O resultado é que o campo eléctrico, no interior dun condutor cargado en equilibrio electrostático, é nulo.

Como xa se indicou máis arriba, a relación que hai entre a intensidade do campo eléctrico, $\vec{E}$, e o potencial eléctrico, V, é: $\mathrm{d}V = -\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$. E para un punto interior da esfera condutora, o potencial eléctrico é constante: $\mathrm{d}V = -\vec{0}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \vec{0}\cdot V = \text{cte}$. Trátase dun volume equipotencial que en función da carga Q e do raio da esfera vén dado pola expresión:

$$\int_{r_A}^{r_B}\mathrm{d}V = -\int_{r_A}^{r_B}\vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} \rightarrow V_{r_B} - V_{r_A} = 0 \rightarrow V_{r_A} = V_{r_B} = \frac{k\,Q}{r_B} = \frac{k\,Q}{R}$$



A este mesmo resultado chegamos recordando que o potencial eléctrico é continuo e, como para puntos exteriores próximos á superficie da esfera ($r = R$) vale $V_{\text{exterior}} = \dfrac{k\,Q}{R}$; para puntos interiores, tamén achegados á superficie, ten o mesmo valor: $V_{\text{interior}} = \dfrac{k\,Q}{R}$, valor de potencial que é constante no interior da esfera.



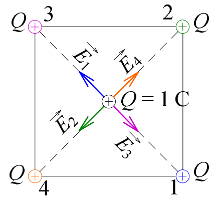
A representación gráfica do potencial creado por unha esfera condutora cargada, en equilibrio electrostático, é a que se indica na figura adxunta.

5.- É posible que nun punto do espazo a intensidade do campo eléctrico sexa nula e o potencial eléctrico teña un valor finito distinto de cero? E que os dous sexan nulos? Razoa as respostas. (*Selectividade COU*; *xuño 98*).

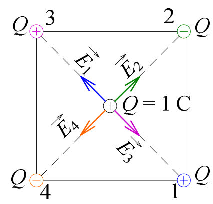
Solución:

Empezamos recordando a relación que hai entre a intensidade do campo eléctrico, , e o potencial eléctrico, V:

$$\left.\begin{array}{r}\mathrm{d}V = -\vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} \rightarrow \int\mathrm{d}V = -\int\vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} \\ \vec{E} = \vec{0}\end{array}\right\} \rightarrow V = \text{cte.}$$



Este resultado indícanos que se nunha rexión do espazo a intensidade de campo eléctrico é nula, o potencial eléctrico non varía, sendo constante, podendo ter un valor distinto de cero. Un exemplo é o dunha esfera metálica de raio R, cargada cunha carga Q en equilibrio electrostático: a intensidade de campo eléctrico no seu interior é nula e o potencial constante, sendo o seu valor o que vén dado pola expresión: $V_{\text{interior}} = \dfrac{k\,Q}{R}$. Igual situación ten lugar no centro dun cadrado, que posúe cargas iguais en cada un dos seus vértices: $\vec{E}_{\text{centro}} = \vec{0}$ e $V_{\text{centro}} \neq 0$.



$$\vec{E}_{\text{centro}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = \vec{0}$$

$$V_{\text{centro}} = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 > 0$$

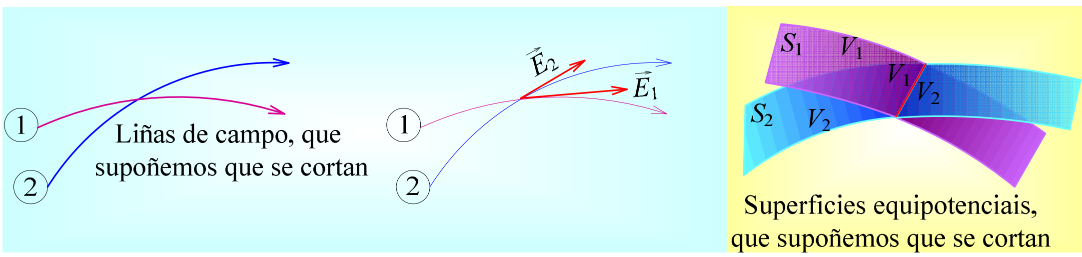
Polo tanto, a contestación á primeira pregunta é de que a situación presentada si é posible.

A resposta á segunda pregunta é tamén afirmativa. Un exemplo pode ser ó do cadrado anterior cando as cargas que están nunha da diagonais do cadrado son de signo contrario ás cargas que están nos extremos da outra diagonal: $\vec{E}_{\text{centro}} = \vec{0}$ e $V_{\text{centro}} = 0$.

6.- Poden cortarse dúas liñas de forza dun campo electrostático? E dúas superficies equipotenciais? Razoa as respostas. (*Selectividade COU*; *set. 97*).

Solución:

A intensidade de campo eléctrico pode representarse graficamente por medio dunhas liñas imaxinarias, chamadas **liñas de forza**, as cales son tanxentes en cada punto á dirección do vector intensidade de campo, asignándolle o mesmo sentido que o do vector $\vec{E}$. En consecuencia, dúas liñas de forza nunca se cortan nun punto. Se isto sucedera, no punto de intersección, o vector intensidade de campo, $\vec{E}$, tería que ser tanxente simultaneamente a ambas liñas, o que significaría dous valores de $\vec{E}$ no mesmo punto; feito que non é posible porque nun punto hai un único valor (principio de superposición): $\vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \neq \vec{E}_1 \neq \vec{E}_2$.



Igual ocorre coas superficies equipotenciais (lugar xeométrico dos puntos do espazo que teñen o mesmo valor de potencial). De cortarse, nos puntos de corte habería dous valores distintos de potencial, situación que tampouco é posible: $V_{\text{total}} = V_1 + V_2 \neq V_1 \neq V_2$.

7.- Xustifica que o potencial eléctrico, *V*, no interior dunha esfera condutora de raio *R*, cargada cunha carga *Q* en equilibrio electrostático, vale *V* = *k*·*Q*/*R*.

Solución:

Nun condutor cargado coas cargas en equilibrio electrostático, estas están distribuídas uniformemente pola súa superficie: As cargas repélense e de estar no interior desprazaríanse ata que a distancia fose máxima; isto é: ata a superficie do condutor.

Ó situarse as cargas sobre a superficie do condutor, a carga encerrada por unha superficie interior é nula e, aplicando o teorema de Gauss, resulta: $\vec{E}_{\text{interior}} = \vec{0}$.

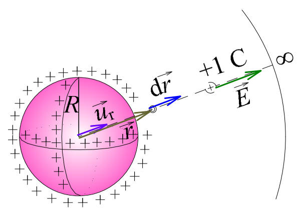
A relación que hai entre a intensidade do campo eléctrico, $\vec{E}$, e o potencial eléctrico, V, é: $\mathrm{d}V = -\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$.

Resulta que para un punto interior da esfera condutora, o potencial eléctrico é constante: $\mathrm{d}V = -\vec{0} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \vec{0} \cdot V = \text{cte}$. Trátase dun volume equipotencial.

Para un punto exterior á esfera condutora, situado á distancia r do seu centro, a intensidade de campo eléctrico, $\vec{E}$, vén dada pola expresión: $\vec{E} = \frac{k\,Q}{r^2}\vec{u}_r$ e o potencial, considerando que o seu valor é nulo no infinito, vale:

$$\int_r^\infty \mathrm{d}V = -\int_r^\infty \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} \rightarrow V_r = \int_r^\infty \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_r^\infty E\,\mathrm{d}r$$

$$V_r = \int_r^\infty \frac{k \cdot Q}{r^2} \cdot \mathrm{d}r = \left(-\frac{k \cdot Q}{r}\right)_r^\infty = \frac{k\,Q}{r}$$



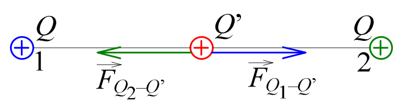
Para puntos da superficie da esfera, r coincide con R e a expresión anterior toma a forma: $V = \frac{k\,Q}{R}$. Este potencial da superficie da esfera coincide co do seu interior, xa que é constante en toda ela, obtendo a expresión que queriamos xustificar.

8.- Se no punto medio do segmento que une dúas cargas eléctricas puntuais e iguais, *Q*, colocamos unha terceira carga, *Q'*, tamén puntual, contesta razoadamente se para calquera valor das cargas a terceira carga estará en equilibrio. Haberá algún valor das cargas para o cal o sistema das tres cargas estea en equilibrio?

Solución:

Dise que un corpo puntual está en equilibrio cando está en repouso ou en movemento rectilíneo e uniforme, situacións que teñen lugar cando a resultante das forzas que actúan sobre el é nula (primeira lei de Newton).

As forzas que actúan sobre a carga Q' son as indicadas na figura: $\vec{F}_{Q_1-Q'}$ e $\vec{F}_{Q_2-Q'}$, que son de igual módulo e dirección e de sentido contrario, dando unha resultante nula, estando, en consecuencia, a carga Q' en equilibrio.

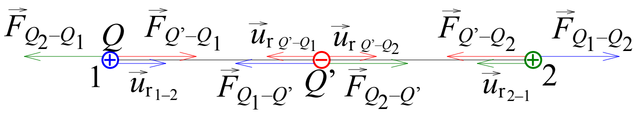


Estudamos agora a posibilidade de que as tres cargas estean en equilibrio. Supoñemos que as cargas Q (1 e 2) son positivas e a Q' é negativa. Sobre a carga 1 actúan:

· A forza repulsiva que a carga 2 exerce sobre ela: $\vec{F}_{Q_2-Q_1} = \dfrac{k\,Q_1\,Q_2}{r^2_{2-1}}\,\vec{u}_{r_{2-1}}$.

· A forza atractiva que a carga Q' exerce sobre ela: $\vec{F}_{Q'-Q_1} = -\dfrac{k\,Q_1\,Q'}{\left(\dfrac{r_{2-1}}{2}\right)^2}\,\vec{u}_{r_{Q'-Q1}}$.

Estas forzas, que son de igual dirección e de sentido contrario, anúlanse cando sexan de igual módulo: $F_{Q_2-Q_1} = F_{Q'-Q_1}$; situación que se dá cando $Q = 4\,Q'$:



$$F_{Q_2-Q_1} = F_{Q'-Q_1} \;\rightarrow\; \frac{k\,Q_1\,Q_2}{r^2_{2-1}} = \frac{k\,Q_1\,Q'}{\left(\dfrac{r_{2-1}}{2}\right)^2} \;\rightarrow\; Q = 4\,Q'$$

Igual ocorre para a carga 2, estando as cargas Q (1 e 2) en equilibrio para a condición de $Q = 4\,Q'$.

Para a carga Q' vale o comentario feito na resposta á primeira parte da cuestión.

9.- O electrón-voltio non é unha unidade de potencial eléctrico, senón de enerxía. Defínese como a enerxía que adquire 1 electrón cando se somete á diferenza de potencial de 1 voltio. Obtén a súa equivalencia coa unidade de enerxía no SI. Dato: $Q_{e-} = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ C.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} E = 1\,\text{eV} \\ Q_{e^-} = 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{C} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} E = 1\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{CV} \\ 1\,\text{CV} = 1\,\text{J} \end{array}\right\} \rightarrow E = 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

10.- O fluxo do campo eléctrico a través dunha superficie pechada que envolve varias cargas, depende da posición que ocupen as cargas dentro da superficie considerada?

Solución:

Polo teorema de Gauss sabemos que o fluxo do campo eléctrico, Φ, que atravesa unha superficie pechada S é igual ó cociente entre a carga eléctrica total, Q, encerrada dentro da superficie e a permitividade do medio na que se encontran, ε:

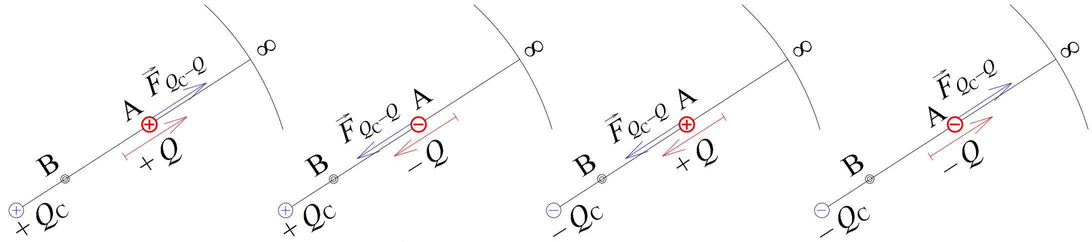
$$\Phi_S = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \cdots = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} Q_i}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon}$$

sendo n o número de cargas. En consecuencia, o fluxo é independente da posición que ocupan as cargas Q_i dentro de S.

11.- Estuda como é, positivo ou negativo, o traballo desenvolto pola forza eléctrica do campo cando unha carga *Q* se despraza espontaneamente.

Solución:

Segundo o signo da carga creadora do campo eléctrico, Q_C, e o da carga Q que se despraza por efecto da forza eléctrica do campo, as situacións que se poden presentar son as indicadas no seguinte gráfico:



(A frecha  sinala a dirección e o sentido do desprazamento da carga Q por acción da forza do campo)

Cando a carga creadora do campo, Q_C, e a que se move, Q, son positivas, esta é repelida pola forza eléctrica do campo, desprazándose cara ó infinito, indo desde puntos de máis potencial cara ós de menos potencial, resultando o traballo positivo:

$$\left.\begin{array}{r} W_A^{\infty} = -Q\,\Delta V = -Q\left(V_{\infty} - V_A\right) \\ V_{\infty} < V_A \\ Q > 0 \end{array}\right\} \rightarrow W_A^{\infty} > 0$$

Cando Q_C é positiva e Q é negativa, Q é atraída por Q_C, desprazándose desde puntos de menos potencial cara ós de máis potencial:

$$\left.\begin{array}{r} W_A^{B} = -Q\,\Delta V = -Q\left(V_B - V_A\right) \\ V_B > V_A \\ Q < 0 \end{array}\right\} \rightarrow W_A^{B} > 0$$

Cando Q_C é negativa e Q é positiva, esta segunda carga é atraída por Q_C, desprazándose desde puntos de máis potencial cara ós de menos potencial:

$$\left.\begin{array}{r} W_A^{B} = -Q\,\Delta V = -Q\left(V_B - V_A\right) \\ V_B < V_A \\ Q > 0 \end{array}\right\} \rightarrow W_A^{B} > 0$$

Cando Q_C e Q son negativas, Q é repelida por Q_C, desprazándose desde puntos de menos potencial cara ós de máis potencial:

$$\left.\begin{array}{r} W_A^{\infty} = -Q\,\Delta V = -Q\left(V_{\infty} - V_A\right) \\ V_{\infty} > V_A \\ Q < 0 \end{array}\right\} \rightarrow W_A^{\infty} > 0$$

Tamén podemos razoar a resposta a partir da definición de traballo: $W_A^{A'} = \int_A^{A'} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}$.

Como para todos os casos, a forza eléctrica do campo eléctrico sobre a carga Q e o desprazamento que esta carga experimenta de forma espontánea teñen a mesma dirección e sentido, o ángulo que forman estes vectores é de 0º e o traballo desenvolto é sempre positivo:

$$W_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B\ ou\ }\infty} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B\ ou\ }\infty} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B\ ou\ }\infty} F\,\mathrm{d}r > 0$$

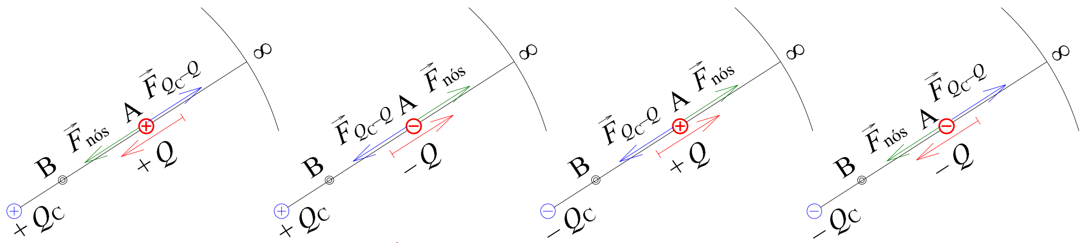
En resumo podemos dicir que cando unha carga puntual Q (positiva ou negativa) se despraza espontaneamente pola forza do campo eléctrico que unha carga Q_{C} crea, a forza eléctrica desenvolve un traballo que é sempre positivo.

12.- Cando o traballo feito pola forza eléctrica do campo é negativo, a carga que se despraza faino de forma espontánea ou por acción dunha forza exterior á do campo eléctrico?

Solución:

Na cuestión anterior, se a carga Q se despraza en sentido contrario ó alí indicado, o signo do traballo feito pola forza do campo é negativo e Q non se despraza de forma espontánea, senón que o fará por acción dunha forza exterior á do campo eléctrico.

$$W_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B\ ou\ }\infty} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B\ ou\ }\infty} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B\ ou\ }\infty} F\,\mathrm{d}r\cos 180^{\circ} = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B\ ou\ }\infty} F\,\mathrm{d}r \;\rightarrow\; W_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B\ ou\ }\infty} < 0$$

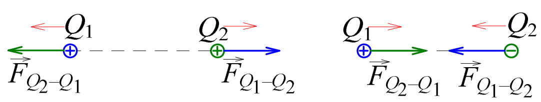


(A frecha sinala a dirección e o sentido do desprazamento da carga Q por acción da forza exterior)

13.- Cando se separan dúas cargas do mesmo signo ou se acercan dúas cargas de signo contrario, na dirección da recta que as une, o traballo feito pola forza do campo é positivo ou negativo?

Solución:

A dirección e o sentido da forza á que está sometida cada carga coincide coa dirección e o sentido do desprazamento que experimentan por acción da forza do campo. Recordando o concepto de traballo resulta que o traballo feito pola forza do campo neste desprazamento (que se produce de forma espontánea) é positivo:



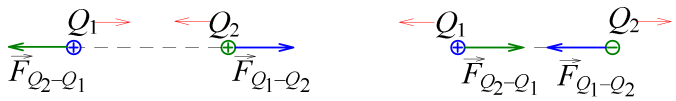
(A frecha, , que está en cada carga, marca o sentido do seu desprazamento)

$$W = \int \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{r} = \int F\, \mathrm{d}r \cos 0^{\mathrm{o}} = \int F\, \mathrm{d}r > 0$$

14.- Se se separan dúas cargas de distinto signo ou se acercan dúas cargas de igual signo, na dirección da recta que as une, o traballo feito pola forza do campo é positivo ou negativo?

Solución:

O sentido da forza eléctrica á que está sometida cada carga é contrario ó sentido do desprazamento que efectúa e o traballo desenvolto pola forza eléctrica do campo é negativo:



(A frecha, →, que está en cada carga, marca o sentido do seu desprazamento, que é debido á forza exterior)

$$W = \int \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{r} = \int F\, \mathrm{d}r \cos 180^{\mathrm{o}} = -\int F\, \mathrm{d}r < 0$$

15.- Tres cargas de 2 µC cada unha están situadas, respectivamente, nos puntos (0,0,0), (1,0,0) e (1,1,1), coordenadas dadas en metros. Razoa como será (igual, maior ou menor) o fluxo do campo eléctrico creado por estas cargas a través dunha superficie esférica de 2 metros de raio con centro o punto (0,0,0) con respecto ó fluxo que atravesa a superficie dun cubo de 3 m de aresta con centro o punto (1,1,1).

Solución:

Polo teorema de Gauss sabemos que o fluxo do campo eléctrico, Φ, que atravesa unha superficie pechada S é igual ó cociente entre a carga eléctrica total encerrada dentro da superficie e a permitividade do medio na que se encontran, ε:

$$\Phi_S = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \cdots = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} Q_i}{\varepsilon}$$

sendo n o número de cargas. En consecuencia, o fluxo é independente da posición que ocupan as cargas Q_i dentro de S.

Como as dúas superficies consideradas encerran as mesmas cargas, o fluxo a través das dúas superficies é o mesmo.

16.- Se o vector campo eléctrico, $\vec{E}$, creado por unha carga puntual Q, a unha distancia d, ten o valor de E_d; para unha distancia de $4d$ correspóndelle o valor de: a) catro veces menos; b) oito veces menos; c) dezaseis veces menos. (Elixe razoadamente a opción que consideres correcta).

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} E_d = \dfrac{k\,Q}{d^2} \\ E_{4d} = \dfrac{k\,Q}{(4\,d)^2} \rightarrow E_{4d} = \dfrac{k\,Q}{16\,d^2} \end{array}\right\} \rightarrow E_{4d} = \frac{E_d}{16}$$, resultado que corresponde ó ítem c).

17.- Se o potencial eléctrico, *V*, creado por unha carga puntual *Q*, a unha distancia *d*, ten o valor de V_d; para unha distancia de 4*d* correspóndelle o valor de: a) catro veces menos; b) oito veces menos; c) dezaseis veces menos. (Elixe razoadamente a opción que consideres correcta).

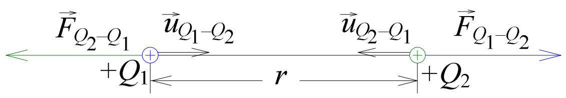
Solución:

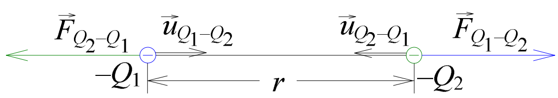
$$\left.\begin{array}{l} V_d = \dfrac{k\,Q}{d} \\ V_{4d} = \dfrac{k\,Q}{4\,d} \end{array}\right\} \rightarrow V_{4d} = \frac{V_d}{4}$$, resultado que corresponde ó ítem a).

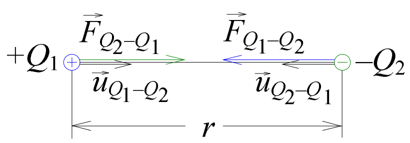
18.- Se dúas cargas eléctricas, Q_1 e Q_2, sitas unha no campo eléctrico da outra, se deixan en liberdade e a velocidade que experimentan se incrementa a medida que se moven; as cargas: a) son necesariamente de igual signo; b) son necesariamente de distinto signo; c) poden ser de calquera signo. (Elixe razoadamente a opción que consideres correcta).

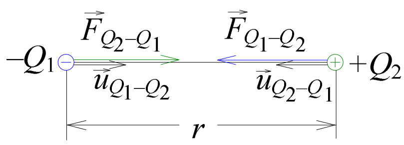
Solución:

Unha carga eléctrica Q_2, sita no campo eléctrico creado pola carga Q_1, está sometida á forza eléctrica $\vec{F}_{Q1-Q2}$. Tamén, sobre a carga Q_1, sita no campo eléctrico da carga Q_2, actúa a forza eléctrica $\vec{F}_{Q2-Q1}$. Estas forzas son as representadas nos gráficos que aparecen a continuación e, segundo se trate de cargas de igual ou de distinto signo, son, respectivamente, repulsivas ou atractivas.









O valor destas forzas, para cargas puntuais, vén dada pola lei de Coulomb: $F_{Q1-Q2} = \dfrac{k\,Q_1\,Q_2}{r^2}$

No momento en que se liberan as cargas, ó estar sometidas a unha forza, póñense en movemento, afastándose no caso de cargas de igual signo e acercándose cando as cargas son de distinto signo. Nas sucesivas posicións que van adquirindo, seguen estando sometidas a novas forzas e, en consecuencia, as cargas seguen estando aceleradas, ganando cada vez máis velocidade, **independentemente de que sexan de igual ou de distinto signo** (ítem c).

19.- Cando unha partícula de masa *m* e carga *Q* se somete a unha diferenza de potencial de ΔV voltios, a velocidade *v* que adquire é: a) directamente proporcional a ΔV; b) directamente proporcional a ΔV^2; c) directamente proporcional a $\sqrt{\Delta V}$. (Elixe razoadamente a opción que consideres correcta).

Solución:

Cando unha carga Q se despraza entre dous puntos cuxa diferenza de potencial é ΔV, o traballo W feito pola forza eléctrica do campo é directamente proporcional a ΔV: $W \propto \Delta V$ ($W = -Q \cdot \Delta V$).

Por outra lado podemos relacionar o traballo W coa velocidade v: $W = \Delta E_k \rightarrow W = \frac{1}{2} m v^2 - 0$.

Coas consideracións anteriores resulta: $\frac{1}{2} m v^2 = -Q\,\Delta V \rightarrow v^2 = -\frac{2\,Q\,\Delta V}{m}$

Se a carga Q é positiva, $Q>0$, a partícula desprázase espontaneamente, ganando velocidade, cando vai das zonas de máis potencial cara ás de menos potencial, sendo $\Delta V<0$, co que resulta: $v^2 = +\frac{2\,Q\,|\Delta V|}{m}$.

A igual resultado se chega se a carga é negativa, $Q<0$. Neste caso a partícula desprázase espontaneamente, ganando velocidade, cando vai das zonas de menos potencial cara ás de máis potencial, polo que $\Delta V > 0$ e $v^2 = +\frac{2|Q|\,\Delta V}{m}$.

En resumo: $v^2 = +\frac{2|Q||\Delta V|}{m} = k\,|\Delta V| \rightarrow v \propto \sqrt{|\Delta V|}$ (Este resultado é o que se corresponde co ítem c).

20.- Estuda se a forza que unha carga puntual *Q* exerce sobre outra carga *Q*', tamén puntual, depende ou non da presenza doutra terceira carga *Q*''.

Solución:

A forza que unha carga puntual Q exerce sobre outra carga Q', $F_{Q\text{-}Q'}$, separadas unha distancia r, vén dada pola lei de Coulomb: $F_{Q-Q'} = \frac{k\,Q\,Q'}{r^2}$, sendo k unha constante que depende do medio en que estean as cargas Q e Q'. Polo tanto, esta forza é independente da presenza dunha terceira carga, Q''. O efecto desta terceira carga sobre a carga Q' é que a forza á que vai estar sometida Q' é a suma vectorial das forzas que sobre ela exercen as cargas Q' e Q'': $\vec{F}_{Q-Q'} + \vec{F}_{Q''-Q'}$ (principio de superposición).

21.- Nunha rexión do espazo hai un sistema de cargas eléctricas, que en conxunto é electricamente neutra. En consecuencia, nesa rexión do espazo, a) non existen liñas de forza; b) as liñas de forza que entran nunha superficie pechada que envolve ás cargas é igual ó número de liñas de forza que saen da devandita superficie; c) o fluxo a través dunha superficie pechada que envolve ás cargas non é nulo debido a que no interior da superficie existen cargas eléctricas. (Elixe razoadamente as opcións que consideres correctas).

Solución:

O campo eléctrico pode representarse graficamente por medio dunhas liñas imaxinarias, chamadas **liñas de forza**, as cales son tanxentes en cada punto á dirección do vector intensidade de campo eléctrico, $\vec{E}$, e asígnaselle o mesmo sentido que o do vector $\vec{E}$.

Dicir que nunha rexión do espazo non existen liñas de forza implica que nesa zona a intensidade de campo eléctrico é nula. E como o feito de que unha zona do espazo sexa electricamente neutra non implica que o vector campo eléctrico sexa nulo (como sucede, por exemplo, para o caso dun dipolo eléctrico) non podemos concluír dicindo que nesa zona non existen liñas de forza.

O número de liñas de forza que atravesan unha superficie é o que se chama fluxo. E polo teorema de Gauss sabemos que o fluxo do campo eléctrico, Φ, que atravesa unha superficie pechada S é igual ó cociente entre a carga eléctrica total encerrada dentro da superficie e a permitividade do medio na que se encontran, ε:

$$\Phi_S = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \cdots = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} Q_i}{\varepsilon}$$

Polo tanto, nunha rexión do espazo na que hai un sistema de cargas que electricamente é neutro, o fluxo que atravesa unha superficie pechada que envolva as cargas é nulo; o que significa que **as liñas de forza que entran na superficie considerada coincide co número de liñas de forza que saen da devandita superficie**.

22.- Se o fluxo do campo eléctrico a través dunha superficie pechada, *S*, é nulo: a) non pode haber corpos cargados no seu interior; b) necesariamente ten que haber carga no interior da superficie, coincidindo a carga total positiva coa total negativa; c) non se ten información suficiente para saber se hai carga no interior da devandita superficie. (Elixe razoadamente a opción que consideres correcta).

Solución:

O fluxo, Φ, do campo eléctrico a través dunha superficie S representa o número de liñas de forza que atravesan a superficie considerada. Segundo o teorema de Gauss, o seu valor vén dado pola expresión: $\Phi_S = \dfrac{Q_1 + Q_2 + \cdots}{\varepsilon}$, sendo Q_1, Q_2, ···, as cargas encerradas dentro de S e ε a permitividade do medio na que estas se encontran.

Polo tanto, que o fluxo a través dunha superficie pechada sexa nulo non implica que no seu interior non existan cargas eléctricas; pero si podemos afirmar que de haber cargas no interior de S, **a carga total positiva coincide coa carga total negativa**.

Como o fluxo pode ser nulo debido a que:

· Non exista carga eléctrica, $Q = 0$, ou

· As cargas eléctricas positivas se compensen coas negativas, de modo que a súa suma sexa nula, $\sum Q_i = 0$,

non se ten información suficiente para saber se hai carga no interior da superficie.

23.- Se no punto P da figura, a intensidade de campo eléctrico, $\vec{E}$, é nula, que se pode dicir acerca do valor numérico (maior, menor ou igual) e do signo (igual ou distinto) das cargas Q_1 e Q_2? Como será o potencial eléctrico (nulo, positivo ou negativo) que estas cargas crean no punto P? Razoa as respostas.

Solución:

Se son varias as cargas eléctricas creadoras do campo eléctrico, neste caso Q_1 e Q_2, cada carga exerce a súa intensidade, $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$, como se estivese soa, sendo a intensidade total, $\vec{E}$, igual á suma vectorial das intensidades individuais. Para que $\vec{E}$ nun punto, neste caso P, sexa nulo, o vector campo eléctrico creado por Q_1, $\vec{E}_1$, hai de ser de igual módulo e dirección e de sentido contrario ó vector campo eléctrico creado por Q_2, $\vec{E}_2$. Isto ten como consecuencia que:

· **As cargas Q_1 e Q_2 han de ser de distinto signo** para que o sentido de $\vec{E}_1$ sexa contrario ó de $\vec{E}_2$, xa que o sentido de $\vec{E}$ creado por unha carga positiva é cara ó infinito e o dunha carga negativa e cara á propia carga creadora do campo.

· En valor absoluto, **a carga Q_1 hai de ser maior que a carga Q_2** para que os valores E_1 e E_2 sexan iguais, xa que a distancia que separa a carga 1 do punto P, r_1, é maior que a distancia que separa a carga 2 de P, r_2:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{k\,Q_1}{r_1^2} = \dfrac{k\,Q_2}{r_2^2} \\ r_1 > r_2 \end{array}\right\} \rightarrow Q_1 > Q_2$$

O potencial eléctrico, V, no punto P é igual á suma dos potenciais que cada unha das cargas individuais crea nese punto: $V = V_1 + V_2$. O valor de V_i obtense coa expresión: $V_i = \dfrac{k\,Q_i}{r_i}$, correspondéndolle un signo positivo ou negativo segundo a carga sexa, respectivamente, positiva ou negativa. Para o caso de que Q_1>0 e Q_2<0 resulta:

$$\left.\begin{array}{l} V = \dfrac{k\,Q_1}{r_1} + \dfrac{k\left(-Q_2\right)}{r_2} \\ E_1 = E_2 \;\rightarrow\; \dfrac{k\,Q_1}{r_1^2} = \dfrac{k\,Q_2}{r_2^2} \;\rightarrow\; Q_1 = \dfrac{Q_2\,r_1^2}{r_2^2} \end{array}\right\} \rightarrow V = \dfrac{k\,\dfrac{Q_2\,r_1^2}{r_2^2}}{r_1} - \dfrac{k\,Q_2}{r_2} \;\rightarrow\; V = \dfrac{k\,Q_2}{r_2^2}\left(r_1 - r_2\right)$$

Como r_1>r_2 resulta que V>0.

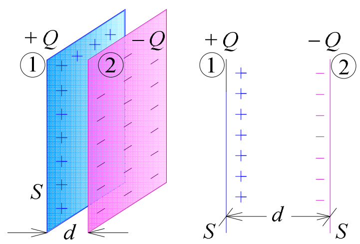
Para o caso de que Q_1< 0 e Q_2> 0 resulta:

$$\left.\begin{array}{l} V = \dfrac{k\,(-Q_1)}{r_1} + \dfrac{k\,Q_2}{r_2} \\ E_1 = E_2 \;\rightarrow\; \dfrac{k\,Q_1}{r_1^2} = \dfrac{k\,Q_2}{r_2^2} \;\rightarrow\; Q_1 = \dfrac{Q_2\,r_1^2}{r_2^2} \end{array}\right\} \rightarrow V = -\dfrac{k\,\dfrac{Q_2\,r_1^2}{r_2^2}}{r_1} + \dfrac{k\,Q_2}{r_2} \;\rightarrow\; V = -\dfrac{k\,Q_2}{r_2^2}\left(r_1 - r_2\right)$$

Como $r_1 > r_2$ resulta que $V < 0$.

Polo tanto, **o potencial eléctrico no punto P será positivo ou negativo**, pero non nulo.

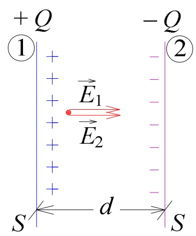
24.- Dúas láminas metálicas planas están colocadas de forma paralela e separadas unha pequena distancia, en comparación coas súas dimensións, tal como se indica na figura. Cando as láminas metálicas están cargadas, respectivamente, cunha carga +*Q* e outra −*Q*, o campo eléctrico no seu interior: a) depende do punto en que se estudie; b) é uniforme; c) é nulo debido a que as cargas son de distinto signo. (Elixe razoadamente a opción que consideres correcta).



Solución:

A intensidade de campo eléctrico, $\vec{E}$, creado por unha lámina metálica de superficie *S* e cargada cunha carga *Q*, estando as cargas en equilibrio electrostático, vén dada pola expresión: $E = \dfrac{Q}{2\,\varepsilon\,S}$ (sempre que $\vec{E}$ se estude nas "proximidades" da lámina). A dirección de $\vec{E}$ é a perpendicular á lámina condutora e o seu sentido é cara ó infinito se a *Q* é positiva e cara á lámina se *Q* é negativa.

Como se trata de dúas láminas metálicas que posúen carga de igual valor e de signo contrario, a intensidade de campo total, $\vec{E}_{\text{total}}$, na rexión do espazo comprendida entre as láminas, é a suma dos vectores intensidade de campo que cada unha delas crea individualmente: $\vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, correspondéndolle un valor de: $E_{\text{total}} = \dfrac{Q}{2\,\varepsilon\,S} + \dfrac{Q}{2\,\varepsilon\,S} \rightarrow E_{\text{total}} = \dfrac{Q}{\varepsilon\,S}$, coa dirección perpendicular ás láminas e co sentido que vai desde a positiva á negativa.

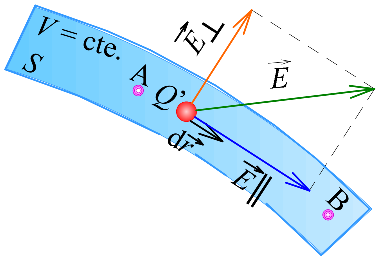


Como $\vec{E}_{\text{total}}$ é constante en módulo, dirección e sentido en todos os puntos comprendidos entre as dúas láminas metálicas, nesta zona do espazo **o campo eléctrico é uniforme** e represéntase por liñas de forza paralelas é equidistantes.

25.- Estuda que dirección teñen as liñas de forza do campo eléctrico nos puntos dunha superficie equipotencial.

Solución:

As liñas de forza do campo eléctrico son, en cada punto, tanxentes ó vector intensidade de campo eléctrico, $\vec{E}$. Que relación garda a dirección do vector campo eléctrico, $\vec{E}$, con respecto ás superficies equipotenciais?



A intensidade de campo eléctrico é sempre perpendicular ás superficies equipotenciais. De non selo, sempre habería un compoñente do campo tanxente á superficie que, no desprazamento dunha carga Q' entre dous puntos, A e B, da superficie equipotencial, desenvolvería un traballo distinto de cero: $W_A^B \neq 0$:

$$\left.\begin{array}{l} W_A^B = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ \vec{F} = Q' \cdot \vec{E} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} W_A^B = \int_A^B Q' \cdot \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ \vec{E} = \vec{E}_{\text{paralelo}} + \vec{E}_{\text{perpendicular}} \end{array}\right\} \rightarrow W_A^B = \int_A^B Q' \cdot \left(\vec{E}_{\text{paralelo}} + \vec{E}_{\text{perpendicular}}\right) \cdot d\vec{r}$$

$$W_A^B = Q' \cdot \int_A^B E_{\text{paralelo}} \cdot dr \cdot \cos 0^\circ + Q' \cdot \int_A^B E_{\text{perpendicular}} \cdot dr \cdot \cos 90^\circ$$

$$W_A^B = Q' \cdot \int_A^B E_{\text{paralelo}} \cdot dr \rightarrow W_A^B \neq 0$$

Como sabemos que o traballo feito pola forza eléctrica do campo para desprazar unha carga Q' entre dous puntos dunha superficie equipotencial é nulo: $W_A^B = -Q' \Delta V = -Q \cdot (V_B - V_A) = -Q' \cdot 0 = 0$, temos que concluír dicindo que o vector campo eléctrico é perpendicular ás superficies equipotenciais. En consecuencia, **as liñas de forza**, que en cada punto son tanxentes ó vector campo eléctrico, **son perpendiculares as superficies equipotenciais**.

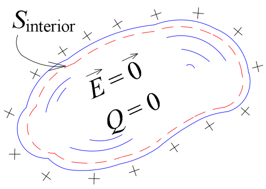
26.- Estuda se a superficie dun condutor, que posúe unha carga *Q* en equilibrio electrostático, é unha superficie equipotencial.

Solución:

Nun condutor cargado e en equilibrio electrostático, as cargas están distribuídas uniformemente pola súa superficie: As cargas repélense e de estar no interior desprazaríanse ata que a distancia fose máxima; isto é: ata a superficie do condutor.

Ó situarse as cargas sobre a superficie, a carga encerrada por unha superficie interior á do condutor é nula e, aplicando o teorema de Gauss, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \Phi = \oint_{S\ \text{interior}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ \Phi = \dfrac{Q}{\varepsilon} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \oint_{S\ \text{interior}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \dfrac{Q_{\text{interior}}}{\varepsilon} \\ Q_{\text{interior}} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow E = 0$$



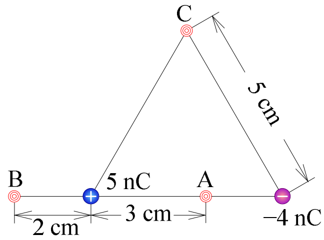
O resultado é que o campo eléctrico, no interior dun condutor cargado en equilibrio electrostático, é nulo.

A relación que hai entre a intensidade do campo eléctrico, $\vec{E}$, e o potencial eléctrico, *V*, é: $\mathrm{d}V = -\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$. Resulta que para un punto interior do condutor, o potencial eléctrico é constante: $\mathrm{d}V = -\vec{0} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \vec{0} \cdot V = \text{cte.}$: Trátase dun volume equipotencial.

Como o potencial é continuo, o potencial da superficie do condutor coincide co potencial dun punto interior próximo á superficie, sendo constate e, en consecuencia, trátase dunha **superficie equipotencial**.

EXERCICIOS (Problemas)

1.- Dúas cargas, unha de 5 nC e outra de −4 nC, están situadas no baleiro nos vértices dun triángulo equilátero de 5 cm de lado. Acha:



a) Acha o potencial eléctrico nos puntos A, B e C, situados tal como se indica na figura.

b) Acha o traballo feito pola forza eléctrica do campo para trasladar unha carga puntual de +2 nC desde A ata B e desde C ata A.

c) A carga de 2 nC desprázase espontaneamente desde A ata B e desde C ata A ou desprázase por acción dunha forza exterior á do campo?

Solución:

a) O potencial creado por un sistema de cargas (neste caso dúas) obtense sumando alxebraicamente o potencial debido a cada unha das cargas individuais:

$$V=\sum_{\mathrm{i}} V_{\mathrm{i}}=k\sum_{\mathrm{i}}\frac{Q_{\mathrm{i}}}{r_{\mathrm{i}}}\ \left(\text{sendo } r_{\mathrm{i}}\neq 0\right).$$

V_{i} é positivo ou negativo, segundo que a carga que crea o campo sexa positiva ou negativa, respectivamente.

$$V_{\mathrm{A}}=9\cdot 10^{9}\left(\frac{5\cdot 10^{-9}}{3\cdot 10^{-2}}-\frac{4\cdot 10^{-9}}{2\cdot 10^{-2}}\right)\rightarrow \boxed{V_{\mathrm{A}}=-300\ \mathrm{V}}$$

$$V_{\mathrm{B}}=9\cdot 10^{9}\left(\frac{5\cdot 10^{-9}}{2\cdot 10^{-2}}-\frac{4\cdot 10^{-9}}{7\cdot 10^{-2}}\right)\rightarrow \boxed{V_{\mathrm{B}}=1736\ \mathrm{V}}$$

$$V_{\mathrm{C}}=9\cdot 10^{9}\left(\frac{5\cdot 10^{-9}}{5\cdot 10^{-2}}-\frac{4\cdot 10^{-9}}{5\cdot 10^{-2}}\right)\rightarrow \boxed{V_{\mathrm{C}}=180\ \mathrm{V}}$$

b)

$$W_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}=-\Delta E_{\mathrm{p}}=-\left(E_{\mathrm{p\,B}}-E_{\mathrm{p\,A}}\right)=-Q'\left(V_{\mathrm{B}}-V_{\mathrm{A}}\right)$$

$$W_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}=-2\cdot 10^{-9}\cdot\left(1736-(-300)\right)\ \rightarrow\ W_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}=-\boxed{4{,}07\cdot 10^{-6}\ \mathrm{J}}$$

$$W_{\mathrm{C}}^{\mathrm{A}}=-Q'\left(V_{\mathrm{A}}-V_{\mathrm{C}}\right)=-2\cdot 10^{-9}\cdot\left((-300)-180\right)\ \rightarrow\ \boxed{W_{\mathrm{C}}^{\mathrm{A}}=9{,}60\cdot 10^{-7}\ \mathrm{J}}$$

c) $W_{\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}}<0 \Rightarrow$ o traballo feito pola forza eléctrica do campo é **N**egativo e a carga desprázase por acción dunha forza exterior que **N**ós facemos en contra da forza do campo. Tamén se pode facer esta argumentación vendo que o potencial en A (V_{A} = −300 V) é menor que o potencial en B (V_{B} = 1736 V) e como as cargas positivas van espontaneamente no sentido de potenciais decrecentes, para ir de A a B, a carga desprázase por acción dunha forza exterior.

$W_{C \to A}>0 \Rightarrow$ o traballo é **PO**sitivo e é a propia forza do cam**PO** a que fai desprazar a carga desde o punto C ata o A.

2.- En dous dos vértices dun triángulo equilátero da lado *l* = 6 cm encóntrase unha carga *Q* = 10⁻⁶ C, e no terceiro vértice unha carga *Q*' = –2 *Q* = –2·10⁻⁶ C. Considerando que o medio é o baleiro, calcula:

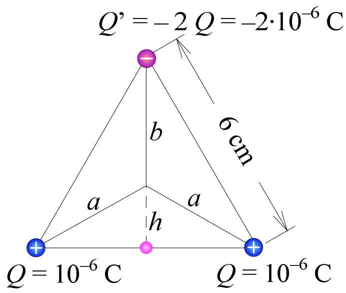
a) O potencial no punto medio do lado do triángulo en que están as dúas cargas *Q*.

b) O punto, sobre a altura do triángulo que pasa polo vértice no que está a carga *Q*', no que o potencial é cero.

Solución:

a)

$$V=\sum_{i=1}^{i=3} V_i = k\sum_{i=1}^{i=3}\frac{Q_i}{r_i}\ \left(\text{sendo } r_i \neq 0\right)$$



$$V=\frac{9\cdot10^9\cdot10^{-6}}{3\cdot10^{-2}}+\frac{9\cdot10^9\cdot10^{-6}}{3\cdot10^{-2}}+\frac{9\cdot10^9\cdot\left(-2\cdot10^{-6}\right)}{\sqrt{6^2-3^2}\cdot10^{-2}}$$

$$\boxed{V=2{,}5\cdot10^5\ \text{V}}$$

b)

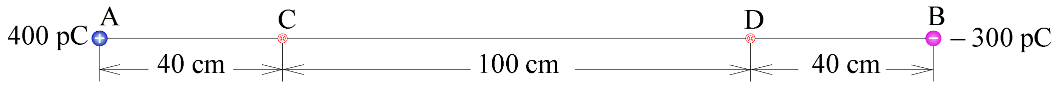
$$\left.\begin{array}{l} V=2\cdot\dfrac{9\cdot10^9\cdot10^{-6}}{a}+\dfrac{9\cdot10^9\cdot\left(-2\cdot10^{-6}\right)}{b} \\ \\ V=0 \end{array}\right\} \to 2\cdot\frac{9\cdot10^9\cdot10^{-6}}{a}=\frac{9\cdot10^9\cdot2\cdot10^{-6}}{b} \to a=b$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2=h^2+\left(3\cdot10^{-2}\right)^2 \to a^2=h^2+9\cdot10^{-4} \\ \\ \left.\begin{array}{l} h=\sqrt{\left(6^2-3^2\right)}\cdot10^{-2}-b \\ b\ =\ a \end{array}\right\} \to h=10^{-2}\cdot\sqrt{27}-a \end{array}\right\} \to h=\frac{27\cdot10^{-4}-\ 9\cdot10^{-4}}{2\cdot10^{-2}\cdot\sqrt{27}} \to \boxed{h=\sqrt{3}\cdot10^{-2}\ \text{m}}$$

A igual resultado chegamos se nos damos conta de que ó ser $b = a$, e tratarse dun triángulo equilátero, o punto onde $V = 0$ é o baricentro (que nun triángulo equilátero coincide co ortocentro) do triángulo, sendo a súa distancia ata o vértice 2/3 da mediana (que nun triángulo equilátero coincide coa a altura) e ata o punto medio do lado 1/3 da mediana (da altura):

$$h=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{6^2-3^2}\cdot10^{-2} \to \boxed{h=\sqrt{3}\cdot10^{-2}\ \text{m}}$$

3.- No punto A da figura colócase unha carga de 400 pC e no punto B outra de −300 pC, sendo o medio o baleiro. Se a distancia AB é de 180 cm, calcula o traballo feito pola forza eléctrica do campo cando unha carga de 600 µC vai desde o punto C ata o punto D. A carga desprázase espontaneamente por acción da forza do campo?



Solución:

a) $W_C^D = -Q' \cdot \Delta V = -Q' \cdot (V_D - V_C)$

$W_C^D = -600 \cdot 10^{-6} \cdot (V_D - V_C)$

$V_C = \sum_{i=1}^{i=2} V_i = \frac{k\,Q_A}{r_{AC}} + \frac{k\,Q_B}{r_{BC}}$

$V_C = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 400 \cdot 10^{-12}}{40 \cdot 10^{-2}} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-300) \cdot 10^{-12}}{140 \cdot 10^{-2}} \rightarrow \boxed{V_C = 7{,}07\ \text{V}}$

$V_D = \sum_{i=1}^{i=2} V_i = \frac{k\,Q_A}{r_{AD}} + \frac{k\,Q_B}{r_{BD}}$

$V_D = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 400 \cdot 10^{-12}}{140 \cdot 10^{-2}} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-300) \cdot 10^{-12}}{40 \cdot 10^{-2}} \rightarrow \boxed{V_D = -4{,}18\ \text{V}}$

$W_C^D = -600 \cdot 10^{-6} \cdot (-4{,}18 - 7{,}07) \rightarrow \boxed{W_C^D = 6{,}75 \cdot 10^{-3}\ \text{J}}$

Cando a carga positiva de 600 µC vai desde o punto C ata o D, en termos de potencial vai desde un punto de máis potencial (V_C = 7,07 V) ata outro de menos potencial (V_D = −4,18 V), que é o sentido de potencial que seguen as cargas positivas de forma espontánea, sendo positivo o traballo feito pola forza do campo.

4.- Unha carga de 10^{-2} C está na orixe de coordenadas cartesianas. Calcula:

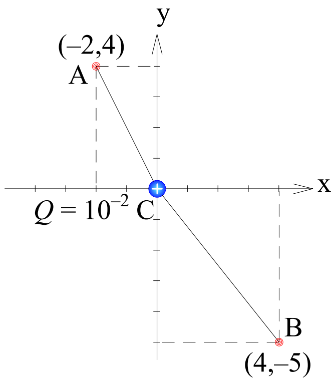
a) Os potenciais eléctricos nos puntos A(−2,4) e B(4,−5).
b) O traballo realizado cando unha carga de 10^{-4} C vai desde A a B.
c) A carga desprázase espontaneamente por acción da forza eléctrica do campo?
Nota: As cargas están no baleiro e as coordenadas danse en metros.

Solución:

a)

$$V = \frac{k\,Q}{r} \;\rightarrow\; V_A = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{2^2 + 4^2}} \;\rightarrow\; \boxed{V_A = 2{,}0 \cdot 10^7 \text{ V}}$$

$$V_B = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{4^2 + 5^2}} \;\rightarrow\; \boxed{V_B = 1{,}4 \cdot 10^7 \text{ V}}$$



b)

$$W_A^B = -\,Q' \cdot \Delta V = -\,Q' \cdot \left(V_B - V_A\right)$$

$$W_A^B = -\,10^{-4} \cdot \left(1{,}4 \cdot 10^7 - 2{,}0 \cdot 10^7\right) \;\rightarrow\; \boxed{W_A^B = 600 \text{ J}}$$

c) O traballo feito pola forza eléctrica do cam**po**, cando a carga de 10^{-4} C vai desde A ata B, é **po**sitivo; o que significa que **a carga se despraza** espontaneamente **por acción da forza do campo**. Se o queremos razoar en termos de potencial eléctrico, a carga de 10^{-4} C vai desde un punto de máis potencial (V_A = 2,0·10^7 V) ata outro de menos potencial (V_B = 1,4·10^7 V), que é o sentido de potencial que de forma espontánea seguen as cargas positivas por acción da forza do campo eléctrico.

5.- Unha carga de 6 µC encóntrase na orixe de coordenadas. Cal é o potencial a unha distancia de 4 m? Que traballo fai a forza eléctrica do campo cando unha carga de −2 µC vai desde o infinito ata ese punto que dista 4 m da orixe de coordenadas? Desprázase espontaneamente por acción da forza do campo? Cal é a enerxía potencial desa carga nese punto?

Solución:

$$V = \frac{k\,Q}{r} \;\rightarrow\; V = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{4} \;\rightarrow\; \boxed{V = 1{,}35 \cdot 10^4 \text{ V}}$$

$$W_\infty^{\text{punto}} = -\,Q' \cdot \Delta V = -\,Q' \cdot \left(V_{\text{punto}} - V_\infty\right)$$

$$W_\infty^{\text{punto}} = -\left(-\,2 \cdot 10^{-6}\right) \cdot \left(1{,}35 \cdot 10^4 - 0\right) \;\rightarrow\; \boxed{W_\infty^{\text{punto}} = 2{,}7 \cdot 10^{-2} \text{ J}}$$

A carga de −2 µC desprázanse desde o infinito de potencial V_∞ = 0 V ata o punto de potencial V_{punto} = 1,35·10^4 V, facéndoo de forma espontánea, xa que as cargas negativas desprázanse espontaneamente debido á forza do campo das zonas de menos potencial cara ás de máis potencial.

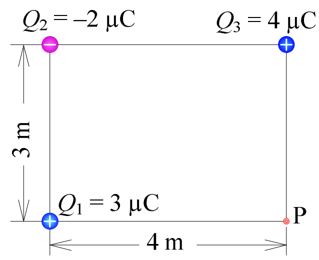
$$E_p = Q' \cdot V \;\rightarrow\; E_p = -\,2 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}35 \cdot 10^4 \;\rightarrow\; \boxed{E_p = -\,2{,}7 \cdot 10^{-2} \text{ J}}$$

6.- Tres cargas eléctricas puntuais están situadas no baleiro nos vértices dun rectángulo como se indica na figura. Calcula:

a) O campo eléctrico creado por cada carga no vértice P.

b) O campo total en P.

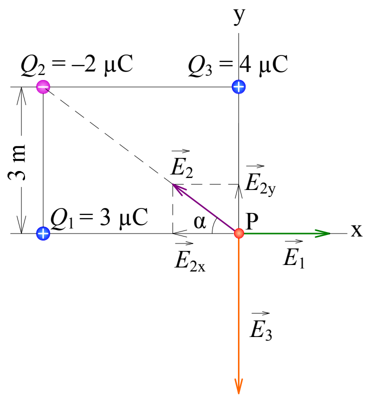
c) O potencial en P.



Solución:

a)

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{i=3} \vec{E}_i \text{, sendo: } E_i = \frac{k\, Q_i}{r_i^2}$$



$$E_1 = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 3\cdot 10^{-6}}{4^2} \rightarrow E_1 = 1687 \text{ N C}^{-1}$$

$$\boxed{\vec{E}_1 = 1687\, \vec{i}\, \left(\text{N C}^{-1}\right)}$$

$$E_2 = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 2\cdot 10^{-6}}{\left(\sqrt{3^2+4^2}\right)^2} \rightarrow E_2 = 720 \text{ N C}^{-1}$$

$$E_{2x} = E_2 \cdot \cos\alpha \rightarrow E_{2x} = 720 \cdot \frac{4}{5} = 576 \text{ N C}^{-1}$$

$$E_{2y} = E_2 \cdot \text{sen}\,\alpha \rightarrow E_{2y} = 720 \cdot \frac{3}{5} = 432 \text{ N C}^{-1}$$

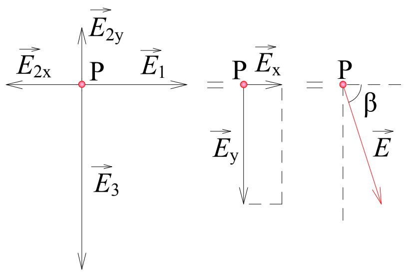
$$\boxed{\vec{E}_2 = -576\, \vec{i} + 432\, \vec{j}\, \left(\text{N C}^{-1}\right)}$$

$$E_3 = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 4\cdot 10^{-6}}{3^2} \rightarrow E_3 = 4000 \text{ N C}^{-1}$$

$$\boxed{\vec{E}_3 = -4000\, \vec{j}\, \left(\text{N C}^{-1}\right)}$$

b) $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$

$$\vec{E} = 1687\, \vec{i} + \left(-576\, \vec{i} + 432\, \vec{j}\right) - 4000\, \vec{j}$$



$$\boxed{\vec{E} = 1111\, \vec{i} - 3568\, \vec{j}\, \left(\text{N C}^{-1}\right)}$$

$$E = \sqrt{1111^2 + 3568^2} = 3737 \text{ N C}^{-1}$$

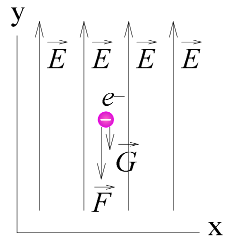
$$\beta = \text{arc tx} \frac{-3568}{1111} \rightarrow \beta = -72{,}7^{\circ}$$

c) $V_P = V_1 + V_2 + V_3$

$$V_P = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 3\cdot 10^{-6}}{4} - \frac{9\cdot 10^9 \cdot 2\cdot 10^{-6}}{5} + \frac{9\cdot 10^9 \cdot 4\cdot 10^{-6}}{3} \rightarrow \boxed{V_P = 15{,}15\cdot 10^3 \text{ V}}$$

7.- Temos un campo eléctrico uniforme dirixido verticalmente de abaixo cara arriba de intensidade 10^4 N C^{-1}. Calcula:

a) A forza exercida por este campo sobre un electrón, comparándoa coa forza do peso do electrón.
b) O tempo que necesita o electrón para percorrer 1 cm se parte do repouso.
c) A velocidade que adquirirá un electrón no campo anterior cando teña percorrido 1 cm partindo do repouso.
d) A enerxía cinética, en unidades de J e de eV, no caso anterior.
Datos: carga do e^- = −1,6·10^{-19} C, m_{e-} = 9,1·10^{-28} g.



Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{l} F = Q\cdot E \;\rightarrow\; F = 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10^{4} \;\rightarrow\; F = 1{,}6\cdot 10^{-15}\ \text{N} \\ \boxed{\vec{F} = -1{,}6\cdot 10^{-15}\ \vec{j}\ (\text{N})} \\ \\ G = m\cdot g \;\rightarrow\; G = 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 9{,}8 \;\rightarrow\; G = 8{,}9\cdot 10^{-30}\ \text{N} \\ \vec{G} = -8{,}9\cdot 10^{-30}\ \vec{j}\ (\text{N}) \end{array}\right\} \rightarrow \frac{\vec{F}}{\vec{G}} = \frac{F}{G} = \frac{1{,}6\cdot 10^{-15}}{8{,}9\cdot 10^{-30}} = \boxed{1{,}8\cdot 10^{14}}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F} = m_{e^-}\cdot \vec{a} \\ \vec{F} = \overrightarrow{\text{cte.}} \\ m_{e^-} = \text{cte.} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{a} = \overrightarrow{\text{cte.}} \Rightarrow \text{m.r.u.v.: } \Delta\vec{r} = \vec{v}_0\, t + \frac{1}{2}\vec{a}\, t^2$$

$$\left.\begin{array}{l} 1\cdot 10^{-2} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 \\ F = m\cdot a \;\rightarrow\; 1{,}6\cdot 10^{-15} = 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot a \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{t = 3{,}4\cdot 10^{-9}\ \text{s}}$$

c)

$$\vec{v}_\text{f} = \vec{v}_0 + \vec{a}\, t \;\rightarrow\; v_\text{f} = \frac{1{,}6\cdot 10^{-15}}{9{,}1\cdot 10^{-31}}\cdot 3{,}4\cdot 10^{-9} \;\rightarrow\; \boxed{v_\text{f} = 5{,}98\cdot 10^{6}\ \text{m s}^{-1}}$$

d)

$$E_\text{k} = \frac{1}{2} m\, v^2 \;\rightarrow\; E_\text{k} = \frac{1}{2}\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot\left(5{,}98\cdot 10^{6}\right)^2 \;\rightarrow\; \boxed{E_\text{k} = 1{,}6\cdot 10^{-17}\ \text{J}}$$

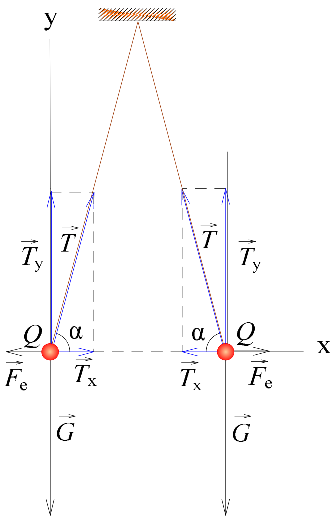
$$\left.\begin{array}{l} 1\,\text{J} = 1\,\text{CV} \\ 1\,e^- = 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{C} \;\rightarrow\; 1\,\text{C} = \frac{1\,e^-}{1{,}6\cdot 10^{-19}} = 6{,}25\cdot 10^{18}\, e^- \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{1\,\text{J} = 6{,}25\cdot 10^{18}\ \text{eV}}$$

$$\left.\begin{array}{l} E_\text{k} = 1{,}6 \cdot 10^{-17}\ \text{J} \\ 1\ \text{J} = 6{,}25 \cdot 10^{18}\ \text{eV} \end{array}\right\} \rightarrow E_\text{k} = 1{,}6 \cdot 10^{-17} \cdot 6{,}25 \cdot 10^{18} \rightarrow \boxed{E_\text{k} = 100\ \text{eV}}$$

8.- Dúas esferas de 100 mg cada unha posúen cargas iguais, estando colgadas dun mesmo punto de sendos fíos de 30 cm de longo cada un. Se debido ás forzas electrostáticas están separadas 1,8 cm, calcula o valor da carga de cada bóla. Datos: g = 9,8 m s^{-2}; k = 9·10^9 N m^2 C^{-2}.

Solución:

As esferas cargadas están en repouso $\Rightarrow \vec{F}_\text{resultante} = \vec{0}$. As forzas que actúan sobre as esferas son as indicadas no debuxo, resultando:



$$\vec{F}_\text{e} + \vec{T}_\text{x} = \vec{0} \rightarrow F_\text{e} - T_\text{x} = 0 \rightarrow F_\text{e} = T_\text{x} = T \cos \alpha$$

$$\vec{T}_\text{y} + \vec{G} = \vec{0} \rightarrow T_\text{y} - G = 0 \rightarrow T_\text{y} = T \text{ sen } \alpha = G$$

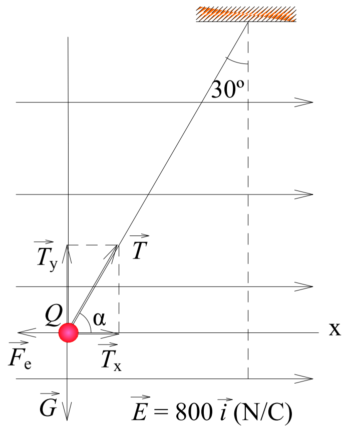
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{9 \cdot 10^9 \cdot Q \cdot Q}{\left(1{,}8 \cdot 10^{-2}\right)^2} = T \cos \alpha \\ \\ 100 \cdot 10^{-6} \cdot 9{,}8 = T \text{ sen } \alpha \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{\dfrac{9 \cdot 10^9 \cdot Q^2}{1{,}8^2 \cdot 10^{-4}}}{100 \cdot 10^{-6} \cdot 9{,}8} = \dfrac{T \cos \alpha}{T \text{ sen } \alpha}$$

$$\boxed{Q = 1 \cdot 10^{-9}\ \text{C} = 1\ \text{nC}}$$

9.- Unha pequena esfera de 0,5 g colga dun fío dentro dun campo eléctrico horizontal de intensidade $\vec{E}$ = 800 (N C^{-1}). Se a esfera está atraída polo campo ata formar un ángulo de 30° coa posición vertical, calcula o valor da carga.

Solución:

A esfera cargada está en repouso $\Rightarrow \vec{F}_\text{resultante} = \vec{0}$. As forzas que actúan sobre a esfera son as indicadas no debuxo, resultando:



$$\vec{F}_\text{e} + \vec{T}_\text{x} = \vec{0} \rightarrow -F_\text{e} + T_\text{x} = 0 \rightarrow F_\text{e} = T_\text{x} = T \cos 60°$$

$$\vec{T}_\text{y} + \vec{G} = \vec{0} \rightarrow T_\text{y} - G = 0 \rightarrow T_\text{y} = T \text{ sen } 60° = G$$

$$\left.\begin{array}{l} Q \cdot 800 = T \cdot \cos 60° \\ 0{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8 = T \cdot \text{sen } 60° \end{array}\right\} \rightarrow Q = 3{,}54 \cdot 10^{-6}\ \text{C}$$

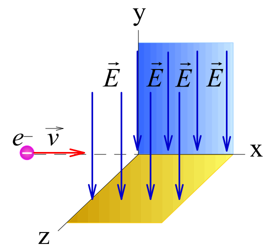
Como a carga Q é atraída polo campo eléctrico, o seu signo é negativo: ***Q* = −3,54·10^{-6} C**.

10.- Un electrón entra nun campo eléctrico uniforme na dirección perpendicular ás liñas do campo cunha velocidade de 10^4 m s^{-1}. A intensidade do campo é $E = 10^5$ V m^{-1}. Calcula a aceleración que experimenta o electrón. Datos: carga do e^- = $-1,6\cdot10^{-19}$ C, masa do e^- = $9,1\cdot10^{-31}$ kg.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} F = Q_{e^-}\cdot E \\ F = m\cdot a \end{array}\right\} \rightarrow a = \frac{Q_{e^-}\cdot E}{m}$$

$$a = \frac{1,6\cdot10^{-19}\cdot10^5}{9,1\cdot10^{-31}} \rightarrow \boxed{a = 1,76\cdot10^{16}\ \text{m s}^{-2}}$$



11.- Na orixe de coordenadas atópase unha carga puntual de 2 μC. Calcula: a) o traballo necesario para traer unha segunda carga de 1 μC dende o infinito ata unha distancia de 1 m da primeira; b) a posición do punto, sobre a recta que une as dúas cargas separadas 1 m, na que o campo eléctrico é nulo. Dato: $k = 9,00\cdot10^9$ N m^2 C^{-2}. (*Selectividade COU, xuño 02*).

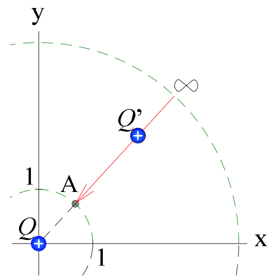
Solución:

a)

$$W_\infty^{\text{A}} = -Q'\cdot\Delta V = -Q'\cdot(V_{\text{A}} - V_\infty) = -Q'\cdot(V_{\text{A}} - 0) = -Q'\cdot V_{\text{A}}$$

$$V_{\text{A}} = k\cdot\frac{Q}{r_{\text{A}}} \rightarrow V_{\text{A}} = 9,00\cdot10^9\cdot\frac{2\cdot10^{-6}}{1} \rightarrow V_{\text{A}} = 1,8\cdot10^4\ \text{V}$$

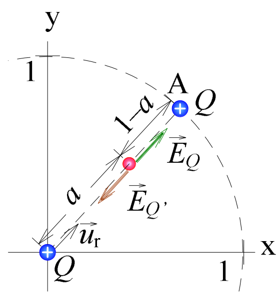
$$W_\infty^{\text{A}} = -1\cdot10^{-6}\cdot1,8\cdot10^4 \rightarrow \boxed{W_\infty^{\text{A}} = -1,8\cdot10^{-2}\ \text{J}}$$



b)

$$\left.\begin{array}{l} \vec{E} = \vec{0} \rightarrow \vec{E}_Q + \vec{E}_{Q'} = \vec{0} \rightarrow \vec{E}_Q = -\vec{E}_{Q'} \\ E_Q = k\cdot\dfrac{Q}{a^2} \rightarrow E_Q = 9,00\cdot10^9\cdot\dfrac{2\cdot10^6}{a^2} \\ E_{Q'} = k\cdot\dfrac{Q'}{(1-a)^2} \rightarrow E_{Q'} = 9,00\cdot10^9\cdot\dfrac{1\cdot10^{-6}}{(1-a)^2} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{2\cdot10^{-6}}{a^2} = \frac{1\cdot10^{-6}}{(1-a)^2}$$

$$a = \begin{cases} \boxed{0,6\ \text{m}} \\ 3,4\ \text{m} \end{cases}$$

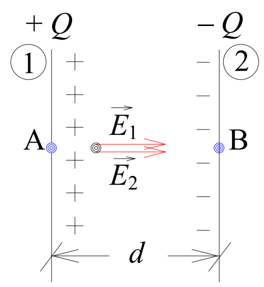


Soamente para a = 0,6 m se cumpre que $\vec{E} = \vec{0}$ $\left(\vec{E}_Q = -\vec{E}_{Q'}\right)$. Para a = 3,4 m sucede que $\vec{E}_Q = \vec{E}_{Q'}$ e $\vec{E}_{\text{total}} = 2\,\vec{E}_Q = 2\,\vec{E}_{Q'} \neq \vec{0}$.

12.- Unha esfera pequena, de masa 1 g e carga 10^{-6} C, colga dun fío de 5 cm de lonxitude

entre dúas placas metálicas paralelas. As placas están separadas entre si por unha distancia de 10 cm e posúen cargas iguais, pero de signo contrario. a) Que diferenza de potencial entre as placas fai que o fío forme un ángulo de 45º coa horizontal? b) Se as placas se descargan, cal será a velocidade da esfera ó pasar pola vertical? Dato: $g = 10$ m s^{-2}. (*Selectividade COU, xuño 01*).

Solución:



a) Dúas placas metálicas iguais, colocadas de forma paralela e separadas unha pequena distancia (en comparación coas súas dimensións) por un dieléctrico, constitúen un **condensador plano**. Cando as láminas metálicas están cargadas, respectivamente, cunha carga $+Q$ e outra $-Q$, no seu interior aparece un campo eléctrico, $\vec{E}$, que é o creado por dúas láminas planas, que suman os seus efectos debido ó signo contrario das súas cargas eléctricas:

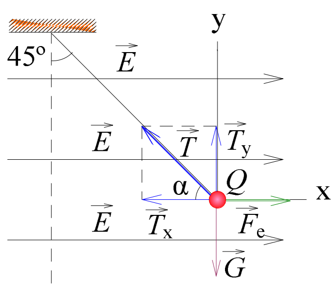
$$E = E_1 + E_2 = \frac{Q}{2\,S\,\varepsilon} + \frac{Q}{2\,S\,\varepsilon} = \frac{Q}{S\,\varepsilon} = \text{cte}.$$

Vemos que este campo eléctrico é constante en todos os puntos do interior do condensador: Trátase dun campo uniforme. Para calcular a diferenza de potencial entre as placas, relacionamos a intensidade de campo eléctrico e o potencial eléctrico:

$$\int_A^B \mathrm{d}V = -\int_A^B \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} \rightarrow V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r}\cos 0^\circ = -E \cdot \int_A^B \mathrm{d}r = -E\cdot(r_B - r_A) = -E\cdot \mathrm{d}r$$

$$V_B - V_A = -E \cdot 10 \cdot 10^{-2} = -E \cdot 10^{-1}$$

Para calcular E facemos uso da información de que a esfera cargada está en repouso ⇒ $\vec{F}_{\text{resultante}} = \vec{0}$. As forzas que actúan sobre a esfera son as indicadas no debuxo, resultando:



$$\vec{F}_e + \vec{T}_x = \vec{0} \rightarrow -F_e + T_x = 0 \rightarrow F_e = T_x = T\cos 45^\circ$$

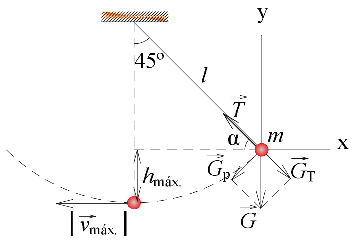
$$\vec{T}_y + \vec{G} = \vec{0} \rightarrow T_y - G = 0 \rightarrow T_y = T\,\text{sen}\,45^\circ = G$$

$$\left.\begin{array}{l} 10^{-6}\cdot E = T\cdot\cos 45^\circ \\ 1\cdot 10^{-3}\cdot 10 = T\cdot\text{sen}\,45^\circ \end{array}\right\} \rightarrow E = 10^4\ \text{N C}^{-1}$$

$$V_B - V_A = -10^4\cdot 10^{-1} \rightarrow \boxed{V_B - V_A = -10^3\ \text{V}}$$

b) Se as placas se descargan desaparece a forza eléctrica e a esfera queda sometida á forza do peso e á tensión do fío. Ó descompoñer o peso na dirección do fío e na perpendicular a este, vemos que esta última compoñente é a resultante das forzas que actúan sobre a masa m, a cal inicia un movemento de oscilación.

Supoñendo que a esfera oscila sen rozamento, consérvase a enerxía mecánica, podendo escribir: $E_{\text{p máxima}} = E_{\text{k máxima}}$.

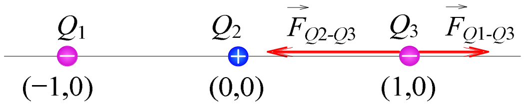


$$m \cdot g \cdot h_{\text{máxima}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2_{\text{máxima}} \rightarrow g \cdot (l - l \cdot \cos 45^\circ) = \frac{1}{2} v_{\text{máxima}}$$

$$10 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot (1 - \cos 45^\circ) = \frac{1}{2} v^2_{\text{máxima}} \rightarrow \boxed{v_{\text{máxima}} = 0,54 \text{ m s}^{-1}}$$

13.- Dispóñense tres cargas no eixe x. A primeira, de −1 µC, a 1 m á esquerda da orixe; a segunda, de 1 µC, na orixe; e a terceira, de −1 µC, a 1 m á dereita da orixe. Calcula, a) a forza (módulo e dirección) que as dúas primeiras cargas exercen sobre a terceira e b) as posicións en que hai que colocar a segunda carga para que a forza que actúe sobre a terceira sexa nula. (*Selectividade COU, set. 00*).

Solución:



a)

$$F_{Q_1-Q_3} = \frac{k\,Q_1\,Q_3}{r^2_{1-3}} \rightarrow F_{Q_1-Q_3} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{2^2} \rightarrow F_{Q_1-Q_3} = 2,25 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

$$F_{Q_2-Q_3} = \frac{k\,Q_2\,Q_3}{r^2_{2-3}} \rightarrow F_{Q_2-Q_3} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{1^2} \rightarrow F_{Q_2-Q_3} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{Q_1-Q_3} + \vec{F}_{Q_2-Q_3} \rightarrow \vec{F} = 2,25 \cdot 10^{-3}\,\vec{i} - 9 \cdot 10^{-3}\,\vec{i} \rightarrow \boxed{\vec{F} = -6,75 \cdot 10^{-3}\,\vec{i}}$$

b) Como as posicións das cargas Q_1 e Q_3 se manteñen fixas, a forza que Q_1 exerce sobre Q_3 é a estudada no apartado anterior. Para que a resultante das forzas que actúan sobre Q_3 sexa nula ten que cumprirse:

$$\vec{F}_{Q_2-Q_3} = -\vec{F}_{Q_1-Q_3} \Rightarrow \begin{cases} F_{Q_2-Q_3} = F_{Q_1-Q_3} \\ \text{Dirección de } \vec{F}_{Q_2-Q_3} = \text{Dirección de } \vec{F}_{Q_1-Q_3}\text{, que é a do eixe x} \\ \text{Sentido de } \vec{F}_{Q_2-Q_3} = -\text{Sentido de } \vec{F}_{Q_1-Q_3}\text{, que é da parte negativa} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} F_{Q_1-Q_3} = 2,25 \cdot 10^{-3} \\ F_{Q_2-Q_3} = \dfrac{k\,Q_2\,Q_3}{r^2_{2-3}} \end{array} \right\} \rightarrow 2,25 \cdot 10^{-3} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{r^2_{2-3}} \rightarrow \boxed{r = 2 \text{ m}}$$

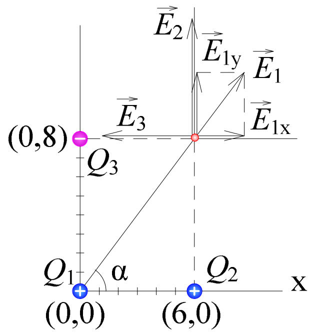
A posición da carga Q_2 coincide coa da Q_1.

14.- Tres cargas puntuais $Q_1 = 2$ µC, $Q_2 = 4$ µC, $Q_3 = -6$ µC, están situadas, respectivamente, nos puntos $P_1(0,0)$, $P_2(6,0)$, $P_3(0,8)$, estando as coordenadas en metros. Acha: a) o vector campo eléctrico no punto (6,8), b) a aceleración que experimenta unha partícula de masa

1 kg e carga 1 μC situada no punto (6,8). Dato: k = 1/(4 π ε_0) = 9,00 · 10^9 N m^2 C^{-2}. (*Selectividade COU*; *set. 99*).

Solución:

a) $\vec{E} = \sum_{i=1}^{i=3} \vec{E}_i$, sendo: $E_i = \dfrac{k\,Q_i}{r_i^2}$



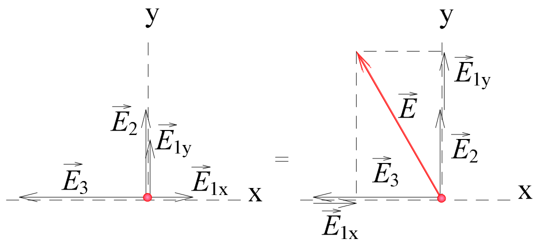
$$E_1 = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 2\cdot 10^{-6}}{\left(\sqrt{6^2+8^2}\right)^2} \rightarrow E_1 = 180\text{ N C}^{-1}$$

$$E_{1x} = E_1 \cos\alpha \rightarrow E_{1x} = 180\cdot\frac{6}{10} = 108\text{ N C}^{-1}$$

$$E_{1y} = E_1 \,\text{sen}\,\alpha \rightarrow E_{1y} = 180\cdot\frac{8}{10} = 144\text{ N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{1x} + \vec{E}_{1y} \rightarrow \vec{E}_1 = 108\,\vec{i} + 144\,\vec{j}\,\left(\text{N C}^{-1}\right)$$

$$E_2 = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 4\cdot 10^{-6}}{8^2} \rightarrow E_2 = 562{,}5\text{ N C}^{-1}$$



$$\vec{E}_2 = 562{,}5\,\vec{j}\,\left(\text{N C}^{-1}\right)$$

$$E_3 = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 6\cdot 10^{-6}}{6^2} \rightarrow E_3 = 1500\text{ N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_3 = -1500\,\vec{i}\,\left(\text{N C}^{-1}\right)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

$$\vec{E} = \left(108\,\vec{i} + 144\,\vec{j}\right) + 562{,}5\,\vec{j} + \left(-1500\,\vec{i}\right) \rightarrow \boxed{\vec{E} = -1392\,\vec{i} + 706{,}5\,\vec{j}\,\left(\text{N C}^{-1}\right)}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F} = m\,\vec{a}\\ \\ \vec{F} = Q\,\vec{E}\end{array}\right\} \rightarrow \vec{a} = \frac{Q\,\vec{E}}{m} \rightarrow \vec{a} = \frac{1\cdot 10^{-6}\cdot\left(-1392\,\vec{i} + 706{,}5\,\vec{j}\right)}{1}$$

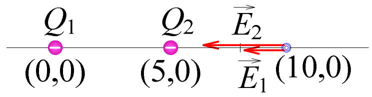
$$\boxed{\vec{a} = -1392\cdot 10^{-6}\,\vec{i} + 706{,}5\cdot 10^{-6}\,\vec{j}\,\left(\text{m s}^{-2}\right)}$$

15.- Dúas cargas puntuais de −5 μC cada unha, están fixas nos puntos (0,0) e (5,0). Acha: a) o vector campo electrostático no punto (10,0), e b) a velocidade coa que chega ó punto (8,0) unha partícula de masa 2 g e carga 8 μC que se abandona libremente no punto (10,0). As

distancias exprésanse en metros. Dato: k = 9,00 · 10⁹ N m² C⁻². (*Selectividade COU; set. 97*).

Solución:

a) $\vec{E} = \sum_{i=1}^{i=2} \vec{E}_i$, sendo: $E_i = \dfrac{k\,Q_i}{r_i^2}$



$$E_1 = \frac{9{,}00 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{10^2} \rightarrow E_1 = 450\ \mathrm{N\,C^{-1}}$$

$$\vec{E}_1 = -\,450\,\vec{i}\ \left(\mathrm{N\,C^{-1}}\right)$$

$$E_2 = \frac{9{,}00 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{5^2} \rightarrow E_2 = 1800\ \mathrm{N\,C^{-1}}$$

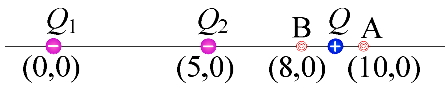
$$\vec{E}_2 = -1800\,\vec{i}\left(\mathrm{N\,C^{-1}}\right)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \rightarrow \vec{E} = -450\,\vec{i} - 1800\,\vec{i} \rightarrow \boxed{\vec{E} = -\,2250\,\vec{i}\ \left(\mathrm{N\,C^{-1}}\right)}$$

b) A forza eléctrica que actúa sobre a carga móbil ó longo do seu percorrido non é constante e, en consecuencia, o movemento non é uniformemente variado, non podendo facer uso das fórmulas cinemáticas deste movemento. Pero como a forza á que está sometida é conservativa, podemos facer uso da conservación da enerxía mecánica:

$$\left.\begin{array}{l} W_A^B = \Delta E_k = E_{kB} - E_{kA} = E_{kB} \\ W_A^B = -\,\Delta E_p = -\left(E_{pB} - E_{pA}\right) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} E_{kB} = -\,E_{pB} + E_{pA} \\ E_{kB} = \dfrac{1}{2}\,m\,v_B^2 \end{array}\right\} \rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2\left(E_{pA} + E_{pB}\right)}{m}}$$

$$E_{pA} = \frac{k\,Q_1\,Q}{r_{1-A}} + \frac{k\,Q_2\,Q}{r_{2-A}}$$



$$E_{pA} = \frac{9{,}00 \cdot 10^9 \cdot \left(-5 \cdot 10^{-6}\right) \cdot 8 \cdot 10^{-6}}{10} + \frac{9{,}00 \cdot 10^9 \cdot \left(-\,5 \cdot 10^{-6}\right) \cdot 8 \cdot 10^{-6}}{5} = -\,0{,}108\ \mathrm{J}$$

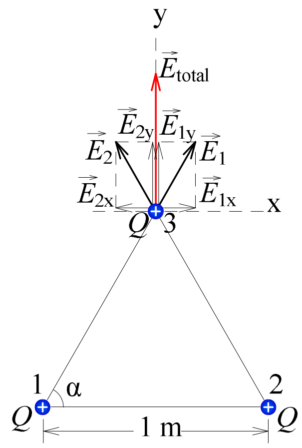
$$E_{pB} = \frac{k\,Q_1\,Q}{r_{1-B}} + \frac{k\,Q_2\,Q}{r_{2-B}}$$

$$E_{pB} = \frac{9{,}00 \cdot 10^9 \cdot \left(-5 \cdot 10^{-6}\right) \cdot 8 \cdot 10^{-6}}{8} + \frac{9{,}00 \cdot 10^9 \cdot \left(-\,5 \cdot 10^{-6}\right) \cdot 8 \cdot 10^{-6}}{3} = -\,0{,}165\ \mathrm{J}$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2 \cdot (-\,0{,}108 - (-\,0{,}165))}{2 \cdot 10^{-3}}} \rightarrow \boxed{v_B = 7{,}55\ \mathrm{m\,s^{-1}}}$$

16.- Dispóñense tres cargas puntuais de 1 μC no baleiro e nos vértices dun triángulo equilátero de 1 m de lado. Acha: a) o campo resultante sobre unha calquera das cargas; b) o lugar onde se debe situar unha cuarta carga, así como a súa magnitude, para que o conxunto das catro cargas estea en equilibrio. Dato: $k_0 = 1/(4\ \pi\ \varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ N m² C⁻². (*Selectividade COU; xuño 96*).

Solución:



a) $\vec{E} = \sum_{i=1}^{i=2} \vec{E}_i$, sendo: $E_i = \dfrac{k\,Q_i}{r_i^2}$

$$E_1 = E_2 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{1^2} \rightarrow E_1 = E_2 = 9 \cdot 10^3 \text{ N C}^{-1}$$

$$E_{1x} = E_1 \cos\alpha \rightarrow E_{1x} = 9 \cdot 10^3 \cdot \frac{0,5}{1} = 4,5 \cdot 10^3 \text{ N C}^{-1}$$

$$E_{1y} = E_1 \operatorname{sen}\alpha \rightarrow E_{1y} = 9 \cdot 10^3 \cdot \frac{\sqrt{1-0,5^2}}{1} = 7,8 \cdot 10^3 \text{ N C}^{-1}$$

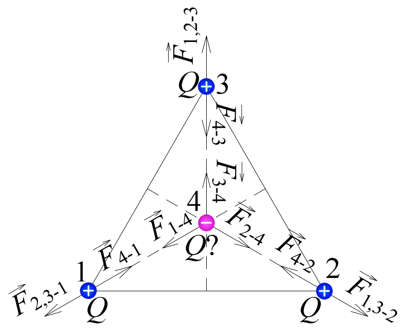
$$\left.\begin{aligned} \vec{E}_1 &= 4,5 \cdot 10^3\ \vec{i} + 7,8 \cdot 10^3\ \vec{j} \\ \vec{E}_2 &= -4,5 \cdot 10^3\ \vec{i} + 7,8 \cdot 10^3\ \vec{j} \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{\vec{E} = 15,6 \cdot 10^3\ \vec{j}\ \left(\text{N C}^{-1}\right)}$$

b) Para que unha cuarta carga, Q_4, ó deixala en repouso estea en equilibrio, a resultante das forzas que han de actuar sobre ela ten que ser nula (primeira lei de Newton). Por simetría, o lugar onde se cumpre esta condición é no punto **centro do triángulo**: Nel, calquera valor de carga en valor e signo, vai estar en equilibrio: $\vec{F}_{\text{total sobre } Q_4} = \vec{F}_{1-4} + \vec{F}_{2-4} + \vec{F}_{3-4} = \vec{0}$.

Pero para que cada unha das cargas situadas nos vértices do triángulo estean en equilibrio hai de ocorrer que a forza que a cuarta carga exerce sobre cada unha delas sexa oposta á forza á que, debido ás restantes cargas dos vértices, están sometidas. Esta última forza vale:

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E} \rightarrow F_{1,2-3} = Q_3 \cdot E_3 \rightarrow F_{1,2-3} = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 15,6 \cdot 10^3 = 1,56 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

$$\left.\begin{aligned} F_{4-3} &= F_{1,2-3} \\ F_{4-3} &= \frac{k\,Q_4\,Q_3}{r_{4-3}^2} \\ F_{1,2-3} &= 1,56 \cdot 10^{-2} \text{ N} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{k\,Q_4\,Q_3}{r_{4-3}^2} = 1,56 \cdot 10^{-2}$$

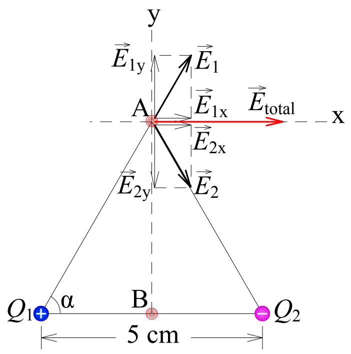


$$1,56 \cdot 10^{-2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot Q_4}{\left(\dfrac{2}{3} \cdot \sqrt{1^2 - 0,5^2}\right)^2} \rightarrow Q_4 = 0,58 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

Como a forza que a carga Q_4 exerce sobre calquera unha das cargas dos vértices ten que ser atractiva, o signo das cargas que interaccionan son opostos e, polo tanto, o signo da cuarta carga é negativo: $\boldsymbol{Q_4 = -0,58 \cdot 10^{-6}}$ **C**.

17.- En dous dos vértices dun triángulo equilátero de 5 cm de lado están situadas dúas cargas puntuais de +5 e −5 µC, respectivamente. Acha: a) o campo eléctrico no terceiro vértice e b) o traballo necesario para levar unha carga de 1 µC desde o terceiro vértice ata o punto medio do lado oposto. Dato: $k = 1/(4\,\pi\,\varepsilon_0) = 9\cdot10^9$ N m² C⁻². (*Selectividade COU; set. 95*).

Solución:



a) Para o caso do exercicio resulta que: $\vec{E} = 2\cdot\vec{E}_{1x}$.

$$E_1 = \frac{k\,Q_1}{r_1^2} \rightarrow E_1 = \frac{9\cdot10^9\cdot5\cdot10^{-6}}{\left(5\cdot10^{-2}\right)^2} = 1{,}8\cdot10^7\ \left(\mathrm{N\ C^{-1}}\right)$$

$$E_{1x} = E_1\cdot\cos\alpha \rightarrow E_{1x} = 1{,}8\cdot10^7\cdot\frac{2{,}5}{5} = 9\cdot10^6\ \mathrm{N\ C^{-1}}$$

$$\boxed{E_{total} = 2\cdot9\cdot10^6 = 18\cdot10^6\ \mathrm{N\ C^{-1}}}$$

b) A forza eléctrica que actúa sobre a carga móbil ó longo do seu percorrido non é constante e, en consecuencia, se queremos calcular o traballo a partir da súa definición, hai que realizar a integral: $W_A^B = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$. Pero, como a forza á que está sometida é conservativa, podemos relacionar este traballo coa variación de enerxía potencial: $W_A^B = -\Delta E_p = -\left(E_{pB} - E_{pA}\right)$.

$$E_{pA} = \frac{k\,Q_1\,Q_3}{r_{1-A}} + \frac{k\,Q_2\,Q_3}{r_{2-A}}$$

$$E_{pA} = \frac{9\cdot10^9\cdot5\cdot10^{-6}\cdot1\cdot10^{-6}}{5\cdot10^{-2}} + \frac{9\cdot10^9\cdot\left(-5\cdot10^{-6}\right)\cdot1\cdot10^{-6}}{5\cdot10^{-2}} = 0\ \mathrm{J}$$

$$E_{pB} = \frac{k\,Q_1\,Q_3}{r_{1-B}} + \frac{k\,Q_2\,Q_3}{r_{2-B}}$$

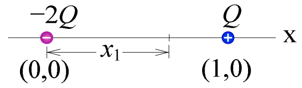
$$E_{pB} = \frac{9\cdot10^9\cdot5\cdot10^{-6}\cdot1\cdot10^{-6}}{2{,}5\cdot10^{-2}} + \frac{9\cdot10^9\cdot\left(-5\cdot10^{-6}\right)\cdot1\cdot10^{-6}}{2{,}5\cdot10^{-2}} = 0\ \mathrm{J}$$

W_A^B = 0 J, o que significa que os puntos A e B son equipotenciais.

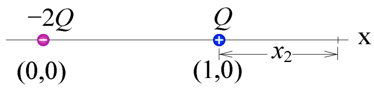
18.- Unha partícula de carga −2*Q* sitúase na orixe do eixe x. A 1 metro de distancia e na parte positiva do eixe, sitúase outra partícula de carga +*Q*. Calcula os puntos do eixe en que: a) se anula o potencial electrostático, e b) se anula o campo electrostático. (*Selectividade COU*; *xuño 95*).

Solución:

a) $V = \sum_{i=1}^{i=2} V_i = k\sum_{i=1}^{i=2}\frac{Q_i}{r_i}\ \left(\text{sendo } r_i \neq 0\right)$



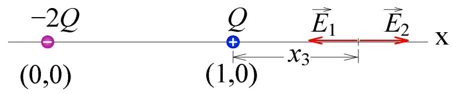
$$0 = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{(-2 \cdot Q)}{x_1} + \frac{Q}{1 - x_1} \right) \rightarrow x_1 = \frac{2}{3}\ \text{m}$$



$$0 = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{(-2 \cdot Q)}{1 + x_2} + \frac{Q}{x_2} \right) \rightarrow x_2 = 1\ \text{m}$$

Os puntos para os que $V = 0$ son os que están, desde a orixe, á distancia de **⅔ m e 2 m**.

b) $\vec{E} = \sum_{i=1}^{i=2} \vec{E}_i = \sum_{i=1}^{i=2} \frac{k\, Q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i}$



$$\vec{E} = \vec{0} \rightarrow \vec{E}_1 = -\vec{E}_2 \rightarrow E_1 = E_2 \rightarrow \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot Q}{(1 + x_3)^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot Q}{x_3^2}$$

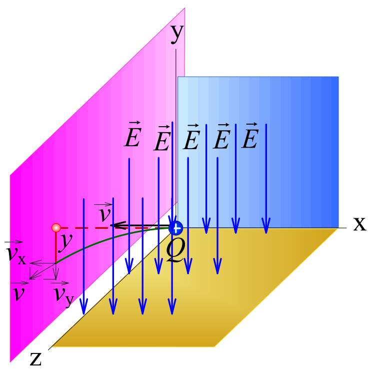
$$x_3^2 - 2\, x_3 - 1 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 2{,}4\ \text{m} \\ -0{,}4\ \text{m} \end{cases}$$

Soamente no punto que está a **3,4 m da orixe**, a intensidade de campo eléctrico é nula, $\vec{E} = \vec{0}$, xa que para a distancia de 0,6 m (que é a outra solución obtida: 0,6 = 1−0,4), aínda que $E_1 = E_2$, $\vec{E} \neq \vec{0}$ porque teñen o mesmo sentido.

19.- Sométese a unha partícula de 0,1 g de masa e 1 μC de carga á acción dun campo eléctrico uniforme de magnitude 200 N C^{-1} na dirección do eixe y. Inicialmente a partícula está na orixe de coordenadas movéndose cunha velocidade de 1 m s^{-1}, segundo o eixe x. Se ignoramos a acción da gravidade, acha: a) O lugar no que chocará cunha pantalla perpendicular ó eixe x, situada a un metro da orixe, e b) A enerxía cinética que ten a partícula nese instante. (*Selectividade COU; xuño 94*).

Solución:

a) A carga eléctrica Q, de masa m, desprázase con aceleración, $\vec{a}$, constante debido á forza eléctrica, $\vec{F}$, que sobre ela exerce o campo eléctrico constante, $\vec{E}$:



$$\left. \begin{array}{l} \vec{F} = Q \cdot \vec{E} \\ \vec{F} = m \cdot \vec{a} \end{array} \right\} \rightarrow \vec{a} = \frac{Q \cdot \vec{E}}{m} = \overrightarrow{\text{cte}}$$

A carga describe un movemento parabólico debido a que a dirección da súa velocidade non coincide coa da aceleración, estando sometida simultaneamente a dous movementos:

· Un, rectilíneo e uniforme na dirección horizontal: $x = v_x \cdot t$.

· Outro, rectilíneo uniformemente acelerado na dirección vertical: $y = v_0 \cdot t + ½ \cdot a \cdot t^2$.

$$\left.\begin{array}{l} x = v_x\, t \;\rightarrow\; 1 = 1\cdot t \;\rightarrow\; t = 1\text{ s} \\ y = \dfrac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 \\ a = \dfrac{Q\,E}{m} \;\rightarrow\; a = \dfrac{1\cdot 10^{-6}\cdot 200}{0{,}1\cdot 10^{-3}} \;\rightarrow\; a = 2\text{ m s}^{-2} \end{array}\right\} \rightarrow\; y = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 = 1\text{ m}$$

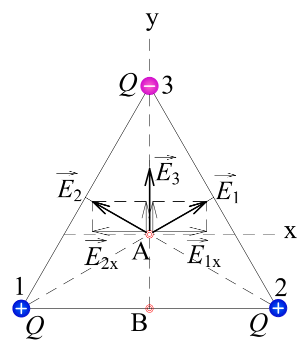
Segundo o sentido tomado para $\vec{v}$ e $\vec{E}$ trátase do punto **(−1,−1)**.

b)

$$\left.\begin{array}{l} E_k = \dfrac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 \;\rightarrow\; E_k = \dfrac{1}{2}\cdot 0{,}1\cdot 10^{-3}\cdot v^2 \\ \left.\begin{array}{l} \vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y \;\rightarrow\; v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ v_x = 1\text{ m s}^{-1} \\ v_y = v_{0y} + a\cdot t \;\rightarrow\; v_y = 2\cdot 1 = 2\text{ m s}^{-1} \end{array}\right\} \rightarrow\; v = \sqrt{5}\text{ m s}^{-1} \end{array}\right\} \rightarrow\; E_k = \frac{1}{2}\cdot 10^{-4}\cdot \sqrt{5}^2 \;\rightarrow\; \boxed{E_k = 2{,}5\cdot 10^{-4}\text{ J}}$$

20.- Tres cargas puntuais: +*Q*, +*Q* e −*Q* (*Q* = 1 μC), dispóñense nos vértices dun triángulo equilátero de 1 m de lado. Acha: a) O campo eléctrico no centro do triángulo; b) O traballo feito pola forza eléctrica do campo cando unha carga de 1 μC se despraza desde o centro do triángulo ata a metade do lado que une as dúas cargas +*Q*. Dato: $k_0 = 1/(4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0) = 9\cdot 10^9$ N m² C⁻². (*Selectividade COU; set. 93*).

Solución:



a) $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$

$$E_1 = E_2 = E_3 = \frac{k\,Q}{r^2} = \frac{9\cdot 10^9\cdot 1\cdot 10^{-6}}{\left(\dfrac{2}{3}\cdot\sqrt{1^2 - 0{,}5^2}\right)^2} = 2{,}7\cdot 10^4\text{ N C}^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} E = E_{1y} + E_{2y} + E_3 \\ E_{1y} = E_{2y} = E_1\text{ sen }30^\circ \;\rightarrow\; E_{1y} = 2{,}7\cdot 10^4\cdot\dfrac{1}{2} = 1{,}35\cdot 10^4\text{ N C}^{-1} \\ E_3 = 2{,}7\cdot 10^4\text{ N C}^{-1} \end{array}\right\} \rightarrow\; \boxed{E = 5{,}4\cdot 10^4\text{ N C}^{-1}}$$

b) $W_A^B = -Q\cdot(V_B - V_A)$

$$V = \sum_{i=1}^{i=3} V_i = k\sum_{i=1}^{i=3}\frac{Q_i}{r_i}\;(\text{sendo } r_i \neq 0)$$

$$V_{\mathrm{A}} = 9\cdot 10^{9}\cdot\left(\frac{1\cdot 10^{-6}}{\frac{2}{3}\cdot\sqrt{1^{2}-0{,}5^{2}}}+\frac{1\cdot 10^{-6}}{\frac{2}{3}\cdot\sqrt{1^{2}-0{,}5^{2}}}+\frac{\left(-1\cdot 10^{-6}\right)}{\frac{2}{3}\cdot\sqrt{1^{2}-0{,}5^{2}}}\right) = 1{,}56\cdot 10^{4}\ \mathrm{V}$$

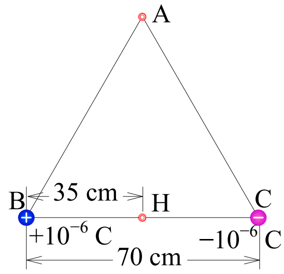
$$V_{\mathrm{B}} = 9\cdot 10^{9}\cdot\left(\frac{1\cdot 10^{-6}}{0{,}5}+\frac{1\cdot 10^{-6}}{0{,}5}+\frac{\left(-1\cdot 10^{-6}\right)}{\sqrt{1^{2}-0{,}5^{2}}}\right) = 2{,}56\cdot 10^{4}\ \mathrm{V}$$

$$W_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} = -10^{-6}\cdot\left(2{,}56\cdot 10^{-4}-1{,}56\cdot 10^{-4}\right) \rightarrow \boxed{W_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} = -0{,}01\ \mathrm{J}}$$

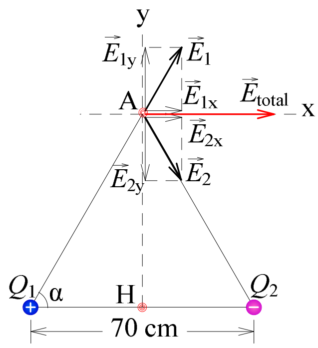
21.- Sitúanse dúas cargas, unha de +10^{-6} C e outra de -10^{-6} C, nos vértices dun triángulo de 70 cm de lado, como se indica na figura. Calcula:

a) O campo eléctrico no vértice A.

b) O traballo para mover unha carga de proba *Q* desde A ata H (H = punto medio entre B e C). Nota: Toma $k_0 = 1/(4\,\pi\,\varepsilon_0) = 9\cdot 10^{9}\ \mathrm{N\,m^{2}\,C^{-2}}$. (*Selectividade COU; set. 92*).



Solución:



a) $\vec{E} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{i}=2} \vec{E}_{\mathrm{i}}$, sendo: $E_{\mathrm{i}} = \dfrac{k\,Q_{\mathrm{i}}}{r_{\mathrm{i}}^{2}}$

$$E_1 = E_2 = \frac{9\cdot 10^{9}\cdot 10^{-6}}{\left(70\cdot 10^{-2}\right)^{2}} \rightarrow E_1 = E_2 = 1{,}84\cdot 10^{4}\ \mathrm{N\,C^{-1}}$$

$$E_{1\mathrm{x}} = E_{2\mathrm{x}} = E_1\cos\alpha$$

$$E_{1\mathrm{x}} = E_{2\mathrm{x}} = 1{,}84\cdot 10^{4}\cdot\cos 60^{\circ} = 9{,}2\cdot 10^{3}\ \mathrm{N\,C^{-1}}$$

$$E = E_{1\mathrm{x}} + E_{2\mathrm{x}} = 9{,}2\cdot 10^{3} + 9{,}2\cdot 10^{3} = 1{,}84\cdot 10^{4}\ \mathrm{N\,C^{-1}}$$

$$\boxed{\vec{E} = -1{,}84\cdot 10^{4}\ \left(\mathrm{N\,C^{-1}}\right)}$$

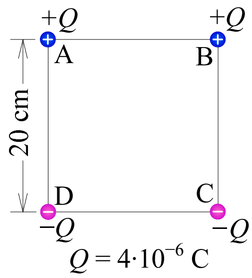
b)

$$\left.\begin{array}{l}
W_{\mathrm{A\,(feito\ pola\ forza\ eléctrica\ do\ campo)}}^{\mathrm{H}} = -Q\cdot\left(V_{\mathrm{H}}-V_{\mathrm{A}}\right)\\
V = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{i}=2} V_{\mathrm{i}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{i}=2}\dfrac{k\,Q_{\mathrm{i}}}{r_{\mathrm{i}}}\\
V_{\mathrm{H}} = \dfrac{9\cdot 10^{9}\cdot 10^{-6}}{35\cdot 10^{-2}} + \dfrac{9\cdot 10^{9}\cdot\left(-10^{-6}\right)}{35\cdot 10^{-2}} = 0\ \mathrm{V}\\
V_{\mathrm{A}} = \dfrac{9\cdot 10^{9}\cdot 10^{-6}}{70\cdot 10^{-3}} + \dfrac{9\cdot 10^{9}\cdot\left(-10^{-6}\right)}{70\cdot 10^{-3}} = 0\ \mathrm{V}
\end{array}\right\} \rightarrow \boxed{W_{\mathrm{A}}^{\mathrm{H}} = 0\ \mathrm{J}}$$

O traballo exterior, W_{exterior}, que hai que facer para mover a carga de proba Q con velocidade constante desde A ata H coincide co traballo feito pola forza do campo, cambiado de signo:

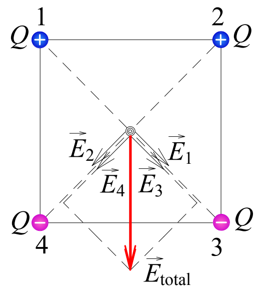
$$W_{\text{A (feito pola forza exterior)}}^{\text{H}} = -W_{\text{A (feito pola forza eléctrica do campo)}}^{\text{H}} \rightarrow \boxed{W_{\text{A (feito pola forza exterior)}}^{\text{H}} = 0 \text{ J}}$$

22.- Se se teñen catro cargas nos vértices dun cadrado como aparece na figura, determina: a) O campo eléctrico no centro do cadrado e b) O traballo necesario para mover unha carga de proba de valor Q desde C ata A. Nota: toma k_0 = 1/(4 π ε_0) = 9·10^9 N m^2 C^{-2}. (*Selectividade COU; xuño 92*).



Solución:

a) $\vec{E} = \sum_{i=1}^{i=4} \vec{E}_i$, sendo: $E_i = \dfrac{k\,Q_i}{r_i^2}$



$$E_1 = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 4\cdot 10^{-6}}{\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0,2^2+0,2^2}\right)^2} \rightarrow E_1 = 1,8\cdot 10^6 \text{ N C}^{-1}$$

$$E = E_{1y} + E_{2y} + E_{3y} + E_{4y} = 4\cdot E_{1y}$$

$$E_{1y} = E_1 \cdot \cos\alpha \rightarrow E_{1y} = 1,8\cdot 10^6 \cdot \cos 45° = 1,27\cdot 10^6 \text{ N C}^{-1}$$

$$E = 4\cdot 1,27\cdot 10^6 = 5,1\cdot 10^6 \text{ N C}^{-1}$$

$$\boxed{\vec{E} = -5,1\cdot 10^6\ \vec{j}\ (\text{N C}^{-1})}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} W_{\text{C}}^{\text{A}} = -Q\cdot(V_{\text{A}} - V_{\text{C}}) \\ V_{\text{A}} = \sum_{i=1}^{i=3} V_i = \sum_{i=1}^{i=3} \dfrac{k\,Q_i}{r_i} \\ V_{\text{A}} = 9\cdot 10^9 \cdot \left(\dfrac{4\cdot 10^{-6}}{0,2} + \dfrac{(-4\cdot 10^{-6})}{\sqrt{0,2^2+0,2^2}} + \dfrac{(-4\cdot 10^{-6})}{0,2}\right) = -1,27\cdot 10^5 \text{ V} \\ V_{\text{C}} = 9\cdot 10^9 \cdot \left(\dfrac{4\cdot 10^{-6}}{\sqrt{0,2^2+0,2^2}} + \dfrac{4\cdot 10^{-6}}{0,2} + \dfrac{(-4\cdot 10^{-6})}{0,2}\right) = 1,27\cdot 10^5 \text{ V} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$W_{\text{C}}^{\text{A}} = -Q\cdot\left(-1,27\cdot 10^5 - 1,27\cdot 10^5\right) \rightarrow \boxed{W_{\text{C}}^{\text{A}} = 2,54\cdot 10^5\ Q \text{ J}}$$

O traballo exterior, W_{exterior}, que hai que facer para mover a carga de proba Q con velocidade constante desde C ata A coincide co traballo feito pola forza do campo, cambiado de signo:

$$W_{\mathrm{C\,(feito\ pola\ forza\ exterior)}}^{\mathrm{A}} = -W_{\mathrm{C\,(feito\ pola\ forza\ eléctrica\ do\ campo)}}^{\mathrm{A}} \rightarrow \boxed{W_{\mathrm{C\,(feito\ pola\ forza\ exterior)}}^{\mathrm{A}} = -2{,}54 \cdot 10^5\ Q\ \mathrm{J}}$$

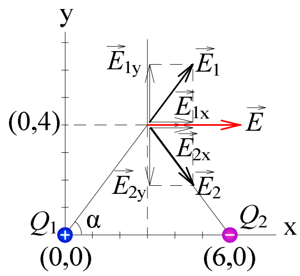
23.- Nun sistema de coordenadas rectangulares colócase no baleiro unha carga de 25·10⁻⁹ C na súa orixe de coordenadas e outra carga de −25·10⁻⁹ C no punto *x* = 6 m; *y* = 0 m. Determina:

a) O vector campo eléctrico no punto *x* = 3 m, *y* = 4 m.

b) O traballo necesario para mover unha carga de proba unidade desde o punto de coordenadas *x* = 3 m, *y* = 4 m ata o punto *x* = 6 m, *y* = 8 m. Nota: toma $k_0 = 1/(4\,\pi\,\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ N m² C⁻². (*Selectividade COU; xuño 91*).

Solución:

a)



$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{i=2} \vec{E}_i, \text{ sendo: } E_i = \frac{k\,Q_i}{r_i^2}$$

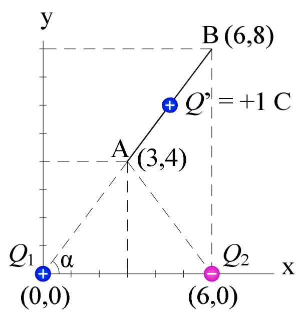
$$E_1 = E_2 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 25 \cdot 10^{-9}}{\left(\sqrt{3^2+4^2}\right)^2} \rightarrow E_1 = E_2 = 9\ \mathrm{N\,C^{-1}}$$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{1x} + \vec{E}_{1y} = E_1 \cos\alpha\,\vec{i} + E_1 \operatorname{sen}\alpha\,\vec{j} \rightarrow \vec{E}_1 = 9 \cdot \frac{3}{5}\,\vec{i} + 9 \cdot \frac{4}{5}\,\vec{j} = 5{,}4\,\vec{i} + 7{,}2\,\vec{j}\ \left(\mathrm{N\ C^{-1}}\right)$$

$$\vec{E}_2 = 5{,}4\,\vec{i} - 7{,}2\,\vec{j}\ \left(\mathrm{N\ C^{-1}}\right)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \rightarrow \boxed{\vec{E} = 10{,}8\,\vec{i}\ \left(\mathrm{N\,C^{-1}}\right)}$$

b)



$$W_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} = -Q \cdot (V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{A}})$$

$$V = \sum_{i=1}^{i=2} V_i = k \sum_{i=1}^{i=2} \frac{Q_i}{r_i} \left(\text{sendo } r_i \neq 0\right)$$

$$V_{\mathrm{A}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{25 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{3^2+4^2}} + \frac{-25 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{3^2+4^2}} \right) = 0\ \mathrm{V}$$

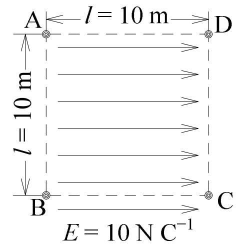
$$V_{\mathrm{B}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{25 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{6^2+8^2}} + \frac{-25 \cdot 10^{-9}}{8} \right) = -5{,}625\ \mathrm{V}$$

$$W_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} = -1 \cdot (-5{,}625 - 0) \rightarrow \boxed{W_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} = 5{,}625\ \mathrm{J}}$$

O traballo exterior, W_{exterior}, necesario para mover a carga de proba unidade con velocidade constante desde o punto (3,4) ata o (6,8) coincide co traballo feito pola forza do campo, cambiado de signo:

$$W_{(3,4)\,(\text{forza exterior})}^{(6,8)} = -W_{(3,4)\,(\text{forza campo eléctrico})}^{(6,8)} \rightarrow \boxed{W_{(3,4)\,(\text{forza exterior})}^{(6,8)} = -5{,}625\ \text{J}}$$

24.- Nunha rexión do espazo existe un campo eléctrico uniforme de intensidade E = 10 N C^{-1}. Determina (véxase a figura): a) A diferenza de potencial $V_D - V_B$ e b) O traballo necesario para mover unha carga de 4 C desde o punto A ó punto C. Nota: $l_{\text{lado cadrado}}$ = 10 m; os lados AB e DC son perpendiculares ás liñas do campo eléctrico. (Selectividade *COU; xuño 91*).



Solución:

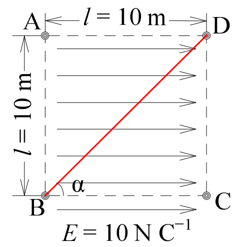
a)

$$V_B^D = V_D - V_B = -\int_B^D \vec{E}\,d\vec{r} = -\int_B^A \vec{E}\,d\vec{r} - \int_A^D \vec{E}\,d\vec{r}$$

$$V_D - V_B = -\int_B^A E\,dr\cos 90^\circ - \int_A^D E\,dr\cos 0^\circ = -\int_A^D E\,dr$$

$$V_D - V_B = -E\int_A^D dr = -E\,[r]_A^D = -E\,l$$

$$V_D - V_B = -10\cdot 10 \rightarrow \boxed{V_D - V_B = -100\ \text{V}}$$



Tamén podemos calcular a diferenza de potencial entre os puntos B e D, V_B^D, se se resolve a integral $V_B^D = V_D - V_B = -\int_B^D \vec{E}\,d\vec{r}$, tomando como liña de integración a da diagonal do cadrado.

$$V_B^D = V_D - V_B = -\int_B^D E\,dr\cos\alpha = -E\cdot\cos\alpha\cdot\int_B^D dr = -E\cdot\frac{l}{\sqrt{l^2+l^2}}\cdot\sqrt{l^2+l^2} = -E\cdot l$$

b) $W_A^C = -Q\cdot(V_C - V_A)$

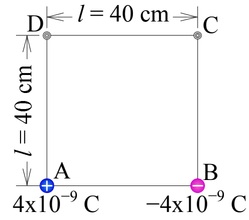
Segundo os datos do problema, a intensidade de campo eléctrico, $\vec{E}$, é perpendicular á recta que une os puntos CD. Se recordamos que $\vec{E}$ é sempre perpendicular a toda superficie ou liña equipotencial, podemos concluír dicindo que os puntos C e D teñen o mesmo potencial: $V_C = V_D$. Igual ocorre cos puntos A e B: $V_A = V_B$.

$$\left.\begin{array}{l} V_A = V_B \\ V_C = V_D \\ V_D - V_B = -100\ \text{V} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} V_C - V_A = -100\ \text{V} \\ W_A^C = -Q\,(V_C - V_A) \end{array}\right\} \rightarrow W_A^C = -4\cdot(-100) \rightarrow \boxed{W_A^C = 400\ \text{J}}$$

O traballo exterior, W_{exterior}, que hai que facer para mover a carga de 4 C con velocidade constante desde o punto A ata C coincide co traballo feito pola forza do campo, cambiado de signo:

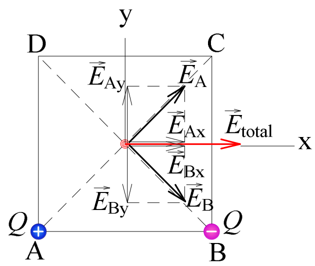
$$W_{\text{A (feito pola forza exterior)}}^{\text{C}} = -W_{\text{A (feito pola forza eléctrica do campo)}}^{\text{C}} \rightarrow \boxed{W_{\text{A (feito pola forza exterior)}}^{\text{C}} = -400\ \text{J}}$$

25.- Dúas cargas puntuais de $4\cdot10^{-9}$ C e $-4\cdot10^{-9}$ C encóntranse situadas no baleiro en dous vértices consecutivos A e B dun cadrado de 40 cm de lado, como se indica na figura. Calcula: a) A intensidade do campo eléctrico no centro do cadrado e b) O traballo necesario para levar unha carga de $6\cdot10^{-9}$ C desde o vértice C ata o D. Dato: $k_0 = 1/(4\,\pi\,\varepsilon_0)$, $k_0 = 9\cdot10^9$ m F^{-1}. (*Selectividade COU; set. 90*).



Solución:

a)



$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{i=2} \vec{E}_i, \text{ sendo: } E_i = \frac{k\,Q_i}{r_i^2}$$

$$E_A = E_B = \frac{9\cdot10^9\cdot4\cdot10^{-9}}{\left(\sqrt{\left(20\cdot10^{-2}\right)^2+\left(20\cdot10^{-2}\right)^2}\right)^2} \rightarrow E_A = E_B = 450\ \text{N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_A = \vec{E}_{Ax} + \vec{E}_{Ay} = 450\cdot\cos 45^\circ\,\vec{i} + 450\cdot\text{sen}\,45^\circ\,\vec{j} = 318{,}2\,\vec{i} + 318{,}2\,\vec{j}\ \left(\text{N C}^{-1}\right)$$

$$\vec{E}_B = 318{,}2\,\vec{i} - 318{,}2\,\vec{j}\ \left(\text{N C}^{-1}\right)$$

$$\boxed{\vec{E} = 636{,}4\,\vec{i}\ \left(\text{N C}^{-1}\right)}$$

b)

$$W_C^D = -Q\cdot\left(V_D - V_C\right)$$

$$V = \sum_{i=1}^{i=2} V_i = k\sum_{i=1}^{i=2}\frac{Q_i}{r_i}\ \left(\text{sendo } r_i \neq 0\right)$$

$$V_D = 9\cdot10^9\cdot\left(\frac{4\cdot10^{-9}}{40\cdot10^{-2}} + \frac{-4\cdot10^{-9}}{\sqrt{\left(40\cdot10^{-2}\right)^2+\left(40\cdot10^{-2}\right)^2}}\right) = 26{,}4\ \text{V}$$

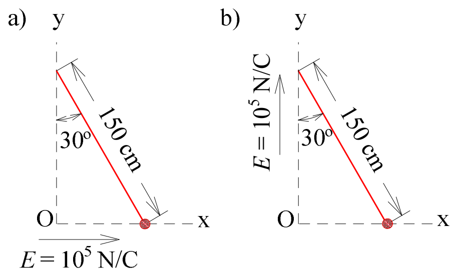
$$V_C = 9\cdot10^9\cdot\left(\frac{4\cdot10^{-9}}{\sqrt{\left(40\cdot10^{-2}\right)^2+\left(40\cdot10^{-2}\right)^2}} + \frac{-4\cdot10^{-9}}{40\cdot10^{-2}}\right) = -26{,}4\ \text{V}$$

$$W_C^D = -6\cdot10^{-9}\cdot\left(26{,}4-(-26{,}4)\right) \rightarrow \boxed{W_C^D = -3{,}17\cdot10^{-7}\ \text{J}}$$

O traballo exterior, W_{exterior}, que hai que facer para mover a carga Q' con velocidade constante desde o vértice C ata o D coincide co traballo feito pola forza do campo, cambiado de signo:

$$W^{D}_{C\,(\text{feito pola forza exterior})} = -W^{D}_{C\,(\text{feito pola forza eléctrica do campo})} \rightarrow \boxed{W^{D}_{C\,(\text{feito pola forza exterior})} = 3{,}17 \cdot 10^{-7}\ \text{J}}$$

26.- Un péndulo está constituído por unha pequena esfera metálica, de masa *m* = 1 g e dimensións desprezables, e un fío inextensible, de 150 cm de longo e sen peso apreciable. Se a esfera ten unha carga positiva *Q* e o péndulo se sitúa nunha rexión onde existe un campo eléctrico uniforme de intensidade *E* 10^5 N/C, calcula:

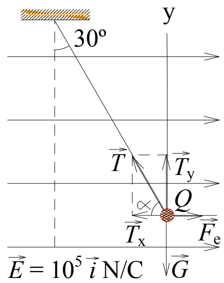


a) O valor da carga *Q* da esfera sabendo que cando o campo é paralelo ó eixe x, ver figura a), alcánzase a posición de equilibrio para un ángulo de 30º do fío coa vertical.

b) O período de oscilación do péndulo cando o campo eléctrico é perpendicular ó eixe x, ver figura b), e está dirixido de abaixo cara arriba. Toma para *g* = 10 m s^{-2}. (*Selectividade COU; xuño 90*).

Solución:

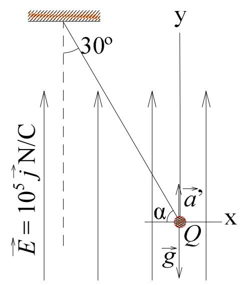
a) A esfera cargada está en repouso ⇒ $\vec{F}_{\text{resultante}} = \vec{0} \rightarrow \begin{cases} \vec{F}_{\text{r x}} = \vec{0} \\ \vec{F}_{\text{r y}} = \vec{0} \end{cases}$. Como as forzas que actúan sobre a esfera son: a eléctrica, $\vec{F}_{\text{e}}$, a gravitatoria, $\vec{G}$, e a tensión do fío, $\vec{T}$, que descompoñemos na dirección horizontal, $\vec{T}_{\text{x}}$, e na vertical, $\vec{T}_{\text{y}}$, como se indica na figura, podemos escribir:



$$\vec{F}_{\text{e}} + \vec{T}_{\text{x}} = \vec{0} \rightarrow -F_{\text{e}} + T_{\text{x}} = 0 \rightarrow F_{\text{e}} = T_{\text{x}} = T \cos 60º$$

$$\vec{T}_{\text{y}} + \vec{G} = \vec{0} \rightarrow T_{\text{y}} - G = 0 \rightarrow T_{\text{y}} = T \operatorname{sen} 60º = G$$

$$\left.\begin{aligned} Q \cdot 10^5 &= T \cdot \cos 60º \\ 1 \cdot 10^{-3} \cdot 10 &= T \cdot \operatorname{sen} 60º \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{Q = 5{,}8 \cdot 10^{-8}\ \text{C}}$$



Como a carga Q é repelida polo campo eléctrico, o seu signo é positivo: $Q = +5{,}8 \cdot 10^{-8}$ C.

b)

$$\left.\begin{aligned} &T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a}} \\ &l = 150 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \\ &\left.\begin{aligned} &a = g - a' \\ &g = 10\ \text{m s}^{-2} \\ &a' = \frac{F_{\text{eléctrica}}}{m} \rightarrow a' = \frac{5{,}8 \cdot 10^{-8} \cdot 10^5}{1 \cdot 10^{-3}} = 5{,}8\ \text{m s}^{-2} \end{aligned}\right\} \rightarrow a = 10 - 5{,}8 = 4{,}2\ \text{m s}^{-2} \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{150 \cdot 10^{-2}}{4,2}} \;\rightarrow\; \boxed{T = 3,75\ \mathrm{s}}$$

EXERCICIOS DE SELECTIVIDADE (Cuestións)

Razoa as respostas ás seguintes cuestións:

1.- Se unha carga de 1 µC se move entre dous puntos da superficie dun condutor separados 1 m (cargado e en equilibrio electrostático), cal é a variación de enerxía potencial que experimenta esta carga?: a) 9 kJ; b) depende do potencial do condutor; c) cero. (1 µC = 10^{-6} C; $K = 9 \cdot 10^9$ N m^2 C^{-2}). *(Set. 08).*

Solución:

Todos os puntos dun condutor cargado e en equilibrio electrostático están ó mesmo potencial, constituíndo un volume equipotencial. De non ser así, as cargas do condutor desprazaríanse e non se cumpriría a condición de equilibrio electrostático.

En función do potencial, a enerxía potencial eléctrica E_p dunha carga Q nun punto de potencial eléctrico V vén dada pola expresión: $E_p = Q \cdot V$. Polo tanto: $\boldsymbol{\Delta E_p = Q\ \Delta V = 0}$, resultado que se corresponde co ítem c) da cuestión.

2.- Se o fluxo do campo eléctrico a través dunha superficie gaussiana que rodea a unha esfera condutora cargada e en equilibrio electrostático é Q/ε_0, o campo eléctrico no exterior da esfera é: a) cero; b) $Q/(4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2)$; c) Q/ε_0. (*Set. 05*)

Solución:

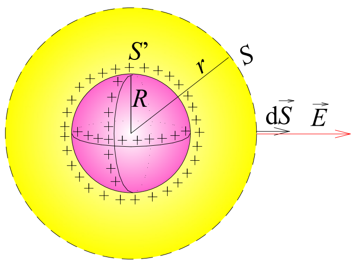
A intensidade de campo eléctrico, $\vec{E}$, como todo vector, consta de módulo, dirección e sentido. Estudamos o seu módulo, para o que:

1º: Imaxinamos unha superficie pechada, que pase polo punto onde queremos coñecer a intensidade de campo eléctrico, de modo que $\vec{E}$ sexa perpendicular á superficie en cada punto e o seu módulo sexa constante en toda ela: unha esfera con centro a propia carga.

2º: Calculamos o fluxo do vector $\vec{E}$, que atravesa a superficie anteriormente trazada:

$$\Phi = \int_{S\text{ de Gauss}} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_{S\text{ da esfera}} E\,\mathrm{d}S\cos 0^\circ = E\int_S \mathrm{d}S = E\,S$$

3º: Aplicamos o teorema de Gauss:



$$\left.\begin{array}{l}\Phi = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}\\[2em] \Phi = E\cdot S\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} E\cdot S = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}\\ S = 4\cdot\pi\cdot r^2\end{array}\right\} \rightarrow E = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r^2}$$

A dirección é a do raio da esfera que teña por liña de acción a recta que pasa polo punto onde queiramos coñecer $\vec{E}$ e o seu sentido é cara ó infinito, se a carga da esfera é positiva e cara ó centro da esfera se a carga é negativa.

Resulta que o campo $\vec{E}$ creado por unha carga Q, distribuída sobre unha esfera condutora en equilibrio electrostático, nun punto exterior a ela, é igual ó campo creado por esa mesma carga se fose puntual e estivese situada no centro da esfera.

3.- No interior dun condutor esférico cargado e en equilibrio electrostático cúmprese: a) o potencial e o campo aumentan desde o centro ata a superficie da esfera; b) o potencial é nulo e o campo constante; c) o potencial é constante e o campo nulo. (*Xuño 05*).

Solución:

Dicimos que un condutor cargado se encontra en equilibrio electrostático cando as cargas que posúe están en repouso.

Nun condutor cargado en equilibrio electrostático, as cargas están distribuídas uniformemente pola súa superficie: As cargas repélense e de estar no interior desprazaríanse ata que a distancia fose máxima; isto é: ata a superficie do condutor.

Ó situarse as cargas sobre a superficie do condutor, a carga encerrada por unha superficie interior é nula e, aplicando o teorema de Gauss, resulta:

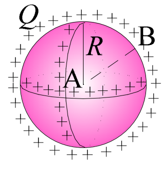
$$\left.\begin{array}{l}\Phi = \int_{S\ \text{esfera}} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} \\ \\ \Phi = \dfrac{Q}{\varepsilon}\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}\int_{S\ \text{interior}} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{Q_{\text{interior}}}{\varepsilon} \\ Q_{\text{interior}} = 0\end{array}\right\} \rightarrow E = 0$$

O resultado é que **a intensidade de campo eléctrico no interior dun condutor en equilibrio electrostático é nula**.

A diferenza de potencial entre dous puntos relaciónase coa intensidade de campo eléctrico segundo a expresión: $\Delta V = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \;\rightarrow\; \mathrm{d}V = -\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$.

Para o caso de puntos interiores dunha esfera cargada e en equilibrio electrostático temos:

$$\left.\begin{array}{r}\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}V = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} \\ \vec{E} = \vec{0}\end{array}\right\} \rightarrow \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}V = 0 \rightarrow V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{A}} = = 0 \rightarrow V_{\mathrm{B}} = V_{\mathrm{A}}$$



A e B son dous puntos calquera pertencentes á esfera condutora; para o caso do debuxo, A está no centro da esfera e B está infinitamente próximo á súa superficie.

Resulta que se $\vec{E} = \vec{0}$, **o potencial *V* non pode variar**, $\Delta V = 0$, tendo un valor constante en todos os puntos: trátase dun volume equipotencial.

Vemos que nas condicións da cuestión, **o potencial eléctrico é constante e a intensidade de campo é nula (ítem c)**.

4.- Nunha esfera condutora cargada e en equilibrio electrostático cúmprese que: a) o potencial eléctrico no interior é constante; b) o campo interior é función da distancia ó centro; c) a carga eléctrica distribúese uniformemente por todo o volume. (*Xuño 03*).

Solución:

Ver a resposta da cuestión anterior.

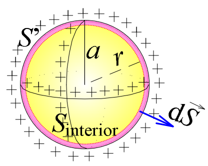
5.- O potencial e a intensidade de campo eléctrico dunha esfera condutora de raio *a* e carga *Q* son, respectivamente: a) nulo e constante no interior da esfera; b) constante no exterior e nulo no interior; c) constante e nulo no interior. (*Set. 99*).

Solución:

Se as cargas non están en repouso, non hai equilibrio electrostático; no interior da esfera pode haber parte da carga Q e, en consecuencia, ningunha das opcións dadas como solución son correctas. Para o caso de que as cargas estean en equilibrio electrostático, estas están na superficie do condutor.

Nun condutor cargado coas cargas en equilibrio electrostático, estas están distribuídas uniformemente pola súa superficie: As cargas repélense e de estar no interior do condutor desprazaríanse ata que a distancia fose máxima; isto é: ata a súa superficie.

Ó situarse as cargas sobre a superficie do condutor, a carga encerrada por unha superficie interior é nula e, aplicando o teorema de Gauss, temos:



$$\left.\begin{array}{l}\int_{S\ \text{interior}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{Q_{\text{interior}}}{\varepsilon} \\ Q_{\text{interior}} = 0\end{array}\right\} \rightarrow E = 0$$

Vemos que o campo eléctrico, no interior dun condutor cargado en equilibrio electrostático, é nulo, polo que o ítem a) queda descartado.

A relación que hai entre a intensidade do campo eléctrico, $\vec{E}$, e o potencial eléctrico, V, é: $\mathrm{d}V = -\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$.

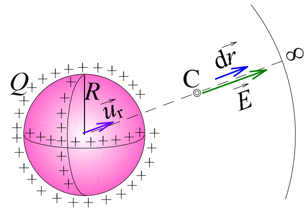
Como no interior da esfera E = 0 resulta: $\mathrm{d}V = -\vec{0}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \vec{0} \rightarrow V = \text{cte}$. Trátase dun volume equipotencial.

Chegamos a que o potencial eléctrico e a intensidade de campo eléctrico no interior dunha esfera condutora, que posúe unha carga Q en equilibrio electrostático, son, respectivamente, constante e nulo: ítem c).

Para saber se o ítem b) é correcto estudamos o valor do potencial nun punto exterior:

$$\left.\begin{array}{r}\int_{\mathrm{C}}^{\infty}\mathrm{d}V=-\int_{\mathrm{C}}^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}\ \rightarrow\ V_{\mathrm{C}}=\int_{\mathrm{C}}^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{\mathrm{C}}^{\infty}E\cdot\mathrm{d}r\\[2em] E=\dfrac{k\cdot Q}{r^2}\end{array}\right\}\rightarrow\ V_{\mathrm{C}}=\int_{\mathrm{C}}^{\infty}\frac{k\cdot Q}{r^2}\cdot\mathrm{d}r=\left(-\frac{k\cdot Q}{r}\right)_{\mathrm{C}}^{\infty}=\frac{k\cdot Q}{r_{\mathrm{C}}}$$

O potencial eléctrico no exterior da esfera é inversamente proporcional á distancia do punto ó centro da esfera, non sendo correcto o ítem b).

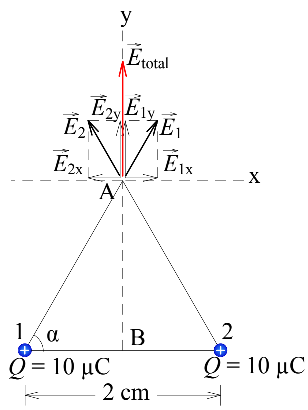


EXERCICIOS DE SELECTIVIDADE (Problemas)

1.- En dous dos vértices dun triángulo equilátero de 2 cm de lado sitúanse dúas cargas puntuais de +10 µC cada unha. Calcula: a) o campo eléctrico no terceiro vértice; b) o traballo para levar unha carga de 5 µC desde o terceiro vértice ata o punto medio do lado oposto; c) xustifica porqué non necesitas coñecer a traxectoria no apartado anterior. (Datos: $K = 9 \cdot 10^9$ N m^2 C^{-2}; 1 µC = 10^{-6} C). *(Xuño 08).*

Solución:

a) $\vec{E} = \sum_{i=1}^{i=2} \vec{E}_i$, sendo: $E_i = \dfrac{k\,Q_i}{r_i^2}$



$$E_1 = E_2 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 10^{-6}}{\left(2 \cdot 10^{-2}\right)^2} \rightarrow E_1 = E_2 = 2{,}25 \cdot 10^8 \text{ N C}^{-1}$$

$$E_{1x} = E_{2x} = E_1 \cos\alpha \rightarrow E_{1x} = 2{,}25 \cdot 10^8 \cdot \frac{1}{2} = 1{,}13 \cdot 10^8 \text{ N C}^{-1}$$

$$E_{1y} = E_{2y} = E_1 \operatorname{sen}\alpha \rightarrow E_{1y} = 2{,}25 \cdot 10^8 \cdot \frac{\sqrt{2^2 - 1^2}}{2} = 1{,}95 \cdot 10^8 \text{ N C}^{-1}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{E}_1 &= 1{,}13 \cdot 10^8\, \vec{i} + 1{,}95 \cdot 10^8\, \vec{j} \\ \vec{E}_2 &= -1{,}13 \cdot 10^8\, \vec{i} + 1{,}95 \cdot 10^8\, \vec{j} \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{\vec{E} = 3{,}90 \cdot 10^8\, \vec{j}\ \left(\text{N C}^{-1}\right)}$$

Unha resposta xeral, independentemente de como se elixan os vértices, sería: $E_{\text{no terceiro vértice}} = 3{,}90 \cdot 10^8$ N/C; coa dirección da bisectriz do ángulo no que se calcula e co sentido de cara ó exterior do triángulo.

b)

$$\left.\begin{aligned} & W_{A\,(\text{feito pola forza eléctrica do campo})}^{B} = -Q \cdot \left(V_B - V_A\right) \\ & V = \sum_{i=1}^{i=2} V_i = \sum_{i=1}^{i=2} k\,\frac{Q_i}{r_i} \\ & V_B = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-6}}{1 \cdot 10^{-2}} + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-6}}{1 \cdot 10^{-2}} = 18 \cdot 10^6 \text{ V} \\ & V_A = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-2}} + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-2}} = 9 \cdot 10^6 \text{ V} \end{aligned}\right\} \rightarrow W_A^B = -5 \cdot 10^{-6} \cdot \left(18 \cdot 10^6 - 9 \cdot 10^6\right) \quad \boxed{W_A^B = -45 \text{ J}}$$

O traballo exterior, $W_{exterior}$, que hai que facer para levar a carga de 5 µC con velocidade constante desde A ata B, coincide co traballo feito pola forza do campo, cambiado de signo:

$$W_{A\,(\text{feito pola forza exterior})}^{B} = -W_{A\,(\text{feito pola forza eléctrica do campo})}^{B} \rightarrow \boxed{W_{A\,(\text{feito pola forza exterior})}^{B} = 45 \text{ J}}$$

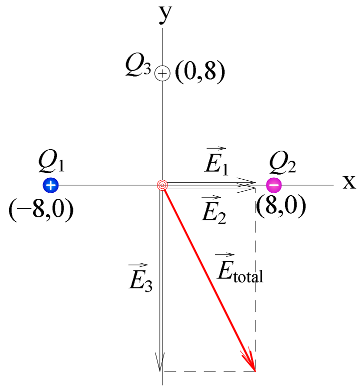
c) A forza electrostática é unha forza conservativa e o traballo que unha forza conservativa realiza soamente depende dos puntos entre os cales se desenvolve, sendo independente do camiño seguido.

2.- Dadas tres cargas puntuais: Q_1 = 10^{-3} µC en (−8,0) m; Q_2 = -10^{-3} µC en (8,0) m e Q_3 = $2\cdot10^{-3}$ µC en (0,8) m; calcula: a) o campo e o potencial eléctricos en (0,0); b) a enerxía electrostática; c) xustifica que o campo electrostático é conservativo. (Datos: 1 µC = 10^{-6} C; K = $9\cdot10^9$ N m^2 C^{-2}). *(Set. 07).*

Solución:

a)

$$\vec{E}=\sum_{i=1}^{i=3}\vec{E}_i,\ \text{sendo: } E_i=\frac{k\,Q_i}{r_i^2}$$



$$E_1=\frac{9\cdot10^9\cdot10^{-3}\cdot10^{-6}}{8^2}\rightarrow E_1=\frac{9}{64}\,\text{N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_1=\frac{9}{64}\vec{i}\,\left(\text{N C}^{-1}\right)$$

$$\vec{E}_2=\vec{E}_1=\frac{9}{64}\vec{i}\,\left(\text{N C}^{-1}\right)$$

$$E_3=\frac{9\cdot10^9\cdot2\cdot10^{-3}\cdot10^{-6}}{8^2}\rightarrow E_3=\frac{9}{32}\,\text{N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_3=-\frac{9}{32}\vec{j}\,\left(\text{N C}^{-1}\right)$$

$$\vec{E}_{(0,0)}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3=\frac{9}{64}\vec{i}+\frac{9}{64}\vec{i}-\frac{9}{32}\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{E}_{(0,0)}=\frac{9}{32}\vec{i}-\frac{9}{32}\vec{j}\,\left(\text{N C}^{-1}\right)}$$

$$V_{total}=\sum_{i=1}^{i=3}V_i=k\sum_{i=1}^{i=3}\frac{Q_i}{r_i}\,\left(\text{sendo } r_i\neq0\right)$$

$$V_{(0,0)\,total}=\frac{9\cdot10^9\cdot10^{-3}\cdot10^{-6}}{8}+\frac{9\cdot10^9\cdot\left(-10^{-3}\cdot10^{-6}\right)}{8}+\frac{9\cdot10^9\cdot2\cdot10^3\cdot10^{-6}}{8}\rightarrow\boxed{V_{total}=\frac{9}{4}\,\text{V}}$$

b) A enerxía potencial electrostática E_p da interacción de dúas cargas, Q e Q', separadas a distancia r, vén dada pola expresión: $E_p=\dfrac{k\,Q\,Q'}{r}$ e a enerxía potencial total é a suma das enerxías de todas as interaccións: $E_{p\,total}=E_{p\,1\text{-}2}+E_{p\,1\text{-}3}+E_{p\,2\text{-}3}$.

$$E_{p\,total}=9\cdot10^9\cdot\left(\frac{10^{-3}\cdot10^{-6}\cdot\left(-10^{-3}\right)\cdot10^{-6}}{16}+\frac{10^{-3}\cdot10^{-6}\cdot2\cdot10^{-3}\cdot10^{-6}}{\sqrt{8^2+8^2}}+\frac{-10^{-3}\cdot10^{-6}\cdot2\cdot10^{-3}\cdot10^{-6}}{\sqrt{8^2+8^2}}\right)$$

$$\boxed{E_{\text{total}} = -5{,}63 \cdot 10^{-10}\ \text{J}}$$

c) Un campo de forzas é conservativo cando o traballa que desenvolve a forza do campo só depende dos puntos inicial e final entre os cales se realiza, sendo independente do camiño seguido. Polo tanto, ó longo dun ciclo, o traballo desenvolto vale cero.

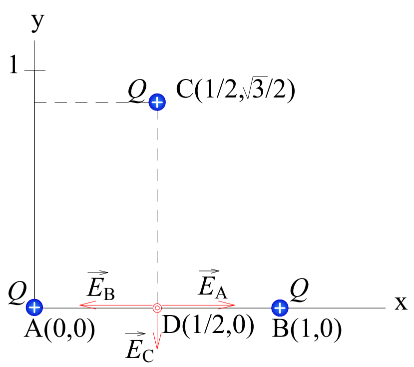
Sabemos que as forzas electrostáticas (atractivas ou repulsivas) debidas a cargas puntuais en repouso son centrais e toda forza central é conservativa, podendo relacionar o traballo feito por esta forza coa variación da enerxía potencial eléctrica (e coa variación do potencial eléctrico):

$$W_{\text{A}\to\text{B}} = -\Delta E_{\text{p}} = -\left(E_{\text{pB}} - E_{\text{pA}}\right) = -Q\left(V_{\text{B}} - V_{\text{A}}\right)$$

3.- Tres cargas puntuais de 2 μC sitúanse respectivamente en A(0,0), B(1,0) e C$\left(1/2,\sqrt{3}/2\right)$. Calcula: a) o campo eléctrico nos puntos D(1/2,0) e F$\left(1/2, 1/\left(2\sqrt{3}\right)\right)$; b) o traballo para trasladar unha carga *Q'* = 1 μC de D a F; c) con este traballo, aumenta ou diminúe a enerxía electrostática do sistema? (As coordenadas danse en metros; *K* = 9 · 10⁹ N m² C⁻²; 1 μC = 10⁻⁶ C). *(Xuño 07).*

Solución:

a) $\vec{E} = \sum_{\text{i}=1}^{\text{i}=3} \vec{E}_{\text{i}}$, sendo: $E_{\text{i}} = \dfrac{k\,Q_{\text{i}}}{r_{\text{i}}^2}$



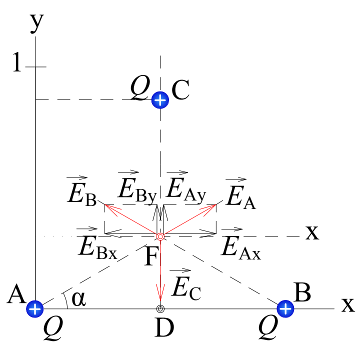
$$E_{\text{A en D}} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 2\cdot 10^{-6}}{0{,}5^2} \rightarrow E_{\text{A en D}} = 7{,}2\cdot 10^4\ \text{N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_{\text{A en D}} = 7{,}2\cdot 10^4\ \vec{i}\ \left(\text{N C}^{-1}\right)$$

$$\vec{E}_{\text{B en D}} = -\vec{E}_{\text{A en D}} = -7{,}2\cdot 10^4\ \vec{i}\ \left(\text{N C}^{-1}\right)$$

$$E_{\text{C en D}} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 2\cdot 10^{-6}}{\left(\sqrt{3}/2\right)^2} \rightarrow E_{\text{C en D}} = 2{,}4\cdot 10^4\ \text{N C}^{-1}$$

$$E_{\text{C en D}} = -2{,}4\cdot 10^4\ \vec{j}\ \left(\text{N C}^{-1}\right)$$



$$\vec{E}_{\text{total en D}} = \vec{E}_{\text{C en D}} = -2{,}4\cdot 10^4\ \vec{j}\ \left(\text{N C}^{-1}\right)$$

$$E_{\text{A en F}} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 2\cdot 10^{-6}}{\left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2}\right)^2} \rightarrow E_{\text{A en F}} = 5{,}4\cdot 10^4\ \text{N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_{(\text{A en F})} = \vec{E}_{\text{x (A en F)}} + \vec{E}_{\text{y (A en F)}}$$

$$\vec{E}_{\text{A en F}} = E_{\text{A en F}} \cdot \cos\alpha\,\vec{i} + E_{\text{A en F}} \cdot \operatorname{sen}\alpha\,\vec{j}$$

$$\vec{E}_{\text{A en F}} = 5{,}4 \cdot 10^4 \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2}}\,\vec{i} + 5{,}4 \cdot 10^4 \cdot \frac{1/\left(2\cdot\sqrt{3}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2}}\,\vec{j}$$

$$\vec{E}_{\text{A en F}} = 4{,}7 \cdot 10^4\,\vec{i} + 2{,}7 \cdot 10^4\,\vec{j}\,\left(\text{N C}^{-1}\right)$$

$$\vec{E}_{\text{B en F}} = -4{,}7 \cdot 10^4\,\vec{i} + 2{,}7 \cdot 10^4\,\vec{j}\,\left(\text{N C}^{-1}\right)$$

$$E_{\text{C en F}} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2} \rightarrow E_{\text{C en F}} = 5{,}4 \cdot 10^4 \text{ N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_{\text{C en F}} = -5{,}4 \cdot 10^4\,\vec{j}\,\left(\text{N C}^{-1}\right)$$

$$\vec{E}_{\text{total en F}} = \vec{E}_{\text{A en F}} + \vec{E}_{\text{B en F}} + \vec{E}_{\text{C en F}} \leftrightarrow \boxed{\vec{E}_{\text{total en F}} = \vec{0}\left(\text{N C}^{-1}\right)}$$

b) $W_{\text{D (feito pola forza eléctrica do campo)}}^{\text{F}} = -Q' \cdot (V_{\text{F}} - V_{\text{D}})$

$$V_{\text{total}} = \sum_{\text{i}=1}^{\text{i}=2} V_{\text{i}} = k \sum_{\text{i}=1}^{\text{i}=2} \frac{Q_{\text{i}}}{r_{\text{i}}}\left(\text{sendo } r_{\text{i}} \neq 0\right)$$

$$V_D = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(2 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{0{,}5} + \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{3}/2}\right) \rightarrow V_D = 9{,}28 \cdot 10^4 \text{ V}$$

$$V_{\text{F}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(2 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2}} + \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}}\right) \rightarrow V_{\text{F}} = 9{,}36 \cdot 10^4 \text{ V}$$

$$W_{\text{D}\rightarrow\text{F (feito polas forzas do campo)}} = -1 \cdot 10^{-6} \cdot \left(9{,}36 \cdot 10^4 - 9{,}28 \cdot 10^4\right) \rightarrow W_{\text{D}\rightarrow\text{F (forzas do campo)}} = -8 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

O traballo exterior que hai que facer para que a carga Q' se desprace desde A ata B con velocidade constante coincide co traballo feito pola forza do campo, con signo cambiado:

$$W_{\text{D (feito pola forza exterior)}}^{\text{F}} = -W_{\text{D (feito pola forza eléctrica do campo)}}^{\text{F}} \rightarrow \boxed{W_{\text{D (feito pola forza exterior)}}^{\text{F}} = +8 \cdot 10^5 \text{ J}}$$

c) Calculamos a enerxía potencial electrostática en D, E_{D}, e en F, E_{F}, e comparamos ambos valores.

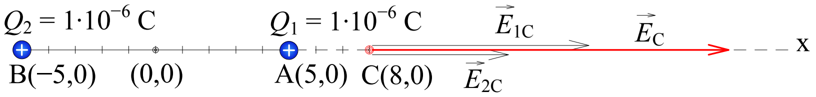
$$\left.\begin{array}{l} E_{\mathrm{D}} = Q' \cdot V_{\mathrm{D}} = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 9{,}28 \cdot 10^{4} = 9{,}28 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{J} \\ \\ E_{\mathrm{F}} = Q' \cdot V_{\mathrm{F}} = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 9{,}36 \cdot 10^{4} = 9{,}36 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{J} \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{E_{\mathrm{F}} > E_{\mathrm{D}}}$$

Cando a carga *Q*' se despraza desde D ata F, a enerxía electrostática do sistema aumenta polo traballo exterior realizado (a carga positiva *Q*' vai desde o punto D de menor potencial ata o punto F de maior potencial non de forma espontánea, senón como consecuencia dunha forza exterior aplicada).

4.- Dúas cargas puntuais iguais Q_1 = 1 μC están situadas nos puntos A(5,0) e B(−5,0). Calcula: a) O campo nos puntos C(8,0) e D (0,4); b) a enerxía para trasladar unha carga de −1 μC desde C a D. Datos: 1 μC = 10^{-6} C; *k* = 9·10^9 N m^2 C^{-2}; as coordenadas en metros. (*Set. 06*).

Solución:

a)



$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{i=2} \vec{E}_{\mathrm{i}}, \text{ sendo: } E_{\mathrm{i}} = \frac{k\, Q_{\mathrm{i}}}{r_{\mathrm{i}}^{2}}$$

$$E_{1\mathrm{C}} = \frac{9 \cdot 10^{9} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{3^{2}} \rightarrow E_{1\mathrm{C}} = 10^{3}\ \mathrm{N\ C^{-1}}$$

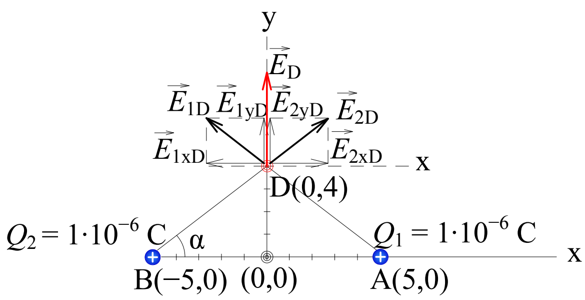
$$\vec{E}_{1\mathrm{C}} = 10^{3}\ \vec{i}\ \left(\mathrm{N\ C^{-1}}\right)$$

$$E_{2\mathrm{C}} = \frac{9 \cdot 10^{9} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{13^{2}} \rightarrow E_{2\mathrm{C}} = 53{,}3\ \mathrm{N\ C^{-1}}$$

$$\vec{E}_{2\mathrm{C}} = 53\,\vec{i}\ \left(\mathrm{N\ C^{-1}}\right)$$

$$\vec{E}_{\mathrm{C}} = \vec{E}_{1\mathrm{C}} + \vec{E}_{2\mathrm{C}} \rightarrow \vec{E}_{\mathrm{C}} = 1000\,\vec{i} + 53\,\vec{i} \rightarrow \boxed{\vec{E}_{\mathrm{C}} = 1053\,\vec{i}\ \left(\mathrm{N\ C^{-1}}\right)}$$

$$E_{1\mathrm{D}} = E_{2\mathrm{D}} = \frac{9 \cdot 10^{9} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{\left(\sqrt{5^{2} + 4^{2}}\right)^{2}}$$



$$E_{1\mathrm{D}} = E_{2\mathrm{D}} = 219{,}5\ \mathrm{N\ C^{-1}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{E}_{1\mathrm{D}} = E_{1\mathrm{x\,D}}\ \vec{i} + E_{1\mathrm{y\,D}}\ \vec{j} \\ \vec{E}_{2\mathrm{D}} = E_{2\mathrm{x\,D}}\ \vec{i} + E_{2\mathrm{y\,D}}\ \vec{j} \\ E_{1\mathrm{x\,D}}\ \vec{i} = -E_{2\mathrm{x\,D}}\ \vec{i} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{E}_{\mathrm{D}} = E_{1\mathrm{y\,D}}\ \vec{j} + E_{2\mathrm{y\,D}}\ \vec{j}$$

$$E_{1y\,D} = E_{2y\,D} = E_{1\,D} \cdot \text{sen}\,\alpha \rightarrow E_{1y\,D} = 219{,}5 \cdot \frac{4}{\sqrt{5^2+4^2}} \rightarrow E_{1y\,D} = 137\ \text{N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_D = 137\,\vec{j} + 137\,\vec{j} \rightarrow \boxed{\vec{E}_D = 274\,\vec{j}\,\left(\text{N C}^{-1}\right)}$$

b)

$$W_{C\,(\text{feito pola forza eléctrica do campo})}^{D} = -Q' \cdot (V_D - V_C)$$

$$V = \sum_{i=1}^{i=2} V_i = \sum_{i=1}^{i=2} \frac{k\,Q_i}{r_i}$$

$$V_D = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{5^2+4^2}} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{5^2+4^2}} \rightarrow V_D = 2811\ \text{V}$$

$$V_C = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{3} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{13} \rightarrow V_C = 3692\ \text{V}$$

$$W_{C\,(\text{feito pola forza eléctrica do campo})}^{D} = -\left(-1 \cdot 10^{-6}\right) \cdot (2811 - 3692) \rightarrow \boxed{W_{C\,(\text{forza do campo})}^{D} = -8{,}81 \cdot 10^{-4}\ \text{J}}$$

$$W_{C\,(\text{feito pola forza exterior})}^{D} = -W_{C\,(\text{feito pola forza eléctrica do campo})}^{D} \rightarrow \boxed{W_{C\,(\text{feito pola forza exterior})}^{D} = +8{,}81 \cdot 10^{-4}\ \text{J}}$$

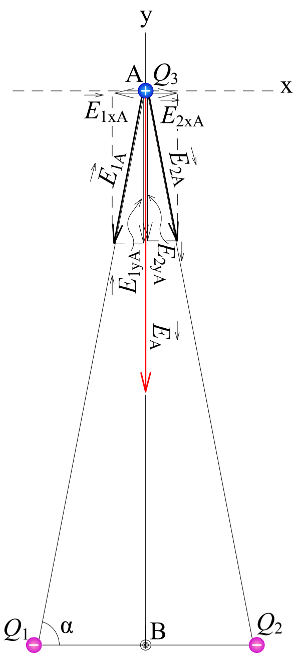
5.- Dúas cargas puntuais negativas e iguais, de 10^{-3} µC, están situadas sobre o eixe de abscisas, separadas unha distancia de 20 cm. A unha distancia de 50 cm sobre a vertical que pasa polo punto medio da liña que as une colócase unha terceira partícula (puntual) de carga $+10^{-3}$ µC e 1 g de masa, inicialmente en repouso. Calcula: a) O campo e o potencial eléctrico creado polas dúas primeiras na posición inicial da terceira; b) a velocidade da terceira carga ó chegar ó punto medio da liña de unión entre as dúas primeiras. Datos: 1 µC = 10^{-6} C; *k* = $9 \cdot 10^9$ N m^2 C^{-2}; só se considera a interacción electrostática. (*Xuño 04*).

Solución:

a)

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{k\,Q_1}{r_1^2}\,\vec{u}_{r1} + \frac{k\,Q_2}{r_2^2}\,\vec{u}_{r2}$$

$$E_1 = E_2 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6}}{\left(\sqrt{0,5^2 + 0,1^2}\right)^2} \rightarrow E_1 = E_2 = 34,6 \text{ N C}^{-1}$$



$$\left.\begin{aligned} \vec{E}_{1\,A} &= E_{1x\,A}\,\vec{i} + E_{1y\,A}\,\vec{j} \\ \vec{E}_{2\,A} &= E_{2x\,A}\,\vec{i} + E_{2y\,A}\,\vec{j} \\ E_{1x\,A}\,\vec{i} &= -E_{2x\,A}\,\vec{i} \\ E_{1y\,A}\,\vec{j} &= E_{2y\,A}\,\vec{j} \end{aligned}\right\} \rightarrow \vec{E}_A = E_{1y\,A}\,\vec{j} + E_{2y\,A}\,\vec{j}$$

$$E_{1y\,A} = E_{1y\,A} \cdot \cos\alpha \rightarrow E_{1y\,A} = 34,6 \cdot \frac{50}{\sqrt{10^2 + 50^2}} \rightarrow E_{1y\,A} = 33,9 \text{ N}$$

$$\vec{E}_A = -33,9\,\vec{j} - 33,9\,\vec{j} \rightarrow \vec{E}_A = -67,8\,\vec{j}\left(\text{N C}^{-1}\right)$$

$$V_A = \sum_{i=1}^{i=2} V_{i\,A} = \sum_{i=1}^{i=2} \frac{k\,Q_i}{r_{i\,A}}$$

$$V_A = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot \left(-10^{-3}\right) \cdot 10^{-6}}{\sqrt{0,5^2 + 0,1^2}} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot \left(-10^{-3}\right) \cdot 10^{-6}}{\sqrt{0,5^2 + 0,1^2}} = -17,7 - 17,7 \rightarrow \boxed{V_A = -35,4 \text{ V}}$$

b) A forza eléctrica que actúa sobre a carga móbil ó longo do seu percorrido non é constante e, en consecuencia, o movemento non é uniformemente variado, non podendo facer uso das fórmulas cinemáticas deste movemento. Pero como esta forza é conservativa, podemos facer uso da conservación da enerxía mecánica:

$$\left.\begin{aligned} W_A^B &= \Delta E_k = E_{kB} - E_{kA} = E_{kB} \\ W_A^B &= -\Delta E_p = -\left(E_{pB} - E_{pA}\right) \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} E_{kB} &= -E_{pB} + E_{pA} \\ E_{kB} &= \frac{1}{2}\,m\,v_B^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2\left(E_{pA} - E_{pB}\right)}{m}}$$

$$E_{pA} = Q_3 \cdot V_{1A} + Q_3 \cdot V_{2A}$$

$$E_{pA} = 10^{-3} \cdot 10^{-6} \cdot (-17,7) + 10^{-3} \cdot 10^{-6} \cdot (-17,7) \rightarrow E_{pA} = -3,54 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

$$E_{pB} = \frac{k\,Q_1\,Q_3}{r_{Q_1-Q_3}} + \frac{k\,Q_2\,Q_3}{r_{Q_2-Q_3}}$$

$$E_{pB} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot \left(-10^{-3}\right) \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6}}{0,1} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot \left(-10^{-3}\right) \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6}}{0,1}$$

$$E_{pB} = -1,8 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(\left(-3{,}54 \cdot 10^{-8}\right) - \left(-1{,}8 \cdot 10^{-7}\right) \right)}{10^{-3}}} \rightarrow \boxed{v_B = 1{,}7 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-1}}$$

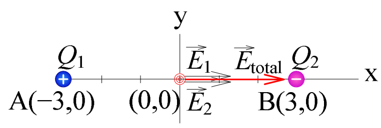
Das condicións do enunciado, cando Q_3 pasa polo eixe de abscisas, a velocidade ten a dirección do eixe de ordenadas, co sentido que vai desde o punto A cara ó B, $-\vec{j}$: $\boxed{\vec{v}_B = -1{,}7 \cdot 10^{-2}\ \vec{j}\ \left(\text{m s}^{-1}\right)}$

6.- Dadas dúas cargas eléctricas, Q_1 = 100 µC situada en A(−3,0) e Q_2 = −50 µC situada en B(3,0) (as coordenadas en metros), calcula: a) O campo e o potencial en (0,0); b) o traballo que hai que realizar para trasladar unha carga de −2 C dende o infinito ata (0,0). Datos: 1 C = 10^6 µC, k = $9 \cdot 10^9$ N m^2 C^{-2}. (*Xuño 02*).

Solución:

a)

$$\vec{E}_{(0,0)} = \sum_{i=1}^{i=2} \vec{E}_{i\,(0,0)}, \text{ sendo: } E_{i\,(0,0)} = \frac{k\,Q_i}{r^2_{i\,(0,0)}}$$



$$E_{1\,(0,0)} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}{3^2} \rightarrow E_{1\,(0,0)} = 10^5 \text{ N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_{1\,(0,0)} = 10^5\ \vec{i}\ \left(\text{N C}^{-1}\right)$$

$$E_{2\,(0,0)} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 50 \cdot 10^{-6}}{3^2} \rightarrow E_{2\,(0,0)} = 5 \cdot 10^4 \text{ N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_{2\,(0,0)} = 5 \cdot 10^4\ \vec{i}\ \left(\text{N C}^{-1}\right)$$

$$\vec{E}_{(0,0)} = \vec{E}_{1(0,0)} + \vec{E}_{2\,(0,0)} = 10^5\ \vec{i} + 5 \cdot 10^4\ \vec{i} \rightarrow \boxed{\vec{E}_{(0,0)} = 1{,}5 \cdot 10^5\ \vec{i}\ \left(\text{N C}^{-1}\right)}$$

$$V_{(0,0)} = \sum_{i=1}^{i=2} V_{i\,(0,0)} = k \sum_{i=1}^{i=2} \frac{Q_i}{r_{i\,(0,0)}}$$

$$V_{(0,0)} = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{\left(100 \cdot 10^{-6}\right)}{3} + \frac{\left(-50 \cdot 10^{-6}\right)}{3} \right) \rightarrow \boxed{V_{(0,0)} = 1{,}5 \cdot 10^5 \text{ V}}$$

b)

$$W^0_{\infty\,(\text{feito pola forza eléctrica do campo})} = -Q' \cdot \Delta V = -Q' \cdot \left(V_0 - V_\infty\right) = -Q' \cdot \left(V_0 - 0\right)$$

$$W^0_{\infty\,(\text{feito pola forza eléctrica do campo})} = -(-2) \cdot \left(1{,}5 \cdot 10^5 - 0\right) \rightarrow \boxed{W^0_{\infty\,(\text{feito pola forza eléctrica do campo})} = 3 \cdot 10^5 \text{ J}}$$

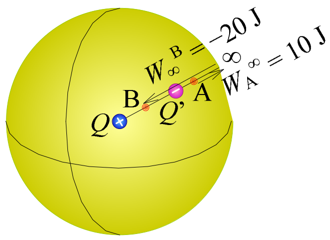
Como o traballo calculado é **positivo**, é realizado de forma espontánea pola forza do **campo**: a carga de -2 C desprázase por acción da forza do campo desde o infinito ata o punto (0,0): as cargas negativas desprázanse espontaneamente desde as zonas de menos potencial ($V_\infty = 0$ V) ás de máis potencial ($V_{(0,0)} = 1{,}5 \cdot 10^5$ V). O traballo exterior que hai que facer para que a carga de -2 C se desprace, desde o infinito ata o punto, a velocidade constante é: $\boldsymbol{W_{\text{exterior}} = -W_{\text{campo}} = -3 \cdot 10^5}$ **J**.

7.- Unha carga puntual *Q* crea un campo electrostático. Ó trasladar outra carba *Q*' desde o punto A ó infinito realízase un traballo de 10 J e se se traslada desde o infinito a B o traballo é de −20 J. a) Que traballo se realiza para trasladar *Q*' de A a B? b) Se *Q*' = −2 C, cal é o signo de *Q*?; que punto está máis próximo de *Q*, o A ou o B? (*Set. 01*).

Solución:

a) $W_{\text{A (exterior)}}^{\text{B}} = W_{\infty\,\text{(exterior)}}^{\text{B}} - W_{\infty\,\text{(exterior)}}^{\text{A}} = W_{\infty\,\text{(exterior)}}^{\text{B}} - \left(-W_{\text{A (exterior)}}^{\infty}\right)$

$$W_{\text{A (exterior)}}^{\text{B}} = (-20) - (-10) \rightarrow \boxed{W_{\text{A (exterior)}}^{\text{B}} = -10\text{ J}}$$



Como o traballo feito por unha forza exterior á do campo eléctrico é negativo; o traballo que desenvolve a forza eléctrica é **positivo** e a carga *Q*' desprázase de A a B de forma espontánea.

b)

$$\left.\begin{array}{l} W_{\text{A (exterior)}}^{\infty} = +Q' \cdot (V_\infty - V_{\text{A}}) = Q' \cdot (0 - V_{\text{A}}) = -Q' \cdot V_{\text{A}} \\ W_{\text{A (exterior)}}^{\infty} = 10\text{ J} > 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -Q' \cdot V_{\text{A}} > 0 \\ Q' < 0 \end{array}\right\} \rightarrow V_{\text{A}} > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} V_{\text{A}} > 0 \\ V_{\text{A}} = \dfrac{k\,Q}{r} \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{Q > 0}$$

Tamén podemos razoar o signo positivo da carga creadora do campo eléctrico, *Q*, da seguinte forma: Como $W_{\text{A (exterior)}}^{\infty} > 0$, o traballo feito pola forza eléctrica do campo eléctrico, $W_{\text{A (campo)}}^{\infty} < 0$ e a carga *Q*' non se despraza espontaneamente por acción das forzas do campo, sendo as carga *Q* e *Q*' de distinto signo. Como a carga *Q*' é negativa, a carga *Q* é positiva.

$$W_{\text{A (exterior)}}^{\infty} = Q' \cdot (V_\infty - V_{\text{A}}) \rightarrow 10 = -2 \cdot (0 - V_{\text{A}}) \rightarrow V_{\text{A}} = 5\text{ V}$$

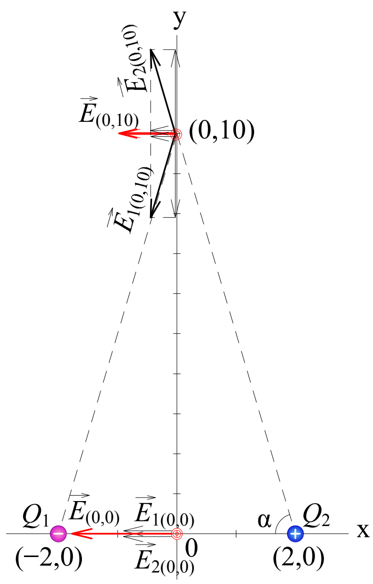
$$W_{\infty\,\text{(exterior)}}^{\text{B}} = Q' \cdot (V_{\text{B}} - V_\infty) \rightarrow -20 = -2 \cdot (V_{\text{B}} - 0) \rightarrow V_{\text{B}} = 10\text{ V}$$

Como o potencial eléctrico é inversamente proporcional á distancia do punto onde se calcula á carga que o crea, **o punto B está máis próximo a *Q* que o A**.

De outra forma: O traballo exterior de desprazar a carga Q' desde A ata B é negativo, $W_{\text{A (exterior)}}^{\text{B}} = -10$ J, e, polo tanto, o traballo $W_{\text{A (campo)}}^{\text{B}} = +10$ J, sendo desenvolto de forma espontánea pola forza do campo eléctrico. Como as cargas Q e Q' son de distinto signo, **o punto B está máis próximo de *Q* que o punto A**.

8.- Dúas cargas eléctricas puntuais de 2 e −2 µC cada unha están situadas respectivamente en (2,0) e en (−2,0) (en metros). Calcula: a) o campo eléctrico en (0,0) e en (0,10); b) o traballo para transportar unha carga *Q'* de −1 µC desde (1,0) a (−1,0). Dato: $k = 9 \cdot 10^9$ N m² C⁻². (*Xuño 01*).

Solución:



a)

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{i=2} \vec{E}_i \text{, sendo: } E_i = \frac{k\,Q_i}{r_i^2}$$

$$E_{1\,(0,0)} = E_{2\,(0,0)} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{2^2}$$

$$E_{1\,(0,0)} = E_{2\,(0,0)} = 4{,}5 \cdot 10^3 \text{ N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_{1\,(0,0)} = \vec{E}_{2\,(0,0)} = -\,4{,}5 \cdot 10^3\,\vec{i}\,\left(\text{N C}^{-1}\right)$$

$$\boxed{\vec{E}_{\text{total}\,(0,0)} = \vec{E}_{1\,(0,0)} + \vec{E}_{2\,(0,0)} = -\,9,\cdot 10^3\,\vec{i}\,\left(\text{N C}^{-1}\right)}$$

$$E_{1\,(0,10)} = E_{2\,(0,10)} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{\left(\sqrt{2^2 + 10^2}\right)^2} \;\rightarrow\; E_{1\,(0,10)} = E_{2\,(0,10)} = 173{,}1 \text{ N C}^{-1}$$

$$E_{1\text{x}\,(0,10)} = E_{2\text{x}\,(0,10)} = E_{1\,(0,10)} \cdot \cos\alpha$$

$$E_{1\text{x}\,(0,10)} = E_{2\text{x}\,(0,10)} = 173{,}1 \cdot 10^3 \cdot \frac{2}{\sqrt{2^2 + 10^2}} \;\rightarrow\; E_{1\text{x}\,(0,10)} = E_{2\text{x}\,(0,10)} = 34{,}0 \text{ N C}^{-1}$$

$$E_{(0,10)} = E_{1\text{x}\,(0,10)} + E_{2\text{x}\,(0,10)} = 34{,}0 + 34{,}0 = 68{,}0 \text{ N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_{(0,10)} = -\,68{,}0\,\vec{i}\,\left(\text{N C}^{-1}\right)$$

b)

$$W_{(1,0)\,(\text{feito pola forza eléctrica do campo})}^{(-1,0)} = -\,Q' \cdot \left(V_{(-1,0)} - V_{(1,0)}\right)$$

$$V = \sum_{i=1}^{i=2} V_i = \sum_{i=1}^{i=2} \frac{k\,Q_i}{r_i}$$

$$V_{(1,0)} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{1} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot \left(-\,2 \cdot 10^{-6}\right)}{3} = 1{,}2 \cdot 10^4 \text{ V}$$

$$V_{(-1,0)} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{3} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot \left(-2 \cdot 10^{-6}\right)}{1} = -1,2 \cdot 10^4 \text{ V}$$

$$W_{(1,0)\,(\text{feito pola forza eléctrica do campo})}^{(-1,0)} = -\left(-1 \cdot 10^{-6}\right) \cdot \left(-1,2 \cdot 10^4 - 1,2 \cdot 10^4\right) \rightarrow \boxed{W_{(1,0)}^{(-1,0)} = -2,4 \cdot 10^{-2} \text{ J}}$$

Se a carga Q' se despraza a velocidade constante, podemos relacionar o traballo desenvolto pola forza eléctrica do campo e traballo exterior segundo a expresión:

$$W_{(1,0)\,(\text{feito pola forza exterior})}^{(-1,0)} = -W_{(1,0)\,(\text{feito pola forza eléctrica do campo})}^{(-1,0)} \rightarrow \boxed{W_{(1,0)\,(\text{feito pola forza exterior})}^{(-1,0)} = +2,41 \cdot 10^{-2} \text{ J}}$$

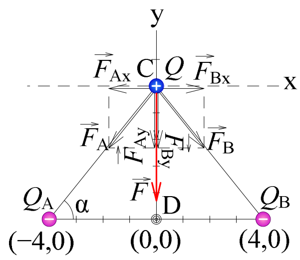
9.- Dúas cargas eléctricas puntuais de −2 µC, están situadas nos puntos A(−4,0) e B(4,0). Calcula: a) a forza sobre unha carga de 1 µC, situada no punto (0,5); b) a velocidade que terá ó pasar polo punto (0,0)? (Datos $k = 9 \cdot 10^9$ N m^2 C^{-2}, masa m = 1 g). (*Xuño 00*).

Solución:

a)

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B$$

$$F_A = \frac{k\, Q_A\, Q}{r^2} \rightarrow F_A = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-6}}{\left(\sqrt{4^2 + 5^2}\right)^2} = 4,4 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$



$$F_{Ax} = F_A \cdot \cos\alpha \rightarrow F_{Ax} = 4,4 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{4}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = 2,75 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

$$F_{Ay} = F_A \cdot \operatorname{sen}\alpha \rightarrow F_{Ay} = 4,4 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{5}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = 3,44 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

$$\vec{F}_A = -2,75 \cdot 10^{-4}\, \vec{i} - 3,44 \cdot 10^{-4}\, \vec{j}\ (\text{N})$$

$$\vec{F}_B = 2,75 \cdot 10^{-4}\, \vec{i} - 3,44 \cdot 10^{-4}\, \vec{j}\ (\text{N})$$

$$\boxed{\vec{F} = -6,88 \cdot 10^{-4}\, \vec{j}\ (\text{N})}$$

b) A forza eléctrica que actúa sobre a carga móbil ó longo do seu percorrido non é constante e, en consecuencia, o movemento non é uniformemente variado, non podendo facer uso das fórmulas cinemáticas deste movemento. Pero como a forza á que está sometida é conservativa, podemos facer uso da conservación da enerxía mecánica:

$$\left.\begin{array}{l} W_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}} = \Delta E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{kD}} - E_{\mathrm{kC}} = E_{\mathrm{kD}} \\ W_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}} = -\Delta E_{\mathrm{p}} = -\left(E_{\mathrm{pD}} - E_{\mathrm{pC}}\right) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} E_{\mathrm{kD}} = -E_{\mathrm{pD}} + E_{\mathrm{pC}} \\ E_{\mathrm{kD}} = \dfrac{1}{2} m\, v_{\mathrm{D}}^2 \end{array}\right\} \rightarrow v_{\mathrm{D}} = \sqrt{\frac{2\left(E_{\mathrm{pC}} - E_{\mathrm{pD}}\right)}{m}}$$

$$E_{\mathrm{PC}} = \frac{k\, Q_{\mathrm{A}}\, Q}{r_{Q_{\mathrm{A}}-Q}} + \frac{k\, Q_{\mathrm{B}}\, Q}{r_{Q_{\mathrm{B}}-Q}}$$

$$E_{\mathrm{PC}} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot \left(-2\cdot 10^{-6}\right)\cdot 10^{-6}}{\sqrt{4^2+5^2}} + \frac{9\cdot 10^9 \cdot \left(-2\cdot 10^{-6}\right)\cdot 10^{-6}}{\sqrt{4^2+5^2}} = -5{,}6\cdot 10^{-3}\ \mathrm{J}$$

$$E_{\mathrm{PD}} = \frac{k\, Q_{\mathrm{A}}\, Q}{r_{Q_{\mathrm{A}}-Q}} + \frac{k\, Q_{\mathrm{B}}\, Q}{r_{Q_{\mathrm{B}}-Q}}$$

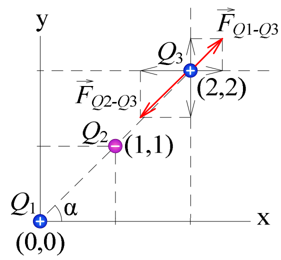
$$E_{\mathrm{PD}} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot \left(-2\cdot 10^{-6}\right)\cdot 10^{-6}}{4} + \frac{9\cdot 10^9 \cdot \left(-2\cdot 10^{-6}\right)\cdot 10^{-6}}{4} = -9{,}0\cdot 10^{-3}\ \mathrm{J}$$

$$v_{\mathrm{D}} = \sqrt{\frac{2\cdot\left(\left(-5{,}6\cdot 10^{-3}\right)-\left(-9{,}0\cdot 10^{-3}\right)\right)}{1\cdot 10^{-3}}} \rightarrow \boxed{v_{\mathrm{D}} = 2{,}6\ \mathrm{m\,s^{-1}}}$$

$$\boxed{\vec{v}_{\mathrm{D}} = -2{,}6\,\vec{j}\ \left(\mathrm{m\,s^{-1}}\right)}$$

10.- Dúas cargas puntuais de 8 µC e −5 µC están situadas respectivamente nos puntos (0,0) e (1,1). Calcula: a) a forza que actúa sobre unha terceira carga de 1 µC situada no punto (2,2), b) o traballo necesario para levar esta última carga desde o punto que ocupa ata o punto (0,1). Datos: $k = 9{,}00\cdot 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}}$; as coordenadas danse en metros. (*Xuño 98*).

Solución:



a) $\vec{F} = \vec{F}_{Q1\text{-}Q2} + \vec{F}_{Q1\text{-}Q3}$

$$F_{Q1-Q3} = \frac{k\, Q_1\, Q_3}{r_{1-3}^2} \rightarrow F_{Q1-Q3} = \frac{9{,}00\cdot 10^9 \cdot 8\cdot 10^{-6}\cdot 1\cdot 10^{-6}}{\left(\sqrt{2^2+2^2}\right)^2} = 9{,}00\cdot 10^{-3}\ \mathrm{N}$$

$$F_{Q2-Q3} = \frac{k\, Q_2\, Q_3}{r_{2-3}^2} \rightarrow F_{Q2-Q3} = \frac{9{,}00\cdot 10^9 \cdot 5\cdot 10^{-6}\cdot 1\cdot 10^{-6}}{\left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^2} = 22{,}50\cdot 10^{-3}\ \mathrm{N}$$

$$\left(F_{Q1-Q3}\right)_{\mathrm{x}} = F_{Q1-Q3}\cdot\cos\alpha \rightarrow \left(F_{Q1-Q3}\right)_{\mathrm{x}} = 9{,}00\cdot 10^{-3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 6{,}36\cdot 10^{-3}\ \mathrm{N}$$

$$\left(F_{Q1-Q3}\right)_y = F_{Q1-Q3} \cdot \text{sen}\,\alpha \rightarrow \left(F_{Q1-Q3}\right)_y = 9{,}00 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 6{,}36 \cdot 10^{-3}\text{ N}$$

$$\vec{F}_{Q1-Q3} = 6{,}36 \cdot 10^{-3}\,\vec{i} + 6{,}36 \cdot 10^{-3}\,\vec{j}\text{ (N)}$$

$$\left(F_{Q2-Q3}\right)_x = F_{Q2-Q3} \cdot \cos\alpha \rightarrow \left(F_{Q2-Q3}\right)_x = 22{,}50 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 15{,}91 \cdot 10^{-3}\text{ N}$$

$$\left(F_{Q2-Q3}\right)_y = F_{Q2-Q3} \cdot \text{sen}\,\alpha \rightarrow \left(F_{Q2-Q3}\right)_y = 22{,}50 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 15{,}91 \cdot 10^{-3}\text{ N}$$

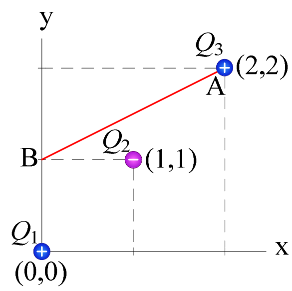
$$\vec{F}_{Q2-Q3} = -15{,}91 \cdot 10^{-3}\,\vec{i} - 15{,}91 \cdot 10^{-3}\,\vec{j}\text{ (N)}$$

$$\vec{F} = 6{,}36 \cdot 10^{-3}\,\vec{i} + 6{,}36 \cdot 10^{-3}\,\vec{j} + \left(-15{,}91 \cdot 10^{-3}\,\vec{i} - 15{,}91 \cdot 10^{-3}\,\vec{j}\right)$$

$$\boxed{\vec{F} = -9{,}55 \cdot 10^{-3}\,\vec{i} - 9{,}55 \cdot 10^{-3}\,\vec{j}\text{ (N)}}$$

b)

$$W_{\text{A (feito pola forza eléctrica do campo)}}^{\text{B}} = -Q \cdot \left(V_{\text{B}} - V_{\text{A}}\right)$$



$$V = \sum_{i=1}^{i=2} V_i = \sum_{i=1}^{i=2} \frac{k\,Q_i}{r_i}$$

$$V_{\text{B}} = \frac{9{,}00 \cdot 10^9 \cdot 8 \cdot 10^{-6}}{1} + \frac{9{,}00 \cdot 10^9 \cdot \left(-5 \cdot 10^{-6}\right)}{1} = 2{,}70 \cdot 10^4\text{ V}$$

$$V_{\text{A}} = \frac{9{,}00 \cdot 10^9 \cdot 8 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{2^2 + 2^2}} + \frac{9{,}00 \cdot 10^9 \cdot \left(-5 \cdot 10^{-6}\right)}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = -6{,}36 \cdot 10^3\text{ V}$$

$$W_{\text{A (da forza eléctrica do campo)}}^{\text{B}} = -1 \cdot 10^{-6} \cdot \left(2{,}70 \cdot 10^4 - \left(-6{,}36 \cdot 10^3\right)\right) \rightarrow \boxed{W_{\text{A (campo)}}^{\text{B}} = 3{,}34 \cdot 10^{-2}\text{ J}}$$

O traballo exterior, W_{exterior}, que hai que facer para que a terceira carga de 1 µC se desprace con velocidade constante desde o punto (2,2) ata o punto (0,1) coincide co traballo feito pola forza do campo, cambiado de signo:

$$W_{\text{A (da forza exterior)}}^{\text{B}} = -W_{\text{A (da forza elétrica do campo)}}^{\text{B}} \rightarrow \boxed{W_{\text{A (da forza exterior)}}^{\text{B}} = -3{,}34 \cdot 10^{-2}\text{ J}}$$

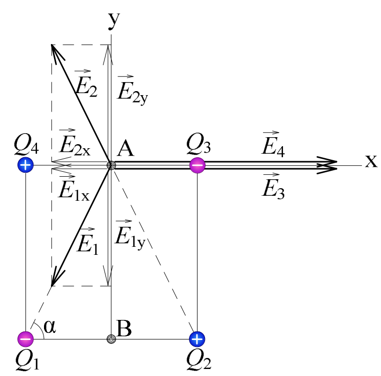
11.- Nos vértices dun cadrado de 1 m de lado sitúanse catro cargas de valores −1, +1, −1 e +1, en µC, de maneira que as de signo igual están en vértices opostos. Calcula: a) O campo eléctrico no punto medio dun calquera dos lados e b) O traballo necesario para desprazar unha

quinta carga de +1 µC desde un a outro punto medio de dous lados calquera. Dato: *k* = 9,00 · 10⁹ N m² C⁻². (*Set. 97*).

Solución:

a)

$$\vec{E}=\sum_{i=1}^{i=4}\vec{E}_i, \text{ sendo: } E_i=\frac{k\,Q_i}{r_i^2}$$



$$E_1=\frac{9,00\cdot 10^9\cdot 1\cdot 10^{-6}}{\left(\sqrt{1^2+0,5^2}\right)^2}\rightarrow E_1=7,2\cdot 10^3\text{ N C}^{-1}$$

$$E_{1x}=E_1\cdot\cos\alpha\rightarrow E_{1x}=7,2\cdot 10^3\cdot\frac{0,5}{\sqrt{1^2+0,5^2}}=3,2\cdot 10^3\text{ N C}^{-1}$$

$$E_{1y}=E_1\cdot\text{sen}\,\alpha\rightarrow E_{1y}=7,2\cdot 10^3\cdot\frac{1}{\sqrt{1^2+0,5^2}}=6,4\cdot 10^3\text{ N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_1=-3,2\cdot 10^3\,\vec{i}-6,4\cdot 10^3\,\vec{j}\,\left(\text{N C}^{-1}\right)$$

$$\vec{E}_2=-3,2\cdot 10^3\,\vec{i}+6,4\cdot 10^3\,\vec{j}\,\left(\text{N C}^{-1}\right)$$

$$E_3=\frac{9,00\cdot 10^9\cdot 1\cdot 10^{-6}}{0,5^2}\rightarrow E_3=3,6\cdot 10^4\text{ N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_3=\vec{E}_4=3,6\cdot 10^4\,\vec{i}\,\left(\text{N C}^{-1}\right)$$

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3+\vec{E}_4$$

$$\vec{E}=\left(-3,2\cdot 10^3\,\vec{i}-6,4\cdot 10^3\,\vec{j}\right)+\left(-3,2\cdot 10^3\,\vec{i}+6,4\cdot 10^3\,\vec{j}\right)+\left(3,6\cdot 10^4\,\vec{i}\right)+\left(3,6\cdot 10^4\,\vec{i}\right)$$

$$\boxed{\vec{E}=6,56\cdot 10^4\,\vec{i}\,\left(\text{N C}^{-1}\right)}$$

b)

$$W_{\text{A (feito pola forza eléctrica do campo)}}^{\text{B}}=-Q\cdot\left(V_B-V_A\right)$$

$$V=\sum_{i=1}^{i=4}V_i=k\sum_{i=1}^{i=4}\frac{Q_i}{r_i}\left(\text{sendo } r_i\neq 0\right)$$

$$V_A=9\cdot 10^9\cdot\left(\frac{\left(-1\cdot 10^{-6}\right)}{\sqrt{1^2+0,5^2}}+\frac{1\cdot 10^{-6}}{\sqrt{1^2+0,5^2}}+\frac{\left(-1\cdot 10^{-6}\right)}{0,5}+\frac{1\cdot 10^{-6}}{0,5}\right)=0\text{ V}$$

$$V_B = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{\left(-1 \cdot 10^{-6}\right)}{0,5} + \frac{1 \cdot 10^{-6}}{0,5} + \frac{\left(-1 \cdot 10^{-6}\right)}{\sqrt{1^2 + 0,5^2}} + \frac{1 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{1^2 + 0,5^2}} \right) = 0 \text{ V}$$

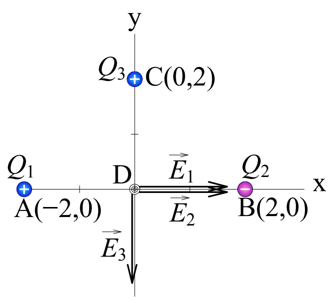
$$\boxed{W_{\text{A (feito pola forza eléctrica do campo)}}^{\text{B}} = 0 \text{ J}}$$

O traballo exterior, W_{exterior}, para que a quinta carga de 1 μC se desprace con velocidade constante coincide co traballo feito pola forza do campo, cambiado de signo: $\boldsymbol{W_{\text{exterior}} = 0}$ **J**.

12.- Dadas as cargas puntuais Q_1 = 80 μC, Q_2 = −80 μC, Q_3 = 40 μC situadas nos puntos A(−2,0), B(2,0) e C(0,2) respectivamente (coordenadas en metros), calcula: a) A intensidade do campo electrostático no punto (0,0) e b) O traballo necesario para traer unha carga de 1 μC desde o infinito ata o punto (0,0). ($k = 9 \cdot 10^9$ N m^2 C^{-2}). (*Xuño 96*).

Solución:

a) $\vec{E} = \sum_{i=1}^{i=3} \vec{E}_i$, sendo: $E_i = \dfrac{k\,Q_i}{r_i^2}$



$$E_1 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 80 \cdot 10^{-6}}{2^2} \rightarrow E_1 = 1,80 \cdot 10^5 \text{ N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_1 = 1,80 \cdot 10^5\, \vec{i}\, \left(\text{N C}^{-1}\right)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_1 = 1,80 \cdot 10^5\, \vec{i}\, \left(\text{N C}^{-1}\right)$$

$$E_3 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 40 \cdot 10^{-6}}{2^2} \rightarrow E_3 = 9,0 \cdot 10^4 \text{ N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_3 = -9,0 \cdot 10^4\, \vec{j}\, \left(\text{N C}^{-1}\right)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = 1,80 \cdot 10^5\, \vec{i} + 1,80 \cdot 10^5\, \vec{i} - 9,0 \cdot 10^4\, \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{E} = 3,6 \cdot 10^5\, \vec{i} - 9,0 \cdot 10^4\, \vec{j}\, \left(\text{N C}^{-1}\right)}$$

b)

$$W_{\infty\,\text{(feito pola forza eléctrica do campo)}}^{\text{D}} = -Q \cdot \left(V_D - V_\infty\right)$$

$$V_D = \sum_{i=1}^{i=3} V_i = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{k\,Q_i}{r_i}$$

$$V_{\mathrm{D}}=\frac{9\cdot 10^{9}\cdot 80\cdot 10^{-6}}{2}+\frac{9\cdot 10^{9}\cdot\left(-80\cdot 10^{-6}\right)}{2}+\frac{9\cdot 10^{9}\cdot 40\cdot 10^{-6}}{2}=1{,}80\cdot 10^{5}\ \mathrm{V}$$

$$V_{\infty}=0\ \mathrm{V}$$

$$W_{\infty\,(\text{da forza eléctrica do campo})}^{\mathrm{D}}=-1\cdot 10^{-6}\cdot\left(1{,}80\cdot 10^{5}-0\right)\ \rightarrow\ \boxed{W_{\infty\,(\text{da forza eléctrica do campo})}^{\mathrm{D}}=-1{,}80\cdot 10^{-1}\ \mathrm{J}}$$

O traballo exterior, W_{exterior}, para traer con velocidade constante a carga de 1 μC desde o infinito ata o punto (0,0) coincide co traballo feito pola forza do campo, cambiado de signo:

$$W_{\infty\,(\text{da forza exterior})}^{\mathrm{D}}=-W_{\infty\,(\text{da forza elétrica do campo})}^{\mathrm{D}}\ \rightarrow\ \boxed{W_{\infty\,(\text{da forza exterior})}^{\mathrm{D}}=1{,}80\cdot 10^{-1}\ \mathrm{J}}$$

Tema 4. CAMPO MAGNÉTICO

EXERCICIOS (Cuestións)

1.- Mapa conceptual dos contidos do tema.

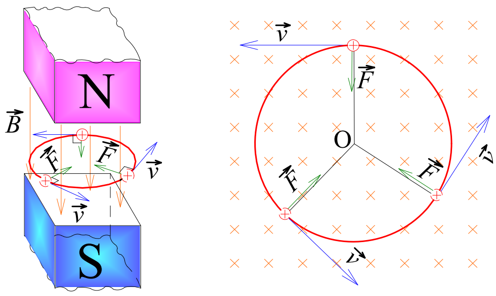
Solución:

Ver páxina 168 do texto "Física" de 2º de Bacharelato, Ed. Baía.

2.- Que movemento tomará unha partícula de masa *m* e carga +*Q* que nun instante determinado se move cunha velocidade $\vec{v}$ perpendicularmente ás liñas de indución dun campo magnético $\vec{B}$, que é estacionario e uniforme[1]?

Solución:

Supoñamos un campo magnético uniforme no que $\vec{B}$ é perpendicular ó plano do papel, sendo o seu sentido cara abaixo. Isto represéntase por ‘‘x’’, como se viramos a parte posterior da frecha que representa ó vector $\vec{B}$ ‘‘↣’’. Se o campo saíra cara ó lector, representariámolo por ‘‘·’’, como se viramos a punta da frecha.



A carga +*Q*, que se move perpendicularmente ó campo $\vec{B}$ cunha velocidade $\vec{v}$, está sometida a unha forza magnética, $\vec{F}$: $\vec{F} = Q \cdot \vec{v} \text{ x } \vec{B}$, de dirección perpendicular ao plano determinado por $\vec{v}$ e a $\vec{B}$ e co sentido de avance dun sacarrollas que xire levando $\vec{v}$ sobre $\vec{B}$ polo camiño máis curto, estando contida no plano do papel, cara ó punto O. As forzas perpendiculares á traxectoria dunha partícula non modifican o módulo da velocidade[2], unicamente fan variar a dirección do movemento. En consecuencia a partícula terá un **movemento uniforme**.

Como *Q*, *v* e *B* son constantes, a forza *F* ($F = Q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen } 90º$) é constante e, en consecuencia, a aceleración *a* ($a = F/m$) tamén é constante e a partícula cargada toma un **movemento circular uniforme**[3]. O raio con que describe este movemento circular calcúlase igualando a forza magnética

[1] Campo magnético estacionario, tamén chamado magnetostático, indica que é constante no tempo (pode ser diferente nos distintos puntos).

Campo magnético uniforme indica que ten a mesma intensidade, dirección e sentido en todos os puntos do espacio (pode variar no tempo).

[2] $$\left.\begin{array}{l} W = \int F \cdot \mathrm{d}r \cdot \cos 90º = 0 \\ W = \Delta E_\mathrm{k} \end{array}\right\} \rightarrow 0 = \Delta E_\mathrm{k} \rightarrow v = \text{cte.} \rightarrow \text{movemento uniforme}$$

[3] $$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} v = \text{cte} \rightarrow \vec{a}_\mathrm{t} = \vec{0} \\ \vec{v} \neq \overrightarrow{\text{cte}} \rightarrow \vec{a}_\mathrm{t} \neq \vec{0} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{a} = \vec{a}_\mathrm{n} = \dfrac{v^2}{r} \cdot \vec{u}_\mathrm{n} \rightarrow a_\mathrm{n} = \dfrac{v^2}{r} \\ a = \text{cte.} \\ v = \text{cte.} \end{array}\right\} \rightarrow r = \text{cte.} \rightarrow \text{circunferencia}$$

Como ademais o módulo da velocidade é constante, a partícula cargada adquire un movemento circular uniforme.

$(Q \cdot v \cdot B)$ á forza centrípeta $m \cdot v^2 / r$: $Q \cdot v \cdot B = \dfrac{m \cdot v^2}{r} \rightarrow r = \dfrac{m \cdot v}{Q \cdot B}$

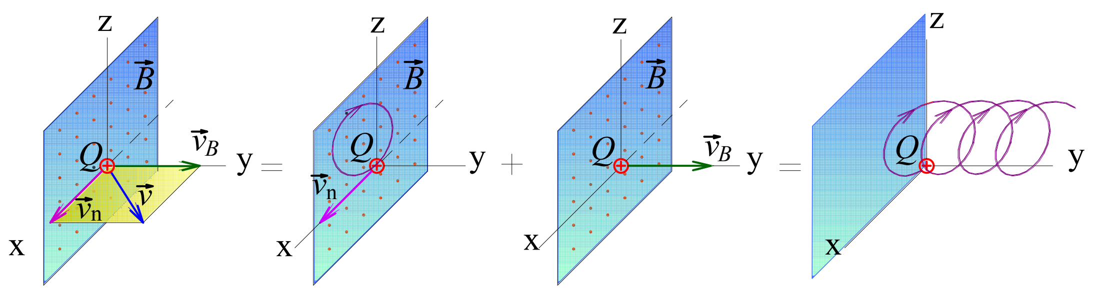
Nesta expresión vemos que o valor do raio é directamente proporcional á cantidade de movemento da partícula cargada: $r \propto m \cdot v = p$.

3.- Que traxectoria describirá unha partícula de masa *m* e carga +*Q* que nun instante determinado se move cunha velocidade $\vec{v}$ nun campo magnético $\vec{B}$, que é estacionario e uniforme, formando a dirección de $\vec{v}$ e $\vec{B}$ un ángulo α?

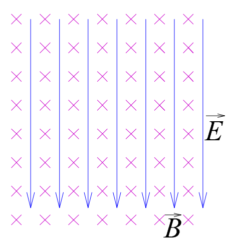
Solución:

Descompoñemos a velocidade $\vec{v}$ da partícula cargada en dúas direccións perpendiculares: unha na dirección de $\vec{B}$, $\vec{v}_B$, e a outra na dirección perpendicular a esta, $\vec{v}_n$.

Como xa vimos na cuestión anterior, o campo magnético $\vec{B}$ exerce unha forza, constante en módulo, sobre a carga *Q*, debido ó compoñente normal, $\vec{v}_n$, da velocidade $\vec{v}$ coa que se move. Esta forza ten a dirección perpendicular á tanxente á traxectoria e cáusalle un movemento circular uniforme. Sen embargo, o campo magnético $\vec{B}$ non exerce ningunha forza sobre a carga *Q* debido ó compoñente da velocidade que é paralelo a $\vec{B}$ ($F = Q \cdot v \cdot \text{sen } 0° = 0$ ou $F = Q \cdot v \cdot \text{sen } 180° = 0$). Polo tanto, o compoñente da velocidade paralelo a $\vec{B}$ é constante e nesta dirección a carga toma un movemento rectilíneo e uniforme. Como consecuencia, a carga seguirá unha traxectoria helicoidal con eixe o da dirección do campo.



4.- Un protón entra cunha velocidade $\vec{v}$ nunha rexión do espazo na que hai un campo magnético $\vec{B}$ e un campo eléctrico $\vec{E}$, ambos estacionarios e uniformes. Os dous campos son perpendiculares entre si e á velocidade do devandito protón, tal como se pode ver na figura. Debuxa as forzas que actúan sobre o protón. Poderá atravesar o protón a rexión dos campos sen desviarse?



Solución:

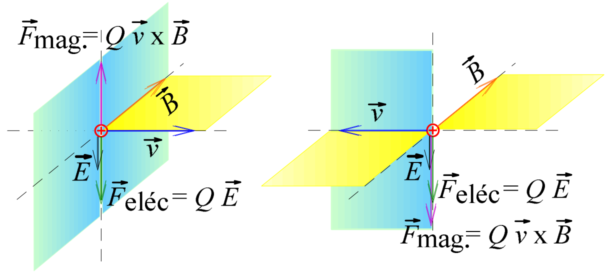
Cando a forza eléctrica e magnética sexan iguais en módulo e dirección, e de sentido contrario, o protón atravesará a rexión dos campos sen desviarse. Isto sucede se se cumpre que: $Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = -Q \cdot \vec{E}$.

Para iso é necesario que:

$\cdot \left|Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}\right| = \left|Q \cdot \vec{E}\right| \rightarrow v \cdot B = E$

· A dirección de $\vec{v} \times \vec{B}$ sexa igual á de $\vec{E}$, feito que se cumpre.

· O sentido de $\vec{v} \times \vec{B}$ sexa contrario ó de $\vec{E}$. As dúas situacións posibles represéntanse nas figuras adxuntas. No primeiro caso, o sentido da $\vec{F}_{\text{magnética}}$ que actúa sobre o protón é contrario ó sentido da $\vec{F}_{\text{eléctrica}}$, resultando, se ademais $v \cdot B = E$, que $\vec{F}_{\text{resultante}} = \vec{0}$ e o protón atravesará a rexión dos campos sen desviarse. No segundo caso, o sentido da $\vec{F}_{\text{magnética}}$ coincide co sentido da $\vec{F}_{\text{eléctrica}}$, sendo a $\vec{F}_{\text{resultante}} \neq \vec{0}$, cunha dirección que non coincide coa de $\vec{v}$, o que significa que o protón cambia a dirección da súa traxectoria.

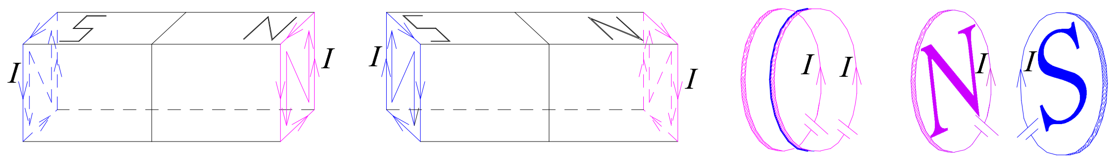


5.- Razoa, en termos de correntes eléctricas, por qué se atraen os polos norte e sur de dous imáns.

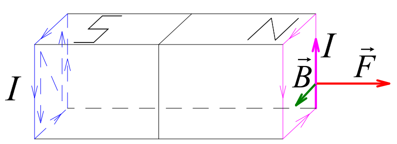
Solución:

A razón do magnetismo está na existencia de correntes eléctricas pechadas no interior dos corpos magnéticos. Os electróns ó xirar nas súas órbitas ou sobre si mesmos (spin), equivalen a correntes circulares elementais que, cando xiran no mesmo plano e co mesmo sentido, causan unha corrente superficial, que crea un campo magnético perpendicular ó plano da órbita.

A corrente circular que aparece no polo norte é de sentido contrario á do polo sur, cando se miran os polos de fronte (no polo norte o sentido é antihorario mentres que no polo sur é horario).



Por tanto, o efecto total de enfrontar un polo norte e un polo sur de dous imáns é como se enfrontaramos dúas espiras paralelas percorridas por correntes do mesmo sentido (cando se miran desde o mesmo lado), aparecendo entre elas forzas de atracción.



$\vec{F} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$

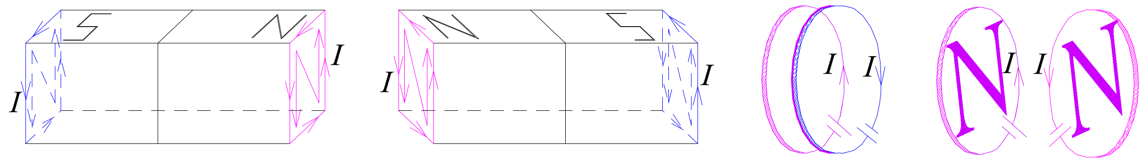
$\vec{B}$: é o vector de indución magnética creado pola corrente da cara sur do 2º imán.

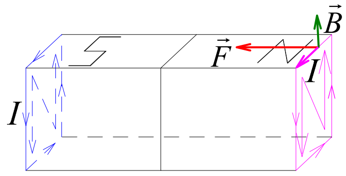
$\vec{F}$: é a forza magnética que aparece sobre a corrente I.

6.- Ídem á anterior, pero agora a repulsión entre os polos iguais de dous imáns.

Solución:

Igual á anterior pero agora ó enfrontar polos de igual nome é como se enfrontaramos espiras paralelas percorridas por correntes en sentido contrario (cando se miran desde o mesmo lado), aparecendo forzas de repulsión.





$\vec{F} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$

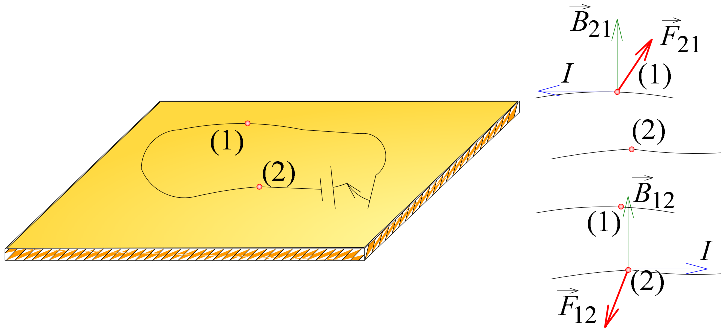
$\vec{B}$: é o vector de indución magnética creado pola corrente da cara norte do 2º imán.

$\vec{F}$: é a forza magnética de repulsión que aparece sobre a corrente I.

7.- Tense un circuíto formado por un condutor moi flexible percorrido por unha corrente de gran intensidade, situado sobre unha mesa sen rozamento; estuda como é a forza magnética (dirección e sentido) que actúa sobre o condutor debida á corrente que percorre a dúas porcións opostas de condutor e di, como consecuencia da forza magnética, que forma xeométrica tende a tomar o condutor. (Nota: considera cada dúas porcións opostas de circuíto como dúas correntes paralelas).

Solución:

Como cada dúas porcións opostas de condutor se poden considerar como paralelas, ó circular polo fío unha corrente eléctrica é como se de dúas correntes paralelas de sentido contrario se tratara, aparecendo entre elas forzas de repulsión perpendiculares ó condutor, de maneira que o circuíto adquire forma de circunferencia.



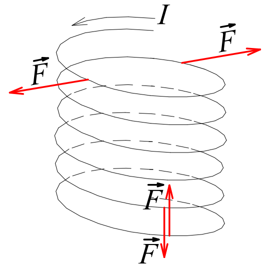
$\vec{F}_{21}$ é a forza que aparece no punto (1) debido ó campo magnético creado pola corrente que pasa polo punto (2)

$\vec{F}_{21}$ é a forza que aparece no punto (2) debido ó campo magnético creado pola corrente que pasa polo punto (1)

8.- Igual á cuestión anterior pero agora para un resorte. (Nota: cada dúas espiras constitúen dúas correntes paralelas).

Solución:

Cada dúas espiras consecutivas percorridas por unha corrente eléctrica constitúen dúas correntes paralelas do mesmo sentido, aparecendo forzas atractivas entre elas.



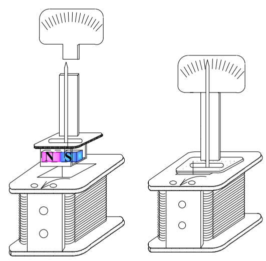
Ademais, como as correntes dentro dunha mesma espira son diametralmente opostas, actúa unha forza que as ensancha -véxase cuestión anterior-.

En resumo: **o resorte encóllese e ensánchase**.

9.- Explica o funcionamento do galvanómetro elemental de imán móbil utilizado no laboratorio: imán móbil unido perpendicularmente a unha agulla que se despraza solidariamente -co imán- sobre unha escala, introducido nunha bobina.

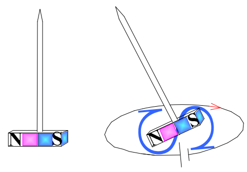
Como inflúe o número de espiras da bobina na desviación da agulla?

Por que ó afastar o imán do interior da bobina se fai máis pequena a desviación da agulla?



Solución:

O galvanómetro do que falamos consiste nun imán móbil que leva unido unha pequena agulla cunha dirección perpendicular á da dirección N-S do imán.



En ausencia de corrente eléctrica, o imán adopta unha posición horizontal. Ó facer pasar unha corrente pola bobina, aparece dentro desta un campo magnético ($B \propto I$) que fai orientar ó imán. Orientación que é directamente proporcional ó valor do campo magnético producido pola corrente. E, como esta B é directamente proporcional á I, coa desviación da agulla medimos a intensidade I.

O número de espiras da bobina inflúe aumentando o valor de $\vec{B}$ creado dentro dela e, como consecuencia, aumentando a desviación da agulla.

Se afastamos o imán móbil do interior da bobina, o campo magnético que o atravesa é menor e, como consecuencia, a agulla tamén se desvía menos.

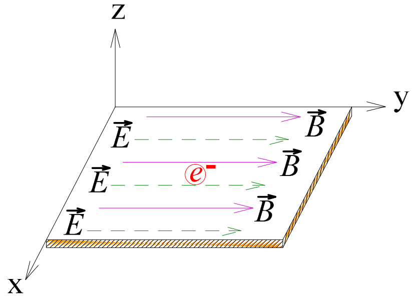
10.- Estuda o tipo de movemento que toma un electrón que abandonamos con velocidade nula nunha rexión do espazo onde hai un campo eléctrico e outro magnético, ambos uniformes, estacionarios e paralelos entre si.

Solución:

O tipo de movemento que unha partícula toma depende de como sexa a forza que sobre ela actúe. O electrón, ó estar situado nun campo electromagnético, vai estar sometido a unha:

· Forza eléctrica: $\vec{F}_{\text{eléctrica}} = Q \cdot \vec{E} = \overrightarrow{\text{cte.}}$, sendo Q a carga do electrón e $\vec{E}$ a intensidade de campo eléctrico. Esta forza constante ten a dirección do campo eléctrico e o sentido contrario a este, causándolle ó electrón un movemento rectilíneo uniformemente acelerado.

· Forza magnética: $\vec{F}_{\text{magnética}} = Q \cdot \vec{v} \cdot \vec{B}$, sendo $\vec{v}$ a velocidade coa que se move a carga Q (electrón) dentro do campo magnético de indución $\vec{B}$. Esta forza vale:



·· Inicialmente:

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}_{\text{magnética}} &= Q\,\vec{v} \times \vec{B} \\ \vec{v} &= \vec{0} \end{aligned}\right\} \rightarrow \vec{F}_{\text{magnética}} = \vec{0}$$

·· Unha vez que a carga se pon en movemento debido á forza eléctrica:

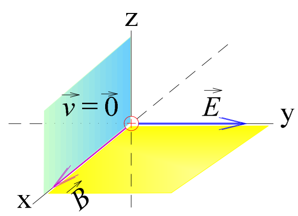
$$\left.\begin{aligned} \vec{F}_{\text{magnética}} &= Q\,\vec{v} \times \vec{B} \\ \vec{v} &\text{ paralela a } \vec{B} \end{aligned}\right\} \rightarrow \vec{F}_{\text{magnética}} = \vec{0}$$

En resumo, a forza resultante que actúa sobre o electrón é constante en módulo, dirección e sentido: $\vec{F}_{\text{resultante}} = \overrightarrow{\text{cte.}}$, coincidindo a dirección da forza coa do movemento do electrón, e o **movemento** que este toma é **rectilíneo uniformemente acelerado**.

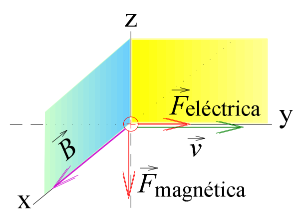
11.- Nunha rexión do espazo, na que hai un campo magnético e outro eléctrico, ambos estacionarios, uniformes e perpendiculares entre si, abandonamos un protón $(\vec{v} = \vec{0})$; poderá o protón atravesar a rexión dos campos sen desviarse?

Solución:

Para saber se o protón poderá atravesar a rexión dos campos eléctrico e magnético sen desviarse, imos estudar como é a forza que actúa sobre el.



Como inicialmente o protón está en repouso, a única forza que sobre el actúa é a forza eléctrica: $\vec{F}_{\text{eléctrica}} = Q \cdot \vec{E}$, que é constante e ten igual dirección e sentido que o campo eléctrico, $\vec{E}$. Debido a esta forza, o protón adquire un movemento de aceleración constante, na dirección e sentido do campo eléctrico.



Cando o protón adquire unha velocidade, $\vec{v}$, o vector $\vec{B}$ exerce unha forza magnética: $\vec{F}_{\text{magnética}} = Q \cdot \vec{v} \cdot \vec{B}$, de dirección perpendicular ó plano determinado por $\vec{v}$ e $\vec{B}$ e , no sentido de avance dun sacarrollas que xire levando $\vec{v}$ sobre $\vec{B}$ polo camiño máis curto. Esta forza, que é perpendicular á velocidade $\vec{v}$ do protón, fai variar a dirección do seu movemento.

O resultado é que protón se despraza no plano determinado polas dúas forzas, cambiando constantemente a dirección da súa traxectoria.

12.- É posible que unha partícula con carga eléctrica atravese unha rexión do espazo onde existe un campo eléctrico e outro magnético sen desviarse? Razoa a resposta. (*Selectividade COU*; *set. 01*).

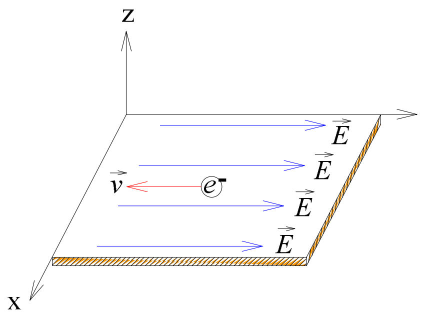
Solución:

Unha partícula móvese sen desviar a súa traxectoria cando:

· A resultante das forzas que actúan sobre a partícula é cero (a partícula posúe un movemento rectilíneo e uniforme, m.r.u.).

· A dirección da resultante das forzas que actúan sobre a partícula coincide coa dirección da súa velocidade (a partícula posúe un movemento rectilíneo variado, m.r.v.).

Para o caso dunha partícula cargada que se move nun campo electromagnético pode ter lugar cando:



·· A partícula eléctrica está en repouso e os vectores campo eléctrico, $\vec{E}$, e magnético, $\vec{B}$, sexan paralelos ou

·· A dirección da velocidade, $\vec{v}$, da partícula coincide coa dirección de $\vec{E}$ e de $\vec{B}$.

Nestes casos, a forza eléctrica, $\vec{F}_{\text{eléctrica}} = Q \cdot \vec{E}$, que actúa sobre a partícula ten a mesma dirección que a do campo eléctrico, $\vec{E}$, e a forza magnética, $\vec{F}_{\text{magnética}} = Q \cdot \vec{v} \cdot \vec{B}$, é nula, xa que a dirección de $\vec{v}$ coincide coa de $\vec{B}$. En consecuencia, se $\vec{E}$ é estacionario e uniforme, a partícula móvese cun movemento uniformemente variado de dirección rectilínea.

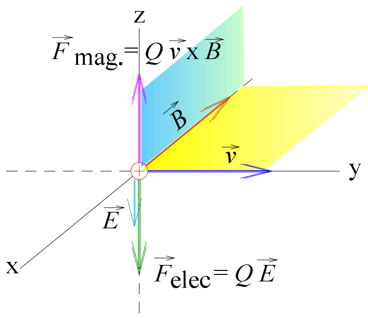
A carga eléctrica tamén pode atravesar a rexión dos campos eléctrico e magnético sen desviar a súa traxectoria se os vectores $\vec{E}$ e $\vec{B}$ son perpendiculares entre si e, á súa vez, á velocidade da carga (isto causa que as direccións das forzas eléctrica e magnética son iguais) e ademais se cumpre que:

· $v \cdot B = E$ e

· O sentido de $\vec{v} \times \vec{B}$ é contrario ó de $\vec{E}$.

Que se cumpran estas condicións equivale a:

$$Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = -Q \cdot \vec{E} \rightarrow \vec{F}_{\text{magnética}} = -\vec{F}_{\text{eléctrica}} \rightarrow \vec{F}_{\text{resultante}} = \vec{0}$$



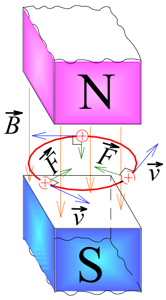
E **a partícula desprázase sen desviarse cun movemento rectilíneo e uniforme**.

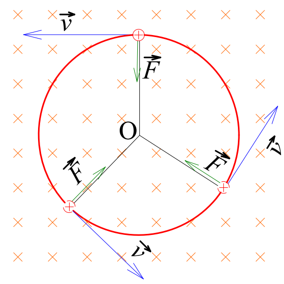
13.- Unha partícula cargada penetra nunha rexión na que existe un campo magnético uniforme. A dirección da velocidade inicial é perpendicular ó campo. Que traxectoria describe a partícula?; como varía a enerxía cinética? Xustifica as respostas. (*Selectividade COU*; *xuño 01*).

Solución:

Supoñamos un campo magnético uniforme no que $\vec{B}$ é perpendicular ó plano do papel e dirixido cara abaixo.

Se a carga $+Q$ se move perpendicularmente ó campo $\vec{B}$ cunha velocidade $\vec{v}$, está sometida a unha forza magnética $\vec{F}_{\text{magnética}} = Q \cdot \vec{v} \cdot \vec{B}$, perpendicular a $\vec{v}$ e a $\vec{B}$ e contida no plano do papel cara ó punto O. As forzas perpendiculares á traxectoria dunha partícula non modifican o módulo da velocidade[4], unicamente fan variar a dirección do movemento. En consecuencia, a partícula terá un **movemento uniforme**.

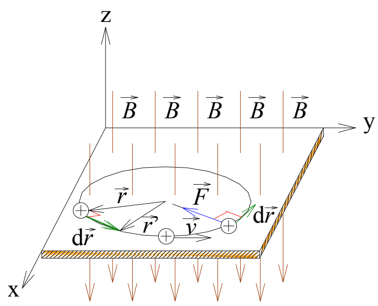




Como Q, v e B son constantes, a forza F ($F = Q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen } 90^{\circ}$) é constante e a aceleración a ($a = F/m$) tamén o é e a partícula cargada toma un **movemento circular uniforme**[5]. O raio con que describe este movemento circular calcúlase igualando a forza magnética $(Q \cdot v \cdot B)$ á forza centrípeta $(m \cdot v^2 / r)$:

$$Q \cdot v \cdot B = m \cdot v^2 / r \quad \rightarrow \quad r = m \cdot v / (Q \cdot B)$$

Unha partícula de masa m, que describe un movemento circular uniforme, está sometida a unha aceleración normal, que é causada por unha forza normal, que é a forza magnética de Lorentz: $\vec{F} = Q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$, de dirección perpendicular ó plano determinado polos vectores $\vec{v}$ e $\vec{B}$. O traballo desta forza obtense coa expresión: $W = \int \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{r} = \int F\, \mathrm{d}r \cos 90^{\circ} = 0$, **non disipando**, a carga, **enerxía en forma de traballo**.



14.- Unha corrente eléctrica circula por un condutor rectilíneo, que atravesa equidistante entre os polos norte e sur dun imán dobrado en forma de U. Ponlle o sentido que queiras á corrente eléctrica, e explica que dirección e sentido ten a forza que actúa sobre o condutor. (*Selectividade COU*; *set. 00*).

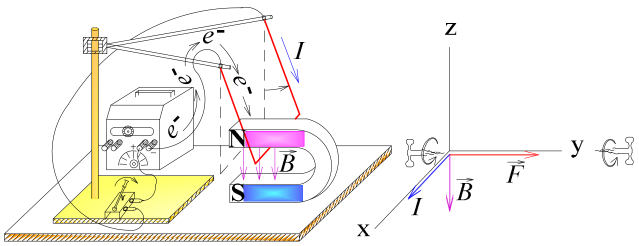
Solución:

---

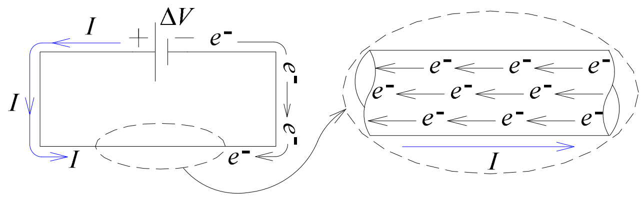
4 $$\left.\begin{array}{l} W = \int F \cdot \mathrm{d}r \cdot \cos 90^{\circ} = 0 \\ W = \Delta E_{\mathrm{k}} \end{array}\right\} \rightarrow \; 0 = \Delta E_{\mathrm{k}} \; \rightarrow \; v = \text{cte.} \; \rightarrow \; \text{movemento uniforme}$$

5 $$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} v = \text{cte} \; \rightarrow \; \vec{a}_{\mathrm{t}} = \vec{0} \\ \vec{v} \neq \overrightarrow{\text{cte}} \; \rightarrow \; \vec{a}_{\mathrm{t}} \neq \vec{0} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{a} = \vec{a}_{\mathrm{n}} = \dfrac{v^2}{r} \cdot \vec{u}_{\mathrm{n}} \; \rightarrow \; a_{\mathrm{n}} = \dfrac{v^2}{r} \\ \hfill a = \text{cte.} \\ \hfill v = \text{cte.} \end{array}\right\} \rightarrow \; r = \text{cte.} \; \rightarrow \; \text{circunferencia}$$

Como ademais o módulo da velocidade é constante, a partícula cagada adquire un movemento circular uniforme.



Sabemos que sobre unha corrente eléctrica (cargas en movemento) de intensidade *I*, que circula por un condutor de lonxitude *l*, situado dentro dun campo magnético de indución $\vec{B}$, actúa unha forza magnética, $\vec{F}$, que vén sendo a suma das forzas de Lorentz que actúan sobre cada electrón. A expresión desta forza $\vec{F}$ é: $\vec{F} = I \cdot \vec{l} \text{ x } \vec{B}$, sendo o vector $\vec{l}$ o do cacho de condutor que está dentro de $\vec{B}$ e que ten a dirección e o sentido da corrente.



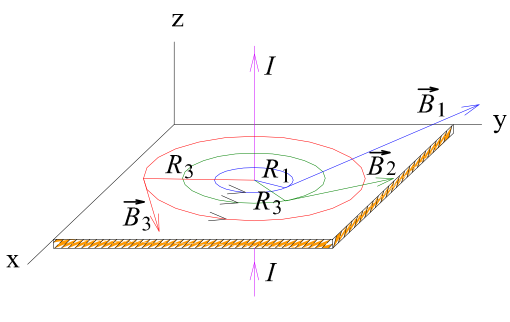
Consideremos que a dirección da corrente eléctrica (que é como se se desprazasen cargas positivas, que van de máis a menos potencial) é a do eixe x, co sentido positivo deste, $\vec{i}$, e que a dirección de $\vec{B}$ (que por fóra do imán vai de polo norte a polo sur) é a do eixe z, co sentido negativo deste, $-\vec{k}$. En consecuencia, a dirección da forza magnética, $\vec{F}$, que actúa sobre o condutor percorrido pola corrente *I*, que é a perpendicular ó plano determinado por $\vec{l}$ e $\vec{B}$, é a do eixe y e o seu sentido é o de avance dun sacarrollas que xire levando o vector $\vec{l}$ sobre o $\vec{B}$ polo camiño máis curto: O da parte positiva do eixe y $\left(\vec{j}\right)$.

A igual resultado chegamos se consideramos o sentido da corrente electrónica: o sentido de movemento dos electróns. Os electróns (cargas negativas) van desde a zona de menos potencial cara á de máis potencial e, para o caso que nos ocupa, teñen o sentido da parte negativa do eixe x, $-\vec{i}$. Con esta nova consideración, $\vec{l}$ e $\vec{B}$ seguen determinando o plano xz e, polo tanto, a dirección da forza magnética coincide coa do eixe y. O seu sentido é o contrario ó de avance dun sacarrollas que xire levando o condutor $\vec{l}$ (que agora ten o sentido do movemento das cargas negativas) sobre $\vec{B}$ polo camiño máis curto, resultando o da parte positiva do eixe y: $\vec{j}$.

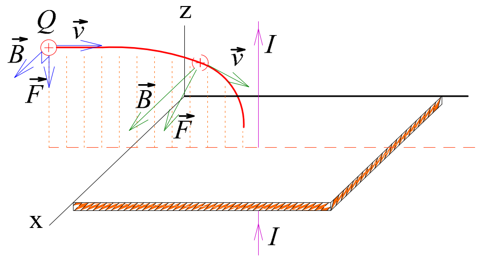
15.- Unha carga *Q*, que se move con velocidade constante, diríxese en dirección perpendicular cara a un condutor rectilíneo polo que circula unha intensidade de corrente constante *I*. Debuxa e explica a traxectoria que seguirá a carga *Q*. (*Selectividade COU*; *xuño 00*).

Solución:

A carga *Q*, que se move cunha velocidade $\vec{v}$ dentro do campo magnético de indución $\vec{B}$, creado pola corrente rectilínea indefinida de intensidade *I*, está sometida á forza de Lorentz: $\vec{F} = Q\left(\vec{v} \text{ x } \vec{B}\right)$. A dirección desta forza é perpendicular á velocidade $\vec{v}$ da carga e ó vector campo magnético $\vec{B}$ creado pola corrente eléctrica. A aceleración que a carga adquire:



· Non ten compoñente tanxencial, permanecendo constante o módulo da súa velocidade.



· Ten compoñente normal, causándolle unha variación na dirección da súa traxectoria.

Por outro lado, o valor da forza, $\vec{F}$, aumenta a medida que a carga Q se acerca ó fío condutor, xa que non é uniforme: $\vec{B} = \dfrac{2\,K'\,I}{R}\,\vec{u}_B$, sendo R a distancia perpendicular que separa o condutor do punto onde se estuda $\vec{B}$. Isto fai que a aceleración normal non sexa constante:

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} F = Q\cdot v\cdot B\cdot \text{sen } 90^{\circ} \\ B \neq \text{cte.} \end{array}\right\} \to F \neq \text{cte.} \\ F = F_n = m\cdot a_n \\ m = \text{cte.} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} a_n \neq \text{cte.} \\ a_n = \dfrac{v^2}{r} \\ v = \text{cte.} \end{array}\right\} \to r \neq \text{cte.}$$

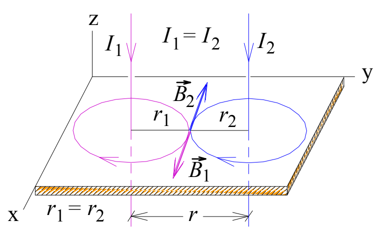
Como $\vec{B}$ aumenta a medida que a carga Q se acerca cara ó fío condutor, a forza e a aceleración normal aumentan e o raio de curvatura da traxectoria descrita pola carga, r, diminúe, non sendo circular.

Nota: Neste caso, en que o campo magnético aumenta a medida que a carga Q avanza, acercándose cara ó fío condutor, pode demostrarse que o módulo da velocidade $\vec{v}$ de avance da carga non é constante, senón que vai diminuíndo e, se $\vec{B}$ é suficientemente intenso, a partícula pode chegar a retroceder.

16.- Consideremos o campo magnético debido a dous condutores rectilíneos, paralelos e indefinidos, que transportan correntes iguais no mesmo sentido. É o campo no punto medio entre os dous condutores, no plano común ós dous, máis débil ou máis forte que o campo debido a cada un dos condutores por separado? Que ocorre se as correntes circulan en sentidos opostos? Razóese. (*Selectividade COU*; *set. 99*).

Solución:

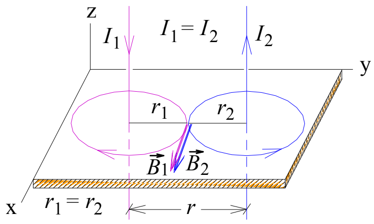
Unha corrente eléctrica, rectilínea e indefinida, de intensidade I, crea, a unha distancia r do condutor, un campo magnético, $\vec{B}$, de:



· Módulo: $B = \dfrac{2\,K'\,I}{r}$

· Dirección: tanxente á liña de indución que pasa polo punto onde se estuda.

· Sentido: o da liña de indución; que podemos encontrar coa regra da man dereita ou a do sacarrollas.



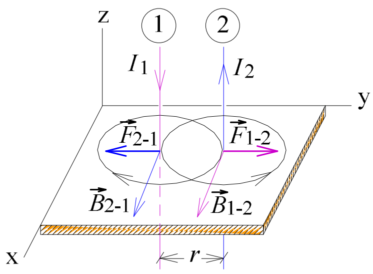
Nas condicións da cuestión, para o caso de correntes no mesmo sentido, $\vec{B}_1 = -\vec{B}_2$ e, en consecuencia, $B_{\text{total}} = 0 < B_1 = B_2$

Para o caso de que as correntes sexan de sentido contrario: $\vec{B}_1 = \vec{B}_2$ e $\vec{B}_{\text{total}} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 > \vec{B}_1 = \vec{B}_2$.

17.- Por dous condutores paralelos e próximos entre si circulan correntes eléctricas en sentidos opostos. Contesta razoadamente se os condutores se atraen, se repelen ou se non exercen ningunha forza entre si. (*Selectividade COU*; *xuño 99*).

Solución:

Sexan os condutores rectilíneos e paralelos 1 e 2, percorridos polas correntes eléctricas I_1 e I_2 de sentidos contrarios, como se indica no debuxo.



A corrente eléctrica I_1 crea, onde está o condutor 2, o campo magnético $\vec{B}_{12} = B_{12}\,\vec{i}$.

O condutor 2, percorrido pola corrente eléctrica I_2, está sometido á forza magnética $\vec{F}_{12} = I_2\,\vec{l}_2 \text{ x } \vec{B}_{12}$, sendo $\vec{l}_2$ un vector que ten a dirección e o sentido da corrente I_2: $\vec{F}_{12} = I_2\,l_2\,B_{12}\,\vec{j}$.

Por outro lado, a corrente eléctrica I_2 crea, onde está o condutor 1, o campo magnético $\vec{B}_{21} = B_{21}\,\vec{i}$.

O condutor 1, percorrido pola corrente eléctrica I_1, está sometido á forza magnética $\vec{F}_{21} = I_1\,\vec{l}_1 \text{ x } \vec{B}_{21}$, sendo $\vec{l}_1$ un vector que ten a dirección e o sentido da corrente I_1: $\vec{F}_{21} = -I_1\,l_1\,B_{21}\,\vec{j}$.

En consecuencia, as **forzas magnéticas** que aparecen sobre os dous condutores **son repulsivas**.

18.- Indica como se moverá un protón, inicialmente en repouso, nunha rexión do espazo con campo magnético e electrostático paralelos e uniformes. Razoa a resposta. (*Selectividade COU*; *set. 98*).

Solución:

Ver resposta á cuestión nº 10.

19.- Xustifica se un electrón pode ou non moverse nun campo magnético sen desviarse. (*Selectividade COU*; *xuño 95*).

Solución:

Unha partícula desprázase sen variar a dirección da súa traxectoria se a resultante das forzas que actúan sobre ela é nula (movemento rectilíneo uniforme) ou se a dirección da forza resultante coincide coa dirección da súa velocidade (movemento rectilíneo variado).

A forza, $\vec{F}$, á que está sometido o electrón de carga Q, que se move cunha velocidade nunha rexión do espazo na que hai un campo magnético de indución $\vec{B}$, vén dada pola lei de Lorentz: $\vec{F} = Q\left(\vec{v} \text{ x } \vec{B}\right)$.

En ausencia doutros campos, esta forza magnética $\vec{F}$, que é sempre perpendicular á velocidade $\vec{v}$ da carga, será a única que actúa sobre o electrón e de existir, como a súa dirección non coincide coa da velocidade, non sería posible que se mova sen variar a dirección da súa traxectoria.

Pero na lei de Lorentz vemos que a forza magnética, $\vec{F}$, pode ser nula cando as direccións de $\vec{v}$ e de $\vec{B}$ sexan paralelas:

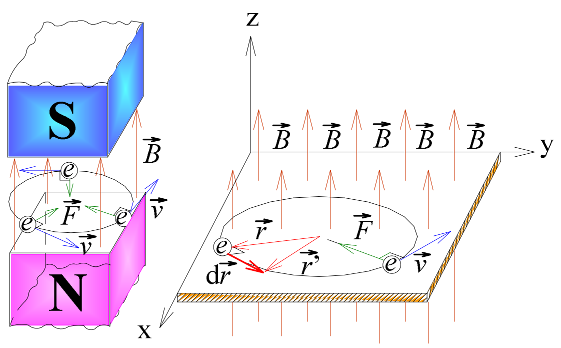
$$\left.\begin{array}{l}\vec{F} = Q\,\vec{v} \text{ x } \vec{B} \\ \vec{v} \text{ paralela a } \vec{B}\end{array}\right\} \rightarrow \vec{F} = \vec{0}$$

En consecuencia, **un electrón pode moverse nun campo magnético sen sufrir desviación**.

20.- Un electrón describe órbitas circulares en presenza dun campo magnético $\vec{B}$ uniforme perpendicular á órbita. Disipa enerxía en forma de traballo este electrón? Por que? (*Selectividade COU*; *set. 94*).

Solución:

O movemento circular que describe o electrón, dentro do campo magnético $\vec{B}$, estacionario, uniforme e perpendicular á órbita, é uniforme, xa que a forza magnética $\left(\vec{F}_{\text{magnética}} = Q\,\vec{v} \text{ x } \vec{B}\right)$ que actúa sobre o electrón é de dirección perpendicular á velocidade $\vec{v}$ e as forzas normais á traxectoria dunha partícula non modifican o módulo da velocidade, unicamente fan variar a súa dirección. En consecuencia resulta:



$$\left.\begin{array}{l}v = \text{cte.} \\ E_k = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot v^2\end{array}\right\} \rightarrow E_k = \text{cte.} \rightarrow \left.\begin{array}{r}\Delta E_k = 0 \\ W = \Delta E_k\end{array}\right\} \rightarrow W = 0$$

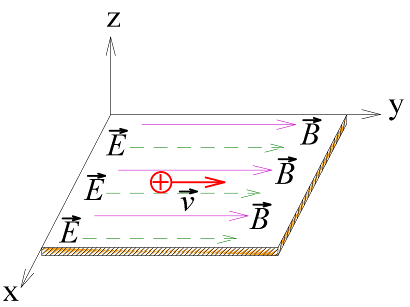
A igual resultado chegamos a partir da definición de traballo: $W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$.

O electrón, que se move cun movemento circular uniforme, está sometida a unha aceleración normal, que é causada por unha forza normal. O traballo desta forza vale:

$W = \int F \cdot \mathrm{d}r \cdot \cos 90^\circ = 0$, non disipando, o electrón, enerxía en forma de traballo.

21.- Un protón pasa por unha rexión do espazo sen sufrir desviación. Pode deso deducirse que non existen alí campos electromagnéticos? Razoa a resposta. (*Selectividade COU*; *xuño 94*).

Solución:



Unha partícula, que se move cunha velocidade $\vec{v}$, non desvía a súa traxectoria cando:

· A resultante das forzas que actúan sobre ela sexa cero.

· A dirección da resultante das forzas, que actúan sobre ela, coincida coa dirección da súa velocidade.

Polo tanto, o protón pode moverse en presenza de campos electromagnéticos sen sufrir desviación se a dirección de $\vec{E}$ e de $\vec{B}$ coinciden coa dirección da velocidade $\vec{v}$ do protón. Neste caso, a forza magnética que $\vec{B}$ exerce sobre o protón é nula:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F}_{\text{magnética}} = Q \cdot \vec{v} \cdot \vec{B} \\ \vec{v} \text{ paralela a } \vec{B} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{F}_{\text{magnética}} = \vec{0}$$

e a forza eléctrica, $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$, exercida polo campo eléctrico, $\vec{E}$, ten a mesma dirección que a velocidade do protón:

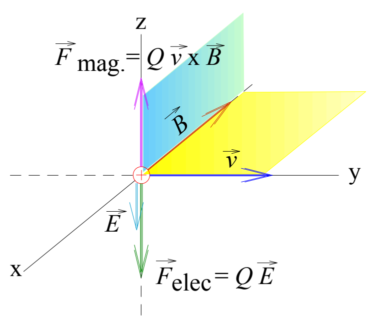
$$\left.\begin{array}{l} \vec{F}_{\text{eléctrica}} = Q \cdot \vec{E} \\ \vec{F}_{\text{eléctrica}} = m \cdot \vec{a} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{a} = \frac{Q \cdot \vec{E}}{m}$$

O protón adquire unha aceleración tanxencial, que non lle modifica a súa traxectoria.

Polo tanto, nestas condicións, o protón atravesa unha rexión de campos electromagnéticos sen sufrir desviacións, non podendo deducir deste feito que non existen tales campos.

O protón tamén se move sen variar a dirección da súa traxectoria cando: $\vec{F}_{\text{magnética}} = -\vec{F}_{\text{eléctrica}}$. Tal circunstancia pode ter lugar para o caso de que os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, estacionarios e uniformes, sexan perpendiculares entre si e á velocidade do devandito protón. Isto sucede se se cumpre: $Q\,\vec{v} \text{ x } \vec{B} = -Q\,\vec{E}$. Para isto é necesario que:

· $\left|Q\,\vec{v} \text{ x } \vec{B}\right| = \left|Q\,\vec{E}\right| \rightarrow v\,B = E$



· A dirección de $\vec{v} \text{ x } \vec{B}$ coincida coa de $\vec{E}$, feito que se cumpre.

· O sentido de $\vec{v} \text{ x } \vec{B}$ sexa contrario ó de $\vec{E}$; situación que ten lugar para o caso da figura.

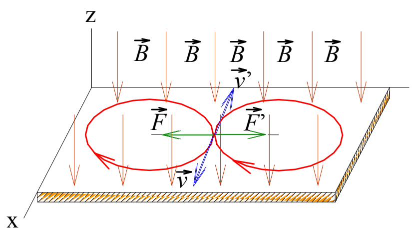
Como todas estas condicións son posibles, o protón si que pode atravesar unha rexión de campos electromagnéticos sen sufrir desviación e, en consecuencia, **non se pode deducir que non existan campos electromagnéticos**.

22.- Nunha rexión do espazo está definido un campo magnético uniforme $\vec{B}$ dirixido de arriba abaixo. Dispáranse horizontalmente dous electróns no mesmo punto do espazo e con idéntica velocidade pero en sentidos opostos. Considerando soamente a existencia do campo magnético, estuda a traxectoria que describirán. (*Selectividade COU*; *set. 93*).

Solución:

Sabemos que unha carga Q en movemento, en presenza dun campo magnético, $\vec{B}$, está sometida a unha forza magnética, $\vec{F}$, que vén dada pola expresión: $\vec{F} = Q\left(\vec{v} \text{ x } \vec{B}\right)$.

Esta forza é perpendicular ó plano determinado polos vectores $\vec{v}$ e $\vec{B}$ e o seu sentido (para unha carga negativa) é o contrario ó de avance dun sacarrollas que leve $\vec{v}$ sobre $\vec{B}$ polo camiño máis curto.



Sobre os electróns vai actuar a forza magnética de Lorentz, que é de dirección perpendicular á velocidade coa que se moven, e adquiren unha aceleración normal (que lles causa unha variación na dirección da súa traxectoria) pero non tanxencial (permanecendo constante o módulo da súa velocidade[6]).

Como Q, v e B son constantes, o módulo da forza $\vec{F}$ ($F = Q{\cdot}v{\cdot}B{\cdot}\text{sen } 90°$) que actúa sobre os electróns é constante e móvense cunha aceleración, $\vec{a}$, de módulo constante: $a = F/m = \text{cte.}$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} v = \text{cte.} \rightarrow \vec{a}_\text{t} = \vec{0} \\ \overrightarrow{\vec{v} \neq \text{cte.}} \rightarrow \vec{a} \neq \vec{0} \\ \vec{a} = \vec{a}_\text{t} + \vec{a}_\text{n} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{a} = \vec{a}_\text{n} = \dfrac{v^2}{r}\,\vec{u}_\text{n} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a = \text{cte.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad v = \text{cte.} \end{array}\right\} \rightarrow r = \text{cte.} \rightarrow \text{circunferencia}$$

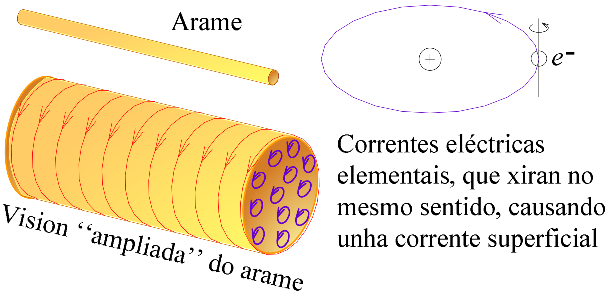
Cada electrón describe un movemento circular uniforme de raio r, que vistos no sentido de $\vec{B}$ móvense no sentido horario, sendo a traxectoria dos electróns tanxente no punto de lanzamento.

23.- Poden separarse os polos dun imán? Córtanse as liñas de forza magnéticas? Xustifica as respostas. (*Selectividade COU*; *set. 92*).

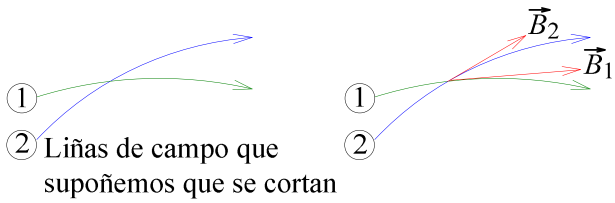
Solución:

6 $$\left.\begin{array}{l} W = \int F \cdot \text{d}r \cdot \cos 90° = 0 \\ W = \Delta E_\text{k} \end{array}\right\} \rightarrow 0 = \Delta E_\text{k} \rightarrow v = \text{cte.} \rightarrow \text{movemento uniforme}$$

O magnetismo débese a correntes eléctricas pechadas, orientadas no mesmo sentido, debidas ó movemento das cargas eléctricas. O sentido (horario ou antihorario) destas correntes é función do lado polo que as observemos, correspondéndolle a cada sentido da corrente un determinado polo magnético.



En consecuencia, a presenza simultánea do polo norte e sur dun imán débese á mesma causa que crea o magnetismo e os polos magnéticos son inseparables.



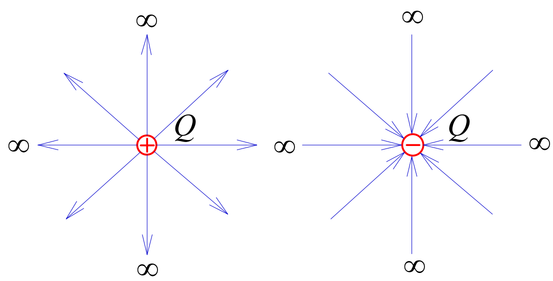
O vector campo magnético, $\vec{B}$, e as liñas de indución magnética son tanxentes en cada punto. De cortarse dúas liñas de indución, no punto de corte habería dúas tanxentes (unha a cada liña) e dous valores de $\vec{B}$ e isto é imposible, xa que a cada punto correspóndelle un único valor de $\vec{B}$ **.**

24.- Que son liñas vectoriais dun campo? Como son as liñas do campo electrostático e as do magnetostático? Razoa a resposta. (*Selectividade COU*; *xuño 92*).

Solución:

Dise que nunha rexión do espazo hai definido un **campo vectorial,** $\vec{V}$**,** cando a magnitude $\vec{V}$ soamente depende das coordenadas (x,y,z) de cada punto. Para o caso de que $\vec{V}$ sexa unha forza, trátase dun **campo de forzas**. Así, o campo eléctrico dunha carga Q é un campo de forzas xa que calquera outra carga Q', colocada no espazo que rodea á carda Q creadora do campo, está sometida a unha forza que só é función da posición.

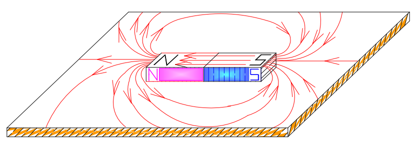
Un campo vectorial represéntase graficamente por **liñas de campo**, que no caso dun campo de forzas chámanse **liñas de forza**. Estas liñas indican, en cada punto, a dirección e o sentido do vector intensidade de campo, xa que ambos (liña de forza e intensidade) son tanxentes e teñen o mesmo sentido. Ademais informan do valor da perturbación, segundo a densidade do número de liñas de forza.



As liñas de forza non se poden cortar xa que se o fixeran, no punto de corte, habería dous valores distintos do vector intensidade de campo, o cal non é posible.

As liñas de forza do campo eléctrico son abertas e saen das cargas positivas ou do infinito (fontes) e terminan nas cargas negativas ou no infinito (sumidoiros).

As liñas do campo magnetostático, (chamadas liñas de indución e non liñas de forza, porque non sinalan a dirección da forza magnética), son pechadas, debido a que os polos dun imán non se poden separar. Por convenio, van do polo norte ó sur por



fóra do imán e péchanse no seu interior de sur a norte.

25.- Xustifica por que as liñas do campo magnético son pechadas. (*Selectividade COU*; *set. 92*).

Solución:

As liñas de indución do campo magnético son pechadas, debido a que os polos dun imán non se poden separar. Por convenio van do polo norte ó sur, por fóra do imán, e péchanse no seu interior de sur a norte.

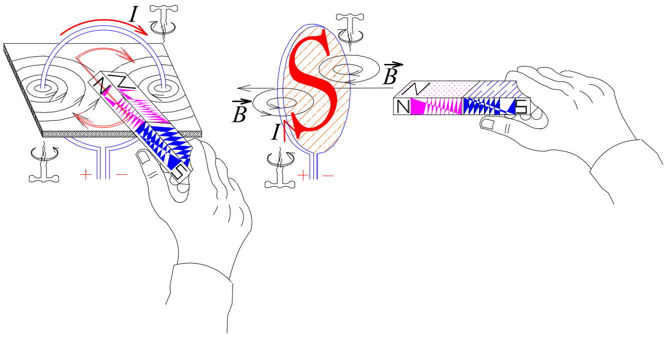
Tamén o podemos razoar recordando que o fluxo do campo magnético $\vec{B}$ a través dunha superficie pechada S é nulo, xa que entran e saen o mesmo número de liñas de indución, debido a que estas son pechadas.

26.- Se se aproxima o polo norte dun imán á cara dunha espira percorrida por unha corrente eléctrica no sentido horario, fai a elección razoada do que lle sucede á espira de entre unha das seguintes opcións: a) repélea, b) non lle ocorre nada, c) atráena.

Solución:

Unha espira percorrida por unha corrente eléctrica de intensidade I compórtase como un imán, coa súa cara norte e sur, que é función do sentido da corrente.

A cara da espira percorrida pola corrente eléctrica no sentido horario compórtase como un polo sur e é atraída polo acercamento do polo norte dun imán.



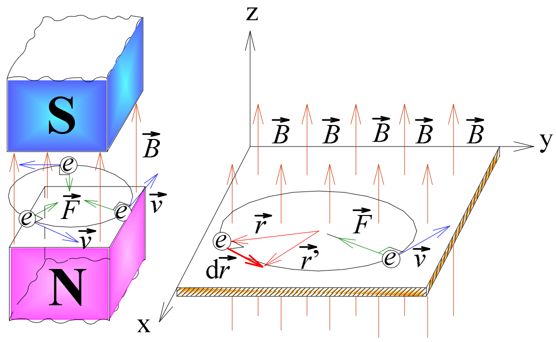
27.- Un electrón móvese dentro dun campo magnético describindo un movemento circular uniforme. Contesta razoadamente as seguintes preguntas: a) o campo magnético é estacionario e uniforme?; b) o electrón está sometido a algunha forza? (en caso afirmativo di que relación garda a dirección da forza coa da traxectoria); c) disipa enerxía o electrón?

Solución:

a) Imos empezar recordando que forza causa un movemento circular uniforme:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Por ser uniforme: } v = \text{ cte.} \rightarrow a_{\text{t}} = 0 \\ \text{Por ser circular: } \vec{v} \neq \overrightarrow{\text{cte.}} \rightarrow \vec{a} \neq \vec{0} \\ \text{Ademais, cumprese que: } \vec{a} = \vec{a}_{\text{t}} + \vec{a}_{\text{n}}\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}\vec{a} = \vec{a}_{\text{n}} \\ a_{\text{n}} = \dfrac{v^2}{r} \\ r = \text{cte.}\end{array}\right\} \rightarrow a_{\text{n}} = \text{cte.}$$

En consecuencia, sobre o electrón actúa unha forza de módulo constante e de dirección normal á tanxente da traxectoria, tendo o sentido cara ó interior da curva. Esta forza é a que o campo magnético $\vec{B}$ exerce sobre o electrón, que vén dada pola expresión:



$$\vec{F} = Q\,(\vec{v} \times \vec{B}) \;\rightarrow\; F = Q\, v\, B \operatorname{sen} \alpha\,,$$

sendo Q a carga do electrón, v ó módulo da velocidade coa que se move e α o ángulo que forma $\vec{v}$ e $\vec{B}$.

Como F, Q, v e α son constantes, $\vec{B}$ tamén o ten que ser, tanto no tempo (**campo estacionario**) como no espazo (**campo uniforme**).

b) Só no caso de que o electrón estea en repouso ou en movemento rectilíneo e uniforme, a resultante das forzas será nula (primeira lei de Newton). Como o electrón posúe un movemento circular uniforme, sobre el actúa unha forza, e a forza que causa este tipo de movemento é de módulo constante e de dirección perpendicular á tanxente á traxectoria, apuntando cara á parte interior da curva. Esta forza é a **forza de Lorentz**: $\vec{F} = Q\,(\vec{v} \times \vec{B})$.

c) Como o electrón posúe un m.c.u., o módulo da súa velocidade permanece constante e a súa enerxía cinética non varía e a forza **non realiza traballo**: $W = \Delta E_k = 0$.

28.- Nunha rexión do espazo, na que hai un campo magnético $\vec{B}$ estacionario e uniforme, lánzase desde a orixe de coordenadas unha carga +Q coa velocidade $\vec{v}$ = (0,v,0), resultando que a carga se move con movemento rectilíneo e uniforme (m.r.u.). Se esta carga se lanzase coa velocidade $\vec{v}' = (\mathrm{v},0,0)$, estuda que tipo de movemento adquire.

Solución:

Unha partícula cargada, que se move cunha velocidade $\vec{v}$ nun campo magnético $\vec{B}$, está sometida á forza de Lorentz: $\vec{F} = Q\,(\vec{v} \times \vec{B})$.

Ó coñecer que a carga +Q se despraza cun movemento rectilíneo e uniforme, sabemos que a resultante das forzas que sobre ela actúan vale cero (primeira lei de Newton) e, para que isto ocorra, a dirección de $\vec{v}$ hai de coincidir coa de $\vec{B}$:

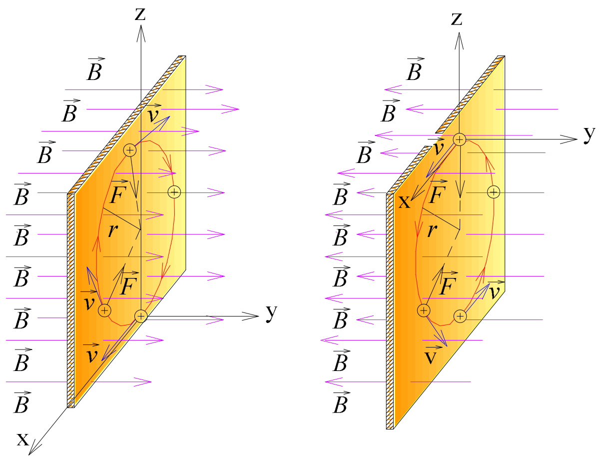
$$F = Q \cdot v \cdot B \cdot \operatorname{sen} 0^{\circ} \;\rightarrow\; F = 0\ \mathrm{N}$$
$$F = Q \cdot v \cdot B \cdot \operatorname{sen} 180^{\circ} \;\rightarrow\; F = 0\ \mathrm{N}$$

Polo tanto, o vector campo magnético, $\vec{B}$, ten a dirección do eixe y, podendo ser o seu sentido o de $\vec{j}$ ou o de $-\vec{j}$.

Cando a partícula se lanza na dirección do eixe x e no sentido positivo deste, $\vec{v}$ e $\vec{B}$ son perpendiculares e a forza de Lorentz é:

· De dirección perpendicular á velocidade da partícula. Esta forza perpendicular á traxectoria non modifica o módulo da velocidade, unicamente fai variar a dirección do movemento.

· De módulo constante: $F = Q\,v\,B$



Como Q, v e B son constantes, a forza e, en consecuencia, a aceleración á que está sometida a partícula tamén son constantes, posuíndo un movemento circular uniforme, que ten lugar no plano xz. Para $\vec{B} = B\,\vec{j}$, o sentido do movemento, visto desde a parte positiva do eixe y e co sentido negativo deste, é o horario. Se $\vec{B} = -B\,\vec{j}$, móvese cun sentido antihorario.

29.- Considera un condutor rectilíneo e indefinido polo que circula unha corrente eléctrica. Estuda que lle sucede ó vector campo magnético, $\vec{B}$, que esta corrente crea para o caso de que: a) se reduza á metade o valor da intensidade; b) se triplique a distancia que hai desde o punto onde se estuda $\vec{B}$ ó condutor; c) se inverta o sentido da corrente.

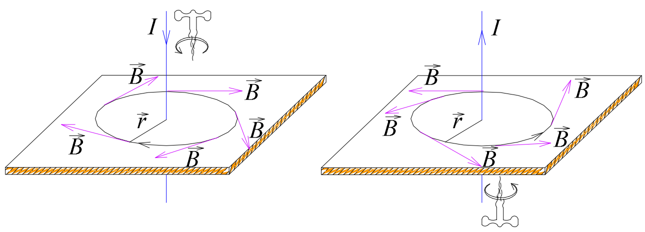
Solución:

a) O vector campo magnético, $\vec{B}$, creado por unha corrente eléctrica rectilínea e indefinida de intensidade I, a unha distancia R do condutor, vén dada pola expresión: $\vec{B} = \dfrac{2\,K\,I}{R}\,\vec{u}_B$.

Desta expresión dedúcese que se I pasa a $I/2$; o vector campo magnético tamén pasa a ter un valor metade: $\vec{B}' = \vec{B}/2$.

b) Se R pasa a $3R$, o vector campo magnético faise tres veces menor: $\vec{B}' = \vec{B}/3$.

c) A dirección de $\vec{B}$ é tanxente á liña de indución, que pasa polo punto onde se estuda, sendo unha circunferencia con centro o condutor e perpendicular a este. E o sentido de $\vec{B}$ é o de xiro dun sacarrollas que avance co sentido da corrente. Polo tanto, se se inverte o sentido da corrente, tamén se inverte o sentido de $\vec{B}$.



30.- Unha espira condutora circular de 50 cm de raio está situada nun campo magnético, $\vec{B}$, estacionario e uniforme de 0,2 T. Calcula o fluxo magnético que atravesa á espira para o caso de que o plano da espira estea situado: a) perpendicularmente ó vector $\vec{B}$; b) paralelamente ó vector $\vec{B}$.

Solución:

O fluxo magnético, Φ, que atravesa á espira de sección S, situada dentro do campo magnético $\vec{B}$, vén dado pola expresión: $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos \alpha$. Substituíndo os datos do enunciado resulta:

$\Phi = 0,2 \cdot \pi \cdot 0,50^2 \cdot \cos 0º \rightarrow \Phi = 0,16$ Wb

$\Phi = 0,2 \cdot \pi \cdot 0,50^2 \cdot \cos 90º \rightarrow \Phi = 0,0$ Wb

31.- Considera unha espira circular de raio *r*, percorrida por unha corrente eléctrica de intensidade *I*, e situada no plano xz. Estuda que lle sucede ó vector campo magnético, $\vec{B}$, que esta corrente crea no centro desta espira para o caso de que: a) se duplique o valor de *I*; b) se substitúa a espira por unha bobina de 200 espiras, con iguais características xeométricas; c) se cambie o sentido da corrente na espira.

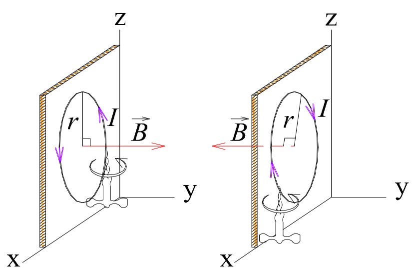
Solución:

a) O vector campo magnético, $\vec{B}$, creado no centro dunha espira circular de raio r pola que circula unha corrente I vén dada pola expresión: $\vec{B} = \frac{2\,\pi\,K\,I}{r}\,\vec{u}_B$.

Desta expresión dedúcese que **se se duplica o valor de *I*; o vector campo magnético tamén se duplica**: $\vec{B}' = 2 \cdot \vec{B}$.

b) Se en vez de 1 espira son N espiras, a expresión do vector campo magnético $\vec{B}$ é: $\vec{B} = N\,\frac{2\,\pi\,K\,I}{r}\,\vec{u}_B$. En consecuencia, **se se substitúe a espira por unha bobina de 200 espiras**, con iguais características xeométricas, **o vector campo magnético vese aumentado 200 veces:** $\vec{B}' = 200 \cdot \vec{B}$.

c) A dirección de $\vec{B}$ é perpendicular ó plano da espira e o seu sentido é o de xiro dun sacarrollas que avance co sentido da corrente eléctrica. Tamén se pode recoñecer coa regra da man dereita: Se ó coller o condutor coa man dereita, o dedo polgar indica a dirección e sentido da corrente, o resto dos dedos curvados sinalan a dirección e o sentido das liñas de indución do campo magnético creado pola corrente. Polo tanto, **se a corrente cambia de sentido, tamén cambia o sentido de $\vec{B}$: $\vec{B}' = -\vec{B}$.**



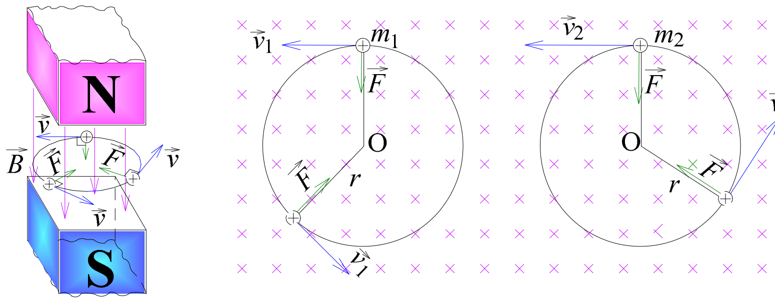
32.- Dúas partículas, unha de masa m_1 e outra de masa m_2, posúen a mesma carga *Q* e penetran perpendicularmente nun mesmo campo magnético $\vec{B}$, describindo circunferencias de igual raio, *r*. Que relación existe entre as cantidades de movemento de ambas partículas?

Solución:

Unha partícula de carga Q, que se move cunha velocidade $\vec{v}$ dentro dun campo magnético $\vec{B}$, está sometida á forza magnética de Lorentz: $\vec{F} = Q(\vec{v} \text{ x } \vec{B})$, que é perpendicular á dirección da velocidade $\vec{v}$. As forzas perpendiculares á traxectoria dunha partícula non modifican o módulo da velocidade, unicamente fan variar a dirección do movemento. En consecuencia, as partículas teñen un movemento uniforme; como ademais describen circunferencias de raio *r*, posúen un movemento circular uniforme.

O raio con que describe este movemento circular calcúlase igualando a forza magnética $(Q \cdot v \cdot B)$ á forza centrípeta $\left(m \cdot v^2 / r\right)$:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F}_{\text{magnética}} = \vec{F}_{\text{normal}} \\ \vec{F} = Q\,\vec{v} \text{ x } \vec{B} \\ \vec{F}_{\text{normal}} = \dfrac{m\,v^2}{r}\,\vec{u}_{\text{n}}\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} Q\,v\,B \text{ sen } 90^{\circ} = \dfrac{m\,v^2}{r} \rightarrow Q\,B\,r = m\,v \\ p = m\,v\end{array}\right\} \rightarrow Q\,B\,r = p$$



Como Q, B e r son iguais para ás dúas partículas, o módulo da cantidade de movemento, p, tamén é o mesmo: $p_1 = p_2$. A dirección de $\vec{p}_1$ e de $\vec{p}_2$, en cada punto, é tanxente, respectivamente á circunferencia que describe m_1 e m_2 e, como ademais a carga das dúas partículas é de igual signo, xiran no mesmo sentido, resultando que $\vec{p}_1 = \vec{p}_2$ (só de forma ocasional a posición de $\vec{p}_1$ coincide coa de $\vec{p}_2$ porque $v_1 \neq v_2$).

33.- Elixe razoadamente a contestación correcta nas seguintes cuestións:

· 33.1 Unha carga eléctrica crea un campo magnético $\vec{B}$ cando esta carga está: a) en repouso; b) en movemento; c) en repouso ou en movemento; d) nunca.

· 33.2 Un campo magnético $\vec{B}$ exerce unha forza sobre unha carga Q que se move cunha velocidade $\vec{v}$: a) sempre; b) nunca; c) ás veces.

· 33.3 Un campo magnético $\vec{B}$ exerce unha forza sobre unha carga Q cando esta carga está: a) en repouso; b) en movemento; c) en repouso ou en movemento; d) en ningún caso.

· 33.4 As liñas de indución magnética indican a dirección das forzas magnéticas: a) sempre; b) nunca; c) ás veces.

· 33.5 Unha partícula cargada, que inicialmente se move cunha velocidade $\vec{v}$ na dirección do vector campo magnético, $\vec{B}$, que é estacionario e uniforme, describe: a) un movemento circular e uniforme; b) un movemento circular uniformemente variado; c) un movemento rectilíneo uniformemente variado; d) un movemento rectilíneo e uniforme.

· 33.6 Un protón móvese a través da materia e, debido ós choques, vai perdendo

gradualmente enerxía cinética. Se na rexión na que se move o protón hai un campo magnético, uniforme e estacionario, dirixido perpendicularmente á súa velocidade, a traxectoria que describe é: a) circular; b) rectilínea; c) en espiral.

Solución:

· **33.1** O vector campo magnético, $\vec{B}$, creado por unha carga *Q*, que se move cunha velocidade $\vec{v}$, nun punto situado a unha distancia *r* vén dado pola expresión: $\vec{B} = K' \dfrac{Q(\vec{v} \text{ x } \vec{u}_r)}{r^2}$, sendo $\vec{u}_r$ o vector unitario de $\vec{r}$ **.**

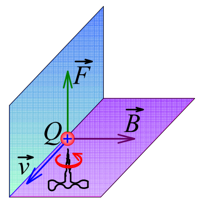
Polo tanto, **para que exista un $\vec{B}$ é necesario que a carga que o crea estea en movemento**: $\vec{v} \neq \vec{0}$ (opción b).

· **33.2** A forza magnética $\vec{F}$, exercida por un campo magnético $\vec{B}$, sobre unha carga eléctrica *Q*, que se move cunha velocidade $\vec{v}$, vén dada pola lei de Lorentz: $\vec{F} = Q(\vec{v} \text{ x } \vec{B})$.

Polo tanto, para que un campo magnético $\vec{B}$ exerza unha forza sobre unha carga *Q* que se move cunha velocidade $\vec{v}$, é necesario que o seno do ángulo formado entre $\vec{v}$ e $\vec{B}$ sexa distinto de cero. En consecuencia, **só ás veces**, a forza é distinta de cero (opción c).

· **33.3** Como xa se dixo anteriormente, a forza $\vec{F}$ exercida por un campo magnético $\vec{B}$ sobre unha carga *Q* vén dada pola lei de Lorentz: $\vec{F} = Q(\vec{v} \text{ x } \vec{B})$, sendo $\vec{v}$ a velocidade da carga *Q*. Polo tanto, é necesario que **a carga** estea **en movemento para que poida existir forza magnética** (opción b).

· **33.4** O campo magnético pode representarse graficamente mediante liñas de campo, chamadas liñas de indución, que son tanxentes, en cada punto, ó vector indución magnética $\vec{B}$.



Se recordamos que a forza magnética $\vec{F}$, exercida sobre unha carga *Q*, que se move cunha velocidade $\vec{v}$ nun campo magnético de indución $\vec{B}$, vén dada pola lei de Lorentz, $\vec{F} = Q(\vec{v} \text{ x } \vec{B})$, vemos que $\vec{F}$ é perpendicular a $\vec{B}$ e, en consecuencia, **as liñas de indución magnética nunca indican a dirección das forzas magnéticas** (opción b). Por esta razón, as liñas de campo magnético non son liña de forza, como ocorría nos campos gravitatorio e eléctrico.

· **33.5** Como a causa que modifica o movemento dunha partícula é a forza, imos estudar que forza magnética é a que actúa sobre a partícula cargada cunha carga *Q*, que se move cunha velocidade $\vec{v}$ nunha rexión do espazo na que hai un campo magnético $\vec{B}$, estacionario e uniforme. Esta forza vén dada pola lei de Lorentz: $\vec{F} = Q(\vec{v} \text{ x } \vec{B})$. Como $\vec{v}$ e $\vec{B}$ teñen a mesma dirección, o seu produto vectorial é nulo e $\vec{F} = \vec{0}$.

Se $\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{\text{cte.}} \Rightarrow$ **movemento rectilíneo e uniforme** (opción d).

· **33.6** Un protón de carga *Q* que se move cunha velocidade $\vec{v}$ dentro dun campo magnético $\vec{B}$

está sometido á forza de Lorentz: $\vec{F} = Q\,(\vec{v} \text{ x } \vec{B})$. Esta forza é perpendicular á traxectoria do protón($\vec{F}$ é perpendicular a $\vec{v}$, e $\vec{v}$ é tanxente á traxectoria) e se o protón se movese cunha velocidade de módulo constante, como Q e B tamén son constantes, o valor da forza F ($F = Q \cdot v \cdot B \cdot$ sen 90º) sería constante e o protón tomaría un movemento circular uniforme cun raio que se obtén igualando a forza magnética á forza centrípeta: $Q \cdot v \cdot B = \dfrac{m \cdot v^2}{r} \rightarrow r = \dfrac{m \cdot v}{Q \cdot B}$.

Como neste caso, a enerxía cinética do protón e, en consecuencia, a súa velocidade diminúen gradualmente, tamén diminúe o raio da súa traxectoria circular, formando unha espiral de raio cada vez menor (Opcións c).

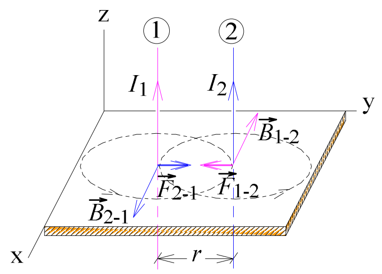
EXERCICIOS (Problemas)

1.- Dous condutores rectilíneos, paralelos e indefinidos están situados no plano yz, coa dirección do eixe z, separados unha distancia de 20 cm. Se por cada un deles circula unha corrente de 4 A, calcula, por unidade de lonxitude, a forza que se exercen mutuamente para o caso de que: a) as correntes teñan o mesmo sentido e b) teñan sentido contrario. Son forzas atractivas ou repulsivas? Nota: os condutores están no baleiro.

Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{l} F_{1-2} = I_2\, l\, B_{1-2} \\ B_{1-2} = \dfrac{2\,K\,I_1}{r} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{F_{1-2}}{l} = \frac{2\,K\,I_1\,I_2}{r}$$



$$\frac{F_{1-2}}{l} = \frac{2\cdot 10^{-7}\cdot 4\cdot 4}{0,2} \rightarrow \frac{F_{1-2}}{l} = 1,6\cdot 10^{-5}\ \mathrm{N\,m^{-1}}$$

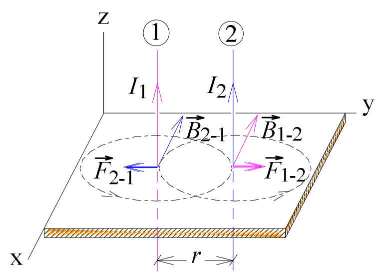
$$\boxed{\frac{\vec{F}_{1-2}}{l} = -1,6\cdot 10^{-5}\,\vec{j}\ \left(\mathrm{N\,m^{-1}}\right)}$$

$$\boxed{\frac{\vec{F}_{2-1}}{l} = 1,6\cdot 10^{-5}\,\vec{j}\ \left(\mathrm{N\,m^{-1}}\right)}$$

Estas forzas, $\vec{F}_{1-2}$ e $\vec{F}_{2-1}$, son **atractivas**.

b)

$$\boxed{\frac{\vec{F}_{1-2}}{l} = 1,6\cdot 10^{-5}\,\vec{j}\ \left(\mathrm{N\,m^{-1}}\right)}$$

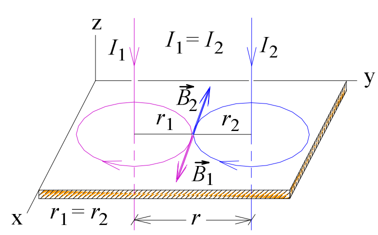


$$\boxed{\frac{\vec{F}_{2-1}}{l} = -1,6\cdot 10^{-5}\,\vec{j}\ \left(\mathrm{N\,m^{-1}}\right)}$$

Estas forzas, $\vec{F}_{1-2}$ e $\vec{F}_{2-1}$, son **repulsivas**.

2.- No exercicio anterior, calcula, para o caso a) e b), o valor do campo magnético total creado polas dúas correntes no punto medio da distancia que as separa.

Solución:

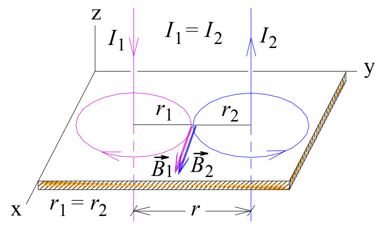


a) $B = \dfrac{2\,K\,I}{r}\,1$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{B}_{\text{total}} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \\ \vec{B}_1 = -\vec{B}_2 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\vec{B}_{\text{total}} = \vec{0}}$$

b)

$$\left.\begin{aligned}\vec{B}_{\text{total}} &= \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \\ \vec{B}_1 &= \frac{2\cdot 10^{-7}\cdot 4}{0{,}1} = 8\cdot 10^{-6}\ \text{T} \\ \vec{B}_2 &= 8\cdot 10^{-6}\ \text{T}\end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{\vec{B}_{\text{total}} = 1{,}6\cdot 10^{-5}\ \vec{i}\ (\text{T})}$$



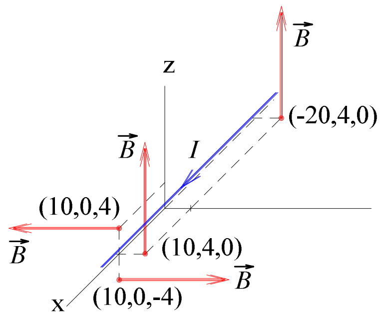
3.- Un condutor rectilíneo e indefinido está situado no baleiro, ó longo do eixe x, e pasa polo punto (0,0,0), sendo percorrido por unha corrente de 12 A no sentido positivo do eixe x. Calcula o vector indución magnética nos seguintes puntos: a) (10,4,0); b) (−20,4,0); c) (10,0,−4); d) (10,0,4). Nota: as coordenadas están dadas en metros.

Solución:

a) $\vec{B} = \dfrac{2\,K'\,I}{r}\,\vec{u}_B$

$$B = \frac{2\cdot 10^{-7}\cdot 12}{4} = 6\cdot 10^{-7}\ \text{T}$$

$$\boxed{\vec{B} = 6\cdot 10^{-7}\ \vec{k}\ (\text{T})}$$



b) $\boxed{\vec{B} = 6\cdot 10^{-7}\ \vec{k}\ (\text{T})}$

c) $\boxed{\vec{B} = 6\cdot 10^{-7}\ \vec{j}\ (\text{T})}$

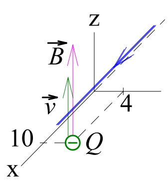
d) $\boxed{\vec{B} = -6\cdot 10^{-7}\ \vec{j}\ (\text{T})}$

4.- Aproveitando os datos do problema anterior, calcula a forza magnética exercida sobre unha carga Q de −2 C e que pasa polo punto (10,4,0) coa velocidade: a) $\vec{v}_a = 20\,\vec{k}\ (\text{m s}^{-1})$, b) $\vec{v}_b = 20\,\vec{j}\ (\text{m s}^{-1})$, c) $\vec{v}_c = -20\,\vec{j}\ (\text{m s}^{-1})$, d) $\vec{v}_d = 20\,\vec{i}\ (\text{m s}^{-1})$.

Solución:

a) $\vec{F} = Q\,\vec{v} \text{ x } \vec{B}$

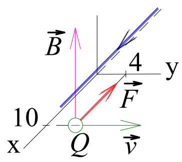
$$F = 2\cdot 20\cdot 6\cdot 10^{-7}\cdot \text{sen } 0^{\circ} \rightarrow \boxed{F = 0\ \text{N}}$$



Ou senón:

$$\vec{F} = -2 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 6 \cdot 10^{-7} \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{\boxed{\vec{F} = \vec{0}\,(\text{N})}}$$

b) $F = 2 \cdot 20 \cdot 6 \cdot 10^{-7} \cdot \text{sen } 90° \rightarrow F = 2{,}4 \cdot 10^{-5}\ \text{N}$

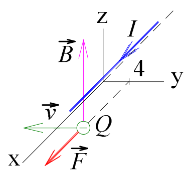


$$\boxed{\boxed{\vec{F} = -2{,}4 \cdot 10^{-5}\ \vec{i}\ (\text{N})}}$$

Ou senón:

$$\vec{F} = -2 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \cdot 10^{-7} \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{\boxed{\vec{F} = -2{,}4 \cdot 10^{-5}\ \vec{i}\ (\text{N})}}$$

c) $F = 2 \cdot 20 \cdot 6 \cdot 10^{-7} \cdot \text{sen } 90° \rightarrow F = 2{,}4 \cdot 10^{-5}\ \text{N}$

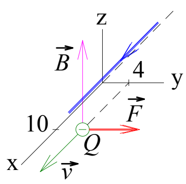


$$\boxed{\boxed{\vec{F} = 2{,}4 \cdot 10^{-5}\ \vec{i}\ (\text{N})}}$$

Ou senón:

$$\vec{F} = -2 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \cdot 10^{-7} \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{\boxed{\vec{F} = 2{,}4 \cdot 10^{-5}\ \vec{i}\ (\text{N})}}$$

d) $F = 2 \cdot 20 \cdot 6 \cdot 10^{-7} \cdot \text{sen } 90° \rightarrow F = 2{,}4 \cdot 10^{-5}\ \text{N}$



$$\boxed{\boxed{\vec{F} = 2{,}4 \cdot 10^{-5}\ \vec{j}\ (\text{N})}}$$

Ou senón:

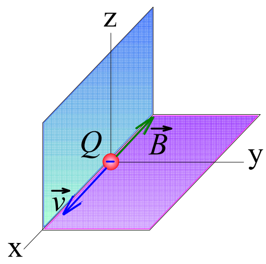
$$\vec{F} = -2 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \cdot 10^{-7} \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{\boxed{\vec{F} = 2{,}4 \cdot 10^{-5}\ \vec{j}\ (\text{N})}}$$

5.- Un electrón móvese nunha rexión do espazo na que hai un campo magnético estacionario e uniforme, cunha velocidade $\vec{v} = 4 \cdot 10^{6}\ \vec{i}\ (\text{m s}^{-1})$. Calcula a forza magnética exercida sobre a carga para os seguintes valores de $\vec{B}$: a) $-80\,\vec{i}\ (\text{T})$; b) $-80\,\vec{j}\ (\text{T})$; c) $80\,\vec{k}\ (\text{T})$. Dato: $Q_{e-} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

Solución:

a) $\vec{F} = Q\,\vec{v} \times \vec{B}$

$$F = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 4 \cdot 10^{6} \cdot 80 \cdot \text{sen}\,180° \rightarrow \boxed{F = 0 \text{ N}}$$

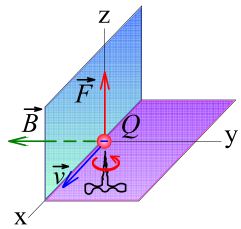


Ou senón:

$$\vec{F} = -1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 \cdot 10^{6} & 0 & 0 \\ -80 & 0 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{\vec{F} = 0\,(\text{N})}$$

b) $\vec{F} = Q\,\vec{v} \times \vec{B}$

$$F = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 4 \cdot 10^{6} \cdot 80 \cdot \text{sen}\,90° \rightarrow F = 5{,}12 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$



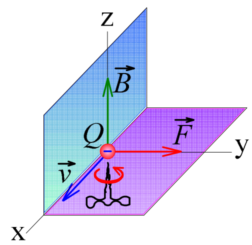
$$\boxed{\vec{F} = 5{,}12 \cdot 10^{-11}\,\vec{k}\,(\text{N})}$$

Ou senón:

$$\vec{F} = -1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 \cdot 10^{6} & 0 & 0 \\ 0 & -80 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{\vec{F} = 5{,}12 \cdot 10^{-11}\,\vec{k}\,(\text{N})}$$

c) $\vec{F} = Q\,\vec{v} \times \vec{B}$

$$F = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 4 \cdot 10^{6} \cdot 80 \cdot \text{sen}\,90° \rightarrow F = 5{,}12 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$



$$\boxed{\vec{F} = 5{,}12 \cdot 10^{-11}\,\vec{j}\,(\text{N})}$$

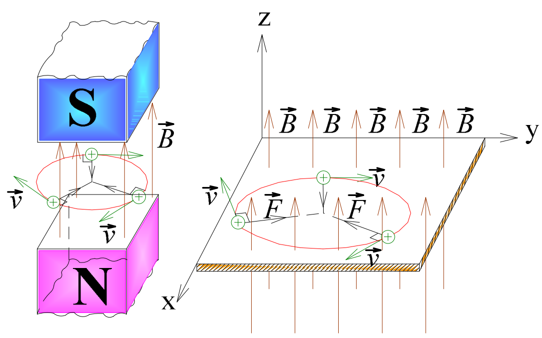
Ou senón:

$$\vec{F} = -1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 \cdot 10^{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{\vec{F} = 5{,}12 \cdot 10^{-11}\,\vec{j}\,(\text{N})}$$

6.- Un protón penetra nun campo magnético estacionario e uniforme $\vec{B} = 0{,}4\,\vec{k}\,(\text{T})$ cunha velocidade $\vec{v} = 10^{6}\,\vec{j}\,(\text{m s}^{-1})$. Estuda o movemento que describe e calcula: a) o raio da órbita que describe; b) o tempo que tarda en dar unha volta completa; c) o número de voltas que dá en 1 s. Datos: $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg; $Q_p = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

Solución:

O protón está sometido á forza magnética de Lorentz: $\vec{F} = Q\,\vec{v} \times \vec{B}$. Esta forza é de dirección perpendicular ó plano determinado polos vectores $\vec{v}$ e $\vec{B}$, co sentido de avance dun sacarrollas que leve $\vec{v}$ sobre $\vec{B}$ polo camiño máis curto: $\vec{F} = F\,\vec{i}$ (no instante en que o protón entra no campo magnético),



As forzas perpendiculares á traxectoria dunha partícula soamente fan variar a dirección do movemento, pero non modifican o módulo da velocidade, polo que o movemento é uniforme. Tamén o podemos razoar da forma:

$$\left.\begin{array}{l} W = \int F \cdot \mathrm{d}r \cdot \cos 90^\circ = 0 \\ W = \Delta E_\mathrm{k} \end{array}\right\} \rightarrow\ 0 = \Delta E_\mathrm{k}\ \rightarrow\ v = \text{cte.}\ \rightarrow\ \text{movemento uniforme}$$

Como Q, v e B son constantes, a forza, F, e a aceleración, a, ($a = F/m$), tamén o son:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{F_\mathrm{n}}{m} = a_\mathrm{n} = \text{cte.} \\ a_\mathrm{n} = \dfrac{v^2}{r} \\ v = \text{cte.} \end{array}\right\} \rightarrow\ r = \text{cte.}\ \rightarrow\ \text{circunferencia}$$

O resultado é que o protón posúe un **movemento circular uniforme**.

a) $F_{\text{magnética}} = F_{\text{centrípeta}}$

$$Q\,v\,B = m\frac{v^2}{r} \rightarrow r = \frac{m\,v}{Q\,B} \rightarrow r = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 10^6}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}4} \rightarrow \boxed{r = 2{,}6 \cdot 10^{-2}\ \text{m}}$$

b) $$v = \frac{s}{t} \rightarrow T = \frac{2\,\pi\,r}{v} \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi \cdot 2{,}6 \cdot 10^{-2}}{10^6} \rightarrow \boxed{T = 1{,}63 \cdot 10^{-7}\ \text{s}}$$

c) $$\nu = \frac{1}{T} \rightarrow \nu = \frac{1}{1{,}63 \cdot 10^{-7}} \rightarrow \nu = 6{,}1 \cdot 10^6\ \text{Hz} \rightarrow \boxed{\text{n}^\text{o}\ \text{de voltas} = 6{,}1 \cdot 10^6}$$

7.- Un electrón, que inicialmente está en repouso, é sometido a unha diferenza de potencial de 200 V, adquirindo unha velocidade coa que penetra perpendicularmente nun campo magnético $\vec{B} = -5 \cdot 10^{-4}\,\vec{k}\,(\mathrm{T})$. Estuda o movemento que realiza, no plano en que ten lugar, o sentido en que o fai e calcula o raio da órbita que describe. Datos: $m_\mathrm{e} = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $Q_\mathrm{e} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

Solución:

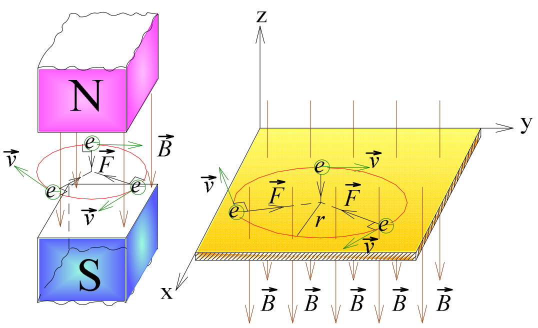
A enerxía, E, que o electrón adquire cando é sometido á diferenza de potencial de 200 V é:

$$E = Q \cdot \Delta V \;\rightarrow\; E = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 200 = 3{,}2 \cdot 10^{-17}\ \text{J}$$

A esta enerxía correspóndelle a velocidade:

$$\left.\begin{array}{l} E = \dfrac{1}{2} m\, v^2 \\ E = 3{,}2 \cdot 10^{-17}\ \text{J} \\ m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \end{array}\right\} \rightarrow 3{,}2 \cdot 10^{-17} = \frac{1}{2} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot v^2 \;\rightarrow\; v = 8{,}39 \cdot 10^{6}\ \text{m s}^{-1}$$

O electrón, que se move nunha dirección perpendicular ó campo magnético, no plano xy, está sometido á forza de Lorentz, que en cada punto ten a dirección da perpendicular á tanxente da traxectoria e, como xa se estudou no problema anterior, cáusalle un movemento circular uniforme, de sentido horario cando se mira no sentido de $\vec{B}$. O valor do raio r da circunferencia descrita obtense igualando a forza magnética á forza centrípeta: $F_{\text{magnética}} = F_{\text{centrípeta}}$.



$$Q\, v\, B = m \frac{v^2}{r} \;\rightarrow\; r = \frac{m\, v}{Q\, B}$$

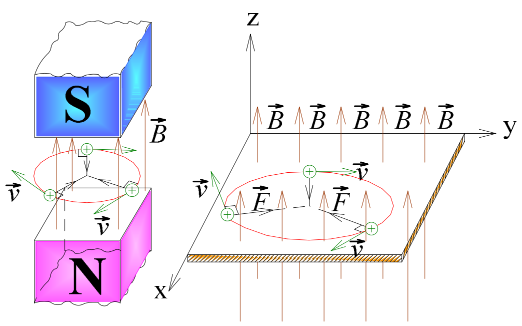
$$r = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 8{,}39 \cdot 10^{6}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} \;\rightarrow\; \boxed{r = 9{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{m}}$$

8.- Un protón, que posúe unha enerxía cinética de 4 MeV, móvese no plano xy e, mirando no sentido negativo do eixe z, leva o sentido horario dentro dun campo magnético estacionario e uniforme. Se o raio da circunferencia que describe é de 3 m, calcula o campo magnético $\vec{B}$, que tendo a dirección do eixe z motiva o movemento do protón. Datos: $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg; $Q_p = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} F = Q \cdot v \cdot B \\ F = m \cdot \dfrac{v^2}{r} \end{array}\right\} \rightarrow Q \cdot v \cdot B = \frac{m \cdot v^2}{r} \;\rightarrow\; B = \frac{m \cdot v}{r \cdot Q}$$

$$B = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot v}{3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}$$



Calculamos a velocidade coa que se move o protón:

$$E_k = 4 \cdot 10^{6}\ \text{eV} = 4 \cdot 10^{6} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{CV} = 6{,}4 \cdot 10^{-13}\ \text{J}$$

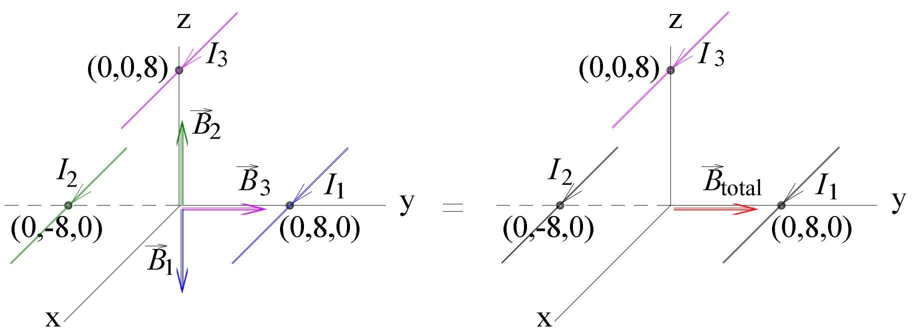
$$E_k = \frac{1}{2} m\, v^2 \;\rightarrow\; 6{,}4 \cdot 10^{-13} = \frac{1}{2} \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot v^2 \;\rightarrow\; v = 2{,}77 \cdot 10^{7}\ \text{m s}^{-1}$$

$$B=\frac{1,67\cdot 10^{-27}\cdot 2,77\cdot 10^{7}}{3\cdot 1,6\cdot 10^{-19}}=9,6\cdot 10^{-2}\ \text{T}$$

$$\boxed{\vec{B}=9,6\cdot 10^{-2}\ \vec{k}\ (\text{T})}$$

9.- Temos tres condutores rectilíneos e indefinidos, situados no baleiro, polos que circula unha corrente eléctrica de intensidade 6 amperios, *I* = 6 A. Os tres condutores son paralelos ó eixe x pasando, un deles, polo punto (0,8,0); outro, polo punto (0,−8,0) e, o terceiro, polo punto (0,0,8). Se a corrente eléctrica ten o sentido da parte positiva do eixe x, calcula o vector campo magnético $\vec{B}$ na orixe de coordenadas. Nota: as coordenadas danse en centímetros.

Solución:



O vector campo magnético $\vec{B}$ creado por unha corrente rectilínea indefinida de intensidade *I* a unha distancia *R* vén dada pola expresión: $\vec{B}=\frac{2\,K'\,I}{R}\,\vec{u}_B$.

Neste caso resulta que: $B_1=B_2=B_3$

$$B_1=\frac{2\cdot 10^{-7}\cdot 6}{8\cdot 10^{-2}}\ \rightarrow\ B_1=1,5\cdot 10^{-5}\ \text{T}$$

$$\vec{B}_{\text{total}}=\vec{B}_1+\vec{B}_2+\vec{B}_3\ \rightarrow\ \vec{B}_{\text{total}}=\vec{B}_3$$

$$\boxed{\vec{B}_{\text{total}}=1,5\cdot 10^{-5}\ \vec{j}\ (\text{T})}$$

EXERCICIOS DE SELECTIVIDADE (Cuestións)

1.- Un fío recto e condutor de lonxitude *l* e corrente *I*, situado nun campo magnético *B* sofre unha forza de módulo *I l B*; a) se *I* e *B* son paralelos e do mesmo sentido; b) se *I* e *B* son paralelos e de sentido contrario; c) se *I* e *B* son perpendiculares. *(Set. 08).*

Solución:

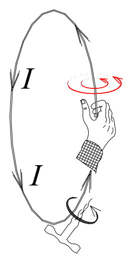
A forza magnética $\vec{F}$ exercida por un campo magnético $\vec{B}$, estacionario e uniforme, sobre un condutor recto de lonxitude *l*, polo que circula unha corrente eléctrica *I*, vén dada pola segunda lei de Laplace: $\vec{F} = I\left(\vec{l} \text{ x } \vec{B}\right)$, sendo o sentido de $\vec{l}$ o da corrente. Polo tanto, o módulo da forza vén dado pola expresión: $F = I\, l\, B$ sen α, sendo α o ángulo formado por $\vec{l}$ e $\vec{B}$.

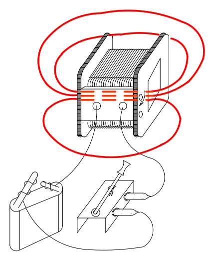
Cando o fío condutor e o vector campo magnético **son perpendiculares**, sen α = 1 e ***F* = *I l B***. Esta solución é a que se corresponde co ítem c) da cuestión.

2.- As liñas do campo magnético *B* creado por unha bobina ideal: a) nacen na cara norte e morren na cara sur da bobina; b) son liñas cerradas sobre si mesmas que atravesan a sección da bobina; c) son liñas cerradas arredor da bobina e que nunha a atravesan. (*Xuño 06*).

Solución:

Unha bobina de *N* espiras circulares de raio *r*, percorrida por unha corrente eléctrica de intensidade *I*, crea un campo magnético cuxo valor vén dado pola expresión: $B = \dfrac{2\,\pi\, K'\, I\, N}{r}$.





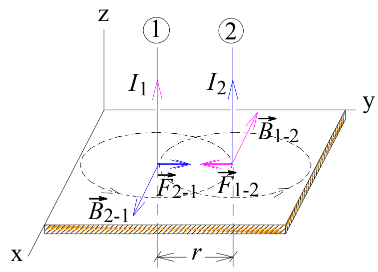
A bobina, segundo o sentido da corrente, presenta unha cara norte e outra sur e as liñas de campo, chamadas liñas de indución, como en calquera imán, son pechadas e trázanse en cada punto tanxentes ó vector campo magnético, tendo o sentido que vai de norte a sur por fóra da espira (bobina) e de sur a norte no seu interior. Estas son as condicións que se recollen no ítem b) da cuestión.

Para que as liñas de indución do campo magnético nacesen na cara norte e morresen na sur era necesario que existen illados ambos polos, feito que non ten lugar. Por outro lado, unha bobina percorrida por unha corrente eléctrica caracterízase por crear no seu interior un campo magnético moi intenso e, en consecuencia, no seu interior ten que haber liñas de campo, que debuxaremos en cada punto tanxentes ó vector $\vec{B}$. Polo tanto os ítems a) e c) non son correctos.

3.- Dous condutores rectos, paralelos e moi longos con correntes *I* no mesmo sentido: a) atráense; b) repélense; c) non interaccionan. (*Xuño 06*).

Solución:

A corrente eléctrica de intensidade I_1 está situada no campo magnético que a corrente I_2 crea: $\vec{B}_{2-1}$. En consecuencia, o condutor "1" está sometido á forza magnética $\vec{F}_{2-1}$, que vén dada pola expresión: $\vec{F}_{2-1} = I_1\, \vec{l}_1 \text{ x } \vec{B}_{2-1} = I_1 \left(l_1\, \vec{k} \right) \text{x} \left(B_{2-1}\, \vec{i} \right)$, sendo o vector $\vec{l}_1$ o condutor que ten a dirección e o sentido da corrente I_1. Deste produto vectorial resulta que: $\vec{F}_{2-1} = F_{2-1}\, \vec{j}$.



Se nos fixamos no conductor "2", percorrido pola corrente eléctrica de intensidade I_2, vemos que está situado no campo magnético que a corrente I_1 crea: $\vec{B}_{1-2}$, estando sometido á forza magnética $\vec{F}_{1-2}$: $\vec{F}_{1-2} = I_2\, \vec{l}_2 \text{ x } \vec{B}_{1-2} = I_2 \left(l_2\, \vec{k} \right) \text{x} \left(B_{1-2} \left(-\vec{i} \right) \right)$, sendo o vector $\vec{l}_2$ o condutor que ten a dirección e o sentido da corrente I_2. Do produto vectorial temos: $\vec{F}_{1-2} = -\, F_{1-2}\, \vec{j}$.

O resultado é que **os condutores percorridos polas correntes *I* (I_1 e I_2) interaccionan, atraéndose entre si**.

4.- Un cable recto de lonxitude *l* e corrente *i* está colocado nun campo magnético uniforme $\vec{B}$ formando con el un ángulo θ. O módulo da forza exercida sobre dito cable é: a) *i l B* tan θ; b) *i l B* sen θ; c) *i l B* cos θ. (*Set. 05*).

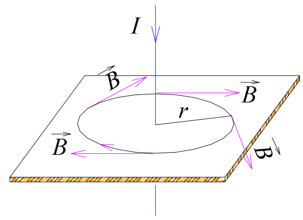
Solución:

Recordando a segunda lei de Laplace sabemos que un campo magnético estacionario e uniforme $\vec{B}$ exerce unha forza magnética $\vec{F}$ sobre un condutor rectilíneo percorrido por unha corrente eléctrica constante *i* segundo a expresión: $\vec{F} = i \cdot \vec{l} \text{ x } \vec{B} \;\rightarrow\; F = i \cdot l \cdot B \cdot \text{sen}\, \theta$ (ítem b).

5.- Dispone dun fío infinito, recto e con corrente eléctrica *I*. Unha carga eléctrica +*Q* próxima ó fío movéndose paralelamente a el e no mesmo sentido que a corrente: a) será atraída; b) será repelida; c) non experimentará ningunha forza. (*Xuño 04*).

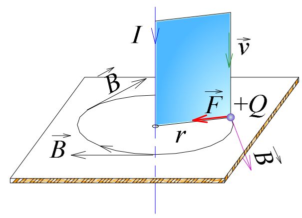
Solución:

Sabemos que unha carga eléctrica *Q*, que se move cunha velocidade $\vec{v}$ dentro dun campo magnético $\vec{B}$, está sometida a unha forza magnética $\vec{F}$, que vén dada pola lei de Lorentz: $\vec{F} = Q \cdot \vec{v} \text{ x } \vec{B}$.



O fío infinito e recto, percorrido pola corrente eléctrica *I*, a unha distancia *r* (medida perpendicularmente ó fío) crea un campo magnético $\vec{B}$, que vén dado pola lei de Biot-Savart: $B = \dfrac{2\, K'\, I}{r}$.

A dirección de $\vec{B}$ é a perpendicular ó plano determinado polo condutor e o punto onde se calcula, e o seu sentido vén dado pola regra da man dereita.



En consecuencia, a dirección da forza magnética que actúa sobre *Q* está contida no plano determinado polo condutor e a carga e o seu sentido é cara ó condutor: **Forza atractiva**.

6.- Un electrón e un protón describen órbitas circulares nun mesmo campo *B* uniforme e

coa mesma enerxía cinética: a) a velocidade do protón é maior; b) o raio da órbita do protón é maior; c) os períodos de rotación son os mesmos. Dato: $m_p >> m_e$. (*Xuño 03*).

Solución:

A partir do dato de que o electrón e o protón teñen a mesma enerxía cinética, E_k, encontramos a relación entre as velocidades de ambas partículas:

$$\left.\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m\, v^2 \\ E_{k\,(\text{protrón})} &= E_{k\,(\text{electrón})} \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{1}{2} m_p\, v_p^2 = \frac{1}{2} m_e\, v_e^2 \\ m_{\text{protrón}} \gg m_{\text{electrón}} \end{aligned}\right\} \rightarrow v_{\text{protrón}} \ll v_{\text{electrón}}$$

Cando unha partícula se move con movemento circular está sometida a unha forza que é (en cada punto) perpendicular á traxectoria. No caso dunha carga eléctrica movéndose dentro dun campo magnético $\vec{B}$ estacionario e uniforme trátase dunha forza magnética, que vén dada pola lei de Lorentz: $\vec{F} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$.

Igualando a forza de Lorentz á forza normal resulta: $Q \cdot v \cdot B = \frac{m \cdot v^2}{r} \rightarrow Q \cdot B = \frac{m \cdot v}{r}$.

Escribimos esta última expresión para o caso do protón e do electrón e operamos:

$$\left.\begin{aligned} \left.\begin{aligned} Q\,B &= \frac{m_p\, v_p}{r_p} \\ Q\,B &= \frac{m_e\, v_e}{r_e} \end{aligned}\right\} &\rightarrow \frac{Q\,B}{Q\,B} = \frac{\frac{m_p\, v_p}{r_p}}{\frac{m_e\, v_e}{r_e}} \rightarrow 1 = \frac{m_p\, v_p}{m_e\, v_e} \cdot \frac{r_e}{r_p} \\ \frac{1}{2} m_p\, v_p^2 = \frac{1}{2} m_e\, v_e^2 &\rightarrow \frac{m_p\, v_p}{m_e\, v_e} = \frac{v_e}{v_p} \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 1 = \frac{v_e}{v_p} \cdot \frac{r_e}{r_p} \\ v_p \ll v_e \end{aligned}\right\} \rightarrow r_p \gg r_e$$

Estudamos agora a expresión do período para o electrón e para o protón:

$$\left.\begin{aligned} \left.\begin{aligned} \left.\begin{aligned} Q\,B &= \frac{m\,v}{r} \\ v &= \omega\, r \end{aligned}\right\} &\rightarrow Q\,B = m\,\omega \\ \omega &= \frac{2\pi}{T} \end{aligned}\right\} \rightarrow T = \frac{m\, 2\pi}{Q\,B} \\ m_p \gg m_e \end{aligned}\right\} \rightarrow T_p \gg T_e$$

7.- Por dous condutores largos, rectos e paralelos circulan correntes *I* no mesmo sentido. Nun punto do plano situado entre os dous condutores o campo magnético resultante, comparado co creado por un só dos condutores é: a) maior; b) menor; c) o mesmo. (*Set. 01*).

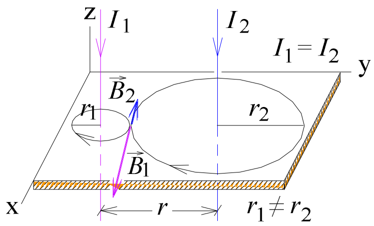
Solución:

Unha corrente eléctrica, rectilínea e indefinida, de intensidade *I*, crea, a unha distancia *r* do condutor, un campo magnético $\vec{B}$ de:

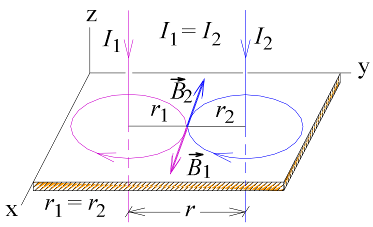
· Módulo: $B = \dfrac{2\,K'\,I}{r}$

· Dirección: tanxente á liña de indución no punto onde se estuda.

· Sentido: o da liña de indución; que podemos encontrar coa regra da man dereita ou a do sacarrollas.



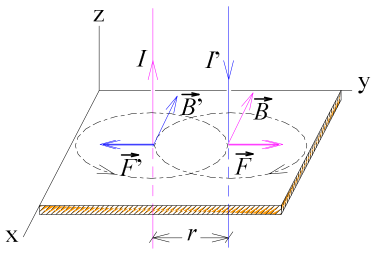
Nun punto do plano situado entre os dous condutores, o vector campo magnético $\vec{B}_1$, creado pola corrente eléctrica I_1, ten a mesma dirección e sentido contrario que o vector campo magnético $\vec{B}_2$, creado pola corrente I_2 e, en consecuencia, **o vector campo magnético resultante, $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$, é menor que os campos magnéticos individuais**. Para o caso do punto medio da recta que une os dous condutores resulta que: $\vec{B}_1 = -\vec{B}_2$ e, en consecuencia, $\vec{B}_{\text{total}} = \vec{0}$ e $B_{\text{total}} < B_1 = B_2$.



8.- Dous fíos paralelos moi longos con correntes eléctricas *I* e *I'* estacionarias e de sentidos contrarios situados á distancia *r*: a) atráense entre si; b) repélense entre si; c) non interaccionan. (*Set. 00*).

Solución:

A corrente eléctrica de intensidade I está situada no campo magnético $\vec{B}'$, que a corrente I' crea e, en consecuencia, está sometida á forza magnética $\vec{F}'$, que vén dada pola expresión: $\vec{F}' = I\,\vec{l} \times \vec{B}'$, sendo o vector $\vec{l}$ o condutor que ten a dirección e o sentido da corrente I. Do produto vectorial anterior resulta que: $\vec{F}' = -F'\,\vec{j}$.



Se nos fixamos na corrente eléctrica de intensidade I', vemos que está situada no campo magnético $\vec{B}$, que a corrente I crea, estando sometida á forza magnética $\vec{F}$: $\vec{F} = I'\,\vec{l}' \times \vec{B}$, sendo o vector $\vec{l}'$ o condutor que ten a dirección e o sentido da corrente I'. Do produto vectorial temos: $\vec{F} = F\,\vec{j}$.

O resultado é que **os condutores percorridos polas correntes *I* e *I'* interaccionan, repeléndose entre si**.

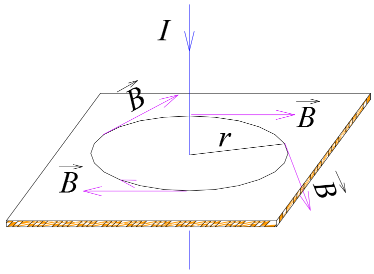
9.- O campo magnético creado por un fío infinito e recto con corrente de *I* A nun punto á distancia de *r* m do fío: a) depende da inversa do cadrado da distancia; b) ten a dirección de liñas circulares arredor do fío; c) depende do cadrado da intensidade de corrente. (*Xuño 00*).

Solución:

O vector campo magnético $\vec{B}$, creado por unha corrente eléctrica de intensidade I, rectilínea e indefinida, nun punto situado á distancia perpendicular r do fío condutor, vén dada pola lei de Biot e

Savart:

$$\vec{B} = \frac{2\,K'\,I}{r}\,\vec{u}_B\,,$$



sendo de dirección tanxente á circunferencia, que ten por centro o fío condutor e que pasa polo punto onde o estudamos. Polo tanto, **en cada punto ten a dirección das liñas circulares arredor do fío**.

Ademais, na expresión de $\vec{B}$ vemos que o seu módulo é:

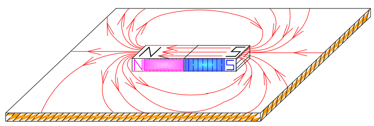
· Directamente proporcional á inversa da distancia *r* e non da inversa do cadrado de *r*.

· Directamente proporcional á intensidade de corrente *I* e non do cadrado de *I*.

En consecuencia, das opcións propostas como posibles solucións é correcta a b).

10.- As liñas de forza do campo magnético son: a) abertas coma as do campo eléctrico, b) sempre cerradas, c) abertas ou cerradas dependendo do imán ou bobina. (*Xuño 98*).

Solución:

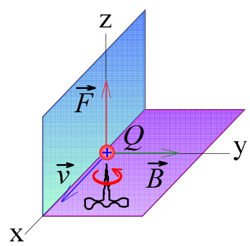


As liñas de indución do campo magnético son sempre pechadas, debido a que os polos dun imán non se poden separar. Nun imán, a presenza simultánea do polo norte e sur débese a mesma causa que crea o magnetismo: correntes eléctricas pechadas, orientadas no mesmo sentido, debidas ó movemento das cargas eléctricas.

Tamén o podemos razoar recordando que o fluxo do campo magnético $\vec{B}$ a través dunha superficie pechada *S* é nulo, xa que entran e saen o mesmo número de **liñas de indución**, debido a que estas **son pechadas**.

11.- Un positrón de carga $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, entra nun campo magnético $\vec{B} = 0{,}1\,\vec{j}\,\mathrm{T}$. Se a velocidade do positrón é $\vec{v} = 10^5\,\vec{i}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, a forza que sofre, en Newton, é a) $1{,}6 \cdot 10^{-15}\,\vec{i}$; b) $1{,}6 \cdot 10^{-15}\,\vec{j}$; c) $1{,}6 \cdot 10^{-15}\,\vec{k}$. (*Set. 97*).

Solución:



Unha carga eléctrica *Q*, que se move cunha velocidade $\vec{v}$ nunha rexión do espazo na que hai un campo magnético de indución $\vec{B}$, está sometida á forza magnética de Lorentz $\vec{F}$, que se obtén coa expresión: $\vec{F} = Q\,\vec{v} \times \vec{B}$.

Esta forza ten a dirección da perpendicular ó plano determinado polos vectores $\vec{v}$ e $\vec{B}$, co sentido de avance dun sacarrollas que leve $\vec{v}$ sobre $\vec{B}$ polo camiño máis curto. Para o caso da cuestión: $\vec{F} = F\,\vec{k}$, sendo $F = Q \cdot v \cdot B \rightarrow$

$F = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{5} \cdot 0{,}1$ = $\mathbf{1{,}6 \cdot 10^{-15}}$ **N**, sendo a solución que corresponde ó ítem c).

12.- Unha partícula con carga eléctrica móvese no seno dun campo magnético uniforme, de dirección perpendicular á velocidade da partícula. A traxectoria que describe a partícula é: a) recta, b) circular, c) non hai bastantes datos para predicir a traxectoria. (*Xuño 97*).

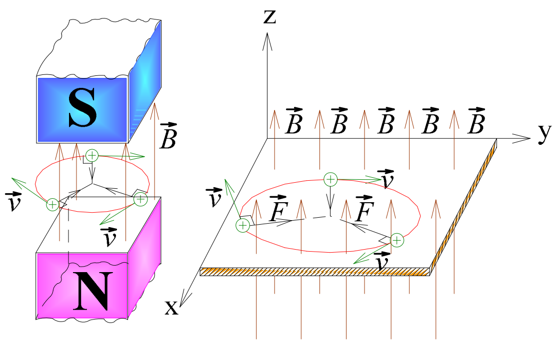
Solución:

A partícula de carga Q, que se move cunha velocidade $\vec{v}$, perpendicularmente ó campo magnético $\vec{B}$, está sometida á forza magnética de Lorentz: $\vec{F} = Q\,\vec{v} \text{ x } \vec{B}$.

Esta forza $\vec{F}$ é perpendicular á velocidade $\vec{v}$ da partícula. E como as forzas perpendiculares á traxectoria non modifican o módulo da velocidade (unicamente fan variar a dirección do movemento), o movemento que describe é uniforme:

$$\text{Se } \vec{F} = \vec{F}_{\text{normal}} \rightarrow \vec{F}_{\text{tanxencial}} = \vec{0} \rightarrow \vec{a}_{\text{t}} = \vec{0} \rightarrow v = \text{cte.} \rightarrow \text{movemento uniforme}$$

A carga Q tamén é constante e $\vec{B}$ é constante en todos os puntos do espazo (uniforme), pero non sabemos se é constante no tempo (estacionario); polo que a forza pode non ser constante e, en consecuencia, non hai suficientes datos para predicir a traxectoria da partícula. Se $\vec{B}$ fose tamén constante no tempo (campo estacionario), o módulo de $\vec{F}$ tamén o é e, en consecuencia, a carga móvese cunha aceleración normal $\vec{a}_{\text{n}}$, de módulo constante, describindo unha traxectoria circular:



$$\left.\begin{array}{l} a_{\text{n}} = \dfrac{v^2}{r} = \text{cte.} \\ v = \text{cte.} \\ a_{\text{n}} = \text{cte.} \end{array}\right\} \rightarrow r = \text{cte.} \rightarrow \text{circunferencia}$$

13.- Obsérvase un chorro de electróns que atravesa unha rexión do espazo sen desviarse, a) non poden existir campos eléctricos, b) non poden existir campos magnéticos, c) poden existir campos eléctricos e magnéticos. (*Set. 96*).

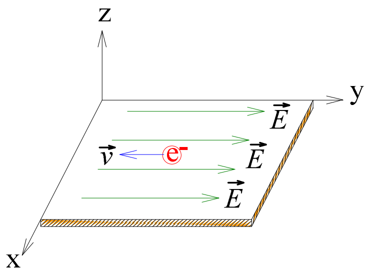
Solución:

Unha partícula móvese sen desviar a súa traxectoria cando:

· A resultante das forzas que actúan sobre a partícula é cero (o movemento é rectilíneo e uniforme, m.r.u.).

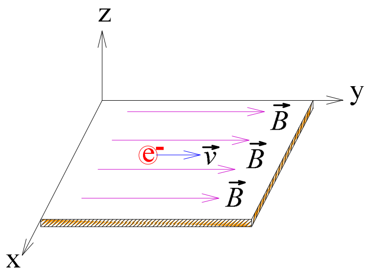
· A dirección da resultante das forzas que actúan sobre a partícula coincide coa dirección da súa velocidade (o movemento é rectilíneo uniformemente variado, m.r.u.v.).

Para o caso dun chorro de electróns, que se move dentro dun campo eléctrico, actúa a forza eléctrica: $\vec{F}_{\text{eléctrica}} = Q \cdot \vec{E}$, que nunca é nula, pero cando os electróns se moven na mesma dirección do campo eléctrico $\vec{E}$, a forza eléctrica causa unha variación do módulo da velocidade, pero non fai variar a dirección desta, e os electróns móvense cun m.r.u.v. sen sufrir ningunha desviación.



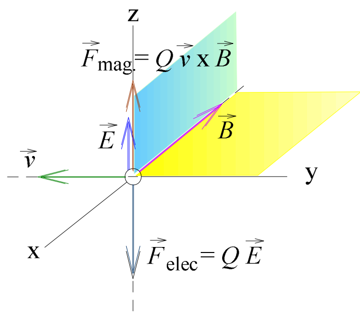
Os electróns en movemento dentro dun campo magnético están sometidos á forza magnética de Lorentz: $\vec{F}_{\text{magnética}} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$. Esta forza, que ten a dirección perpendicular a $\vec{v}$, é nula cando a dirección de $\vec{v}$ coincida coa dirección de $\vec{B}$, polo que neste caso o chorro de electróns se move dentro do campo magnético sen sufrir desviación, cunha velocidade $\vec{v}$ constante.

Se os electróns se moven dentro dun campo electromagnético, van estar sometidos á forza eléctrica e a forza magnética.



Se $\vec{E}, \vec{B}$ e $\vec{v}$ teñen a mesma dirección, a forza eléctrica ten a dirección de $\vec{v}$ e a forza magnética é nula, polo que os electróns se desprazan sen sufrir desviación.

Tamén, cando a forza eléctrica e a forza magnética son de igual módulo e dirección, e de sentido contrario, $\vec{F}_{\text{magnética}} = -\vec{F}_{\text{eléctrica}}$, os electróns atravesan a rexión dos campos sen desviarse. Isto sucede se se cumpre que: $Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = -Q \cdot \vec{E}$.



Para iso é necesario que:

$$\cdot \left|Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}\right| = \left|Q \cdot \vec{E}\right| \rightarrow v \cdot B = E$$

· A dirección de $\vec{v} \times \vec{B}$ sexa igual á de $\vec{E}$. Esta situación dáse cando $\vec{v}$ e $\vec{B}$ están no mesmo plano con direccións diferentes e $\vec{E}$ é perpendicular a este plano.

· O sentido de $Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ sexa contrario ó de $Q \cdot \vec{E}$. Esta situación ten lugar para o caso representado na figura.

EXERCICIOS DE SELECTIVIDADE (Problemas)

1.- Un electrón, que é acelerado por unha diferenza de potencial de 1000 V, entra nun campo magnético *B* perpendicular á súa traxectoria e describe unha órbita circular en $T = 2\cdot10^{-11}$ s. Calcula: a) a velocidade do electrón; b) o campo magnético; c) que dirección debe ter un campo eléctrico $\vec{E}$ que aplicado xunto con $\vec{B}$ permita que a traxectoria sexa rectilínea? (Datos: $Q_e = -1{,}6\cdot10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ kg). *(Xuño 08).*

Solución:

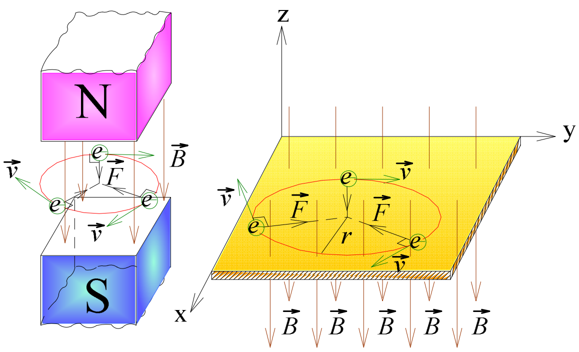
a) A enerxía *E*, que o electrón adquire cando é sometido á diferenza de potencial de 1000 V é:

$$E = Q\cdot\Delta V \rightarrow E = 1{,}6\cdot10^{-19}\cdot1000 \rightarrow E = 1{,}6\cdot10^{-16}\ \text{J}$$

A esta enerxía correspóndelle a velocidade:

$$\left.\begin{array}{l} E = \dfrac{1}{2}m\,v^2 \\ E = 1{,}6\cdot10^{-16}\ \text{J} \\ m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}\ \text{kg}\end{array}\right\} \rightarrow 1{,}6\cdot10^{-16} = \frac{1}{2}\cdot9{,}1\cdot10^{-31}\cdot v^2 \rightarrow \boxed{v = 1{,}88\cdot10^{7}\ \text{m s}^{-1}}$$

b) O electrón, que se move nunha dirección perpendicular ó campo magnético, está sometido á forza de Lorentz, que en cada punto ten a dirección perpendicular á tanxente da traxectoria. As forzas perpendiculares á traxectoria dunha partícula non modifican o módulo da súa velocidade, unicamente fan variar a dirección do movemento, causándolle un movemento circular uniforme. O valor do vector campo magnético *B*, obtense igualando a forza magnética á forza centrípeta: $F_{\text{magnética}} = F_{\text{centrípeta}}$



$$\left.\begin{array}{l} Q\,v\,B = m\dfrac{v^2}{r} \rightarrow B = \dfrac{m\,v}{Q\,r} \\ v = \dfrac{s}{t} = \dfrac{2\,\pi\,r}{T} \rightarrow r = \dfrac{v\,T}{2\,\pi}\end{array}\right\} \rightarrow B = \frac{m\,v}{Q\dfrac{v\,T}{2\,\pi}} = \frac{m\,2\,\pi}{Q\,T}$$

$$B = \frac{m\,2\,\pi}{Q\,T} \rightarrow B = \frac{9{,}1\cdot10^{-31}\cdot2\cdot\pi}{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot2\cdot10^{-11}} \rightarrow \boxed{B = 1{,}79\ \text{T}}$$

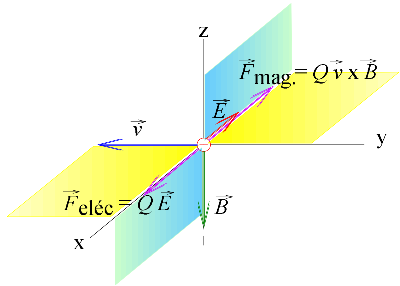
c) O electrón móvese con traxectoria rectilínea cando:

· A dirección da resultante das forzas que actúan sobre o electrón coincida coa dirección da súa velocidade (o electrón terá un movemento rectilíneo variado, m.r.v.). No caso do exercicio a forza magnética é perpendicular á traxectoria e non se cumpre a condición comentada.

· A resultante das forzas que actúan sobre o electrón sexa cero: $\vec{F}_{\text{neta}} = \vec{0}$. O electrón posuirá un movemento rectilíneo e uniforme, m.r.u.).

$$\vec{F}_{\text{magnética}} = -\vec{F}_{\text{eléctrica}} \rightarrow Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = -Q \cdot \vec{E} \rightarrow \vec{v} \times \vec{B} = -\vec{E}$$

Polo tanto, para que o electrón atravese a rexión dos campos eléctrico e magnético sen desviarse é necesario que:



• $v \cdot B = E$

• A dirección de $\vec{v} \times \vec{B}$ coincida coa dirección de $\vec{E}$.

• O sentido de $\vec{v} \times \vec{B}$ sexa contrario ó de $\vec{E}$.

Se se cumpren estas condicións, a resultante das forzas e nula e o electrón desprázase segundo unha **traxectoria rectilínea** cun movemento uniforme.

2.- Unha partícula con carga $0{,}5 \cdot 10^{-9}$ C móvese con $\vec{v} = 4 \cdot 10^{6}\,\vec{j}$ m/s e entra nunha zona onde existe un campo magnético $\vec{B} = 0{,}5\,\vec{i}$ T : a) que campo eléctrico $\vec{E}$ hai que aplicar para que a carga non sufra ningunha desviación?; b) en ausencia de campo eléctrico calcula a masa se o raio da órbita é 10^{-7} m; c) razoa se a forza magnética realiza algún traballo sobre a carga cando esta describe unha órbita circular. *(Set. 07).*

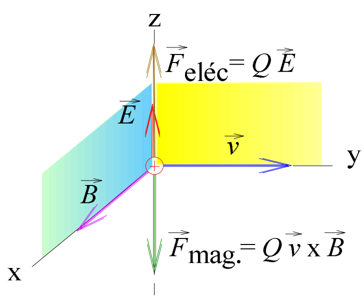
Solución:

a) Unha partícula cargada, que entra perpendicularmente cunha velocidade $v\,\vec{j}$ nun campo magnético $B\,\vec{i}$, moverase con traxectoria rectilínea cando a resultante das forzas que actúen sobre ela sexa cero: $\vec{F} = \vec{0}$ (movemento rectilíneo e uniforme, m.r.u.).

$$\vec{F}_{\text{magnética}} = -\vec{F}_{\text{eléctrica}} \rightarrow Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = -Q \cdot \vec{E} \rightarrow \vec{v} \times \vec{B} = -\vec{E}$$

Polo tanto, para que a carga non sufra desviación é necesario que:

• $E = v \cdot B \rightarrow E = 4 \cdot 10^{6} \cdot 0{,}5 \rightarrow \boxed{E = 2 \cdot 10^{6}\ \text{N C}^{-1}}$



• A dirección de $\vec{E}$ coincida coa dirección de $\vec{v} \times \vec{B} = v\,\vec{j} \times B\,\vec{i}$: $\vec{v}$ e $\vec{B}$ determinan o plano (x,y), sendo a dirección de $\vec{v} \times \vec{B}$ a perpendicular a este plano: a do eixe z.

• O sentido de $\vec{E}$ sexa contrario ó de $\vec{v} \times \vec{B}$: $\vec{E} = E\,\vec{k}$.

$$\boxed{\vec{E} = 2 \cdot 10^{6}\,\vec{k}\ (\text{N/C})}$$

Ou senón:

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4\cdot 10^6 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{\vec{E} = 2\cdot 10^6\ \vec{k}\ \left(\mathrm{N\,C^{-1}}\right)}$$

b) Se sobre a partícula cargada, que entra perpendicularmente no campo magnético $\vec{B}$, soamente actúa a forza magnética, $\vec{F}_{\text{magnética}} = Q\cdot\vec{v}\ \mathrm{x}\ \vec{B}$; o movemento que describe é circular uniforme: $\vec{F}_{\text{magnética}}$ é perpendicular a $\vec{v}$ e o seu módulo é constante.

$$\left.\begin{aligned} F &= Q\,v\,B \\ F &= m\,\frac{v^2}{r} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{m\,v^2}{r} = Q\,v\,B \rightarrow m = \frac{Q\,B\,r}{v}$$

$$m = \frac{0,5\cdot 10^{-9}\cdot 0,5\cdot 10^{-7}}{4\cdot 10^6} \rightarrow \boxed{m = 6,25\cdot 10^{-24}\ \mathrm{kg}}$$

c) O movemento circular que describe a partícula cargada, dentro do campo magnético $\vec{B} = B\,\vec{i}$, é uniforme, xa que a forza magnética $\left(\vec{F}_{\text{magnética}} = Q\cdot\vec{v}\ \mathrm{x}\ \vec{B}\right)$ que actúa sobre a partícula é de dirección perpendicular á velocidade $\vec{v}$, non modificando o módulo da velocidade. En consecuencia resulta:

$$\left.\begin{aligned} v &= \text{cte.} \\ E_\mathrm{k} &= \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow E_\mathrm{k} = \text{cte.} \rightarrow \left.\begin{aligned} \Delta E_\mathrm{k} &= 0 \\ W &= \Delta E_\mathrm{k} \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{W = 0}$$

A igual resultado chegamos a partir da definición de traballo: $W = \int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$.

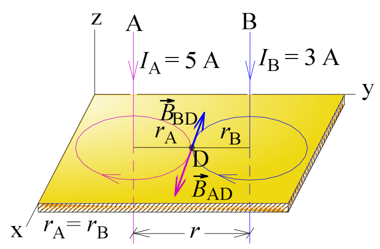
A carga, que se move cun movemento circular uniforme, está sometida a unha aceleración normal, que é causada por unha forza normal. O traballo desta forza vale:

$W = \int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}\cdot\cos 90^\circ = 0$, non realizando, a forza magnética, traballo ningún.

3.- Dous fíos condutores rectos, moi longos e paralelos (A e B) con correntes I_A = 5 A e I_B = 3 A no mesmo sentido, están separados 0,2 m; calcula: a) o campo magnético no punto medio entre os dous condutores (D); b) a forza exercida sobre un terceiro condutor C paralelo ós anteriores, de 0,5 m e con I_C = 2 A e que pasa por D. Datos: μ = 4 π 10^{-7} unidade do SI. (*Set. 06*).

Solución:

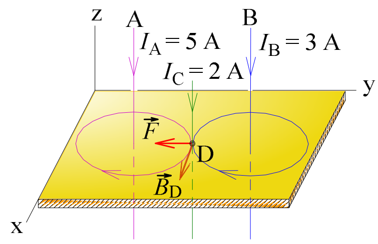
a) O vector campo magnético $\vec{B}$ creado por unha corrente rectilínea indefinida I a unha distancia r (medida perpendicularmente ata o condutor) vén dado pola lei de Biot-Savart: $\vec{B} = \dfrac{2\,K'\,I}{r}\,\vec{u}_B$.



$$\left.\begin{aligned}
&\vec{B}_{\text{total}} = \vec{B}_{\text{A-D}} + \vec{B}_{\text{B-D}} \\
&\vec{B}_{\text{A-D}} = \frac{2\cdot\dfrac{4\,\pi\,10^{-7}}{4\,\pi}\cdot 5}{0{,}1}\,\vec{i} \;\rightarrow\; \vec{B}_{\text{A-D}} = 10^{-5}\,\vec{i}\;(\text{T}) \\
&\vec{B}_{\text{B-D}} = -\frac{2\cdot\dfrac{4\,\pi\,10^{-7}}{4\,\pi}\cdot 3}{0{,}1}\,\vec{i} \;\rightarrow\; \vec{B}_{\text{B-D}} = -6\cdot 10^{-6}\,\vec{i}\;(\text{T})
\end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{\vec{B}_{\text{total}} = 4\cdot 10^{-6}\,\vec{i}\;(\text{T})}$$

b)

$\vec{F} = I\cdot\vec{l}\ \text{x}\ \vec{B}$



$$F = 2\cdot 0{,}5\cdot 4\cdot 10^{-6} \;\rightarrow\; F = 4\cdot 10^{-6}\ \text{N}$$

$$\boxed{\vec{F} = -4\cdot 10^{-6}\,\vec{j}\ \text{N}}$$

4.- Un protón acelerado por unha diferenza de potencial de 5000 V penetra perpendicularmente nun campo magnético uniforme de 0,32 T; calcula: a) a velocidade do protón; b) o raio da órbita que describe e o número de voltas que dá en un segundo. Datos: m_p = 1,67 · 10^{-27} kg; Q_p = 1,6 · 10^{-19} C. (*Xuño 05*).

Solución:

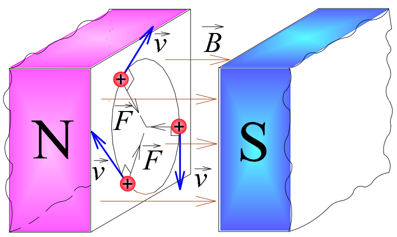
a) A enerxía E que adquire o protón cando se somete á unha diferenza de potencial ΔV é:

$$E = Q\cdot\Delta V \;\rightarrow\; E = 1{,}60\cdot 10^{-19}\cdot 5000 \;\rightarrow\; E = 8\cdot 10^{-16}\ \text{J}$$

A esta enerxía correspóndelle a velocidade:

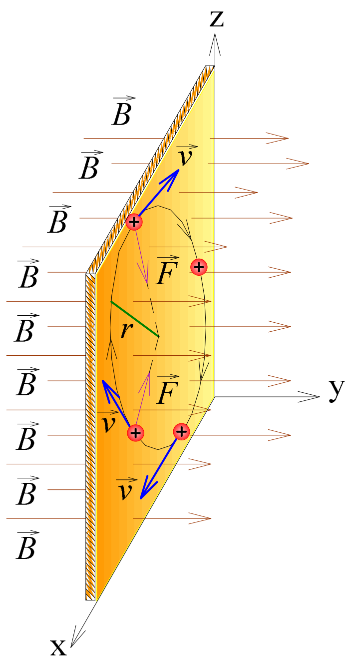
$$\left.\begin{aligned}
&E_k = \frac{1}{2}\,m\,v^2 \\
&E = 8\cdot 10^{-16}\ \text{J}
\end{aligned}\right\} \rightarrow 8{,}6\cdot 10^{-16} = \frac{1}{2}\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot v^2 \;\rightarrow\; \boxed{v = 9{,}79\cdot 10^{5}\ \text{m s}^{-1}}$$

b) O protón, que se move coa velocidade $\vec{v}$, ó penetrar nun campo magnético estacionario e uniforme $\vec{B}$, está sometido á forza magnética de Lorentz: $\vec{F}_{\text{magnética}} = Q\cdot\vec{v}\ \text{x}\ \vec{B}$.



Esta forza ten a dirección perpendicular á do vector $\vec{v}$ e $\vec{B}$, co sentido de avance dun sacarrollas que leve $\vec{v}$ sobre $\vec{B}$ polo camiño máis curto.

As forzas perpendiculares á traxectoria dunha partícula soamente fan variar a dirección do movemento, pero non modifican o módulo da velocidade, polo que o movemento é uniforme. Tamén o podemos razoar da forma:



$$\left.\begin{array}{l} W = \int F \cdot \mathrm{d}r \cdot \cos 90^{\circ} = 0 \\ W = \Delta E_{\mathrm{k}} \end{array}\right\} \rightarrow 0 = \Delta E_{\mathrm{k}} \rightarrow v = \text{cte.} \rightarrow \text{movemento uniforme}$$

Como Q, v e B son constantes, a forza F e a aceleración a ($a = F/m$), tamén o son:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{F_{\mathrm{n}}}{m} = a_{\mathrm{n}} = \text{cte.} \\ a_{\mathrm{n}} = \dfrac{v^2}{r} \\ v = \text{cte.} \end{array}\right\} \rightarrow r = \text{cte.} \rightarrow \text{circunferencia}$$

O resultado é que o protón posúe un **movemento circular uniforme**, ó que lle corresponde un raio r, que calculamos recordando que a forza magnética que actúa sobre o protón é unha forza centrípeta (normal): $\vec{F}_{\text{magnética}} = \vec{F}_{\text{centrípeta (normal)}}$.

$$\left.\begin{array}{l} F_{\text{magnética}} = Q\, v\, B \\ F_{\text{normal}} = \dfrac{m\, v^2}{r} \\ F_{\text{magnética}} = F_{\text{normal}} \end{array}\right\} \rightarrow Q\, v\, B = \frac{m\, v^2}{r} \rightarrow r = \frac{m\, v}{Q\, B}$$

$$r = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 9{,}79 \cdot 10^{5}}{1{,}60 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}32} \rightarrow \boxed{r = 0{,}032 \text{ m}}$$

Para calcular o número de voltas que dá en 1 segundo, primeiramente calculamos o tempo que tarda en dar 1 volta, T:

$$v = \frac{s}{t} \rightarrow v = \frac{2\,\pi\, r}{T} \rightarrow T = \frac{2\,\pi\, r}{v} \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-2}}{9{,}79 \cdot 10^{5}} \rightarrow T = 2{,}05 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

O número de veces que se repite a mesma situación física (posición e velocidade) na unidade de tempo (en 1 s) é o que se coñece como frecuencia, ν, e a súa relación co período, T, é: $\nu = 1/T$.

$$\nu = \frac{1}{T} \rightarrow \nu = \frac{1}{2{,}05 \cdot 10^{-7}} \rightarrow \boxed{\nu = 4{,}88 \cdot 10^{6} \text{ Hz}}$$

5.- Un protón ten unha enerxía cinética de 10^{-15} J. Segue unha traxectoria circular nun campo magnético B = 2 T. Calcula: a) o raio da traxectoria; b) o número de voltas que dá en un minuto. Datos: $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg; $Q_p = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C. (*Set. 03*).

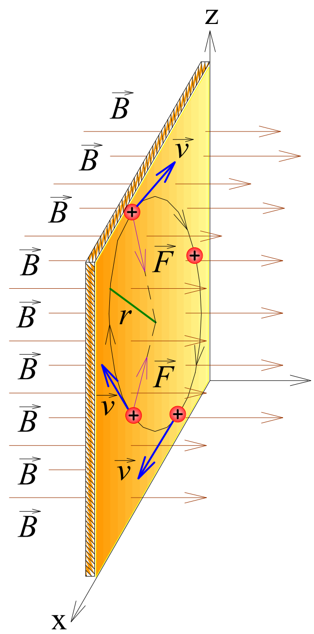
Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{l} F_{\text{magnética}} = Q\,v\,B \\ F_{\text{magnética}} = F_{\text{normal}} = \dfrac{m\,v^2}{r} \end{array}\right\} \rightarrow Q\,v\,B = \frac{m\,v^2}{r} \rightarrow r = \frac{m\,v}{Q\,B}$$

$$E_k = \frac{1}{2}m\,v^2 \rightarrow 10^{-15} = \frac{1}{2}\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot v^2 \rightarrow \boxed{v = 1{,}09\cdot 10^6\ \text{m/s}}$$

$$r = \frac{1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot 1{,}09\cdot 10^6}{1{,}60\cdot 10^{-19}\cdot 2} \rightarrow \boxed{r = 5{,}69\cdot 10^{-3}\ \text{m}}$$



b)

$$v = \frac{s}{t} \rightarrow v = \frac{2\,\pi\,r}{T} \rightarrow T = \frac{2\,\pi\,r}{v}$$

$$T = \frac{2\cdot\pi\cdot 5{,}69\cdot 10^{-3}}{1{,}09\cdot 10^6} \rightarrow T = 1{,}04\cdot\pi\cdot 10^{-8}\ \text{s}$$

$$\text{n}^{\text{o}}\ \text{voltas en } 60\ \text{s},\ n = \frac{1\ \text{volta}}{1{,}04\cdot\pi\cdot 10^{-8}\ \text{s}}\cdot 60\ \text{s} \rightarrow \boxed{n = 1{,}84\cdot 10^9\ \text{voltas/minuto}}$$

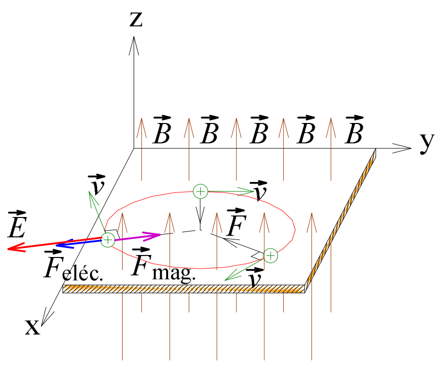
6.- Un protón penetra nunha zona onde hai un campo magnético de 5 T cunha velocidade de 1000 m/s e dirección perpendicular ó campo. Calcula: a) o raio da órbita descrita; b) a intensidade e sentido dun campo eléctrico que ó aplicalo anule o efecto do capo magnético. (Fai un debuxo do problema). Datos: $m_p = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ kg; $Q_p = 1{,}60\cdot 10^{-19}$ C. (*Xuño 03*).

Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{l} F_{\text{mag.}} = Q\,v\,B \\ F_{\text{mag.}} = F_n = \dfrac{m\,v^2}{r} \end{array}\right\} \rightarrow Q\,v\,B = \frac{m\,v^2}{r} \rightarrow r = \frac{m\,v}{Q\,B}$$

$$r = \frac{1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot 1000}{1{,}60\cdot 10^{-19}\cdot 5} \rightarrow \boxed{r = 2{,}1\cdot 10^{-6}\ \text{m}}$$



b)

$$\vec{F}_{\text{eléc.}} + \vec{F}_{\text{mag.}} = \vec{0} \rightarrow Q\,\vec{E} + Q\,\vec{v}\times\vec{B} = \vec{0} \rightarrow \vec{E} = -\vec{v}\times\vec{B}$$

$E = 1000\cdot 5\cdot \text{sen } 90^{\text{o}} \rightarrow$ **E = 5000 N C^{-1}**, de dirección perpendicular a $\vec{v}$ e $\vec{B}$ co sentido contrario ó de avance dun sacarrollas que xire levando $\vec{v}$ sobre $\vec{B}$ polo camiño máis curto.

7.- Un protón acelerado desde o repouso por unha diferenza de potencial de $2\cdot 10^6$ V adquire unha velocidade no sentido positivo do eixe x, coa que penetra nunha rexión na que existe

un campo magnético uniforme B = 0,2 T no sentido positivo do eixe y. Calcula: a) o raio da órbita descrita (fai un debuxo do problema); b) o número de voltas que dá en 1 segundo. Datos: $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg; $Q_p = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C. (*Set. 02*).

Solución:

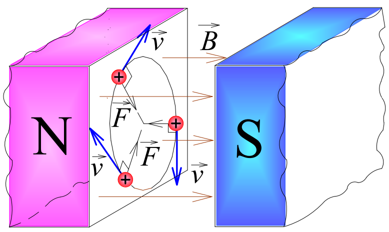
a) A enerxía E que adquire o protón cando se somete á unha diferenza de potencial ΔV é:

$$E = Q \cdot \Delta V \;\rightarrow\; E = 1{,}60 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^{6} \;\rightarrow\; E = 3{,}2 \cdot 10^{-13}\ \text{J}$$

A esta enerxía correspóndelle a velocidade:

$$\left.\begin{array}{l} E_k = \dfrac{1}{2} m\, v^2 \\ E = 3{,}2 \cdot 10^{-13}\ \text{J} \end{array}\right\} \rightarrow 3{,}2 \cdot 10^{-13} = \frac{1}{2} \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot v^2 \;\rightarrow\; \boxed{v = 2{,}0 \cdot 10^{7}\ \text{m s}^{-1}}$$

O protón, que se move coa velocidade $\vec{v}$, ó penetrar nun campo magnético uniforme $\vec{B}$, está sometido á forza magnética de Lorentz: $\vec{F}_{\text{magnética}} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$.



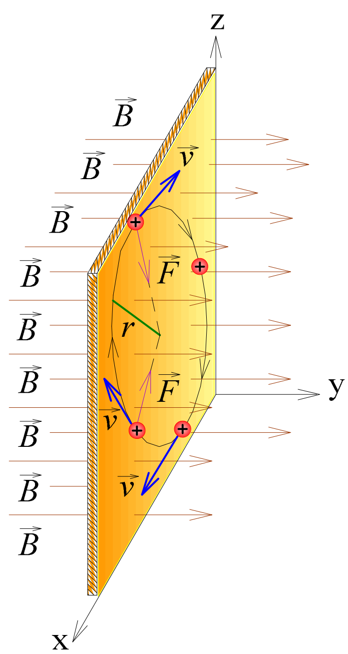
Esta forza ten a dirección perpendicular á dos vectores $\vec{v}$ e $\vec{B}$, (vectores que determinan o plano xy), co sentido de avance dun sacarrollas que leve $\vec{v}$ sobre $\vec{B}$ polo camiño máis curto.

As forzas perpendiculares á traxectoria dunha partícula fan variar a dirección do movemento, pero non modifican o módulo da velocidade, polo que o movemento é uniforme. Tamén o podemos razoar da forma:

$$\left.\begin{array}{l} W = \int F \cdot \text{d}r \cdot \cos 90^\circ = 0 \\ W = \Delta E_k \end{array}\right\} \rightarrow 0 = \Delta E_k \;\rightarrow\; v = \text{cte.} \rightarrow \text{movemento uniforme}$$

Como Q, v e B son constantes, a forza F e a aceleración a ($a = F/m$), tamén o son:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{F_n}{m} = a_n = \text{cte.} \\ a_n = \dfrac{v^2}{r} \\ v = \text{cte.} \end{array}\right\} \rightarrow r = \text{cte.} \rightarrow \text{circunferencia}$$



O resultado é que o protón posúe un **movemento circular uniforme**, ó que lle corresponde un raio r, que calculamos recordando que a forza magnética que actúa sobre o protón é unha forza centrípeta (normal): $\vec{F}_{\text{magnética}} = \vec{F}_{\text{centrípeta (normal)}}$.

$$\left.\begin{aligned} F_{\text{magnética}} &= Q\,v\,B \\ F_{\text{normal}} &= \frac{m\,v^2}{r} \\ F_{\text{magnética}} &= F_{\text{normal}} \end{aligned}\right\} \rightarrow Q\,v\,B = \frac{m\,v^2}{r} \rightarrow r = \frac{m\,v}{Q\,B}$$

$$r = \frac{1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot 2{,}0\cdot 10^{7}}{1{,}60\cdot 10^{-19}\cdot 0{,}2} \rightarrow \boxed{r = 1{,}04\ \text{m}}$$

b) Para calcular o número de voltas que dá en 1 segundo, primeiramente calculamos o tempo que tarda en dar 1 volta, T:

$$v = \frac{s}{t} \rightarrow v = \frac{2\,\pi\,r}{T} \rightarrow T = \frac{2\,\pi\,r}{v} \rightarrow T = \frac{2\cdot\pi\cdot 1{,}04}{2{,}0\cdot 10^{7}} \rightarrow T = 3{,}3\cdot 10^{-7}\ \text{s}$$

O número de veces que se repite a mesma situación física (posición e velocidade) na unidade de tempo (en 1 s) é o que se coñece como frecuencia, ν, e a súa relación co período, T, é: $\nu = 1/T$.

$$\nu = \frac{1}{T} \rightarrow \nu = \frac{1}{3{,}3\cdot 10^{-7}} \rightarrow \nu = 3{,}0\cdot 10^{6}\ \text{Hz} \rightarrow \boxed{n = 3{,}0\cdot 10^{6}\ \text{Hz}}$$

8.- Unha partícula de carga $1{,}6\cdot 10^{-19}$ C e de masa $1{,}67\cdot 10^{-27}$ kg penetra cunha velocidade *v* nunha zona onde hai un campo magnético perpendicular de 5 teslas. A traxectoria é unha órbita circular de raio $15\cdot 10^{-6}$ m. Calcula: a) a velocidade da partícula; b) o número de voltas que dá en 1 minuto. (*Set. 00*).

Solución:

a) A partícula cargada ó entrar no campo magnético $\vec{B}$ vai estar sometida á forza de Lorentz: $\vec{F}_{\text{magnética}} = Q\cdot\vec{v}\ \text{x}\ \vec{B}$, que é de dirección perpendicular á traxectoria. Esta forza normal causa unha variación na dirección da velocidade, pero non no seu módulo, que é constante: $v =$ cte., tratándose dun movemento uniforme.

Como Q, v e B son constantes; a forza F e a aceleración a_n (que é normal) tamén o son, describindo un movemento circular: $a_n = v^2/r =$ cte → $r =$ cte.

$$\left.\begin{aligned} F_{\text{magnética}} &= Q\,v\,B \\ F_{\text{normal}} &= \frac{m\,v^2}{r} \\ F_{\text{magnética}} &= F_{\text{normal}} \end{aligned}\right\} \rightarrow Q\,v\,B = \frac{m\,v^2}{r} \rightarrow r = \frac{m\,v}{Q\,B}$$

$$v = \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 5\cdot 15\cdot 10^{-6}}{1{,}67\cdot 10^{-27}} \rightarrow \boxed{v = 7{,}2\cdot 10^{3}\ \ \text{m s}^{-1}}$$

b)

$$v=\frac{s}{t}\;\rightarrow\; v=\frac{2\,\pi\, r}{T}\;\rightarrow\; T=\frac{2\,\pi\, r}{v}$$

$$T=\frac{2\cdot\pi\cdot 15\cdot 10^{-6}}{7,2\cdot 10^{3}}=1,3\cdot 10^{-8}\ \text{s}$$

$$\text{n° voltas en 1 minuto, } n=\frac{1\ \text{volta}}{1,3\cdot 10^{-8}\ \text{s}}\cdot 60\ \text{s}\;\rightarrow\;\boxed{n=4,6\cdot 10^{9}\ \text{voltas}}$$

9.- Un electrón penetra perpendicularmente nun campo magnético de 2,7 T cunha velocidade de 2000 km s^{-1}. a) Calcula o raio da órbita que describe, b) acha o número de voltas que dá en 0,05 s. (Datos: m_e=9,1 · 10^{-31} kg, Q_e=−1,6 · 10^{-19} C). (*Xuño 00*).

Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{l} F_{\text{magnética}}=Q\,v\,B \\ F_{\text{normal}}=\dfrac{m\,v^2}{r} \\ F_{\text{magnética}}=F_{\text{normal}} \end{array}\right\}\rightarrow\; Q\,v\,B=\frac{m\,v^2}{r}\;\rightarrow\; r=\frac{m\,v}{Q\,B}$$

$$r=\frac{9,1\cdot 10^{-31}\cdot 2000\cdot 10^{3}}{1,6\cdot 10^{-19}\cdot 2,7}\;\rightarrow\;\boxed{r=4,2\cdot 10^{-6}\ \text{m}}$$

b)

$$v=\frac{s}{t}\;\rightarrow\; v=\frac{2\,\pi\, r}{T}\;\rightarrow\; T=\frac{2\,\pi\, r}{v}$$

$$T=\frac{2\cdot\pi\cdot 4,2\cdot 10^{-6}}{2000\cdot 10^{3}}=1,3\cdot 10^{-11}\ \text{s}$$

$$\text{n° voltas en 0,05 s, } n=\frac{1\ \text{volta}}{1,3\cdot 10^{-11}\ \text{s}}\cdot 0,05\ \text{s}\;\rightarrow\;\boxed{n=3,8\cdot 10^{9}\ \text{voltas}}$$

10.- Sobre un protón que posúe unha enerxía cinética de 4,5 · 10^{6} eV actúa en dirección normal á súa traxectoria un campo magnético uniforme de 8 T. Determina: a) valor da forza que actúa sobre el; b) o raio da órbita descrita. Datos: $m_{\text{protón}}$ = 1,7 · 10^{-27} kg; carga protón = 1,6 · 10^{-19} C; eV = 1,6 · 10^{-19} J. (*Set. 98*).

Solución:

a)

$$F_{\text{magnética}}=Q\,\vec{v}\ \text{x}\ \vec{B}\;\rightarrow\; F=Q\,v\,B\;\rightarrow\; F=1,6\cdot 10^{-19}\cdot v\cdot 8$$

$$E_{\text{k}}=4,5\cdot 10^{6}\ \text{eV}=4,5\cdot 10^{6}\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\ \text{J}=7,2\cdot 10^{-13}\ \text{J}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m\,v^2 \;\rightarrow\; 7{,}2 \cdot 10^{-13} = \frac{1}{2} \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-27} \cdot v^2 \;\rightarrow\; v = 2{,}91 \cdot 10^{7}\ \text{m s}^{-1}$$

$$F = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 2{,}91 \cdot 10^{7} \cdot 8 \;\rightarrow\; \boxed{F = 3{,}7 \cdot 10^{-11}\ \text{N}}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F}_{\text{magnética}} = \vec{F}_{\text{normal}} \\ F_{\text{magnética}} = 3{,}7 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \\ F_{\text{normal}} = \dfrac{m\,v^2}{r} \end{array}\right\} \rightarrow 3{,}7 \cdot 10^{-11} = \frac{1{,}7 \cdot 10^{-27} \cdot \left(2{,}91 \cdot 10^{7}\right)^2}{r} \;\rightarrow\; \boxed{r = 3{,}9 \cdot 10^{-2}\ \text{m}}$$

11.- Un electrón que se despraza con movemento rectilíneo uniforme á velocidade de $1 \cdot 10^7$ m s^{-1}, penetra nun campo magnético uniforme de $2 \cdot 10^4$ T, perpendicular á traxectoria do electrón. Calcula: a) a forza que actúa sobre o electrón, b) o raio da traxectoria que describe. Datos: carga do e^- = $-1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C, m_{e-} = $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg. (*Xuño 97*).

Solución:

a)

$$\vec{F}_{\text{magnética}} = Q\,\vec{v} \times \vec{B} \;\rightarrow\; F = Q\,v\,B \;\rightarrow\; F = 1{,}60 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 10^{7} \cdot 2 \cdot 10^{4} \;\rightarrow\; \boxed{F = 3{,}2 \cdot 10^{-8}\ \text{N}}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F}_{\text{magnética}} = \vec{F}_{\text{normal}} \\ F_{\text{magnética}} = 3{,}2 \cdot 10^{-8}\ \text{N} \\ F_{\text{normal}} = \dfrac{m\,v^2}{r} \end{array}\right\} \rightarrow 3{,}2 \cdot 10^{-8} = \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot \left(1 \cdot 10^{7}\right)^2}{r} \;\rightarrow\; \boxed{r = 2{,}85 \cdot 10^{-9}\ \text{m}}$$

Tema 5. INDUCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

EXERCICIOS (Cuestións)

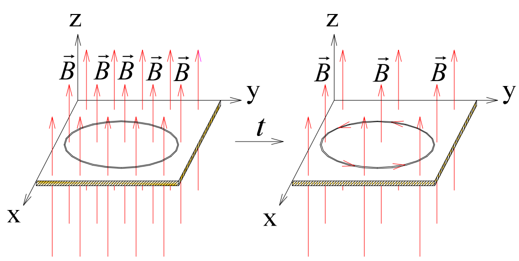
1.- Mapa conceptual dos contidos do tema.

Solución:

Ver páxina 193 do texto "Física" de 2º de Bacharelato, Ed. Baía.

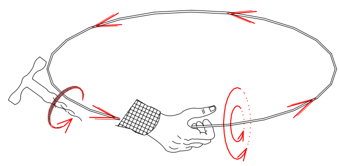
2.- Unha espira condutora, que repousa nun plano horizontal, e atravesada por un campo magnético vertical, dirixido cara a arriba, uniforme, pero decrecente no tempo. Cal será e por que o sentido da corrente inducida na espira? (*Selectividade COU*; *xuño 95*).

Solución:



Como **o fluxo magnético que atravesa á espira varía no tempo**, debido á diminución do vector campo magnético $\vec{B}$; na espira condutora indúcese unha corrente eléctrica, que ten un sentido que vén dado pola lei de Lenz.

Como a corrente inducida aparece pola diminución do valor de $\vec{B}$, o sentido da corrente inducida é tal que o campo magnético que esta corrente crea hai de ser do mesmo sentido que o campo magnético exterior, opoñéndose desta forma á súa diminución, que é a causa que a produce. Este sentido da corrente encóntrase facilmente se se envolve o condutor coa man dereita de modo que o dedo polgar sexa paralelo co condutor e leve o sentido da corrente. Nesta situación, o resto dos dedos curvados sinalan a dirección e o sentido das liñas de indución do campo magnético creado pola corrente inducida. Polo tanto, **a corrente inducida ten o sentido antihorario, cando a espira se observa verticalmente e co sentido de arriba a abaixo**.

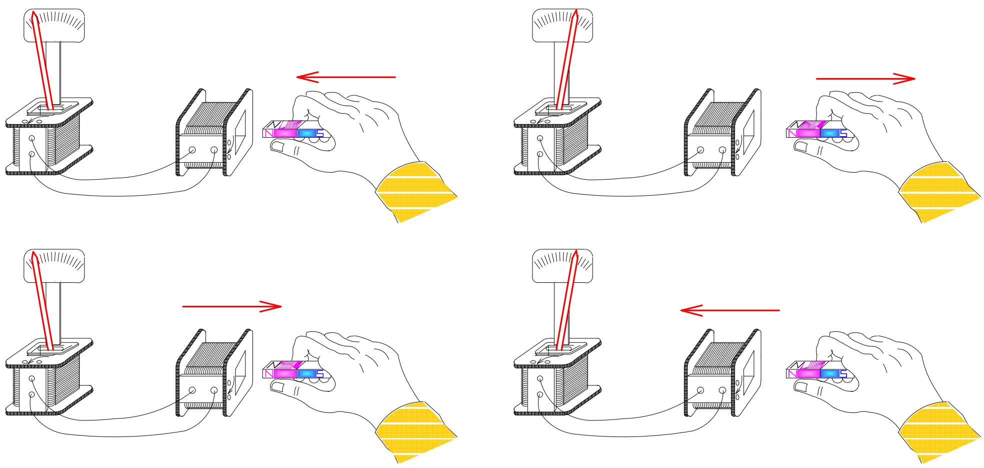


Tamén se pode encontrar o sentido da corrente inducida coa regra do sacarrollas: Se a dirección e o sentido de avance dun sacarrollas se fai coincidir coa dirección e o sentido da corrente eléctrica inducida, o sentido de rotación do sacarrollas indícanos o sentido das liñas de indución do campo magnético creado pola corrente.

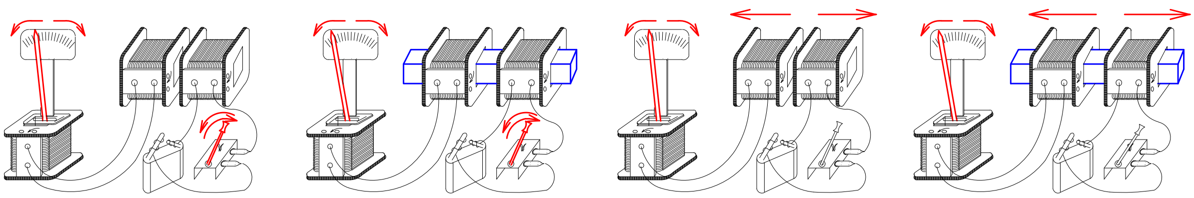
3.- Cales son as condicións para que exista forza electromotriz inducida? Describe unha montaxe experimental, indicando que se verifica algunha das condicións que citaches. (*Selectividade COU*; *set. 92*).

Solución:

A condición para que exista forza electromotriz inducida é que exista unha variación de fluxo magnético no tempo, sempre que esta variación de fluxo se deba á unha variación temporal do campo magnético, a un movemento de todo ou parte do circuíto dentro de $\vec{B}$ ou a ambas cousas simultaneamente.



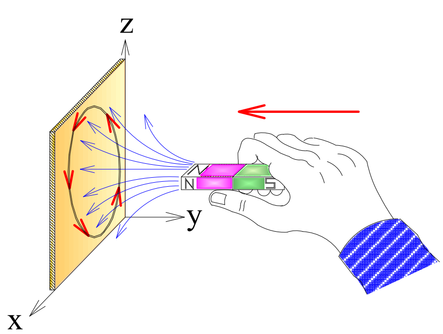
Cando se acerca/afasta un imán a unha espira (ou a un solenoide), ou se acerca/afasta unha espira a un imán, varía o campo magnético que atravesa a espira, aparecendo unha forza electromotriz inducida. Igual ocorre cando temos unha espira conectada a través dun interruptor a un xerador de corrente continua e nas súas inmediacións hai unha segunda espira. Ó abrir/pechar o interruptor varía a intensidade de corrente que percorre á espira do xerador, variando o campo magnético que crea e, en consecuencia, varía o fluxo magnético que atravesa á segunda espira, aparecendo nesta unha fem inducida. Igual ocorre se co interruptor pechado hai un movemento relativo de ambas espiras.



4.- Acércase, a unha espira situada no plano xz, o polo norte dun imán recto cunha velocidade $\vec{v} = -2\,\vec{j}\left(\mathrm{m\,s^{-1}}\right)$. Xustifica a corrente inducida que aparece na espira. Se miramos a espira desde a parte positiva do eixe que é perpendicular ó plano que a contén, que sentido (horario ou antihorario) ten a corrente inducida?

Solución:

Ó acercar á espira o polo norte do imán, **aumenta o campo magnético** que a atravesa, **aparecendo unha variación de fluxo magnético** e, en consecuencia, unha corrente inducida. O seu sentido é aquel que cree un campo magnético que se opoña ó aumento do campo magnético exterior, que é a causa que a produce (lei de Lenz). Polo tanto, o campo magnético creado pola corrente inducida no interior da espira hai de ter a dirección do eixe y e o sentido positivo deste. O sentido da corrente encóntrase facilmente se se envolve o condutor coa man dereita de modo que o dedo polgar sexa paralelo co condutor e leve o sentido da corrente e

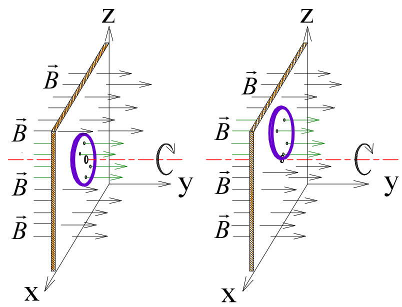


o resto dos dedos curvados sinalen a dirección e o sentido das liñas de indución do campo magnético creado pola corrente. Polo tanto, **a corrente inducida ten o sentido antihorario** cando a espira se observa na dirección do eixe y e no seu sentido negativo.

5.- Unha espira condutora, que está no plano xz, xira no mesmo plano en que se encontra, dentro dun campo magnético uniforme e estacionario, de valor $B\,\vec{j}$, cunha aceleración angular α. Estuda se aparece corrente inducida na espira.

Solución:

Para que na espira condutora apareza unha corrente inducida ten que variar o fluxo magnético que a atravesa. Independentemente de cal sexa o eixe de xiro, sempre que a espira xire no mesmo plano en que se encontra, que é perpendicular ó vector campo magnético, (que é uniforme e estacionario), o fluxo magnético que a atravesa non varía e, en consecuencia, **non hai corrente inducida**.



6.- Unha espira metálica está dentro dun campo magnético $\vec{B}$, estacionario e uniforme, sendo a dirección de $\vec{B}$ perpendicular ó plano da espira. Estuda se se induce corrente na espira para o caso de que esta se desprace paralelamente a si mesma e no sentido do campo con: a) movemento uniforme e b) movemento variado. Repite este estudo para o caso de que o campo magnético sexa: a) estacionario e non uniforme nos distintos puntos do plano en que se encontra a espira, pero si uniforme na dirección do desprazamento da espira e b) uniforme e non estacionario.

Solución:

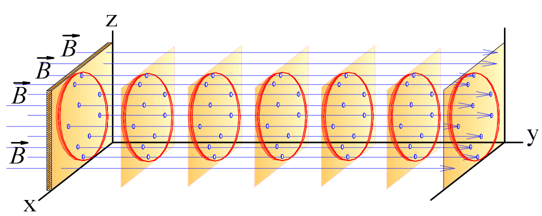
Para que nunha espira condutora apareza corrente inducida ten que variar no tempo o fluxo magnético que a atravesa.

Cando a espira se despraza paralelamente a si mesma, xa sexa con movemento uniforme ou variado, sucede que:

· O vector campo magnético $\vec{B}$ que atravesa á espira non varía.

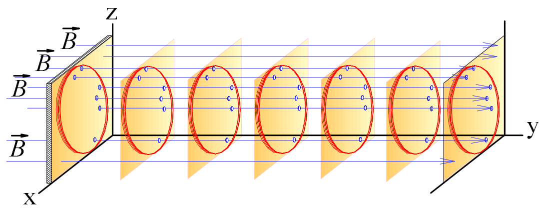
· A sección S da espira é sempre a mesma.

· O ángulo formado polo vector superficie, $\vec{S}$, e o vector campo magnético, $\vec{B}$, vale sempre cero graos.



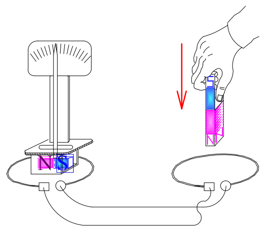
En consecuencia, **cando a espira se despraza paralelamente a si mesma, dentro dun campo magnético estacionario e uniforme**, o fluxo magnético que a atravesa é constante e **non se induce corrente eléctrica**.

Se o campo magnético é constante no tempo (estacionario) e non varía ó longo da dirección en que se despraza a espira, eixe y, aínda que sexa diferente para os distintos valores de x e de z, o fluxo magnético que atravesa á espira é sempre o mesmo e nela non aparece corrente inducida.



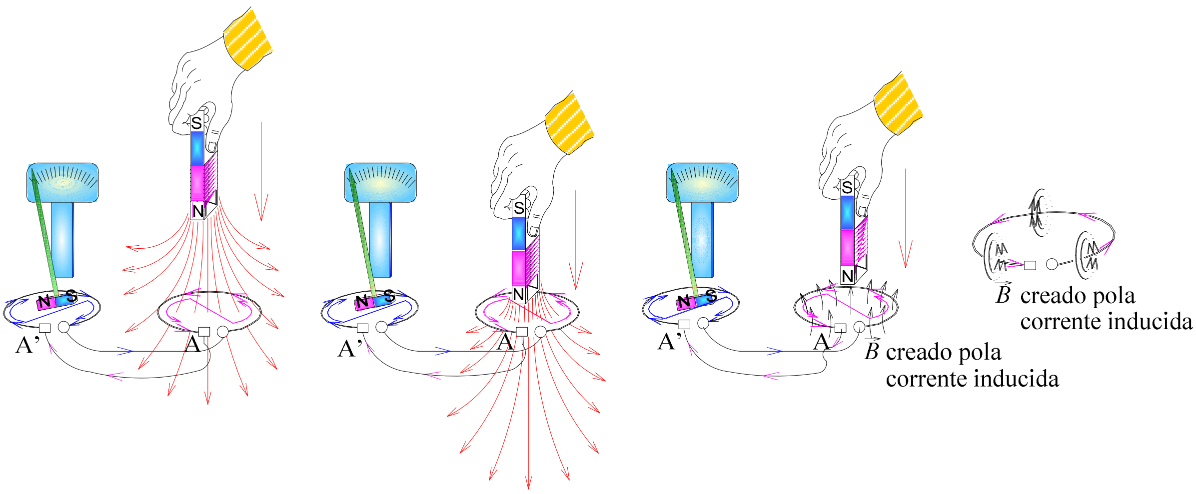
Se o campo magnético e uniforme pero varía no tempo (non estacionario), varía o fluxo magnético que atravesa a espira e nela aparece unha corrente eléctrica inducida.

7.- Estuda cara a onde xirará a agulla que está unida ó imán horizontal que aparece no interior da primeira das espiras do debuxo cando se acerca o polo norte do imán á segunda das espiras.



Solución:

Ó acercar á segunda espira o polo norte do imán, aumenta o vector campo magnético $\vec{B}$ que a atravesa. En consecuencia, o fluxo magnético a través desta espira varía no tempo e aparece unha forza electromotriz e unha corrente inducida, que hai de ter aquel sentido de cause, por dentro da espira, un campo magnético cara a arriba, opoñéndose desta forma ó aumento do campo magnético que a atravesa debido ó acercamento do imán, que é a causa que a produce (lei de Lenz). Para que o campo magnético da corrente inducida teña este sentido, a corrente hai de levar o sentido antihorario ó mirar á espira desde arriba, indo polo condutor que une ás dúas espiras de A a A'. Na primeira espira, a corrente, vista tamén desde arriba, leva o sentido horario, comportándose esta cara da espira como un polo sur, que atrae ó polo norte do imán da agulla, xirando cara á esquerda.



8.- Comenta as frases:

a) Se o fluxo magnético que atravesa unha espira condutora é grande, a corrente eléctrica inducida na espira tamén é grande.

b) Se o vector campo magnético que atravesa unha espira condutora é grande, a corrente eléctrica inducida na espira tamén é grande.

Solución:

a) A forza electromotriz inducida, ε, e, en consecuencia, a corrente inducida nunha espira condutora depende da velocidade de variación do fluxo magnético, Φ, que a atravesa:

$$\varepsilon = \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{\text{debido ó movemento da espira dentro de } \vec{B}} + \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{\text{debido á variacion do } \vec{B} \text{ que atravesa á espira}}$$

Polo tanto, se o fluxo magnético non varía no tempo non hai corrente inducida, independentemente de que o fluxo teña un valor grande ou pequeno. Polo tanto, a frase non é correcta.

b) O fluxo magnético Φ é directamente proporcional ó vector campo magnético $\vec{B}$ que atravesa á espira condutora de sección $\vec{S}$: $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$. Pero, como se acaba de comentar no apartado anterior, non é o valor do campo magnético a magnitude física que causa correntes inducidas, senón que estas aparecen cando hai unha variación de fluxo magnético no tempo. Polo tanto, o vector campo magnético que atravesa a espira condutora pode ser grande e non existir corrente inducida, non sendo correcto o enunciado da cuestión.

9.- A forza electromotriz (fem) inducida nun circuíto tende: a) a diminuír o fluxo magnético que atravesa ó circuíto; b) a aumentar o fluxo magnético que atravesa ó circuíto; c) a aumentar ou a diminuír o fluxo magnético que atravesa o circuíto, segundo diminúa ou aumente o fluxo magnético exterior. (Elixe a/s resposta/s que consideres correcta/s).

Solución:

A fem inducida nun circuíto, ε, causa unha corrente eléctrica inducida, que se opón á causa que a produce, e débese á variación temporal do fluxo magnético, Φ, que atravesa o circuíto:

$$\varepsilon = \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{\text{debido ó movemento da espira dentro de } \vec{B}} + \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{\text{debido á variacion do } \vec{B} \text{ que atravesa á espira}}$$

Sucede que se se produce un aumento do fluxo magnético exterior que atravesa un circuíto, a fem inducida tende a diminuír este aumento, pero se se produce unha diminución do fluxo magnético exterior, a fem inducida tende a aumentalo, como se indica no ítem c) da cuestión.

10.- Unha espira, situada perpendicularmente ó vector campo magnético $\vec{B}$ que aparece entre os polos norte e sur dun imán en ferradura, xira arredores dun eixe que pasa polo seu centro e é perpendicular a $\vec{B}$ cunha velocidade angular ω. Estuda que lle ocorrerá ó valor máximo e ó período da corrente eléctrica inducida na espira cando se duplica a súa velocidade angular de rotación, 2ω.

Solución:

O fluxo magnético Φ que atravesa a espira de sección *S*, que xira cunha velocidade angular ω, dentro do campo magnético $\vec{B}$, vén dado en función do tempo *t* pola expresión:

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos(\omega t)$$

A expresión matemática da f. e. m. inducida na espira obtémola recordando a lei de Faraday-Lenz:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\left[B \cdot S \cdot \cos(\omega t)\right]}{dt} = B \cdot S \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega t)$$

Se a espira ten unha resistencia óhmica R, a intensidade de corrente que por ela circula ten o valor que vén dado pola lei de Ohm:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B \cdot S \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega t)}{R} = \frac{B \cdot S \cdot \omega}{R} \cdot \text{sen}(\omega t) = I_{\text{máximo}} \cdot \text{sen}(\omega t)$$

Vemos que a intensidade é variable, $i(t)$, sendo máxima cando sen $(\omega\, t) = 1$, resultando: $I_{\text{máxima}} = B \cdot S \cdot \omega / R$. Polo tanto, se ω pasa a 2ω, $\boldsymbol{I_{\text{máxima}}}$ **pasa a $\boldsymbol{2 \cdot I_{\text{máxima}}}$**.

Para estudar o que lle ocorre ó período da corrente sinusoidal coa variación de ω, empezamos relacionando estas dúas magnitudes: $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Resulta que, ó duplicar ω, **o período redúcese á metade.**

11.- Unha bobina "a" está nas inmediacións doutra bobina "b". Cando varía a intensidade de corrente da bobina "a", a forza electromotriz inducida na bobina "b" é directamente proporcional: a) ó valor do vector campo magnético no seu interior; b) á súa resistencia óhmica; c) á velocidade de cambio do vector campo magnético no seu interior; d) á intensidade de corrente que percorre á bobina "a". (Elixe a/s resposta/s que consideres correcta/s).

Solución:

a) A forza electromotriz inducida, ε, na espira condutora "b", vén dada pola expresión:

$$\varepsilon = \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{\text{debido ó movemento da espira dentro de } \vec{B}} + \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{\text{debido á variacion do } \vec{B} \text{ que atravesa á espira}}$$

Se ben o fluxo magnético Φ que atravesa á espira "b" de sección S é directamente proporcional ó vector campo magnético $\vec{B}$: $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$; para que nela se induza unha fem é necesario que o fluxo magnético que a atravesa varíe no tempo. Polo tanto, por moi grande que sexa $\vec{B}$, se non hai variación de Φ, non hai fem inducida.

b) Na expresión da forza electromotriz inducida vemos que esta non ten relación algunha coa resistencia óhmica da espira na que se induce.

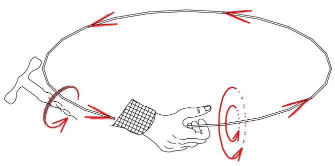
c) Segundo o comentado na opción a), temos que a fem inducida nunha espira condutora é directamente proporcional á variación do fluxo magnético, que á súa vez é directamente proporcional a $\vec{B}$. Polo tanto, si que a fem inducida na espira "b" é directamente proporcional á velocidade de cambio do vector campo magnético no seu interior.

d) Sabemos que unha corrente eléctrica circular I crea, nun punto do eixe que pasa polo seu centro, un campo magnético $\vec{B}$, que é directamente proporcional ó valor de I. Pero por moi grande que sexa I e, en consecuencia, $\vec{B}$, se non varía no tempo non se induce fem ningunha na espira "b".

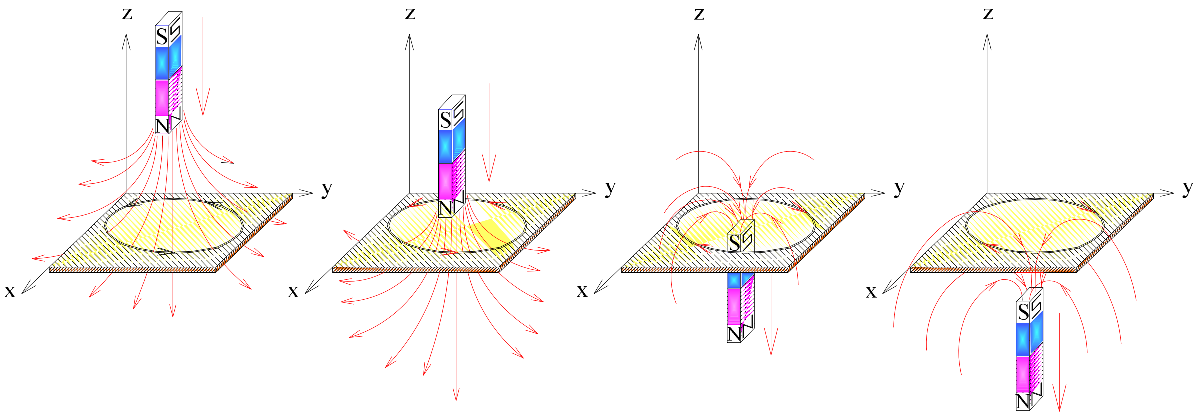
12.- Unha espira condutora está situada nun plano horizontal e, desde unha altura *h* por encima da espira, déixase caer un imán recto, de modo que descende segundo o eixe vertical da espira que pasa polo seu centro. Se inicialmente o polo norte do imán é o que está cara á espira, a corrente que nela se induce é, vista no sentido de movemento do imán, de: a) sentido horario; b) sentido antihorario; c) primeiro de sentido horario e, cando o centro do imán pasa polo plano da espira, de sentido antihorario; d) primeiro de sentido antihorario e, cando o centro do imán pasa polo plano da espira, de sentido horario. (Elixe a/s resposta/s que consideres correcta/s).

Solución:

A medida que o polo norte do imán se acerca á espira, aumenta o campo magnético que a atravesa, aparecendo unha variación de fluxo magnético e, en consecuencia, unha corrente inducida. O seu sentido é aquel que cree un campo magnético que se opoña ó aumento do campo magnético exterior que aparece polo acercamento do polo norte do imán, que é a causa que a produce.



Polo tanto, o vector campo magnético creado pola corrente inducida, no plano da espira e no seu interior, ten a dirección vertical e o sentido contrario ó do acercamento do imán. Este sentido da corrente encóntrase facilmente se se envolve o condutor coa man dereita, de modo que o dedo polgar sexa paralelo co condutor e leve o sentido da corrente. Con estas consideracións, os dedos curvados que envolven o condutor sinalen a dirección e o sentido das liñas de indución do campo magnético creado pola corrente inducida. Polo tanto, a corrente inducida ten o sentido antihorario cando a espira se observa na dirección do movemento do imán e co sentido deste.



Unha vez que o centro do imán pasa polo plano da espira, o polo do imán máis próximo á espira é o polo sur. E a medida que o imán se afasta, diminúe o campo magnético que a atravesa, aparecendo unha variación de fluxo magnético e, en consecuencia, unha fem inducida. Como xa se dixo máis arriba, o seu sentido é aquel que cree un campo magnético que se opoña á diminución do campo magnético exterior, que é a causa que a produce. Polo tanto, o campo magnético creado pola corrente inducida, no plano da espira e no seu interior, ten a dirección vertical, co sentido de arriba cara abaixo. Polo tanto, agora, a corrente inducida ten o sentido horario cando a espira se observa na dirección do movemento do imán e co sentido deste.

O resultado é que a resposta correcta coincide coa do ítem d).

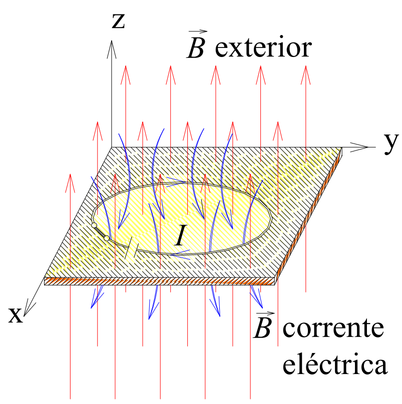
13.- Unha espira metálica, situada no plano horizontal (x,y), está conectada a unha pila mediante un interruptor, sendo percorrida por unha corrente eléctrica *I* no sentido horario cando se mira no sentido negativo do eixe z. Se a espira está atravesada por un campo magnético

exterior uniforme de valor $B\vec{k}$, sendo este campo maior que o que crea a corrente *I*, relaciona unha frase da primeira columna con outra das que aparece na segunda columna:

a) A intensidade de corrente eléctrica na espira é constante	**1) O $\vec{B}$ exterior aumenta no tempo**
b) A intensidade de corrente eléctrica na espira aumenta no tempo	**2) O $\vec{B}$ exterior diminúe no tempo**
c) A intensidade de corrente eléctrica na espira diminúe no tempo	**3) O fluxo magnético total que atravesa a espira aumenta**
d) No momento de abrir o interruptor	**4) A intensidade de corrente eléctrica na espira aumenta**
e) Unha vez aberto o interruptor	**5) A intensidade de corrente eléctrica na espira é nula**
f) Unha vez aberto o interruptor	**6) O $\vec{B}$ exterior é estacionario**
g) No memento de abrir o interruptor	**7) O fluxo magnético total que atravesa a espira diminúe**

Solución:

a)-6): Se a intensidade de corrente eléctrica na espira é constante, o $\vec{B}$ exterior é estacionario.



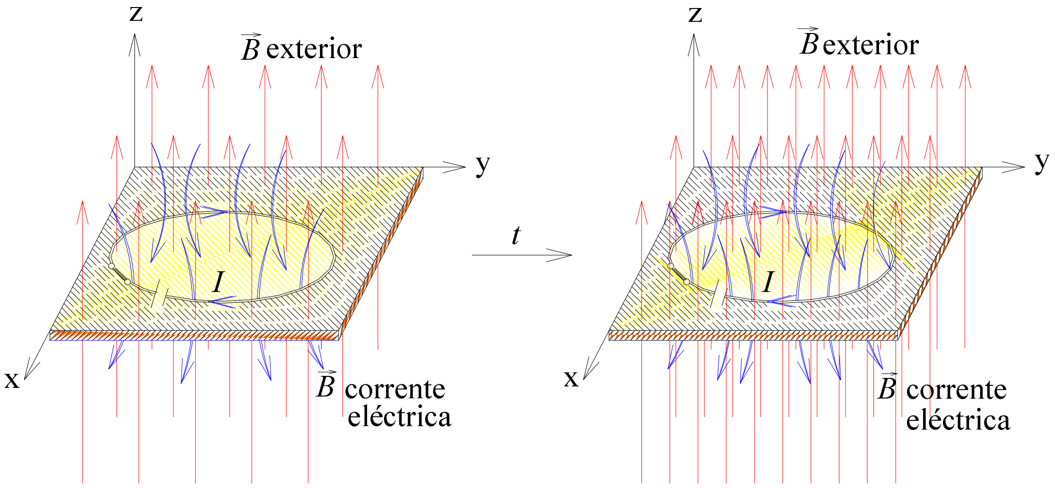
Se a espira de superficie $\vec{S}$ está en repouso e o campo magnético exterior, $\vec{B}_{exterior}$, que a atravesa é estacionario e uniforme, na espira non se induce corrente eléctrica e a intensidade de corrente que a percorre é constante (soamente posúe a que é producida pola diferenza de potencial da pila, ΔV, de acordo coa lei de Ohm: $I = \dfrac{\Delta V}{R}$, sendo R a resistencia da espira).

Se o $\vec{B}$ exterior variase no tempo, habería unha variación do fluxo magnético e esta variación causaría unha forza electromotriz inducida, aparecendo unha corrente inducida no sentido de crear un campo magnético que se opoña á variación do $\vec{B}$ exterior, que é a causa que a produce.

b)-1) Se a intensidade de corrente eléctrica na espira aumenta no tempo é porque o $\vec{B}$ exterior tamén aumenta.

A pila xera na espira, segundo a lei de Ohm, unha corrente eléctrica, que é constante. Se na espira hai unha variación de intensidade de corrente é porque nela se induce unha corrente, que é producida por unha variación do $\vec{B}$ exterior, segundo a lei de Faraday-Lenz.

Como a intensidade de corrente na espira aumenta no tempo, a corrente que se induce ten o mesmo sentido que a que xera a pila, aumentando, por dentro da espira, o vector campo magnético creado por estas correntes eléctricas. E o aumento deste $\vec{B}$ aparece para opoñerse ó aumento do $\vec{B}$ exterior.

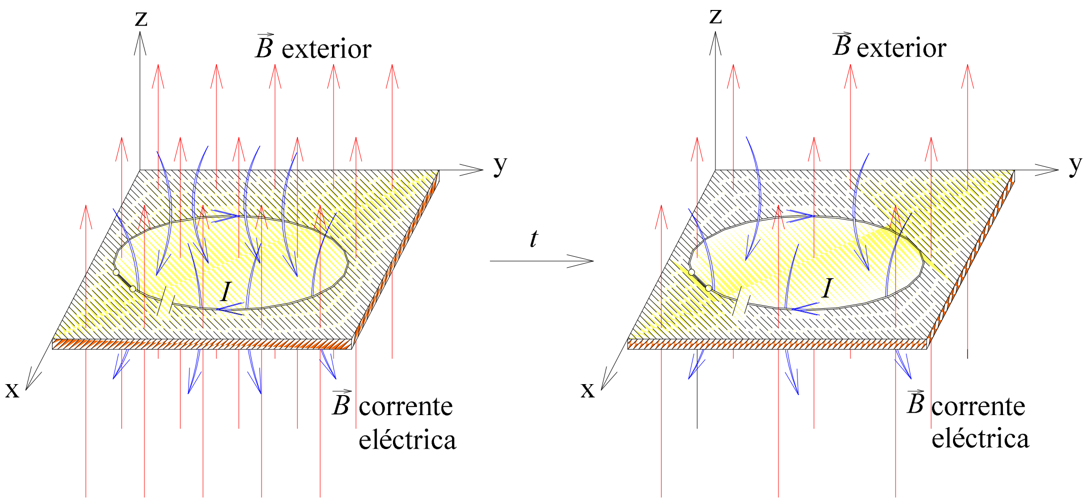


c)-2) Se a intensidade de corrente eléctrica na espira diminúe no tempo é porque o $\vec{B}$ exterior tamén diminúe.

Se a intensidade de corrente na espira diminúe no tempo, a corrente que se induce ten o sentido contrario á que xera a pila. En consecuencia, o vector campo magnético da corrente total, $\vec{B}_{\text{corrente total}}$, diminúe e, por dentro da espira, ten o sentido cara abaixo. Polo tanto, a causa que produce a corrente inducida é unha diminución do $\vec{B}$ exterior xa que esta diminución crea unha corrente inducida no sentido antihorario que:

· Por un lado, se opón á corrente producida pola pila, diminuíndo a intensidade total.

· E, por outro, crea un $\vec{B}_{\text{inducido}}$, que por dentro da espira ten o sentido positivo do eixe z, reforzando o $\vec{B}$ exterior, opoñéndose desta forma á causa que a produce.

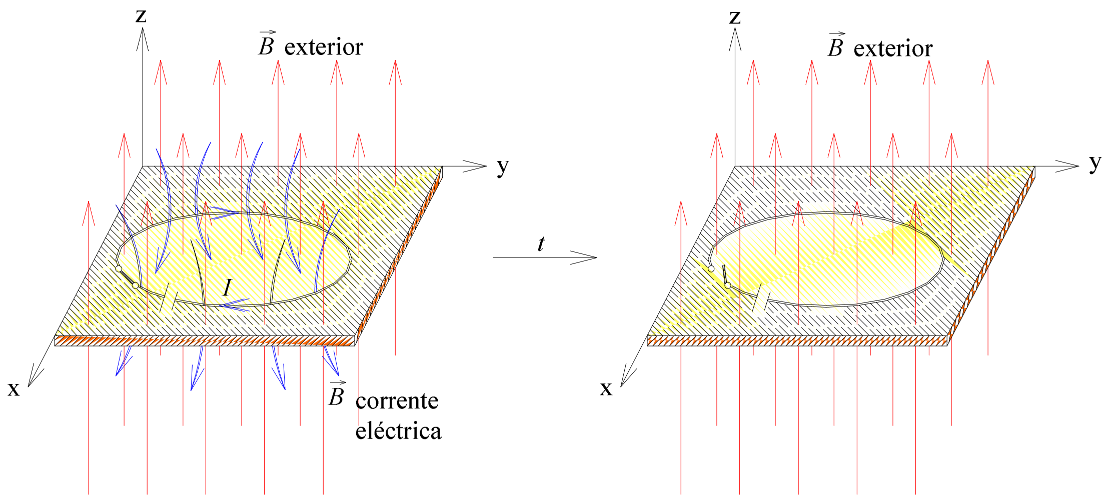


d)-4) No momento de abrir o interruptor, a intensidade de corrente eléctrica na espira aumenta.

Ó abrir o interruptor, a intensidade de corrente producida pola pila vai pasar desde un valor I ata un valor cero. Esta variación do valor da corrente causa unha variación do vector campo magnético que crea, pasando desde un valor $\vec{B}_I$ ata un valor cero. E esta $\Delta\vec{B}$ induce unha corrente eléctrica que se opón á diminución de $\vec{B}_I$, polo que a corrente inducida hai de ter o mesmo sentido que a corrente da pila, aumentando o seu valor.

e)-3) Unha vez aberto o interruptor o fluxo magnético total que atravesa a espira aumenta.

O fluxo magnético total que atravesa a espira é o que corresponde ó $\vec{B}$ exterior máis ó $\vec{B}$ da corrente eléctrica, $\vec{B}_{\text{total}} = \vec{B}_{\text{exterior}} + \vec{B}_{\text{corrente eléctrica}}$, que por dentro da espira teñen sentido contrario: $B_{\text{total inicial}} = B_{\text{exterior}} - B_{\text{corrente eléctrica}}$. Unha vez aberto o interruptor, o $\vec{B}_{\text{corrente eléctrica}}$ desaparece, resultando: $B_{\text{total final}} = B_{\text{exterior}} > B_{\text{total inicial}}$.



f)-5) Unha vez aberto o interruptor, a intensidade de corrente eléctrica na espira é nula.

Unha vez aberto o interruptor, o circuíto está aberto e:

· Por un lado, a resistencia do circuíto é infinita e non pasa corrente ningunha.

· Por outra parte, aínda que o circuíto estivese pechado, non hai variación de fluxo magnético e non se induce corrente eléctrica ningunha.

g)-7) No momento de abrir o interruptor, o fluxo magnético total que atravesa a espira diminúe.

Como xa se comentou máis arriba, no momento de abrir o interruptor, a intensidade de corrente eléctrica na espira aumenta. Como esta corrente ten o sentido horario, o vector campo magnético que crea, por dentro da espira, ten o sentido de cara abaixo, sendo de sentido contrario ó $\vec{B}$ exterior. Polo tanto, o $\vec{B}_{\text{total}}$, suma do $\vec{B}_{\text{exterior}}$ e do $\vec{B}_{\text{corrente eléctrica total}}$, diminúe e, en consecuencia, o fluxo, Φ, tamén diminúe $\left(\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}\right)$.

EXERCICIOS DE SELECTIVIDADE (Cuestións)

Razoa as respostas ás seguintes cuestións:

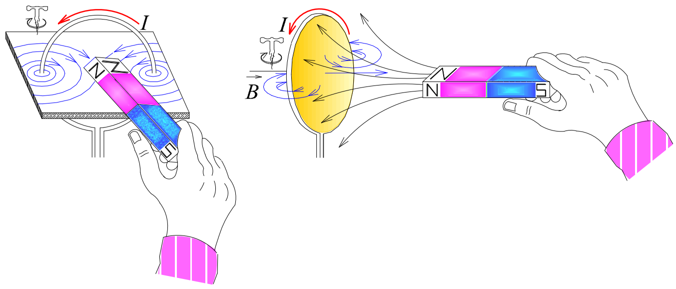
1.- Se se achega o polo norte dun imán rectilíneo ó plano dunha espira plana e circular: a) prodúcese na espira unha corrente inducida que circula en sentido antihorario; b) xérase un par de forzas que fai rotar a espira; c) a espira é atraída polo imán. *(Set. 06)*.

Solución:

Para que nunha espira condutora se induza unha fem e apareza unha corrente eléctrica inducida é necesario que varíe no tempo o fluxo magnético que a atravesa e que esta variación sexa provocada: ou por un movemento da espira dentro do campo magnético, $\vec{B}$, ou por unha variación temporal do campo magnético, ou por ambas cousas simultaneamente:

$$\varepsilon = \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{\text{debido ó movemento da espira dentro de } \vec{B}} + \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{\text{debido á variacion do } \vec{B} \text{ que atravesa á espira}}$$

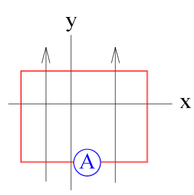
No caso que se presenta na cuestión, ao acercar o polo norte dun imán á espira condutora, aumenta o vector campo magnético que á atravesa e, en consecuencia, indúcese unha fem.



O sentido da corrente inducida é aquel que se opón á causa que a produce (lei de Lenz). Neste caso, hai de ter aquel sentido que cree un campo magnético que contrarreste o aumento do campo magnético que atravesa á espira por acercamento do polo norte do imán. Este sentido da corrente encóntrase facilmente coa regra do sacarrollas: se a dirección e o sentido de avance dun sacarrollas se fai coincidir coa dirección e o sentido da corrente eléctrica, o sentido de rotación do sacarrollas indícanos o sentido das liñas de indución do campo magnético creado pola corrente. A igual resultado chegamos coa regra da man dereita: se se envolve o condutor coa man dereita, de modo que o dedo polgar indique a dirección e o sentido da corrente, os dedos que envolven o condutor sinalen a dirección e o sentido das liñas de indución do campo magnético creado pola corrente. En consecuencia, o sentido que lle corresponde á corrente inducida é o antihorario, comportándose esta cara da espira como un polo norte (ítem a).

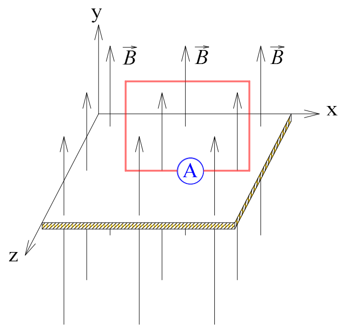
A forza que exerce o imán sobre a espira é de repulsión: polos iguais repélense (ítem c incorrecto) e non aparece ningún par de forzas (o ítem b tampouco se cumpre).

2.- Unha espira rectangular está situada nun campo magnético uniforme, representado polas frechas da figura. Razoa se o amperímetro indicará paso de corrente: a) se a espira xira arredor do eixe y; b) se xira arredor do eixe x; c) se se despraza ó longo de calquera dos eixes x ou y. *(Set. 04)*.



Solución:

Para que nunha espira condutora se induza corrente eléctrica é necesario que varíe no tempo o fluxo magnético Φ que a atravesa. A forza electromotriz inducida ε que causa a corrente inducida vén dada pola lei de Faraday-Lenz: $\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\left(\vec{B}\cdot\vec{S}\right)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\left(B\cdot S\cdot\cos\alpha\right)}{\mathrm{d}t}$, sempre que a variación de fluxo se deba á variación temporal do campo magnético, $\vec{B}$, ou á variación da superficie da espira, S, ou ó ángulo α formado entre $\vec{B}$ e $\vec{S}$.



Cando a espira xira arredor do eixe y (dirección paralela á do vector campo magnético, $\vec{B}$), non varía o fluxo magnético que a atravesa. En todo momento, o seu valor é cero: $\Phi = B\cdot S\cdot\cos 90^\circ = 0$: O número de liñas de campo que atravesan a espira é nulo. Polo tanto, neste caso non se induce corrente eléctrica.

Cando a espira xira arredor do eixe x (dirección perpendicular a $\vec{B}$), o fluxo magnético que a atravesa toma valores distintos ó longo do tempo: vai desde valores de $B{\cdot}S$ ata $-B{\cdot}S$, pasando por cero. En consecuencia, neste caso indúcese corrente eléctrica na espira.

Cando a espira se despraza ó longo de calquera dos eixes x ou y non varía o valor de B, nin o de S, nin o de α: En todo momento $\vec{B}$ e $\vec{S}$ son perpendiculares (Φ = 0) e non se induce corrente.

3.- Se se acerca bruscamente o polo norte dun imán ó plano dunha espira sen corrente, nesta prodúcese: a) fem inducida en sentido horario; b) fem inducida en sentido antihorario; c) ningunha fem porque a espira inicialmente non ten corrente. ***(Xuño 02)*.**

Solución:

Ver a resposta da primeira destas cuestión

4.- De que depende a f.e.m. inducida nun circuíto?: a) de que varíe nunha magnitude grande ou pequena o fluxo magnético que o atravesa; b) da variación de fluxo magnético "rapidez con que cambia" a través do mesmo; c) do valor do fluxo magnético que o atravesa suposto constante. (*Xuño 98*).

Solución:

Para que nun circuíto se induza unha fem, ε, e apareza unha corrente eléctrica inducida é necesario que varíe no tempo o fluxo magnético que o atravese e que esta variación sexa provocada: ou por un movemento da espira dentro do campo magnético, $\vec{B}$, ou por unha variación temporal do campo magnético, ou por ambas cousas simultaneamente:

$$\varepsilon = \left(-\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{\text{debido ó movemento da espira dentro de }\vec{B}} + \left(-\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{\text{debido á variacion do }\vec{B}\text{ que atravesa á espira}}$$

Polo tanto, a fem inducida nun circuíto depende da velocidade de variación de fluxo magnético a través do mesmo (ítem b).

O feito de que varíe nunha magnitude grande ou pequena o fluxo magnético que atravesa un circuíto, se non se fai referencia á cantidade de tempo na que ten lugar a variación de fluxo, non se sabe se é ou non considerable a fem inducida. Así, aínda que a variación de fluxo sexa grande, se o tempo no que ten lugar esta variación é moi grande, a fem inducida pode considerarse desprezable.

EXERCICIOS DE SELECTIVIDADE (Problemas)

1.- Unha bobina cadrada e plana (*S* = 25 cm²) construída con 5 espiras está no plano XY. a) Enuncia a lei de Faraday-Lenz; b) calcula a f.e.m. inducida se se aplica un campo magnético en dirección do eixe Z, que varía de 0,5 T a 0,2 T en 0,1 s; c) calcula a f.e.m. media inducida se o campo permanece constante (0,5 T) e a bobina xira ata colocarse no plano XZ en 0,1 s. *(Xuño 07).*

Solución:

a) A indución electromagnética réxese por dúas leis:

· A de Faraday, que nos dá o valor da corrente inducida, e
· A de Lenz, que nos dá o sentido da corrente inducida.

Das experiencias de Faraday-Henry dedúcese que se induce corrente nun circuíto cando o fluxo magnético que o atravesa varía no tempo, podendo deberse esta variación:

· A unha variación da superficie do circuíto, *S*.
· A unha variación do campo magnético *B* que atravesa o circuíto.
· A unha variación do ángulo α que forma $\vec{B}$ e $\vec{S}$.

A expresión da forza electromotriz inducida, ε, que recolle as experiencias de Faraday-Henry, e que causa a corrente inducida, é: $\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$.

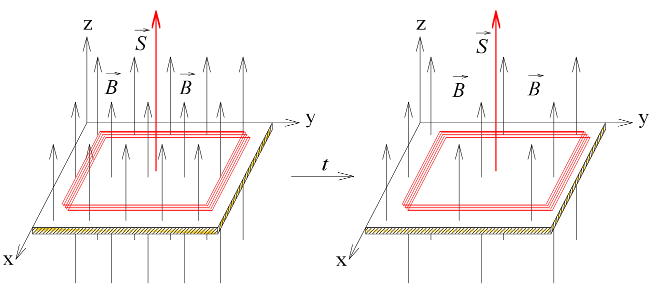
O sentido da corrente inducida é tal que se opón á causa que a produce (lei de Lenz). Este feito é o que motiva que na expresión anterior apareza un signo menos, −: $\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$.

b)

$$\varepsilon_{\text{media}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Phi_{\text{final}} - \Phi_{\text{inicial}}}{\Delta t} = -\frac{(B\cdot N\cdot S\cdot\cos\alpha)_{\text{final}} - (B\cdot N\cdot S\cdot\cos\alpha)_{\text{inicial}}}{\Delta t}$$

$$\varepsilon_{\text{media}} = -\frac{(0{,}2\cdot 5\cdot 25\cdot 10^{-4}\cdot\cos 0°) - (0{,}5\cdot 5\cdot 25\cdot 10^{-4}\cdot\cos 0°)}{0{,}1} \rightarrow \boxed{\varepsilon_{\text{media}} = 3{,}75\cdot 10^{-2}\ \text{V}}$$

O campo magnético exterior diminúe no tempo e a corrente inducida ten o sentido que o campo magnético que esta corrente crea reforce o $\vec{B}$ exterior, opoñéndose desta forma á súa diminución, que é a causa que a produce.

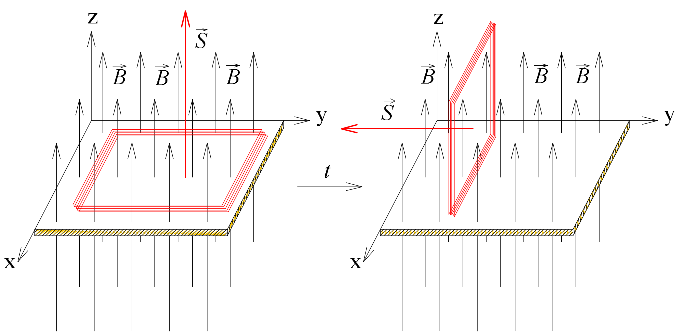


O $\vec{B}_{\text{exterior}}$ ten a dirección do eixe z e se consideramos que o seu sentido é o da parte positiva deste eixe, $\vec{B}_{\text{exterior}} = B\,\vec{k}$, o $\vec{B}_{\text{creado pola corrente inducida}} = B'\,\vec{k}$. Nesta situación, a corrente inducida ten o sentido antihorario, cando o circuíto se mira desde a parte positiva do eixe z.

c)

$$\varepsilon_{\text{media}} = -\frac{\left(0,5 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \cdot \cos 90°\right) - \left(0,5 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \cdot \cos 0°\right)}{0,1} \rightarrow \boxed{\boxed{\varepsilon_{\text{media}} = 6,25 \cdot 10^{-2}\ \text{V}}}$$

A igual que no apartado anterior, a forza electromotriz inducida é causada por unha diminución do fluxo magnético que atravesa o circuíto, sendo o sentido da corrente inducida o mesmo que no caso anterior: sentido antihorario cando se mira no sentido negativo do eixe y.



Tema 6. MOVEMENTO HARMÓNICO SIMPLE

EXERCICIOS (Cuestións)

1.- Mapa conceptual dos contidos do tema.

Solución:

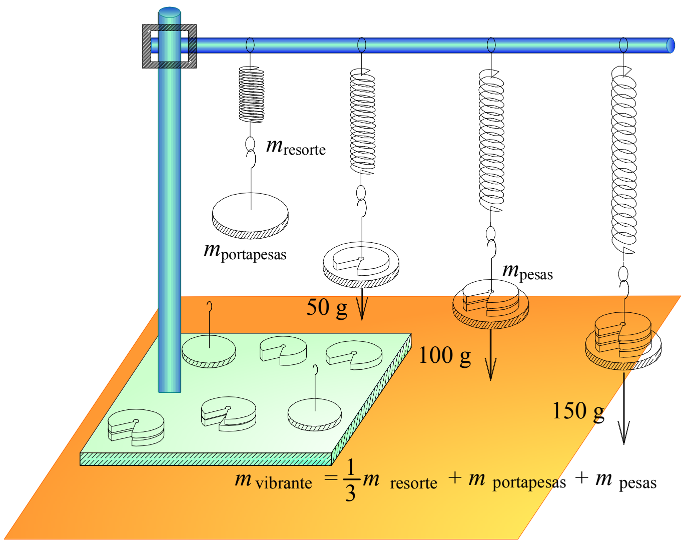
Ver páxina 231 do texto "Física" de 2º de Bacharelato, Ed. Baía.

2.- Que é cada termo da expresión: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$? Explica como a partir dela se determina o valor da constante elástica dun resorte. (*Selectividade COU*; *set. 02*).

Solución:

Na práctica do estudo do resorte elástico, polo método dinámico, o período de oscilación, T, depende da súa constante elástica, k, e da masa vibrante, m, (que consta da masa do portapesas, da masa das pesas engadidas e da masa vibrante do propio resorte, que vén sendo a terceira parte da súa masa total), segundo a expresión: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Para chegar a determinar o valor de k, mídese a masa do resorte e engánchase nun soporte por un dos seus extremos. Do outro extremo do resorte cólgase un portapesas de masa coñecida e engádeselle unha masa tamén coñecida. Desprázase da súa posición de equilibrio, tirando verticalmente cara abaixo e, cun cronómetro, mídese o tempo, t, que inviste en dar un número, n, relativamente grande de oscilacións.



Repítense as medidas anteriores para outras masas distintas e coñecidas, tabulando os datos obtidos, como se indica a continuación, onde:

Nº	n	m/g	t/s	T/s ?	T^2/s^2 ?
1					
2					
3					
4					
5					

Nº: Fai referencia ó número da experiencia.

n: É o número de oscilacións completas das que medimos o tempo investido.

m: É a masa vibrante; que consta da masa das pesas, da do portapesas e da terceira parte da masa do resorte.

t: É o tempo de n oscilacións.

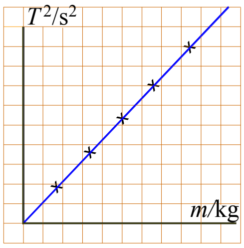
T: É o tempo de unha oscilación, período.

Agora, o valor de k pódese obter de dúas formas:

· Mediante o tratamento analítico dos datos obtidos: Calcúlase a k_i correspondente a cada m_i, segundo a expresión: $k_i = 4\pi^2 \frac{m_i}{T_i^2}$ e tómase como valor de k o da media aritmética das k_i individuais:

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} k_i}{n}.$$

· Mediante o método gráfico: Da expresión $T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k}$ vemos que $T^2 \propto m$ e ó representar T^2 (magnitude dependente) fronte a m (magnitude independente) obtense unha liña recta. Calculando a pendente desta recta obtemos o valor de k:



$$\left.\begin{aligned} \text{pte.} &= \frac{\Delta T^2}{\Delta m} \\ \frac{T^2}{m} &= \frac{4\pi^2}{k} \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{pte.} = \frac{4\pi^2}{k} \rightarrow k = \frac{4\pi^2}{\text{pte.}}$$

Os valores de ΔT^2 e de Δm obtéñense tomando dous puntos sobre a recta, cara ós seus extremos (que non teñen por que coincidir cos valores experimentais). Estes puntos escóllense de modo que a súa lectura coincida, alomenos, cun valor preciso dunha das magnitudes representadas nos eixes cartesianos.

3.- Cos valores que aparecen na táboa e que corresponden a un péndulo simple, calcula (aproximadamente) o valor da aceleración da gravidade, mostrando o procedemento utilizado. (*Selectividade COU*; *set. 01*).

Período *T*/s	**1,00**	**1,50**	**2,00**	**2,50**	**3,00**	**3,50**	**4,00**	**4,50**	**5,00**
Lonxitude *l*/m	**0,248**	**0,558**	**0,993**	**1,551**	**2,234**	**3,041**	**3,972**	**5,027**	**6,206**

Solución:

O cálculo de g pódese facer por dous métodos:

a) Analítico: Substitúese na fórmula do período: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, e obtéñense os valores de g_i para cada lonxitude, l_i, do péndulo, tomando como valor de g o da media aritmética.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

$$g_1 = 4\pi^2 \frac{0{,}248}{1{,}00^2} \rightarrow g_1 = 9{,}79 \text{ m s}^{-2}$$

$$g_2 = 4\pi^2 \frac{0{,}558}{1{,}50^2} \rightarrow g_2 = 9{,}79 \text{ m s}^{-2}$$

$$g_3 = 4\,\pi^2\,\frac{0{,}993}{2{,}00^2} \;\rightarrow\; g_3 = 9{,}80\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

$$g_4 = 4\,\pi^2\,\frac{1{,}551}{2{,}50^2} \;\rightarrow\; g_4 = 9{,}80\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

$$g_5 = 4\,\pi^2\,\frac{2{,}234}{3{,}00^2} \;\rightarrow\; g_5 = 9{,}80\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

$$g_6 = 4\,\pi^2\,\frac{3{,}041}{3{,}50^2} \;\rightarrow\; g_6 = 9{,}80\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

$$g_7 = 4\,\pi^2\,\frac{3{,}972}{4{,}00^2} \;\rightarrow\; g_7 = 9{,}80\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

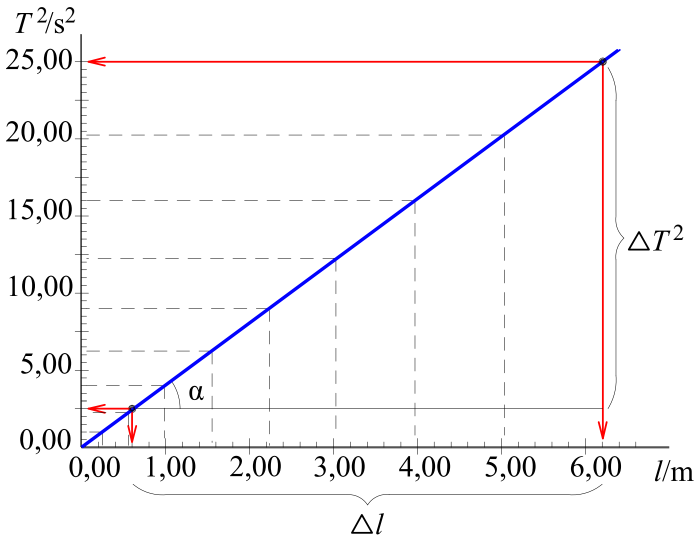
$$g_8 = 4\,\pi^2\,\frac{5{,}027}{4{,}50^2} \;\rightarrow\; g_8 = 9{,}80\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

$$g_9 = 4\,\pi^2\,\frac{6{,}206}{5{,}00^2} \;\rightarrow\; g_9 = 9{,}80\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

$$g_{\text{media}} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} g_i}{n} \;\rightarrow\; g_{\text{media}} = \frac{9{,}79 + 9{,}79 + 9{,}80 + 9{,}80 + 9{,}80 + 9{,}80 + 9{,}80 + 9{,}80 + 9{,}80}{9}$$

$$\boxed{g_{\text{media}} = 9{,}80\ \mathrm{m\,s^{-2}}}$$

b) Gráfico: Represéntase T^2 fronte a l; trázase a recta que "mellor se axusta" os datos experimentais; calcúlase a pendente desta recta e, coa expresión $g = \dfrac{4\,\pi^2}{\text{pte.}}$, obtense o valar de g.



$$\left.\begin{array}{l} \text{pte.} = \tan\alpha = \dfrac{\Delta T^2}{\Delta l} \\[2ex] g = 4\,\pi^2\,\dfrac{l}{T^2} \end{array}\right\} \rightarrow\; g = 4\,\pi^2\,\frac{1}{\text{pte.}}$$

$$\text{pte.} = \frac{(25{,}00 - 2{,}50)}{(6{,}20 - 0{,}60)} = 4{,}02\ \mathrm{s^2\ m^{-1}}$$

$$g = 4\,\pi^2\,\frac{1}{4{,}02} \;\rightarrow\; \boxed{g = 9{,}82\ \mathrm{m\,s^{-2}}}$$

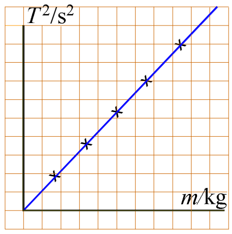
4.- Ó desenvolver a práctica do resorte elástico polo método dinámico mídense os períodos de oscilación do mesmo para diferentes masas. Como se chega ó valor da constante elástica a partir destes datos? (*Selectividade COU*; *xuño 01*).

Solución:

Unha vez tabulados os datos dos períodos de oscilación, T, dun resorte elástico do que vibra unha masa *m*, (que se obtén sumando a masa do portapesas, a das pesas e a terceira parte da masa do resorte), o cálculo da súa constante elástica *k* pode facerse de dúas formas:

a) Analiticamente: Substituíndo na fórmula do período, $T_{\mathrm{i}} = 2\,\pi\sqrt{\frac{m_{\mathrm{i}}}{k_{\mathrm{i}}}}$, obtéñense os valores de k_{i} para cada par de valores: masa vibrante, m_{i}, e período de oscilación correspondente, T_{i}. Tómase como valor de *k* o da media aritmética: $k = \frac{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{i}=n} k_{\mathrm{i}}}{n}$.

b) Graficamente: Represéntase T^2 (magnitude dependente) fronte a *m* (magnitude independente); trázase a recta que mellor se axusta os datos experimentais; calcúlase a pendente da recta e, coa expresión $k = \frac{4\,\pi^2}{\text{pte.}}$, obtense o valor de *k*.



$$\left.\begin{array}{l} \text{pte.} = \dfrac{\Delta T^2}{\Delta m} \\ \dfrac{T^2}{m} = \dfrac{4\,\pi^2}{k} \end{array}\right\} \rightarrow \text{pte.} = \frac{4\,\pi^2}{k} \rightarrow k = \frac{4\,\pi^2}{\text{pte.}}$$

Os valores de ΔT^2 e de Δm obtéñense tomando dous puntos sobre a recta, cara ós seus extremos (que non teñen por que coincidir cos valores experimentais). Estes puntos escóllense de modo que a súa lectura coincida, alomenos, cun valor preciso dunha das magnitudes representadas nos eixes cartesianos.

5.- Explica como podes determinar a aceleración da gravidade utilizando un péndulo simple. Comenta cales son as principais fontes de error que afectan ó resultado. (*Selectividade COU*; *set. 00*).

Solución:

Unha vez que se dispón dun péndulo simple, procédese da seguinte forma:

· Faise oscilar o péndulo nun plano, de modo que non o faga elipticamente, con pequenas amplitudes.

· Mídese o tempo que inviste en dar un número, *n*, relativamente grande, de oscilacións e calcúlase o período, *T*.

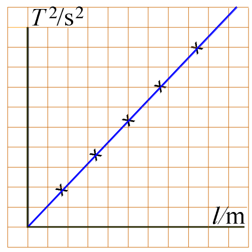
· Mídese a lonxitude, *l*, do péndulo.

· Repítense os pasos anteriores para distintos valores de *l*.

· Tabúlanse as medidas feitas e procédese ó cálculo de *g*, que se pode facer de dúas formas:

a) Analiticamente: Substituíndo na fórmula do período: $T = 2\,\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, obtéñense os valores de g_{i} para cada lonxitude, l_{i}, do péndulo, tomando como valor de *g* o da media aritmética.

b) Graficamente: Represéntase T^2 (magnitude dependente) fronte a *l* (magnitude independente); trázase a recta que "mellor se axusta" os datos experimentais; calcúlase a pendente desta recta e, coa expresión $g = \dfrac{4\,\pi^2}{\text{pte.}}$, obtense o valar de g.

<table>
<tr><th rowspan="2">Nº</th><th rowspan="2">l/m</th><th rowspan="2">t/s</th><th rowspan="2">n</th><th rowspan="2">T/s ?
$T = t/n$</th><th rowspan="2">T^2/s^2 ?</th><th colspan="2">g/m s^{-2} ?</th></tr>
<tr><th>$g = 4\pi^2 l/T^2$=</th><th>Pte.= $T^2/l = 4\pi^2/g$ =</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="5">
</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6"></td><td>g_{media} =</td><td>$g = 4\pi^2$/pte. =</td></tr>
</table>

Os erros que se cometen na determinación de g, ademais das equivocacións que se poidan ter e que non imos considerar, son debidos:

a) A un mal uso ou funcionamento do cronómetro, non medindo correctamente o tempo que corresponde ás oscilacións observadas; a un mal uso ou calibrado do metro e pé de rei, medindo lonxitudes que non son correctas: etc. Este tipo de erro, coñecido como erro sistemático, pódese eliminar se se utilizan aparellos que funcionen correctamente e se manipulan adecuadamente.

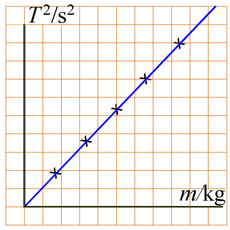
b) Ó propio método utilizado: Asimilamos o movemento pendular a un movemento harmónico simple (por esta razón, a masa m debe oscilar con pequenas amplitudes e nun mesmo plano vertical, evitando facelo elipticamente). Ademais, a masa utilizada non é puntual e o fío posúe algo de masa e non é absolutamente inextensible. Estes erros, que se coñecen como accidentais, pódense minimizar aplicando as leis da estatística a un gran número de medidas.

6.- No estudo da práctica do resorte elástico, polo método dinámico, o período *T* de oscilación vén dado por $T^2 = 4\,\pi^2\, m/k$, onde *m* é a masa que pende do resorte e *k* a súa constante elástica. Fai e comenta a representación gráfica que consideres máis adecuada para obter dela o valor de *k*. (*Selectividade COU*; *xuño 00*).

Solución:

Na expresión $T^2 = 4\,\pi^2 \dfrac{m}{k}$, vemos que $T^2 \propto m$ (sendo m a masa vibrante, que se obtén sumando a masa do portapesas, a masa das pesas e a terceira parte da masa do resorte) e ó representar T^2 (magnitude dependente) fronte a m (magnitude independente) obtense unha liña recta. Agora, calculando a pendente da recta, obtemos o valor de k:

$$\left.\begin{array}{l} \text{pte.} = \dfrac{\Delta T^2}{\Delta m} \\ \dfrac{T^2}{m} = \dfrac{4\,\pi^2}{k} \end{array}\right\} \rightarrow \text{pte.} = \frac{4\,\pi^2}{k} \rightarrow k = \frac{4\,\pi^2}{\text{pte.}}$$

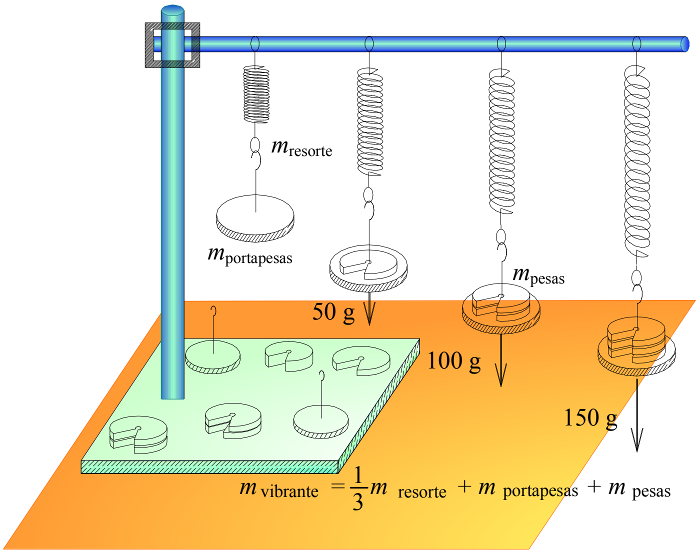


Os valores de ΔT^2 e de Δm obtéñense tomando dous puntos sobre a recta, cara ós seus extremos (que non teñen por que coincidir cos valores experimentais). Estes puntos escóllense de modo que a súa lectura coincida, alomenos, cun valor preciso dunha das magnitudes representadas nos eixes cartesianos.

7.- Explica como determinarías a constante elástica dun resorte mediante o estudo dinámico, utilizando as gráficas convenientes. (*Selectividade COU*; *set. 99*).

Solución:

Para chegar a determinar, polo método dinámico, o valor da constante k dun resorte elástico, mídese a súa masa e engánchase nun soporte por un dos seus extremos. Do outro extremo do resorte cólgase un portapesas de masa coñecida e engádeselle unha masa m, tamén coñecida. Desprázase o resorte da súa posición de equilibrio, tirando verticalmente cara abaixo. Mídese cun cronómetro o tempo, t, que inviste en dar un número, n, relativamente grande de oscilacións e calcúlase o período, T.



Repítense as medidas anteriores para outras masas m distintas e coñecidas, tabulando os datos obtidos como se indica a continuación, onde:

Nº	n	m_V/g	t/s	T/s ?	T^2/s^2 ?
1					
2					
3					
4					
5					

Nº: Fai referencia ó número da experiencia.

n: É o número de oscilacións completas das que medimos o tempo investido.

m_V: É a masa vibrante; que consta da masa m das pesas, da do portapesas e da terceira parte da masa do resorte

t: É o tempo de n oscilacións.

T: É o tempo de unha oscilación, período.

Agora faise a representación gráfica de T^2 fronte a m e calcúlase a pendente da recta e a constante k do resorte da forma que se indicou na cuestión anterior.

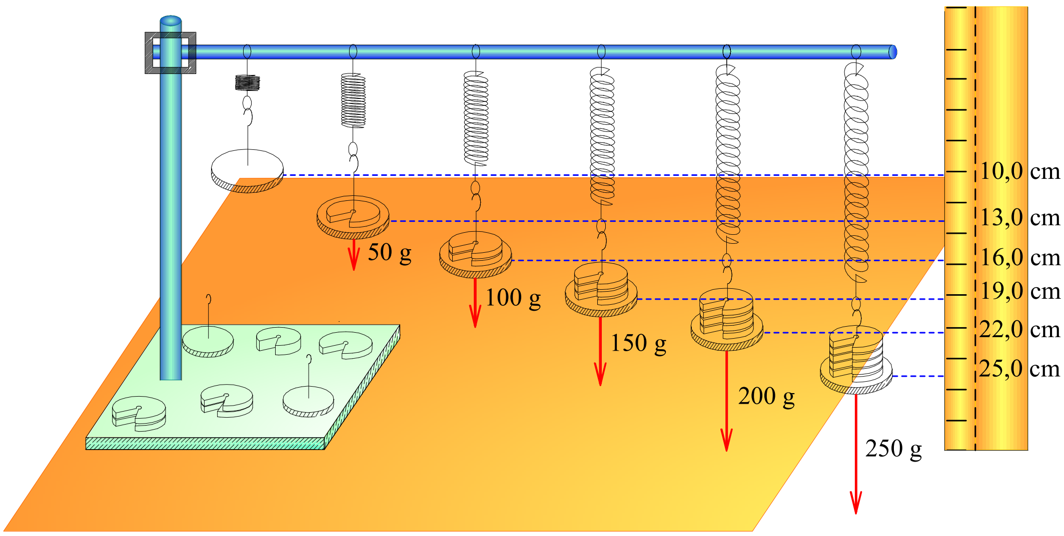
8.- Fai unha descrición do material e do desenvolvemento experimental na determinación da constante elástica dun resorte elástico, mediante o estudo estático, utilizando as gráficas convenientes. (*Selectividade COU*; *xuño 99*).

Solución:

Material.

Soporte, dobre noz e variña.
Portapesas.
Xogo de pesas de 50, 100 e 200 g
Resorte de aceiro elástico que cumpra a lei de Hooke
Regra.

Montaxe. A indicada no gráfico:



Realización.

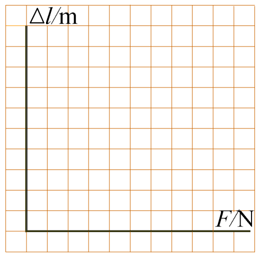
· Mídese a lonxitude inicial do resorte-portapesas, l_0, colocando no portapesas unha masa inicial.

· Engádese, sucesivamente, ó portapesas masas coñecidas, *m*.

· Mídese a lonxitude, *l,* do resorte-portapesas que corresponde a cada unha das masas engadidas.

· Tabúlanse as medidas feitas.

· Faise o cálculo da deformación causada, Δl, no resorte para cada unha das masas engadidas, e represéntase graficamente as deformacións causadas fronte ás forzas aplicadas.

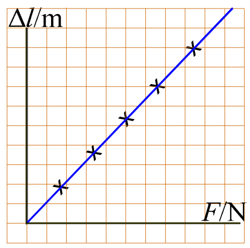
Nº	m/g	F/N	l_0/cm	l/cm	Δl/cm ?	k/N m^{-1} ?	
						$k = F/\Delta l =$	Δl fronte a F
1							
2							
3							
4							
5							
						$k_{media} =$	$k = 1/\text{pte.} =$

O valor da constante k pódese obter:

· Mediante o tratamento analítico dos datos obtidos: Calcúlase a k_i correspondente a cada experiencia: $k_i = \dfrac{F_i}{\Delta l_i}$; e tómase como valor de k ó da media aritmética das k_i individuais: $k = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=n} k_i}{n}$.

· Mediante o tratamento gráfico dos datos obtidos: Calcúlase a inversa da pendente da recta obtida ó representar as deformacións causadas no resorte, Δl, (magnitude dependente); fronte ás forzas aplicadas, F (magnitude independente):

$$\left.\begin{array}{l} \text{Pte.} = \dfrac{\Delta l}{F} \\ F = k\,\Delta l \;\rightarrow\; k = \dfrac{F}{\Delta l} \end{array}\right\} \rightarrow k = \frac{1}{\text{pte.}}$$

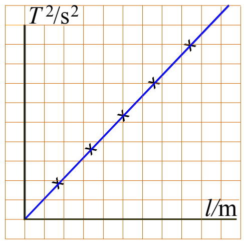


9.- Na determinación de *g* mediante un péndulo simple, mídense períodos para diversas lonxitudes. Explica como consegues un axuste lineal ó tratar graficamente os datos experimentais, e relaciona o valor de *g* coa pendente do axuste. (*Selectividade COU*; *set. 98*).

Solución:

A expresión que relaciona o período, T, de oscilación dun péndulo simple coa súa lonxitude, l, é: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, sendo $T^2 \propto l$. Polo tanto, ó representar T^2 (magnitude dependente) fronte a l (magnitude independente) obtense unha liña recta, que conseguimos debuxando a gráfica que "mellor se axuste" ós datos experimentais, que neste curso o facemos guiándonos da nosa intuición gráfica. Agora, calculando a pendente da recta, obtemos o valor da aceleración da gravidade, g, mediante a relación:

$$\left.\begin{aligned} &\text{pte.} = \frac{T^2}{l} \\ &\frac{T^2}{l} = \frac{4\,\pi^2}{g} \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{pte.} = \frac{4\,\pi^2}{g} \;\rightarrow\; g = \frac{4\,\pi^2}{\text{pte.}}$$



10.- A un resorte de 20 cm de lonxitude aplícaselle unha serie de pesas, léndose nunha regra a posición final do resorte para cada carga. Os resultados danse na táboa. Acha a constante elástica do resorte e o seu erro. (*Selectividade COU*; *xuño 98*).

Pesa/g:	**400**	**500**	**800**	**1000**	**1100**
Lonxitude/cm:	**26,4**	**27,9**	**32,5**	**35,7**	**37,1**

Solución:

$$F = k\,\Delta l \;\rightarrow\; k = \frac{F}{\Delta l}$$

$$k_1 = \frac{400 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8}{(26{,}4 - 20{,}0) \cdot 10^{-2}} = 61{,}3\ \text{N m}^{-1}$$

$$k_2 = \frac{500 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8}{(27{,}9 - 20{,}0) \cdot 10^{-2}} = 60{,}2\ \text{N m}^{-1}$$

$$k_3 = \frac{800 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8}{(32{,}5 - 20{,}0) \cdot 10^{-2}} = 62{,}7\ \text{N m}^{-1}$$

$$k_4 = \frac{1000 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8}{(35{,}7 - 20{,}0) \cdot 10^{-2}} = 62{,}4\ \text{N m}^{-1}$$

$$k_1 = \frac{1100 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8}{(37{,}1 - 20{,}0) \cdot 10^{-2}} = 63{,}0\ \text{N m}^{-1}$$

$$k_{\text{media (valor que se toma como constante elástica do resorte)}} = \frac{61{,}3 + 62{,}0 + 62{,}7 + 62{,}4 + 63{,}0}{5} = 62{,}3\ \text{N m}^{-1}$$

Erro absoluto de cada medida:

$$|\,61{,}3 - 62{,}3\,| = 1{,}0$$
$$|\,62{,}0 - 62{,}3\,| = 0{,}3$$
$$|\,62{,}7 - 62{,}3\,| = 0{,}4$$
$$|\,62{,}4 - 62{,}3\,| = 0{,}1$$
$$|\,63{,}0 - 62{,}3\,| = 0{,}3$$

Erro absoluto da medida: $\dfrac{1{,}0 + 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}3}{5} = 0{,}4\ \text{N m}^{-1}$

Constante elástica do resorte: $\boldsymbol{k = 62{,}3 \pm 0{,}4\ \text{N m}^{-1}}$

11.- Na determinación de *g* mediante o péndulo simple, que parámetros se poden modificar e con que resultado? (*Selectividade COU*; *set. 97*).

Solución:

A aceleración da gravidade, $\vec{g}$, para un punto do campo gravitatorio terrestre (laboratorio), é constante. Na súa determinación, mediante o péndulo simple, os parámetros que se poden modificar, e a repercusión que estas modificacións teñen no valor de *g*, son:

· A lonxitude, *l*, do péndulo. Non inflúe no valor de *g* pero si no período de oscilación, *T*, que aumenta co valor de *l*, gardando a relación: $T \propto l^{\frac{1}{2}} \left(\text{Basta recordar que}: T = 2\,\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \right)$.

· A masa, *m*, do péndulo (o ideal sería que se tratase dunha masa puntual). Non inflúe no valor do seu período de oscilación, *T*, nin no valor de *g*.

· A amplitude, *A*, das oscilacións. Se estas son pequenas non inflúen no valor do período, *T*, nin no valor da aceleración da gravidade, *g*.

12.- Explica como determinarías cun péndulo a aceleración da gravidade no laboratorio. Como deben ser a lonxitude e a amplitude do mesmo para obter o mellor valor? (*Selectividade COU*; *xuño 97*).

Solución:

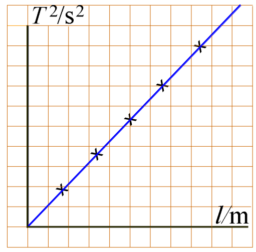
Cólgase do extremo dun fío inextensible e de pequena masa, que está enganchado polo outro extremo dun soporte, unha bóla de gran masa e pequeno volume (aceiro, chumbo, etc.). Sepárase da súa posición de equilibrio, cunha pequena amplitude para que o seu movemento se poida considerar harmónico simple. Ademais procurarase que oscile nun único plano, evitando que teña un movemento elíptico (péndulo cónico). Nestas condicións, o péndulo describe un movemento harmónico simple e o seu período de oscilación vén dado pola expresión: $T = 2\,\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

Medimos a lonxitude *l* do péndulo e o tempo *t* que inviste en dar un número, *n,* relativamente alto, de oscilacións completas e calculamos o tempo que lle corresponde a unha oscilación: período, *T*.

Repítense as medidas anteriores para distintas lonxitudes do péndulo e tabúlanse os datos obtidos. Agora procédese ó cálculo de *g*, que se pode facer de dúas formas:

a) Analiticamente: Substitúese na fórmula do período: $T_i = 2\,\pi \sqrt{\frac{l_i}{g_i}}$, obtense o valor de g_i para cada lonxitude, l_i, do péndulo, tomando como valor de *g* o da media aritmética.

b) Graficamente: Represéntase T^2 (magnitude dependente) fronte a *l* (magnitude independente); trázase a recta que "mellor se axusta" os datos experimentais; calcúlase a pendente desta recta e, coa expresión $g = \frac{4\,\pi^2}{\text{pte.}}$, obtense o valar de *g*.

Nº	l/m	t/s	n	T/s ? $T = t/n$	T^2/s^2 ?	g/m s^{-2} ?	
						$g = 4\pi^2 l/T^2 =$	Pte. $= T^2/l = 4\pi^2/g =$
1							
2							
3							
4							
5							
						$g_{media} =$	$g = 4\pi^2$/pte. $=$

En canto á lonxitude do péndulo diremos que esta non inflúe no valor de g, aínda que será mellor usar lonxitudes relativamente grandes, de varios metros, porque o error porcentual que se comete na súa medida é menor que se utilizamos lonxitudes máis cativas. Tamén, ó aumentar l, as medidas do período pódense realizar con oscilacións de pequeno ángulo, condición que é necesaria para "confundir" o movemento pendular cun m.h.s. Ademais, como $T \propto \sqrt{l}$, a medida do período pode facerse con maior precisión.

Como xa se dixo anteriormente, a amplitude das oscilacións ten que ser pequena para que o arco de circunferencia que o péndulo describe no se movemento se poida confundir coa corda correspondente e se trate dun movemento rectilíneo, que é a traxectoria do m.h.s.

13.- Na determinación "dinámica" da constante elástica do resorte, que parámetros se poden modificar e con que resultado? (*Selectividade COU*; *set. 96*).

Solución:

O período, T, de oscilación dun resorte elástico de constante recuperadora k vén dado pola expresión: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, sendo m a masa vibrante, que se obtén sumando a terceira parte da masa do resorte, a masa do portapesas e a masa das pesas engadidas. Nesta expresión vemos que **podemos modificar a masa *m*, causando unha variación do período** segundo a relación: $T^2 \propto m$, non influíndo no valor de k, que é constante para cada resorte.

Outra magnitude que **podemos variar** é **a amplitude, *A*, de oscilación, non influíndo** tampouco **no valor de *k***.

14.- Ó determinar "*g*" cun péndulo simple observamos que podemos actuar sobre dous parámetros: a lonxitude do fío e a masa que pende del. Como lle afectan ó período de oscilación do péndulo estes dous parámetros? (*Selectividade COU*; *xuño 96*).

Solución:

O período de oscilación, T, dun péndulo simple de lonxitude l vén dado pola expresión:

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, sendo g a aceleración da gravidade, que ten un único valor para cada punto da superficie da Terra.

Ó variar a lonxitude do péndulo varía o seu período de oscilación, segundo a relación: $T^2 \propto l$.

Por outro lado, a variación da masa, m, non inflúe no período de oscilación: $T \neq T(m)$.

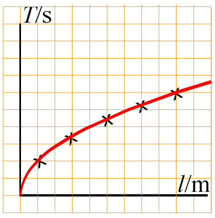
15.- Mediante un péndulo simple medíronse os seguintes datos de lonxitudes e períodos:

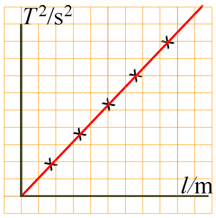
***l*/m**	**0,50**	**0,60**	**0,70**	**0,80**	**0,90**	**1,00**	**1,10**	**1,20**
***T*/s**	**1,40**	**1,55**	**1,71**	**1,76**	**1,92**	**2,02**	**2,13**	**2,19**

Que conclusión xerais se poden deducir? (*Selectividade COU*; *set. 95*).

Solución:

Podemos deducir que **a medida que aumenta *l* tamén aumenta *T*, non sendo esta relación lineal**. Para mellor ver a relación que gardan estas magnitudes, facemos a representación gráfica de T (magnitude dependente) fronte a l (magnitude independente). A rama de parábola obtida indícanos que: $T^2 \propto l$; relación que confirmamos coa recta obtida na representación de T^2 fronte a l.





16.- Ó traballar co resorte determínase a súa constante elástica polos métodos estático e dinámico. Obtívose o mesmo valor por ambos métodos? É razoable o resultado? (*Selectividade COU*; *xuño 95*).

Solución:

A constante elástica, k, dun resorte depende das características do propio resorte e o seu valor non depende do método utilizado na súa determinación. Polo tanto, dentro dos erros experimentais, **a *k* obtida polo método estático hai de ser igual á *k* obtida polo método dinámico**.

17.- Se un reloxo de péndulo adianta, débese aumentar ou diminuír a lonxitude do péndulo para corrixir a desviación? Razoa a resposta. (*Selectividade COU*; *xuño 94*).

Solución:

O período de oscilación, T, dun péndulo de lonxitude l, nun punto da Terra onde o valor da aceleración da gravidade é g, vén dado pola expresión: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Se un reloxo de péndulo adianta é porque o tempo que tarda en dar unha oscilación completa (período, T) é menor que o tempo correcto, como consecuencia de que a lonxitude do péndulo é menor que a que debería ter: $T_{reloxo} < T_{correcto}$, porque $l_{reloxo} < l_{correcto}$. Polo tanto, **a corrección lógrase**

aumentando a lonxitude do péndulo.

18.- Temos un péndulo que realiza oscilacións de pequena amplitude arredor da súa posición de equilibrio. De se faceren varias experiencias con lonxitudes l_1, l_2, l_3, ... crecentes, quere isto dicir que se van acadar valores de aceleración da gravidade g_1, g_2, g_3, ..., tamén crecentes. Por que? (*Selectividade COU*; *set. 93*).

Solución:

O período de oscilación, *T*, dun péndulo de lonxitude *l* nun punto da Terra onde o valor da aceleración da gravidade é *g*, vén dado pola expresión: $T = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

Ó aumentar a lonxitude do péndulo non significa obter distintos valores da aceleración da gravidade. Este valor, para un punto da superficie da Terra, é sempre o mesmo. O que ocorre é que ó aumentar *l* aumenta *T*, sendo a relación $\dfrac{T^2}{l} = \text{cte.} = \dfrac{4\,\pi^2}{g}$.

19.- Un resorte elástico do que pende unha masa *m*, se o estiramos lixeiramente, comeza a oscilar ó deixalo en liberdade. Se cambiamos a masa *m* por outra maior ou menor, verase afectado o período? Por que? (*Selectividade COU*; *xuño 93*).

Solución:

O período de oscilación, *T*, dunha masa *m* que colga dun resorte elástico de constante recuperadora *k* vén dado pola expresión: $T = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$. Como a *k* dun resorte é constante, vemos que ó variar o valor de *m* tamén varía o valor de *T*, coa relación de: $\dfrac{T^2}{m} = \dfrac{4\,\pi^2}{k} = \text{cte.}$, sendo $T^2 \propto m$.

20.- Ó facer a experiencia do resorte para determinar a constante elástica dun resorte metálico, alguén entrégache un corpo de masa descoñecida e pídeche que busques o valor desa masa. É posible dar con ela coa montaxe experimental desta práctica? En caso afirmativo explica como o farías; en caso negativo, sinala por que non se pode facer. (*Selectividade COU*; *set. 92*).

Solución:

Na montaxe experimental da determinación da constante elástica, *k*, dun resorte polo método estático, cólgase do resorte un portapesas no que se colocan masas coñecidas e mídese a deformación que causan. A relación que hai entre a forza aplicada, $\vec{F}_{\text{aplicada}}$, ó resorte e a deformación causada nel, $\Delta\vec{l}$, vén dada pola expresión: $\vec{F}_{\text{aplicada}} = k \cdot \Delta\vec{l}$.

Medida a lonxitude inicial do resorte, l_0, e a lonxitude que adquire, l_1, unha vez colgada a masa coñecida, *m*, substitúese na fórmula anterior e obtense o valor de *k*: $k = \dfrac{m \cdot g}{l_1 - l_0}$.

A continuación cólgase do resorte a masa descoñecida, *m*', e mídese a nova lonxitude que adquire, l_2. Coa k obtida anteriormente e a expresión que relaciona a forza aplicada ó resorte coa deformación causada nel, calculamos a masa descoñecida: $m' = \dfrac{k \cdot (l_2 - l_0)}{g}$.

21.- Un alumno desexa realizar a práctica do péndulo simple. Un compañeiro deulle dous consellos para ter en conta:

1º O péndulo débese deixar oscilar cunha amplitude maior de 30º para asegurarse que o movemento é aproximadamente harmónico simple.

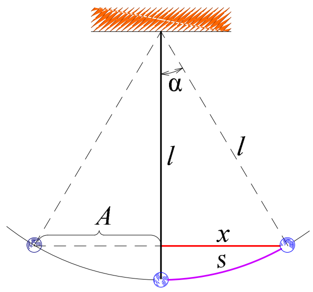
2º Hai que asegurarse que o péndulo estea oscilando nun plano e que non o faga elipticamente.

Pregunta: Son correctos os consellos? Razoa a resposta. (*Selectividade COU*; *set. 92*).

Solución:

A expresión do período de oscilación, $T, \left(T = 2\pi \sqrt{\dfrac{l}{g}} \right)$ dun péndulo simple obtense considerando que o movemento que describe a masa puntual m que colga dun fío de lonxitude l (inextensible e de masa desprezable) é harmónico simple. Isto obriga a considerar que a traxectoria da masa m é rectilínea, situación que soamente se dá para pequenas amplitudes de oscilación, xa que só neste caso se pode confundir o arco da circunferencia que describe, s, coa corda correspondente, x. Da figura adxunta dedúcese que isto ocorre cando sen α = α:

$$\left.\begin{array}{r} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{x}{l} \\ \alpha = \dfrac{s}{l} \end{array}\right\}: \ \text{se} \operatorname{sen}\alpha = \alpha \ \rightarrow \ x = s$$



Polo tanto, **o primeiro consello é equivocado** xa que: α = 30º = π/6 rad = 0,523 rad e sen α = sen 30º = 0,500 e o error é do 4,6 %.

Como a traxectoria do m.h.s. é recta, e non elíptica, **o consello de que o péndulo oscile nun plano**, evitando que teña un movemento elíptico (péndulo cónico), **é correcto**.

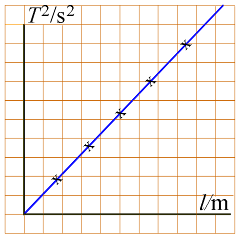
22.- Un alumno que realizou a práctica do péndulo simple escribe o seguinte parágrafo no seu caderno de laboratorio: "O obxectivo fundamental da práctica do péndulo simple é observar como varía o valor da gravidade no laboratorio, para iso constrúense diversos péndulos todos eles da mesma masa e de diversas lonxitudes". Son correctas as dúas afirmacións? Razoa a resposta. (*Selectividade COU*; *xuño 92*).

Solución:

A aceleración da gravidade, g, no laboratorio ten un valor constante, que é independente do método polo cal se determine. Polo tanto, **non pode ser obxectivo da práctica do péndulo simple observar como varía o valor da gravidade no laboratorio**. Os obxectivos da construcción de péndulos de distinta lonxitude son:

a) No método gráfico, representar o período ó cadrado, T^2, (magnitude dependente) fronte á súa lonxitude, l, (magnitude independente) e, calculando a pendente da gráfica, obter o valor de g:

$$\left.\begin{array}{l} \text{pte.} = \dfrac{T^2}{l} \\ T = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} \rightarrow \dfrac{T^2}{l} = \dfrac{4\,\pi^2}{g} \end{array}\right\} \rightarrow \text{pte.} = \dfrac{4\,\pi^2}{g} \rightarrow g = \dfrac{4\,\pi^2}{\text{pte.}}$$



b) No método analítico, obter ao valor de g coa media aritmética dos valores de g_i correspondentes a cada unha das lonxitudes l_i: $g_i = \dfrac{4\,\pi^2\,l_i}{T_i^2}$.

23.- Un alumno realizou a práctica da constante elástica dun elástico mediante o seu estudo estático e dinámico. Observa que obtivo dous valores diferentes da constante elástica do elástico: k_1 para o estudo estático e k_2 para o estudo dinámico. É normal que obteña dous valores diferentes ou debe repetir a práctica ata que obteña un único valor? Razoa a resposta. (*Selectividade COU*; *xuño 92*).

Solución:

A un resorte elástico correspóndelle unha constante recuperadora, k, que é independente do método polo cal se determine. En consecuencia **hai que obter**, dentro dos erros experimentais, **o mesmo valor polos dous métodos**, estático e dinámico, **tendo que repetirse a práctica ata obter un único valor**.

Se a $k_{\text{dinámica}}$ foi obtida analiticamente, $k_{\text{resorte}} = 4\,\pi^2\,\dfrac{\left(m_{\text{portapesas}} + m_{\text{pesas}} + m_{\text{vibrante do resorte}}\right)}{T^2}$, e o seu valor é menor que a $k_{\text{estática}}$ pode deberse, en parte, a non haber tido en conta a $m_{\text{vibrante do resorte}}$.

24.- Tense un péndulo simple que se fai oscilar con pequenos desprazamentos, variando a súa lonxitude sucesivamente na secuencia $l_1<l_2<l_3<\cdots<l_n$. Quere isto dicir que tamén se obtén unha secuencia de gravidades $g_1<g_2<g_3<\cdots<g_4$? Razoa a resposta. (*Selectividade COU*; *set. 91*).

Solución:

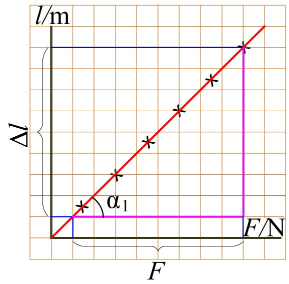
Ver a resposta á cuestión número 18.

25.- No estudo estático dun resorte represéntanse os puntos de lonxitudes (l_i) fronte ás forzas (F_i), dando unha liña recta. No estudo dinámico do mesmo resorte represéntanse as masas (m_i) fronte ó cadrado dos períodos (T_i^2), obtendo tamén unha recta. Teñen ambas a mesma pendente? Razoa a resposta. (*Selectividade COU*; *set. 91*).

Solución:

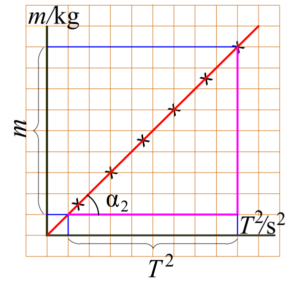
No método estático:

$$\left.\begin{array}{l} \text{pte}_1 = \tan \alpha_1 = \dfrac{\Delta l}{F} \\ F = k\,\Delta l \;\rightarrow\; \dfrac{\Delta l}{F} = \dfrac{1}{k} \end{array}\right\} \rightarrow \text{pte}_1 = \frac{1}{k}$$



Polo método dinámico:

$$\left.\begin{array}{l} \text{pte}_2 = \tan \alpha_2 = \dfrac{m}{T^2} \\ T = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \;\rightarrow\; \dfrac{m}{T^2} = \dfrac{k}{4\,\pi^2} \end{array}\right\} \rightarrow \text{pte}_2 = \frac{k}{4\,\pi^2}$$



$$\left.\begin{array}{l} \text{pte}_1 = \dfrac{1}{k} \\ \text{pte}_2 = \dfrac{k}{4\,\pi^2} \end{array}\right\} \rightarrow \mathbf{pte_1 \neq pte_2}$$

26.- Dous corpos da mesma masa suspéndense respectivamente de dous resortes de constantes elásticas k_1 e k_2, sendo $k_2 = 4\,k_1$. Determina a relación dos respectivos períodos de oscilación T_1 e T_2. (*Selectividade COU*; *xuño 91*).

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} T_1 = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1}} \\ T_2 = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_2}} \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{T_1}{T_2} = \sqrt{\dfrac{k_2}{k_1}} \\ \qquad\qquad\qquad\quad \dfrac{k_2}{k_1} = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = 2$$

27.- Dunha experiencia do péndulo simple realizada no laboratorio observáronse as medidas de lonxitudes e períodos dadas na táboa seguinte. Que conclusións se deducen desta experiencia? Razoa a resposta. (*Selectividade COU*; *xuño 91*).

Período T/s	**Lonxitude l/m**
1,00	**0,248**
1,50	**0,558**
2,00	**0,993**
2,50	**1,551**
3,00	**2,234**
3,50	**3,041**
4,00	**3,972**
4,50	**5,027**
5,00	**6,206**

Solución:

Ver a resposta á cuestión número 15.

28.- A liña recta obtida ó representar os datos medidos das experiencias estáticas dun resorte ten a mesma pendente que a liña recta que tamén se obtén ó representar os datos medidos das experiencias dinámicas? Razóese a resposta. (*Selectividade COU*; *set. 90*).

Solución:

Ver a resposta á cuestión número 25.

29.- Cando un resorte se estira lixeiramente mediante unha pequena sobrecarga, ó soltalo comeza a oscilar arredor da posición de equilibrio inicial. Que sucede co período de oscilación cando se vai cargando o resorte con masas cada vez maiores? Razoa a resposta. (*Selectividade COU*; *xuño 90*).

Solución:

Ver a resposta á cuestión número 19.

30.- Téñense tres resortes distintos de constantes elásticas k_1, k_2 e k_3. Mediante a experiencia do estudo dinámico dun resorte comprobouse que $k_1<k_2<k_3$. Como estarán ordenados os períodos de oscilación T_1, T_2 e T_3 dos tres resortes cando se cargan os tres coa mesma masa? Razóese a resposta. (*Selectividade COU*; *xuño 90*).

Solución:

O período de oscilación, T, dunha masa m que colga dun resorte elástico de constante recuperadora k vén dado pola expresión: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Facendo a substitución de k_1, k_2 e k_3, para unha mesma masa m, obtense: $\boldsymbol{T_1>T_2>T_3}$.

31.- Disponse de dous corpos e dun resorte elástico. Se se coñece a masa dun dos corpos, como poderiamos saber a masa descoñecida do outro corpo? Nota: disponse así mesmo do material de apoio necesario para realizar o experimento. (*Selectividade COU*; *set. 90*).

Solución:

Ver resposta á cuestión número 20.

32.- Ó estudar estaticamente un resorte obtéñense as seguintes lecturas:

Peso suspendido/g	**0**	**2**	**6**	**10**	**15**	**20**
Lonxitude resorte/mm	**70,0**	**72,0**	**76,1**	**79,9**	**84,9**	**99,2**

Calcúlese a constante do resorte e indíquese se o comportamento do resorte é elástico en toda a rexión. (*Selectividade COU*; *xuño 89*).

Solución:

O cálculo da constante elástica do resorte, k, pode facerse:

a) Polo método analítico: Relaciónase a forza aplicada ó resorte, F, coa deformación que causa, Δl: $\frac{F}{\Delta l} = k$. Cos datos da táboa calculamos a k_i correspondente a cada forza aplicada e a k do resorte obtémola coa media aritmética, desprezando aqueles valores que non correspondan a un comportamento lineal do resorte.

$$k_1 = \frac{(2-0)\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}8}{(72{,}0-70{,}0)\cdot 10^{-3}} = 9{,}80 \text{ N m}^{-1}$$

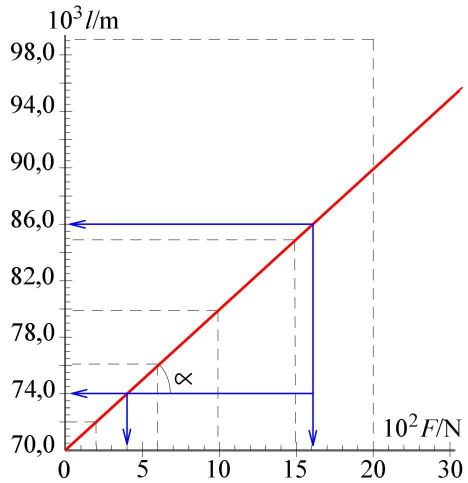
$$k_2 = \frac{(6-0)\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}8}{(76{,}1-70{,}0)\cdot 10^{-3}} = 9{,}64 \text{ N m}^{-1}$$

$$k_3 = \frac{(10-0)\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}8}{(79{,}9-70{,}0)\cdot 10^{-3}} = 9{,}90 \text{ N m}^{-1}$$

$$k_4 = \frac{(15-0)\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}8}{(84{,}9-70{,}0)\cdot 10^{-3}} = 9{,}87 \text{ N m}^{-1}$$

$$k_5 = \frac{(20-0)\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}8}{(99{,}2-70{,}0)\cdot 10^{-3}} = 6{,}71 \text{ N m}^{-1}$$

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_{\mathbf{media}} = \frac{9{,}80+9{,}64+9{,}90+9{,}87}{4} = \mathbf{9{,}80\ N\ m^{-1}}$$



Para a masa de 20 g, a k_5 obtida diferénciase moito das outras k_i e débese a que **o comportamento do resorte deixa de ser elástico**.

b) Polo método gráfico: Represéntanse as deformacións do resorte, Δl, fronte ás forzas deformadoras, F_i; trázase a recta que mellor se axuste ós datos representados; calcúlase a súa pendente, tomando dous puntos sobre a recta que estean cara ós seus extremos, e relacionase este valor coa k do resorte:

$$\left.\begin{array}{l} \text{pte.} = \text{tax}\ \alpha = \dfrac{\Delta l}{F} \ \rightarrow\ \text{pte.} = \dfrac{(86{,}0-74{,}0)\cdot 10^{-3}}{(16-4)\cdot 10^{-2}} = 0{,}10 \\ F = k\,\Delta l \ \rightarrow\ k = \dfrac{F}{\Delta l} \ \rightarrow\ k = \dfrac{1}{\text{pte.}} \end{array}\right\} \rightarrow k = \frac{1}{0{,}10} \rightarrow \boxed{k = \mathbf{10{,}0\ N\ m^{-1}}}$$

O punto (20;99,2) representado queda moi fóra da recta que mellor se axusta ós datos experimentais, o que nos indica que, para os valores deste punto, o resorte non ten un comportamento elástico.

33.- Dispoñemos dun resorte, un pratiño, unha caixa de pesas, papel milimetrado e lapis. Como poderiamos obter numérica e graficamente o valor da constante elástica, *k*, do resorte? (*Selectividade COU*; *xuño 88*).

Solución:

Como non dispoñemos dun cronómetro non podemos facer uso do método dinámico para a determinación de *k*. Polo tanto faremos uso do método estático, traballando da forma que xa se indicou na cuestión número 8.

34.- Se se determina a constante dun resorte estaticamente (medindo os alongamentos) e dinamicamente (a partir do período de oscilación), obteranse os mesmos valores?, que valor debe tomarse? Por que? (*Selectividade COU*; *set. 87*).

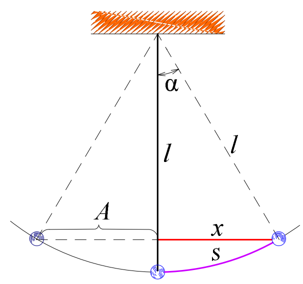
Solución:

A constante elástica, *k*, dun resorte depende das características do propio resorte e o seu valor non depende do método utilizado na súa determinación. Polo tanto, dentro dos erros experimentais, **a *k* hai de ser a mesma, xa sexa obtida polo método estático ou polo método dinámico**. Cando estes valores sexan moi parecidos, **tomarase como valor da constante o da media aritmética das *k* obtidas polos dous métodos**. Se, dentro dos erros experimentais, as constantes obtidas polos dous métodos son distintas hai que repetir a experiencia ata obter o mesmo valor.

35.- O péndulo simple que utilizaches no laboratorio constaba dunha bóla de chumbo de pequeno volume, cunha masa de 200 g, colgada dun fío ideal de lonxitude 225,3 cm, que facías oscilar cunha elongación máxima de 6º, desenvolvendo 15 oscilacións en 45 s. Tomando como posición inicial un dos extremos da súa traxectoria, escribe a súa elongación en función do tempo.

Solución:

O movemento que describe a bóla do péndulo é harmónico simple, ó que lle corresponde a ecuación do movemento: $x = A \text{ sen } (\omega t + \varphi_0)$.



$$A = l \text{ sen } \alpha \;\rightarrow\; A = 2{,}253 \text{ sen } 6^\circ = 0{,}236 \text{ m}$$

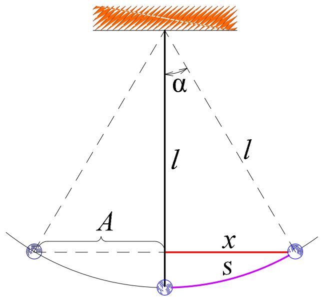
$$\left.\begin{array}{l} \omega = \dfrac{2\pi}{T} \\ T = \dfrac{t}{n} \;\rightarrow\; T = \dfrac{45}{15} = 3 \text{ s} \end{array}\right\} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{3} \text{ rad s}^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = A\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi_0) \;\rightarrow\; x = 0{,}236\,\text{sen}\left(\dfrac{2\,\pi}{3}\,t + \varphi_0\right) \\ \text{Para } t = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = A \;\rightarrow\; A = A\,\text{sen}\,\varphi_0 \;\rightarrow\; \varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}\,\text{rad} \\ x = -A \;\rightarrow\; x = -A\,\text{sen}\,\varphi_0 \;\rightarrow\; \varphi_0 = -\dfrac{\pi}{2}\,\text{rad} \end{cases} \end{array}\right\} \rightarrow\; x = 0{,}236\,\text{sen}\left(\dfrac{2\,\pi}{3}\;t \pm \dfrac{\pi}{2}\right)$$

36.- Un péndulo simple consta dunha bóla de gran masa e pequeno volume, colgada dun fío ideal de 2,00 m de lonxitude. Se se fai oscilar cunha amplitude de 32 cm, estuda se o movemento deste péndulo se pode considerar harmónico simple e, en caso afirmativo, escribe a súa elongación en función do tempo, sabendo que cando se empeza a contar o tempo está no centro da súa traxectoria e se despraza cara a valores negativos da elongación. Dato: g = 9,80 m s^{-2}.

Solución:

Cando o péndulo está en repouso, o fío e a masa m están na posición vertical. Se separamos a masa m da súa posición de equilibrio e a abandonamos libremente toma un movemento periódico e oscilatorio, en torno á posición de equilibrio. Pero, é un movemento harmónico simple?



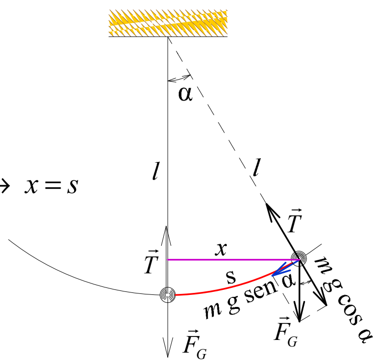
Sabemos que a traxectoria do m.h.s. é rectilínea: $\vec{F} = -k \cdot x\,\vec{i}$ (consideramos o eixe x na dirección horizontal). Sen embargo, a traxectoria da masa m é a dun arco de circunferencia, s.

Ó descompoñer a forza do peso, $\vec{F}_G$, na dirección do fío (que se anula coa tensión, $\vec{T}$): $m \cdot g \cdot \cos\alpha$ e na dirección perpendicular á anterior: $m \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha$, resulta que esta compoñente é a que causa o movemento oscilante do péndulo. Como é esta forza?

$F = m \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha = m \cdot g \cdot (x/l)$. A súa expresión vectorial é: $\vec{F} = -m\,g\,\vec{x}/l$: O signo menos indica que o sentido de $\vec{F}$ é contrario ó de $\vec{x}$.

Pero a traxectoria de m non é a de x (corda), senón a de s (arco). Se ambas magnitudes de poden "confundir", a traxectoria será rectilínea e o movemento harmónico simple: $\vec{F} = -k \cdot \vec{x}$, sendo $k = m \cdot g/l$.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} \text{sen}\,\alpha = \dfrac{x}{l} \\ \alpha = \dfrac{s}{l} \end{array}\right\}\!: \text{Se sen}\,\alpha = \alpha \;\rightarrow\; \dfrac{x}{l} = \dfrac{s}{l} \;\rightarrow\; x = s \\ \left.\begin{array}{l} \text{sen}\,\alpha = \dfrac{0{,}32}{2{,}00} \;\rightarrow\; \text{sen}\;\;\alpha = 0{,}16 \\ \alpha = \text{arc sen}\,0{,}16 \;\rightarrow\; \alpha = 9{,}21^{\circ} = 0{,}16\,\text{rad} \end{array}\right\} \rightarrow\; \text{sen}\,\alpha = \alpha \end{array}\right\} \rightarrow\; x = s$$



$$\left.\begin{array}{l} x = A\cdot\text{sen}\left(\omega t+\varphi_0\right) \rightarrow x = 0{,}32\cdot\text{sen}\left(\omega t+\varphi_0\right) \\ \left.\begin{array}{l} x = A\cdot\text{sen}\left(\omega t+\varphi_0\right) \\ \text{Para } t=0 \rightarrow x=0 \end{array}\right\} \rightarrow 0 = A\cdot\text{ sen }\varphi_0 \rightarrow \varphi_0 = \left\{\begin{array}{l} 0\text{ rad} \\ \pi\text{ rad} \end{array}\right. \end{array}\right\} \rightarrow x = 0{,}32\cdot\text{sen}\left(\omega t+\pi\right)\text{ m},$$

porque no instante t = 0 s se despraza cara a valores negativos de x.

$$\left.\begin{array}{l} \omega = \dfrac{2\pi}{T} \\ T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2{,}00}{9{,}80}} \rightarrow T = 2{,}84\text{ s} \end{array}\right\} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{2{,}84} \rightarrow \omega = 2{,}21\text{ s}^{-1}$$

$$\boldsymbol{x = 0{,}32\text{ sen}\left(2{,}84\,t+\pi\right)\text{ m}}$$

37.- Temos un resorte elástico do que colgamos unha masa *m* causándolle un alongamento, Δ*y*. Escribe a expresión que relaciona: a) a forza exercida pola masa *m* coa deformación causada no resorte e b) a forza recuperadora do resorte coa deformación que sofre o resorte.

Solución:

a) $\vec{F} = k\cdot\Delta\vec{y}$

b) $\vec{F}_{\text{resorte}} = -k\cdot\Delta\vec{y}$

38.- Unha mesma masa *m* vibra segundo un m.h.s., con frecuencias diferentes e igual amplitude, ó estar colgada de dous resortes distintos. Contesta razoadamente que lle sucede ó valor da súa: a) velocidade máxima; b) aceleración máxima e c) enerxía mecánica.

Solución:

a) $v_{\text{máx.}} = \omega\,\text{A} \rightarrow v_{\text{máx.}} = 2\pi\nu A \rightarrow v_{\text{máx.}} \propto \nu$

Vemos que a velocidade máxima, $v_{\text{máx.}}$, é directamente proporcional á frecuencia de vibración, ν: $v_{\text{máx.}} \propto \nu$. Polo tanto, a masa *m* que vibra coa mesma amplitude e con frecuencias distintas faino cunha velocidade máxima tamén distinta.

b) $a_{\text{máx.}} = \omega^2 A \rightarrow a_{\text{máx.}} = 4\pi^2\nu^2 A \rightarrow a_{\text{máx.}} \propto \nu^2$

Vemos que a aceleración máxima, $a_{\text{máx.}}$, é directamente proporcional o cadrado da frecuencia de vibración, ν: $a_{\text{máx.}} \propto \nu^2$. Polo tanto, a masa *m* que vibra coa mesma amplitude e con frecuencias distintas faino cunha aceleración máxima tamén distinta.

c) $E_{\text{mec.}} = \dfrac{1}{2}k\,A^2 \rightarrow E_{\text{mec.}} = \dfrac{1}{2}m\,\omega^2 A^2 \rightarrow E_{\text{mec.}} \propto \nu^2$

Vemos que a enerxía máxima, $E_{\text{máx.}}$, é directamente proporcional ó cadrado da frecuencia de vibración, ν: $E_{\text{máx.}} \propto \nu^2$. Polo tanto, a masa *m* que vibra coa mesma amplitude e con frecuencias distintas faino cunha enerxía máxima tamén distinta.

39.- Se a unha masa *m*, que vibra colgada dun resorte elástico, segundo un m.h.s., cunha frecuencia ν e amplitude *A*, se lle duplica a súa frecuencia e triplica a súa amplitude, estuda como varía o valor da súa enerxía mecánica.

Solución:

$$E_{\text{mec.}} = \frac{1}{2} k\, A^2 \;\rightarrow\; E_{\text{mec.}} = \frac{1}{2} m\, \omega^2\, A^2 = \frac{1}{2} m\, 4\, \pi^2\, \nu^2\, A^2 \;\rightarrow\; E_{\text{mec.}} \propto \nu^2\, A^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \nu' = 2\,\nu \\ A' = 3\,A \\ E' \propto \nu'^2\, A'^2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} E' \propto (2\,\nu)^2\,(3\,A)^2 = 36\,\nu^2\,A^2 \\ E \propto \nu^2\,A^2 \end{array}\right\} \rightarrow E' = 36\,E$$

40.- Comenta as distintas opcións da seguinte frase: Unha partícula posúe un movemento harmónico simple, m.h.s., cando: a) repite a mesma situación física a iguais intervalos de tempo; b) a súa posición varía sinusoidalmente co tempo; c) a súa aceleración tanxencial é constante.

Solución:

a) Todo m.h.s. é periódico, pero esta condición non é suficiente para poder cualificar un movemento como harmónico. Así, por exemplo, o movemento circular uniforme é periódico e non é harmónico.

b) Unha partícula posúe un m.h.s. cando a súa posición, *y*, varía sinusoidalmente co tempo, *t*: $y = A \cdot \text{sen}\left(\omega t + \varphi_0\right)$, sendo φ_0 unha constante de fase determinada pola elección do instante $t = 0$. A función $\text{sen}\left(\omega t + \varphi_0\right)$ repítese sempre que o seu argumento $\left(\omega t + \varphi_0\right)$ varíe $2\,\pi$ radiáns.

c) Unha partícula que se move segundo a ecuación $y = A \cdot \text{sen}\left(\omega t + \varphi_0\right)$ posúe unha velocidade, *v*, que obtemos coa derivada de *y*: $v = \dfrac{\text{d}y}{\text{d}t} \rightarrow v = A \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$ e unha aceleración, $\vec{a}$, que obtemos coa derivada da velocidade:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = \dfrac{\text{d}\vec{v}}{\text{d}t} \\ \vec{a} = \vec{a}_\text{n} + \vec{a}_\text{t} \\ \vec{a}_\text{n} = \dfrac{v^2}{\rho}\,\vec{u}_\text{n} \\ \vec{a}_\text{t} = \dfrac{\text{d}v}{\text{d}t}\,\vec{u}_\text{t} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{a} = \frac{v^2}{\rho}\,\vec{u}_\text{n} + \frac{\text{d}v}{\text{d}t}\,\vec{u}_\text{t}$$

$\vec{a} = \dfrac{v^2}{\infty}\,\vec{u}_\text{n} - A \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}\left(\omega t + \varphi_0\right)\vec{u}_\text{t} \rightarrow \vec{a} = \vec{a}_\text{t} = -\,\omega^2 \cdot y \cdot \vec{u}_\text{t}$. Polo tanto, **a aceleración** deste movemento (que é tanxente á traxectoria) **non é constante**, sendo diferente para as distintas posicións y da partícula.

41.- O espazo percorrido ó longo dun ciclo por unha partícula que realiza un movemento harmónico simple de amplitude A é: a) $2 \cdot A$; b) $4 \cdot A$; c) nulo xa que $y_{\text{no instante } t = 0} = y_{\text{no instante } t = T}$. (Comenta os tres ítems).

Solución:

O m.h.s. pódese relacionar co m.c.u.: Se unha partícula percorre unha circunferencia con movemento uniforme, o movemento que toma a proxección ortogonal deste punto sobre un diámetro da circunferencia é harmónico simple e cando o punto que se move sobre a circunferencia deu unha volta completa, a súa proxección sobre o diámetro realizou unha oscilación completa, volvendo a encontrarse na mesma posición, percorrendo dúas veces o diámetro. Polo tanto, **o espazo percorrido ó longo dun ciclo é catro veces o valor da amplitude, A**.

Con respecto á opción c) recordaremos que a expresión $y = A \cdot \text{sen}\left(\omega t + \varphi_0\right)$ danos o valor da elongación da partícula en función do tempo, t, pero non o espazo que percorre. O valor de y no instante $t = 0$ é: $y = A \cdot \text{sen}\, \varphi_0$ e para $t = T$ (tempo que hai de transcorrer para que o móbil describa un ciclo) vale: $y = A \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot T + \varphi_0\right) = A \cdot \text{sen}\, \varphi_0$, resultando $y_{\text{no instante } t = 0} = y_{\text{no instante } t = T}$

42.- No punto en que a velocidade dunha partícula que posúe un m.h.s. é máxima sucede que: a) a súa elongación é máxima; b) a súa aceleración é máxima; c) a forza que actúa sobre a partícula é nula.

Solución:

a) A velocidade v dunha partícula que posúe un m.h.s. de amplitude A e pulsación ω, en función da elongación y, vén dada pola expresión: $v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2}$. Polo tanto, a velocidade é máxima cando a elongación é nula: $v_{\text{max.}} = \omega \cdot A$, non cumpríndose o ítem a).

b) O valor da aceleración, a, en función da elongación, y, vén dado pola expresión: $a = \omega^2 \cdot y$, correspondéndolle o valor máximo para $y = A$. E como a velocidade é máxima cando $y = 0$, resulta que para esta posición a aceleración é nula e non se cumpre a condición do ítem b).

c) Sabemos que $F = m \cdot a$ e que no m.h.s. $a = \omega^2 \cdot y$. Recordando que o valor máximo da velocidade ten lugar para $y = 0$: $v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2} \;\rightarrow\; v_{\text{max.}} = \omega \cdot A$, resulta que, para esta posición da partícula, a aceleración vale cero e, en consecuencia, **a forza é nula**, como se indica no ítem c).

43.- Unha masa *m* está colgada do extremo dun resorte de constante elástica *k* e oscila cun m.h.s. de amplitude *A*. Razoa se a enerxía mecánica total da masa *m* e a súa frecuencia de oscilación dependen do valor da masa.

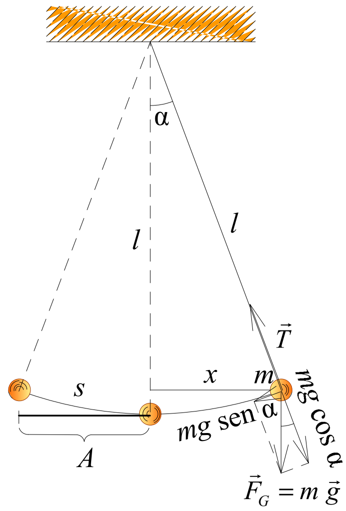
Solución:

A enerxía mecánica total, E_m, dunha masa m que oscila no extremo dun resorte cun m.h.s. de amplitude A vén dada pola expresión: $E_m = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2$, sendo k a constante elástica do resorte. Polo tanto, **a E_m é constante e independente da masa que oscila**.

A frecuencia, ν, de oscilación pode relacionarse coa masa m que oscila coa expresión: $k = m \cdot \omega^2 = m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot \nu^2 \rightarrow \nu^2 = \frac{\text{cte.}}{m}$. En consecuencia, **a medida que aumenta m diminúe ν e viceversa**.

44.- Unha masa m está colgada do extremo dun fío de lonxitude l, constituíndo un péndulo simple, e oscila cunha amplitude A. Estuda se a súa frecuencia de oscilación e a súa enerxía mecánica total dependen do valor da masa m que oscila.

Solución:



A frecuencia de oscilación, ν, dun péndulo simple de lonxitude l vén dada pola expresión: $\nu = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}$, sendo g a aceleración da gravidade no punto onde oscila o péndulo. Polo tanto, a **frecuencia de oscilación** soamente depende do valor de g e de l, sendo **independente da masa que oscila**.

A enerxía mecánica total, E_m, coincide coa enerxía potencial máxima, $E_{p\,\text{máxima}}$, e coa enerxía cinética máxima, $E_{k\,\text{máxima}}$: $E_m = E_{p\,\text{máxima}} = E_{k\,\text{máxima}}$.

A enerxía potencial dunha masa m que posúe un m.h.s. vén dada pola expresión: $E_p = ½ \cdot k \cdot x^2$, correspondéndolle o valor máximo de: $E_{p\,\text{máxima}} = ½ \cdot k \cdot A^2$, sendo $k = \frac{m \cdot g}{l}$ [1], resultando: $E_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{m \cdot g}{l} \cdot A^2$. Polo tanto, **a enerxía mecánica** da masa que oscila **é directamente proporcional ó valor de m**.

Se o estudo o facemos coa enerxía cinética máxima chegamos a igual resultado:

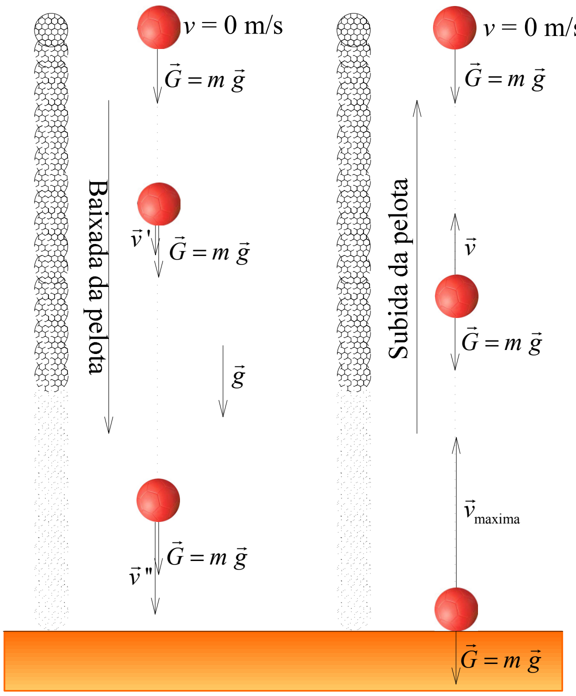
$$\left.\begin{array}{l} E_{\text{mecánica}} = E_{\text{k máxima}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2_{\text{máx.}} \\ v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2} \rightarrow v_{\text{máx.}} = \omega \cdot A \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} E_{\text{mecánica}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot A^2 \\ \left.\begin{array}{l} m \cdot \omega^2 = k \\ k = \frac{m \cdot g}{l} \end{array}\right\} \rightarrow m \cdot \omega^2 = \frac{m \cdot g}{l} \end{array}\right\} \rightarrow E_{\text{mec.}} = \frac{1}{2} \frac{m \cdot g}{l} A^2$$

[1] A forza que causa o movemento pendular é: $F = m \cdot g \cdot \operatorname{sen} \alpha = m \cdot g \cdot \frac{x}{l}$, que vectorialmente escribimos como: $\vec{F} = -m \cdot g \cdot \frac{\vec{x}}{l} = -k \cdot \vec{x}$. Para pequenos ángulos, a traxectoria da masa m (o arco de circunferencia, s) pode confundirse coa corda x e o movemento considerarse harmónico simple, sendo $k = m \cdot g/l$.

45.- O movemento que describe unha pelota, que se deixa caer sobre unha superficie ríxida, producíndose un choque elástico, é: a) periódico; b) oscilatorio; c) vibratorio. (Elixe razoadamente a/s opción/s que consideres correcta/s).

Solución:

A pelota, que se deixa caer sobre unha superficie ríxida e que experimenta un choque elástico, describe repetidamente a mesma traxectoria, cun movemento de vaivén, encontrándose na mesma situación física (posición e velocidade) a iguais intervalos de tempo. En consecuencia, **o movemento é periódico**. Como ademais a traxectoria da pelota é rectilínea, o seu **movemento** é **oscilatorio** (dise que un movemento é oscilatorio cando é periódico e a súa traxectoria é un segmento).



Para que este movemento periódico e oscilatorio sexa, ademais, vibratorio, a pelota ten que estar sometida, en cada instante, a unha forza que sexa proporcional á distancia ó centro da traxectoria que describe e dirixida cara ó citado centro. Como en todos os puntos da traxectoria, a forza que actúa sobre a pelota, que é a forza do seu peso, é constante, o seu **movemento non é vibratorio**.

46.- Unha masa *m* oscila cun m.h.s. A súa enerxía potencial e cinética son iguais para o caso de que a elongación *y*, con respecto á amplitude *A*, sexa: a) $y = A$; b) $y = A/2$; c) $y = A/\sqrt{2}$. (Elixe razoadamente a opción que consideres correcta).

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} E_p = \dfrac{1}{2}\cdot k\cdot y^2 \\ E_k = \dfrac{1}{2}\cdot k\cdot\left(A^2 - y^2\right) \\ E_p = E_k \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{2}\cdot k\cdot y^2 = \frac{1}{2}\cdot k\cdot\left(A^2 - y^2\right) \rightarrow y = \frac{A}{\sqrt{2}} \text{ (Ítem c)}$$

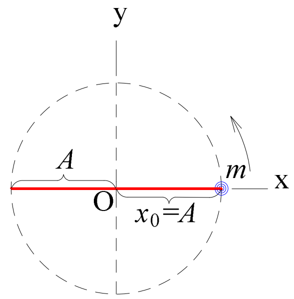
EXERCICIOS (Problemas)

1.- Unha partícula de 1 g describe un movemento harmónico simple no eixe OX, arredor da posición de equilibrio $x = 0$, con frecuencia 10 Hz. Se no instante $t = 0$ a posición da partícula é $x_0 = 1$ cm e a súa velocidade é $v_0 = 0$, determina: a) o valor máximo da velocidade; b) o valor da constante recuperadora da forza que actúa sobre a partícula. (*Selectividade COU*; *xuño 02*).

Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{l} v=\omega\cdot\sqrt{A^2-x^2} \;\rightarrow\; v_{\text{máx.}}=\omega\cdot A \\ \omega=2\cdot\pi\cdot\nu \end{array}\right\} \rightarrow v_{\text{máx.}}=2\cdot\pi\cdot\nu\cdot A$$



Fixándonos no dato de que para $t = 0$ a velocidade é nula ($v_0 =$ 0 m s^{-1}); como este valor soamente se dá nos extremos da traxectoria do m.h.s, neste instante, o valor de x coincide co da amplitude, A: $x = A = 10^{-2}$ m. De outra forma:

$$\left.\begin{array}{l} v=\omega\cdot\sqrt{A^2-x^2} \xrightarrow{\text{para } t=0} 0=\omega\cdot\sqrt{A^2-\left(10^{-2}\right)^2} \\ \omega=2\cdot\pi\cdot\nu \;\rightarrow\; \omega=2\cdot\pi\cdot 10 \;\rightarrow\; \omega=20\cdot\pi\,\text{s}^{-1} \end{array}\right\} \rightarrow 0=20\cdot\pi\cdot\sqrt{A^2-10^{-4}} \;\rightarrow\; A=10^{-2}\text{ m}$$

$$v_{\text{máx.}}=2\cdot\pi\cdot\nu\cdot A \;\rightarrow\; v_{\text{máx.}}=2\cdot\pi\cdot 10\cdot 10^{-2} \;\rightarrow\; \boxed{v_{\text{máx.}}=0{,}2\cdot\pi\text{ m s}^{-1}}$$

b)

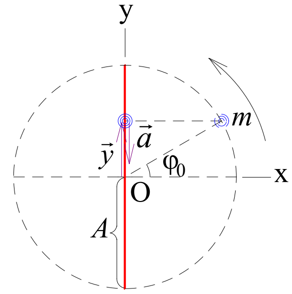
$$\left.\begin{array}{l} k=m\cdot\omega^2 \\ \omega=2\cdot\pi\cdot\nu \end{array}\right\} \rightarrow k=m\cdot 4\cdot\pi^2\cdot\nu^2 \;\rightarrow\; k=1\cdot 10^{-3}\cdot 4\cdot\pi^2\cdot 10^2 \;\rightarrow \boxed{k=0{,}4\cdot\pi^2\text{ N m}^{-1}}$$

2.- Unha partícula está describindo un movemento harmónico simple de pulsación $\omega = 2\pi$ rad s^{-1}. Nun instante dado ($t = 0$) actívase o cronómetro. Neste instante, a elongación, que ten un sentido de percorrido cara ás elongacións positivas, é a metade da máxima e a velocidade é de 10 cm s^{-1}. Calcula: a) a fase inicial e b) a aceleración no instante $t = 0{,}1$ s. (*Selectividade COU*; *set. 01*).

Solución:

a) $y=A\cdot\text{sen}\left(\omega t+\varphi_0\right) \xrightarrow{\text{para } t=0} \dfrac{A}{2}=A\,\text{sen}\left(0+\varphi_0\right)$

$$\boxed{\varphi_0=30^{\text{o}}=\frac{\pi}{6}\text{ rad}}$$

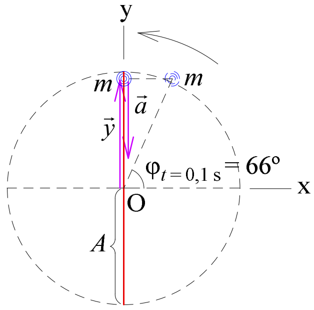


b)

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=-\,\omega^2\;y\;\vec{j}\\ \omega=2\,\pi\;\text{rad s}^{-1}\end{array}\right\}\rightarrow\;\vec{a}=-\,4\,\pi^2\;y\;\vec{j}$$

$$\left.\begin{array}{l}y=A\cdot\text{sen}\left(\omega t+\varphi_0\right)\;\rightarrow\;y=A\cdot\text{sen}\left(2\cdot\pi\cdot 0{,}1+\dfrac{\pi}{6}\right)\\ v=\omega\cdot\sqrt{A^2-y^2}\;\xrightarrow{\text{para } t\,=\,0}\;10\cdot 10^{-2}=2\cdot\pi\cdot\sqrt{A^2-\left(\dfrac{A}{2}\right)^2}\;\rightarrow\;A=\dfrac{10^{-1}}{\pi\cdot\sqrt{3}}\text{ m}\end{array}\right\}\rightarrow$$

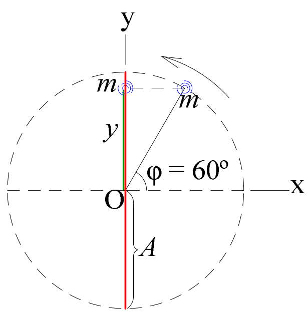
$$\rightarrow y=\frac{10^{-1}}{\pi\cdot\sqrt{3}}\cdot\text{sen}\left(2\cdot\pi\cdot 0{,}1+\frac{\pi}{6}\right)\;\rightarrow\;\boxed{y=0{,}017\text{ m}}$$



Podemos ver que o ángulo ($\omega t+\varphi_0$) que lle corresponde á partícula no instante $t=0{,}1$ s é: $2\cdot\pi\cdot 0{,}1+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2{,}2\cdot\pi}{6}\text{ rad}=66^{\text{o}}$. Polo tanto, o valor de $\vec{y}$ é: $\vec{y}=0{,}017\,\vec{j}\;(\text{m})$ e o de $\vec{a}$ é: $\boldsymbol{\vec{a}=-0{,}67\,\vec{j}\;\left(\text{m s}^{-2}\right)}$.

3.- A enerxía total dun corpo que realiza un m.h.s. é $3\cdot 10^{-5}$ J e a forza máxima que actúa sobre el é $1{,}5\cdot 10^{-3}$ N. a) Escribe a ecuación do movemento deste corpo, se o período é de 2 s e a fase inicial é de 60º. b) Calcula a velocidade ó cabo de 1 s de comezar o movemento. (*Selectividade COU*; *xuño 01*).

Solución:



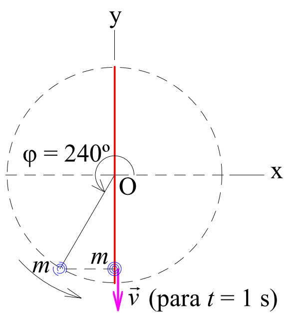
a) A ecuación do movemento (aquela que relaciona coordenada e tempo) dunha partícula que describe un m.h.s. é:

$$y=A\,\text{sen}\left(\omega t+\varphi_0\right)\;\rightarrow\;y=A\,\text{sen}\left(\frac{2\,\pi}{2}\,t+\frac{\pi}{3}\right)=A\,\text{sen}\left(\pi\,t+\frac{\pi}{3}\right)$$

Cos datos da forza máxima que actúa sobre a partícula e o da enerxía, calculamos a amplitude:

$$\left.\begin{array}{l}F_{\text{máx.}}=k\;A\;\rightarrow\;1{,}5\cdot 10^{-3}=k\cdot A\\ E_{\text{total}}=\dfrac{1}{2}\,k\;A^2\;\rightarrow\;3\cdot 10^{-5}=\dfrac{1}{2}\cdot k\cdot A^2\end{array}\right\}\rightarrow\;3\cdot 10^{-5}=\frac{1}{2}\cdot 1{,}5\cdot 10^{-3}\cdot A\;\rightarrow\;A=4\cdot 10^{-2}\text{ m}$$

$$\boxed{y=4\cdot 10^{-2}\cdot\text{sen}\left(\pi\cdot t+\frac{\pi}{3}\right)\text{m}}$$



b) Como hai que calcular a velocidade nun instante t, escribimos $v(t)$:

$$v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\;\rightarrow\;v=4\cdot 10^{-2}\cdot\pi\cdot\cos\left(\pi\cdot t+\frac{\pi}{3}\right)$$

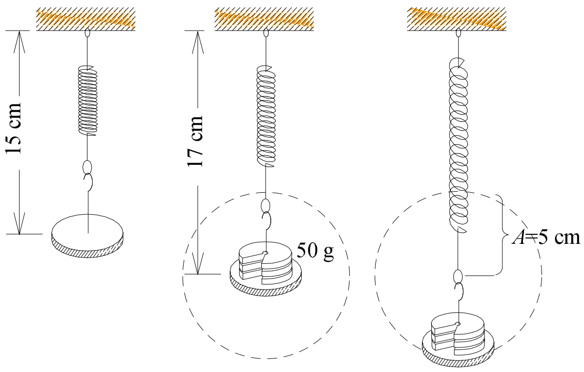
$$v = 4 \cdot 10^{-2} \cdot \pi \cdot \cos\left(\pi \cdot 1 + \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow \boxed{v = -6{,}28 \cdot 10^{-2}\ \text{m s}^{-1}}$$

Podemos ver que o ángulo $(\omega t + \varphi_0)$ que lle corresponde á partícula no instante $t = 1$ s é: $\frac{2 \cdot \pi}{2} \cdot 1 + \frac{\pi}{3} = \frac{4 \cdot \pi}{3}\ \text{rad} = 240^{\circ}$. Polo tanto, o valor de $\vec{v}$ é: $\boxed{\vec{v} = -6{,}28 \cdot 10^{-2}\ \vec{j}\ \left(\text{m s}^{-1}\right)}$.

4.- Un resorte helicoidal ten unha lonxitude de 15 cm. Cando del pende unha masa de 50 g queda en repouso cunha lonxitude de 17 cm. De seguida estírase cara abaixo de tal xeito que o sistema empeza a oscilar cunha amplitude de 5 cm. Calcula: a) a frecuencia do movemento, e b) a forza recuperadora ós 0,2 s de ter empezado a oscilar. (g = 10 m s^{-2}). (*Selectividade COU*; *set.98*).

Solución:

a) A frecuencia de oscilación dunha masa *m* que posúe un m.h.s. vén dada pola expresión:



$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \nu = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{50 \cdot 10^{-3}}}$$

A constante elástica do resorte obtémola coa lei de Hooke, que relaciona a deformación causada nun resorte elástico coa forza que a causa:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F}_{\text{recuperadora}} = -k \cdot \Delta\vec{y} \\ \vec{F}_{\text{aplicada}} = -\vec{F}_{\text{recuperadora}} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{F}_{\text{aplicada}} = k \cdot \Delta\vec{y}$$

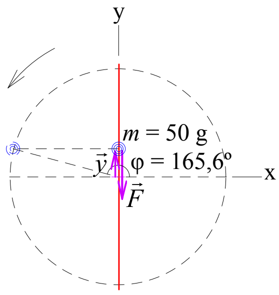
$$F = k \cdot \Delta y \rightarrow 50 \cdot 10^{-3} \cdot 10 = k \cdot 2 \cdot 10^{-2} \rightarrow k = 25\ \text{N m}^{-1}$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{25}{50 \cdot 10^{-3}}} \rightarrow \boxed{\nu = 3{,}56\ \text{Hz}}$$

b) $\vec{F}_{\text{recuperadora}} = -k \cdot \vec{y} \rightarrow \vec{F}_{\text{recuperadora}} = -25 \cdot \vec{y}$

$$\left.\begin{array}{l} y = A \cdot \text{sen}\left(\omega t + \varphi_0\right) \\ \omega = 2\pi\nu \rightarrow \omega = 2\pi\, 3{,}56 = 22{,}37\ \text{s}^{-1} \end{array}\right\} \rightarrow y = 5 \cdot 10^{-2} \cdot \text{sen}\left(22{,}37 \cdot 0{,}2 + \frac{3\pi}{2}\right) = 1{,}18 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$$

Podemos ver que o ángulo $(\omega\, t + \varphi_0)$ que lle corresponde á masa m no instante $t = 0{,}2$ s é:



$$2 \cdot \pi \cdot 3{,}56 \cdot 0{,}2 + \frac{3\,\pi}{2} = 2{,}92 \cdot \pi \text{ rad} = 525{,}6° \rightarrow 165{,}6°,$$

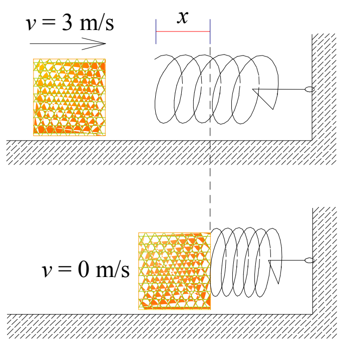
encontrándose no segundo cuadrante, sendo $\vec{y} = 1{,}18 \cdot 10^{-2}\ \vec{j}\ (\text{m})$.

$$\vec{F} = -25 \cdot \left(1{,}18 \cdot 10^{-2}\right) \vec{j} \rightarrow \boxed{\vec{F} = -0{,}30\vec{j}\ \ (\text{N})}$$

5.- Unha masa de 4 kg móvese sobre unha superficie horizontal sen rozamento á velocidade de 3 m s^{-1}, e comprime un resorte elástico de masa desprezable e de constante recuperadores 900 N m^{-1} Determina: a) a compresión máxima do resorte e b) a velocidade da masa cando o resorte se comprimiu 10 cm. (*Selectividade COU*; *xuño 97*).

Solución:

a) $E_{\text{cinética de translación}} = E_{\text{potencial elástica}}$



$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3^2 = \frac{1}{2} \cdot 900 \cdot x^2 \rightarrow \boxed{x = 0{,}2 \text{ m}}$$

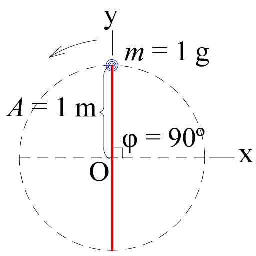
b) $E_{\text{cinética inicial de translación}} = E_{\text{potencial elástica}} + E_{\text{cinética final de translación}}$

ós 10 cm

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3^2 = \frac{1}{2} \cdot 900 \cdot \left(10 \cdot 10^{-2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot v_{\text{final}}^2 \rightarrow \boxed{v_{\text{final}} = 2{,}6 \text{ m s}^{-1}}$$

6.- Unha partícula de 1 g de masa inicia un movemento harmónico simple no punto de máxima elongación, que se atopa a 1 m da orixe. O tempo que tarda a partícula desde o instante inicial ata que alcanza a orixe é de 0,25 s. Calcula: a) a pulsación ω deste movemento e b) a forza que actúa sobre a partícula, transcorridos 0,1 s desde o instante inicial. (*Selectividade COU*; *set. 96*).

Solución:

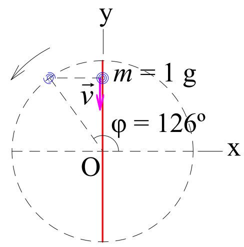


a)

$$\left.\begin{array}{l} \omega = \dfrac{2\,\pi}{T} \\ \\ T = 0{,}25 \cdot 4 = 1{,}00 \text{ s} \end{array}\right\} \rightarrow \omega = \frac{2\,\pi}{1{,}00} \rightarrow \boxed{\omega = 2\,\pi \text{ s}^{-1}}$$

b)

$$\vec{F}_{\text{recuperadora}} = -k\,\vec{y}$$



$$k = m \cdot \omega^2 \;\rightarrow\; k = 1 \cdot 10^{-3} \cdot (2\,\pi)^2 \;\rightarrow\; k = 39{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{N m}^{-1}$$

$$y = A \cdot \text{sen}\,(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow{\text{para } t = 0} A = A\,\text{sen}\,(0 + \varphi_0) \;\rightarrow\; \varphi_0 = \frac{\pi}{2}\ \text{rad}$$

$$y = A \cdot \text{sen}\,(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow{\text{para } t = 0{,}1} y = 1\,\text{sen}\left(2\,\pi\,0{,}1 + \frac{\pi}{2}\right) \;\rightarrow\; y = 0{,}81\ \text{m}$$

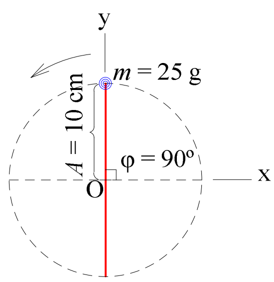
$$\vec{F}_{\text{recuperadora}} = -39{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}81\,\vec{j} \;\rightarrow\; \boxed{\vec{F}_{\text{recuperadora}} = -32{,}0 \cdot 10^{-3}\,\vec{j}\ (\text{N})}$$

7.- Un punto material de 25 g describe un m.h.s. de 10 cm de amplitude e período de 1 s. No instante inicial, a elongación é máxima. Calcula a) a velocidade máxima que pode alcanzar a citada masa e b) o valor da forza recuperadora ó cabo dun tempo igual a 0,125 s. (*Selectividade COU*; *set. 95*).

Solución:

a)

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2} \;\rightarrow\; v_{\text{max.}} = \omega\,A$$



$$v_{\text{máx.}} = \frac{2\,\pi}{1} \cdot 10 \cdot 10^{-2} \;\rightarrow\; \boxed{v_{\text{máx.}} = 0{,}2\,\pi\ \text{m s}^{-1}}$$

b)

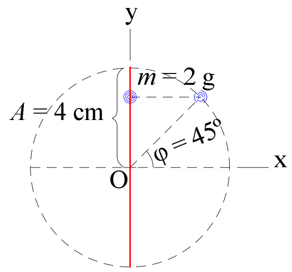
$$\left.\begin{array}{l}
\vec{F}_{\text{recuperadora}} = -k\,\vec{y} \\
k = m\,\omega^2 \;\rightarrow\; k = 25 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\dfrac{2\,\pi}{1}\right)^2 \;\rightarrow\; k = 9{,}87 \cdot 10^{-1}\ \text{N m}^{-1} \\
y = A\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow{\text{para } t = 0\ \rightarrow\ y = A} A = A\,\text{sen}\,(\omega \cdot 0 + \varphi_0) \;\rightarrow\; \varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}\ \text{rad} \\
y = A\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi_0) \;\rightarrow\; y = 10 \cdot 10^{-2} \cdot \text{sen}\left(2\,\pi\,0{,}125 + \dfrac{\pi}{2}\right) \;\rightarrow\; y = 7{,}07 \cdot 10^{-2}\ \text{m}
\end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\vec{F}_{\text{recuperadora}} = -9{,}87 \cdot 10^{-1} \cdot 7{,}07 \cdot 10^{-2}\,\vec{j} \;\rightarrow\; \boxed{\vec{F}_{\text{recuperadora}} = -6{,}98 \cdot 10^{-2}\,\vec{j}\ (\text{N})}$$

8.- Unha masa de 2 g oscila cun período de π segundos e amplitude de 4 cm. No instante inicial a fase é de 45º. Cando a súa elongación sexa de 1 cm, acha: a) enerxía cinética da partícula e b) a súa enerxía potencial. (*Selectividade COU*; *xuño 95*).

Solución:

a)



$$E_k = \frac{1}{2} k \left(A^2 - y^2\right)$$

$$k = m\,\omega^2 \;\rightarrow\; k = 2\cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{2\,\pi}{\pi}\right)^2 = 8\cdot 10^{-3}\ \text{N m}^{-1}$$

$$E_k = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 10^{-3} \left(\left(4\cdot 10^{-2}\right)^2 - \left(1\cdot 10^{-2}\right)^2\right) \;\rightarrow\; \boxed{E_k = 6\cdot 10^{-6}\ \text{J}}$$

b)

$$E_p = \frac{1}{2} k\, y^2 \;\rightarrow\; E_p = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 10^{-3}\cdot\left(1\cdot 10^{-2}\right)^2 \;\rightarrow\; \boxed{E_p = 0{,}4\cdot 10^{-6}\ \text{J}}$$

Ou senón:

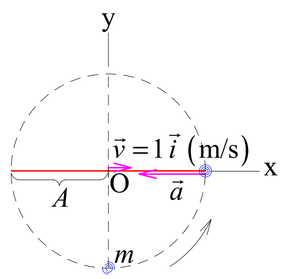
$$\left.\begin{array}{l} E_m = E_k + E_p \\ E_m = \frac{1}{2}\cdot k\cdot A^2 \;\rightarrow\; E_m = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 10^{-3}\cdot\left(4\cdot 10^{-2}\right)^2 = 6{,}4\cdot 10^{-6}\ \text{J} \\ E_k = 6\cdot 10^{-6}\ \text{J} \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{E_p = 0{,}4\cdot 10^{-6}\ \text{J}}$$

9.- Unha partícula de 5 g está sometida a unha forza do tipo $F = -k\,x$. No momento inicial pasa por $x = 0$ cunha velocidade de 1 m s^{-1}. A frecuencia do movemento resultante é de 2/π Hz. Acha: a) a aceleración no punto de máxima elongación; b) a enerxía cinética en función do tempo. (*Selectividade COU*; *set. 93*).

Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = -\,\omega^2\,\vec{x} \;\rightarrow\; a_{\text{máx.}} = \omega^2\,A = \left(2\,\pi\,\nu\right)^2 A \;\rightarrow\; a_{\text{máx.}} = \left(2\,\pi\,\frac{2}{\pi}\right)^2 A \\ \left.\begin{array}{l} v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \;\rightarrow\; v_{\text{para } x=0} = v_{\text{máx.}} = A\,\omega \\ v_{\text{para } x=0} = 1\ \text{m s}^{-1} \\ \omega = 2\pi\nu = 2\,\pi\,\frac{2}{\pi} = 4\ \text{s}^{-1} \end{array}\right\} \rightarrow\; A = 0{,}25\ \text{m} \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\vec{a}_{\text{máx.}} = -4\,\vec{i}\ \text{m s}^{-2}}$$



b)

$$E_k = \frac{1}{2} m\, v^2 \;\rightarrow\; E_k = \frac{1}{2} m \left(A\,\omega\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)\right)^2$$

O valor de φ_0 obtémolo a partir das condicións iniciais:

$x = A\cdot\text{sen}\left(\omega t + \varphi_0\right) \xrightarrow{\text{para } t=0 \;\rightarrow\; x=0} 0 = A\,\text{sen}\left(0 + \varphi_0\right) \rightarrow \varphi_0 = 0\ \text{rad ou } \pi\ \text{rad}$, segundo a partícula se desprace, respectivamente, cara a valores positivos ou negativos da elongación. Se $\vec{v} = 1\,\vec{i}\ (\text{m/s})$, φ_0 = 0 rad.

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot \left(0{,}25 \cdot 4 \cdot \cos\left(4 \cdot t + 0\right)\right)^2 \rightarrow \boxed{E_k = 2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot \cos^2\left(4\,t\right)\,\mathrm{J}}$$

10.- Unha partícula describe un movemento oscilatorio harmónico simple, de xeito que a súa aceleración máxima é de 18 m/s^2 e a súa velocidade máxima é de 3 m/s. Atopa: a) A frecuencia de oscilación da partícula e b) A amplitude do movemento. (*Selectividade COU*; *set. 92*).

Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{l} a_{\text{máx.}} = \omega^2 A \rightarrow 18 = \omega A \\ v_{\text{máx.}} = \omega A \rightarrow 3 = \omega A \end{array}\right\} \rightarrow \frac{18}{3} = \frac{\omega^2 A}{\omega A} \rightarrow \omega = 6\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$\omega = 2\,\pi\,\nu \rightarrow 6 = 2\,\pi\,\nu \rightarrow \boxed{\nu = \frac{3}{\pi}\,\mathrm{Hz}}$$

b)

$$v_{\text{máx.}} = \omega A \rightarrow 3 = 6 \cdot A \rightarrow \boxed{A = 0{,}5\ \mathrm{m}}$$

11.- Unha partícula de 1 miligramo de masa executa un movemento oscilatorio harmónico que pode expresarse pola ecuación: $x = A$ sen ($\omega\,t$), sendo o período de 0,01 s. Cando $t =$ 8,4 · 10^{-4} s, a velocidade vale v = 31,4 cm/s. Calcula: a) A amplitude, en metros, do movemento oscilatorio harmónico e b) A enerxía total. (*Selectividade COU*; *xuño 91*).

Solución:

a)

$$\left.\begin{array}{l} v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\left(A\,\mathrm{sen}\left(\omega t\right)\right)}{\mathrm{d}t} \rightarrow v = A\,\omega \cos\left(\omega t\right) \\ v_{t = 8,4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}} = 31{,}4 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m\,s^{-1}} \\ \omega = \dfrac{2\,\pi}{T} \rightarrow \omega = \dfrac{2\,\pi}{0{,}01} = 200\,\pi\,\mathrm{s}^{-1} \\ t = 8{,}4 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{s} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$31{,}4 \cdot 10^{-2} = A \cdot 200 \cdot \pi \cdot \cos\left(200 \cdot \pi \cdot 8{,}4 \cdot 10^{-4}\right) \rightarrow \boxed{A = 5{,}8 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} E_{\text{mecánica total}} = \dfrac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \\ k = m \cdot \omega^2 \rightarrow k = 1 \cdot 10^{-6} \cdot \left(200 \cdot \pi\right)^2 = 0{,}40\ \mathrm{N\,m^{-1}} \\ A = 5{,}8 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m} \end{array}\right\} \rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot 0{,}40 \cdot \left(5{,}8 \cdot 10^{-4}\right)^2 \rightarrow$$

$$\boxed{E = 6{,}73 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{J}}$$

12.- Un obxecto realiza un movemento harmónico simple. Cando se atopa a 3 cm da posición de equilibrio a súa velocidade é de 6 m/s, mentres que se a distancia é de 5 cm a súa velocidade é de 2 m/s. Calcula: a) a amplitude do movemento e b) a frecuencia do mesmo. (*Selectividade COU*; *set. 89*).

Solución:

a) Escribimos a velocidade do m.h.s. en función da posición, $v(y)$: $v = \omega\sqrt{A^2 - y^2}$

$$\left.\begin{array}{l} 6 = \omega\sqrt{A^2 - \left(3\cdot 10^{-2}\right)^2} \\ 2 = \omega\sqrt{A^2 - \left(5\cdot 10^{-2}\right)^2} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{6}{2} = \frac{\sqrt{A^2 - 9\cdot 10^{-4}}}{\sqrt{A^2 - 25\cdot 10^{-4}}} \rightarrow \boxed{A = 5{,}19\cdot 10^{-2}\ \text{m}}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} \omega = 2\,\pi\,\nu \\ 6 = \omega\sqrt{\left(5{,}19\cdot 10^{-2}\right)^2 - 9\cdot 10^{-4}} \end{array}\right\} \rightarrow 6 = 2\cdot\pi\cdot\nu\cdot\sqrt{\left(5{,}19\cdot 10^{-2}\right)^2 - 9\cdot 10^{-4}} \rightarrow \boxed{\nu = 23\ \text{Hz}}$$

EXERCICIOS DE SELECTIVIDADE (Cuestións)

Razoa as respostas ás seguintes cuestións:

1.- A enerxía mecánica dun oscilador harmónico simple é función de: a) a velocidade; b) a aceleración; c) é constante. ***(Xuño 08).***

Solución:

A expresión da enerxía mecánica, E_m, dun oscilador harmónico é: $E_m = \frac{1}{2} k\, A^2$, sendo k a constante elástica do oscilador e A a elongación máxima (amplitude). Vemos que $\boldsymbol{E_m}$ **é constante**, non sendo función da velocidade nin da aceleración. (Ítem c).

2.- Explica, brevemente, as diferenzas no procedemento para calcular a constante elástica dun resorte, $\boldsymbol{k_e}$, polo método estático e polo método dinámico. ***(Xuño 08).***

Solución:

A determinación da constante elástica dun resorte, k_e, polo método estático consiste en relacionar a forza $\vec{F}$ aplicada ó resorte elástico e a deformación que nel se causa, $\Delta\vec{l}$: $\vec{F} = k_e \cdot \Delta\vec{l}$. Con este fin cólganse, no resorte a estudar, masas m_i coñecidas e **mídese a variación de lonxitude**, Δl_i, que o peso de cada unha das masas causa no resorte, construíndo a táboa correspondente. O valor de k_e é a media das k_i obtidas mediante a relación: $(m_i\, g)/\Delta l_i$. Tamén se obtén coa inversa da pendente do axuste lineal que resulta de representar Δl_i fronte a $m_i\, g$.

No método dinámico relaciónase a masa vibrante, $m_{vibrante}$, co seu período de oscilación, T, segundo a expresión: $T = 2\,\pi \sqrt{\frac{m_{vibrante}}{k_e}}$. Con este fin cólganse, no resorte a estudar, masas m_i coñecidas; desprázanse, da posición de equilibrio, verticalmente cara abaixo e sóltanse. A continuación **mídese o tempo** dun número de oscilacións relativamente grande (10 como mínimo) e calcúlase o correspondente período de oscilación, construíndo unha táboa de valores. O valor de k_e é a media das k_i obtidas mediante a relación: $(4\,\pi^2\, m_{vibrante})/T^2$. Tamén se obtén multiplicando $4\,\pi^2$ pola inversa da pendente do axuste lineal que resulta de representar T_i^2 fronte a m_i.

3.- Un obxecto realiza un m.h.s.; cales das seguintes magnitudes son proporcionais entre si?: a) a elongación e a velocidade; b) a forza recuperadora e a velocidade; c) a aceleración e a elongación. (*Set. 06*).

Solución:

A velocidade dunha partícula, v, en función da posición, y, que se move con m.h.s., vén dada pola expresión: $v = \omega \sqrt{A^2 - y^2}$, sendo ω a frecuencia angular e A a amplitude do movemento. Polo tanto, a velocidade depende da posición, pero ambas magnitudes non son proporcionais.

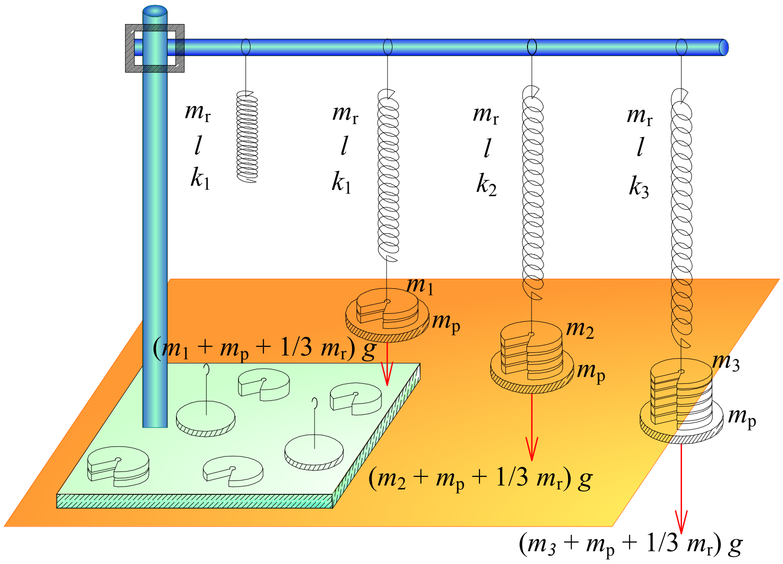
A forza recuperadora $\vec{F}$ que causa o m.h.s. vén dada pola expresión: $\vec{F} = k \cdot \vec{y}$. Como xa vimos anteriormente, a elongación y non é proporcional á velocidade v e, en consecuencia, a forza non é proporcional á velocidade.

A aceleración do m.h.s., $\vec{a}$, en función da elongación, $\vec{y}$, vén dada pola expresión: $\vec{a} = -\omega^2 \cdot \vec{y}$. Nesta expresión vemos que **a aceleración e a elongación son proporcionais** (directamente proporcionais).

4.- Na medida da constante elástica polo método dinámico: a) Inflúe a lonxitude do resorte?; b) aféctalle o número de oscilacións e a amplitude das mesmas?; c) varía a frecuencia de oscilación ó colgarlle diferentes masas? (*Set. 06*).

Solución:

a) No cálculo da constante elástica k dun resorte polo método dinámico a expresión a utilizar é: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, sendo T o período de vibración da masa m. Como a relación T^2/m é constante: a medida que aumenta m tamén aumenta T, sendo a representación gráfica de T^2 fronte a m unha liña recta cuxa pendente vale $4 \cdot \pi^2/k$, a constante k non depende do estado de estiramento que posúa o resorte.



Na expresión $k = \dfrac{4\pi^2 m}{T^2}$ vemos que **o valor de k non depende da lonxitude do resorte**. Así, consideremos un resorte calquera de masa m_r, lonxitude l e constante elástica k, ó que lle colgamos o portapesas de masa m_p e, ademais, sucesivamente, as masas m_1, m_2, m_3, ..., adquirindo, no momento de alcanzar a posición de equilibrio, respectivamente, as lonxitudes l_1, l_2, l_3, ... Ó facer o estudo dinámico de forma analítica da k_i correspondente ós distintos casos teriamos:

$k_1 = \dfrac{4\pi^2\left(m_1 + m_p + 1/3\, m_r\right)}{T_1^2}$, para a lonxitude l_1 do resorte na súa posición de equilibrio;

$k_2 = \dfrac{4\pi^2\left(m_2 + m_p + 1/3\, m_r\right)}{T_2^2}$, para a lonxitude l_2 do resorte na súa posición de equilibrio;

$k_3 = \dfrac{4\pi^2\left(m_3 + m_p + 1/3\, m_r\right)}{T_3^2}$, para a lonxitude l_3 do resorte na súa posición de equilibrio; ...;

sendo $k_1 = k_2 = k_3 = \cdots = k$, independentemente da lonxitude l_1, l_2, l_3, ..., que o resorte ten en cada momento. Polo tanto **a constante elástica dun resorte, k, non depende da súa lonxitude**.

Caso diferente é cando un resorte de lonxitude l e constante elástica k se corta, por exemplo, á metade. O número de espiras do novo resorte é a metade do de partida e a súa constante elástica, k', ten un valor que garda con k a seguinte relación:

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{k'}+\frac{1}{k'} \rightarrow k'=2\,k$$

b) O número de oscilacións pode depender:

· Para unha mesma masa vibrante m, do tempo que se estea facendo a observación. Neste caso, o tempo de vibración medido, t, é directamente proporcional o número de oscilacións n é o tempo de unha oscilación, chamado período T, obtense co cociente: $T = t/n$. Polo tanto, o período non depende do número de oscilacións e ***k* é independente do número de oscilacións**: $k=\dfrac{4\,\pi^2\,m}{T^2}$.

· Para distintas masas vibrantes, m_1, m_2, ..., do valor destas masas. Neste caso, o período de vibración T é proporcional á masa vibrante m: $T^2 \propto m$ e k calcúlase coa expresión: $k=\dfrac{4\,\pi^2\,m}{T^2}$. A relación m/T^2 é constante: a medida que aumenta m tamén aumenta T, sendo a representación gráfica de T^2 fronte a m unha liña recta cuxa pendente vale $4{\cdot}\pi^2/k$, e **a constante *k* non depende do número de oscilacións** aínda que convén que o número sexa relativamente grande (dez ou máis) para diminuír os erros accidentais.

Na expresión $k=\dfrac{4\,\pi^2\,m}{T^2}$ vemos que ***k* non depende da amplitude das oscilacións** (e unha característica do propio resorte).

c) A frecuencia, ν, de oscilación pode relacionarse coa masa m que oscila mediante a expresión: $k=m\cdot\omega^2=m\cdot 4\cdot\pi^2\cdot\nu^2 \rightarrow \nu^2=\dfrac{\text{cte}}{m} \rightarrow \nu^2 \propto \dfrac{1}{m}$. En consecuencia, **a medida que aumenta *m* diminúe ν e viceversa**.

5.- Na práctica para a medida da constante elástica dun resorte polo método dinámico, a) que precaucións debes tomar con respecto ó número e amplitude das oscilacións; b) como varía a frecuencia de oscilación se se duplica a masa oscilante? (*Xuño 06*).

Solución:

a) Ver a resposta do apartado b) da cuestión anterior.

b) A frecuencia, ν, de oscilación pode relacionarse coa masa m que oscila mediante a expresión: $k=m\cdot\omega^2=m\cdot 4\cdot\pi^2\cdot\nu^2 \rightarrow \nu^2=\dfrac{\text{cte}}{m}$. En consecuencia, a medida que aumenta m diminúe ν e ó duplicar a masa resulta:

$$\left.\begin{aligned}\nu&=\frac{\text{cte.}}{\sqrt{m}}\\ \nu'&=\frac{\text{cte.}}{m'}=\frac{\text{cte.}}{\sqrt{2\,m}}\end{aligned}\right\} \rightarrow \nu'=\frac{\nu}{\sqrt{2}}$$

6.- Describe brevemente o procedemento seguido para medir a gravidade no laboratorio por medio dun péndulo simple. (*Xuño 06*).

Solución:

O **material** que se necesita na experiencia do péndulo simple para a determinación da aceleración da gravidade, *g*, é:

· Soporte, dobre noz e variña con gancho ou mordaza.
· Bóla dun material de alta densidade (chumbo, aceiro, etc.).
· Fío inextensible e de masa desprezable.
· Cronómetro.
· Flexómetro.

O **procedemento** a seguir consiste en:

· Colgar do extremo dun fío inextensible e de masa desprezable, que está enganchado polo outro extremo dun soporte, unha bóla de gran masa e pequeno volume (aceiro, chumbo, etc.).

· Separar o péndulo da súa posición de equilibrio, cunha pequena amplitude para que o seu movemento se poida considerar harmónico simple. Ademais procurarase que oscile nun único plano, evitando que teña un movemento elíptico (péndulo cónico). Nestas condicións, o péndulo describe un movemento harmónico simple e o seu período de oscilación vén dado pola expresión: $T = 2\,\pi\,\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

· Medir o tempo t que investe en dar un número n relativamente grande de oscilacións e calcular o período, T: $T = t/n$.

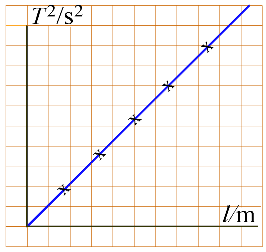
· Medir a lonxitude, l, do péndulo.

· Repetir os pasos anteriores para distintos valores de l.

· Tabular as medidas feitas e proceder ó cálculo de g, que se pode facer de dúas formas:

a) Analiticamente: Substituíndo na fórmula do período: $T = 2\,\pi\,\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, obténdose os valores de g_{i} para cada lonxitude l_{i} do péndulo, tomando como valor de g o da media aritmética: $g = \dfrac{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{i}=n} g_{\mathrm{i}}}{n}$.

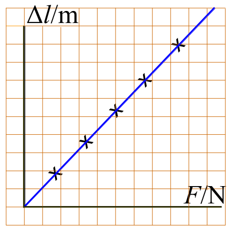
b) Graficamente: Represéntase T^2 fronte a l; trázase a recta que "mellor se axusta" os datos experimentais; calcúlase a pendente desta recta e, coa expresión $g = \dfrac{4\,\pi^2}{\text{pte.}}$, obtense o valar de g.

Nº	l/m	t/s	n	T/s ? $T = t/n$	T^2/s^2 ?	g/m s^{-2} ?	
						$g = 4\pi^2 l/T^2 =$	Pte.$= T^2/l = 4\pi^2/g =$
1							
2							
3							
4							
5							
						$g_{media} =$	$g = 4\pi^2$/pte.$=$

7.- A constante elástica dun resorte medida polo método estático: a) depende do tipo de material?; b) varía co período de oscilación? c) depende da masa e lonxitude do resorte? (*Set. 05*).

Solución:

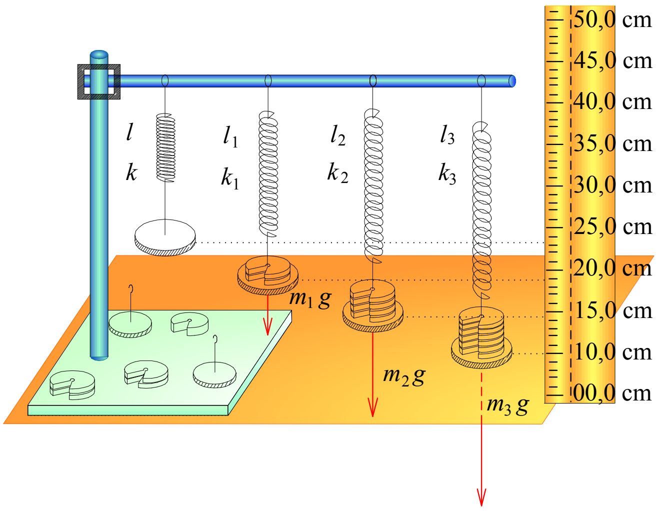
c) O estudo estático dun resorte elástico basease en que a deformación causada no resorte, Δl, é directamente proporcional á forza, $\vec{F}$, que se lle aplica: $\vec{F} = k\,\Delta\vec{l}$. Con este fin cólganse do resorte distintas masas coñecidas e mídese a deformación que cada unha das masas causa no resorte, tabulando estes valores. Para o cálculo de k polo método gráfico faise a representación das deformacións causadas (magnitude dependente) fronte ás forzas deformadoras (magnitude independente), obtendo unha liña recta. O valor de k obtense coa inversa da pendente da recta trazada.



$$\left.\begin{array}{l} \text{Pte.} = \dfrac{\Delta l}{F} \\ F = k\,\Delta l \;\rightarrow\; k = \dfrac{F}{\Delta l} \end{array}\right\} \rightarrow k = \frac{1}{\text{pte.}}$$

Vemos que a pendente da recta e, en consecuencia, k é independente da masa do propio resorte e do estirado que este estea.

No método analítico, o valor de k obtense substituíndo na lei de Hooke: $k = \dfrac{F}{\Delta l}$. Independentemente do estirado que estea o resorte, se Δl é pequeno fronte a F resulta que k é grande; e viceversa. Así, consideremos un resorte de lonxitude l ó que lle colgamos, sucesivamente, as masas m_1, m_2, m_3, ..., e adquire, respectivamente, as lonxitudes l_1, l_2, l_3, ... Ó facer o estudo



da k_i correspondente ós distintos casos teriamos:

$k_1 = \dfrac{l_1 - l}{m_1 \cdot g}$, para a lonxitude inicial l do resorte;

$k_2 = \dfrac{l_2 - l_1}{(m_2 - m_1) \cdot g}$, para a lonxitude inicial l_1 do resorte;

$k_3 = \dfrac{l_3 - l_2}{(m_3 - m_2) \cdot g}$, para a lonxitude inicial l_2 do resorte;

...

sendo $\boldsymbol{k_1 = k_2 = k_3 = \cdots = k}$**, independentemente da masa e da lonxitude** que o resorte ten en cada momento.

Caso diferente é cando un resorte de lonxitude l e constante elástica k se corta, por exemplo, á metade. O número de espiras do *novo resorte* é a metade do de partida e a súa constante elástica, k', ten un valor que garda con k a relación: $\dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k'} + \dfrac{1}{k'} \rightarrow k' = 2\,k$.

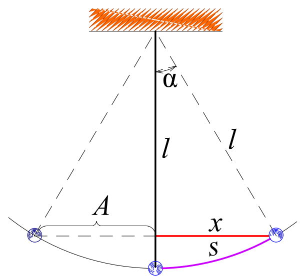
a) A **deformación** que nun resorte elástico causa unha forza F si depende do tipo de material e das características da súa fabricación e, polo tanto, **a constante elástica si depende do tipo de material**.

b) No método estático, o resorte non se fai oscilar polo que **non se estuda a relación entre** $\boldsymbol{k}$ **e o período de oscilación**, T. Esta relación corresponde ó método dinámico, sendo k independente de T: $k = \dfrac{4\,\pi^2\,m}{T^2}$. A representación gráfica de T^2 fronte a m é unha liña recta, o que nos indica que $T^2 \propto m$, sendo $4 \cdot \pi^2/k$ a constante de proporcionalidade.

8.- Cando no laboratorio mides g co péndulo simple: a) cantas oscilacións convén medir?; b) que precaucións se deben tomar coa amplitude das oscilacións? c) inflúe a masa do péndulo na medida de g? (*Xuño 05*).

Solución:

a) O período de oscilación T dunha masa puntual m, que oscila no extremo dun fío de lonxitude l (inextensible e de masa desprezable), cando a amplitude das oscilacións é pequena, vén dado pola expresión: $T = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. A representación gráfica de T^2 fronte a l é unha liña recta, o que nos indica que $T^2 \propto l$, sendo $4 \cdot \pi^2/g$ a constante de proporcionalidade. O resultado é que o valor de g non depende do número de oscilacións, pero convén que o seu número non sexa demasiado pequeno para poder minimizar os erros accidentais da medida do período. Un número axeitado de oscilacións pode estar entre 10 e 20. Se este número é excesivamente grande hai máis probabilidade de equivocarnos ó contar as oscilacións.



b) A expresión que utilizamos no estudo do período de oscilación, T, dun péndulo simple obtense considerando que o movemento que describe a masa puntual m que colga do fío de lonxitude l é harmónico simple. Isto obriga a considerar que a traxectoria da masa m é rectilínea, situación que soamente se dá para pequenas amplitudes de oscilación, xa que só neste caso se pode confundir o arco de circunferencia que describe,

s, coa corda correspondente, x. Isto ocorre cando sen α = α:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{x}{l} \\ \alpha = \dfrac{s}{l} \end{array}\right\}: \text{ se } \operatorname{sen}\alpha = \alpha \;\rightarrow\; x = s$$

Un valor de ángulo aceptable pode chegar ata 15º:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} 15^{\circ} = 0{,}259 \\ 15^{\circ} = 0{,}262 \text{ rad} \end{array}\right\} \rightarrow \operatorname{sen}\alpha \cong \alpha$$

Para oscilacións de ángulos grandes, a expresión do período $\left(T = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}\right)$ non se cumpre. Para desprazamentos angulares grandes, aínda que o movemento do péndulo é periódico, o período é función da amplitude. A forza que acelera a masa m cara ó equilibrio é: $m\cdot g\cdot \operatorname{sen}\alpha$, sendo un valor menor que $m\cdot g\cdot \alpha$ (que causa un m.h.s. cun periódico independente da amplitude), resultando un período lixeiramente maior, que podemos calcular con axuda da expresión:

$$T = T_0\left[1 + \frac{1}{2^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\alpha_0\right) + \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \operatorname{sen}^4\left(\frac{1}{2}\alpha_0\right) + \cdots\right]$$

onde α_0 é o desprazamento angular máximo e $T_0 = 2\,\pi\sqrt{l/g}$ é o período correspondente ó límite dos ángulos pequenos.

c) Da expresión do período vemos que a masa, m, non inflúe no período de oscilación: $T \neq T(m)$ e, en consecuencia, g é independente da masa que oscila. Isto pódese comprobar no laboratorio colgando distintas masas dun fío de lonxitude l e medindo os correspondentes períodos de oscilación.

9.- Se un oscilador harmónico se encontra nun instante dado nunha posición x que é igual á metade da súa amplitude ($x = A/2$), a relación entre a enerxía cinética e potencial é: a) $E_k = E_p$; b) $E_k = 2\,E_p$; c) $E_k = 3\,E_p$ (*Set. 04*).

Solución:

A expresión da enerxía mecánica, E_m, dun oscilador harmónico é: $E_m = \dfrac{1}{2}k\,A^2$, sendo k a constante elástica do oscilador e A a elongación máxima (amplitude). Vemos que E_m é constante para calquera valor da elongación, como corresponde a unha forza conservativa.

As expresións da enerxía potencial, E_p, e da enerxía cinética, E_k, no instante en que a elongación vale x, respectivamente, son: $E_p = \dfrac{1}{2}k\,x^2$ e $E_m = \dfrac{1}{2}k\left(A^2 - x^2\right)$.

Para o caso de $x = A/2$, a expresión da enerxía potencial en función de A, é:

$$\left.\begin{array}{l} E_\mathrm{p} = \dfrac{1}{2} k\, x^2 \\ x = \dfrac{A}{2} \end{array}\right\} \rightarrow E_\mathrm{p} = \frac{1}{2} k \left(\frac{A}{2}\right)^2 \rightarrow E_\mathrm{p} = \frac{1}{2} k \frac{A^2}{4}$$

E a expresión da enerxía cinética en función de A, para o caso de $x = A/2$, vale:

$$\left.\begin{array}{l} E_\mathrm{k} = \dfrac{1}{2} k \left(A^2 - x^2\right) \\ x = \dfrac{A}{2} \end{array}\right\} \rightarrow E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} k \left(A^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2\right) \rightarrow E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} k \frac{3\, A^2}{4}$$

Comparando estas expresións da enerxía cinética e potencial temos:

$$\left.\begin{array}{l} E_\mathrm{p} = \dfrac{1}{2} k \dfrac{A^2}{4} \\ E_\mathrm{k} = \dfrac{1}{2} k \dfrac{3\, A^2}{4} \end{array}\right\} \rightarrow E_\mathrm{k} = 3\, E_\mathrm{p}$$

10.- No estudo estático dun resorte represéntanse variacións de lonxitude (Δl_i) fronte ás forzas aplicadas (F_i) obtendo unha liña recta. No estudo dinámico do mesmo resorte represéntanse as masas (m_i) fronte ó cadrado dos períodos (T_i^2), obténdose tamén unha recta. Teñen as dúas a mesma pendente? Razoa a resposta. (*Set. 04*).

Solución:

Ver a resposta da cuestión 25 (exercicio dos propostos, que non pertence os de selectividade).

11.- Que influencia teñen na medida experimental de *g* cun péndulo simple as seguintes variables: a masa; o número de oscilacións e a amplitude das oscilacións. (*Set. 04*).

Solución:

Ver a resposta da oitava destas cuestións.

12.- Na práctica da medida de *g* cun péndulo, como conseguirás (sen variar o valor de *g*) que o péndulo duplique o número de oscilacións por segundo. (*Xuño 04*).

Solución:

O período de oscilación, T, dun péndulo simple de lonxitude l, nun punto da Terra onde o valor da aceleración da gravidade é g, vén dado pola expresión: $T = 2\,\pi \sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

Se queremos que o péndulo duplique o número de oscilacións (duplique a frecuencia, ν), ou, o que é o mesmo, diminúa á metade o período, T, temos que modificar o valor da lonxitude:

$$T = \frac{1}{\nu} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\left.\begin{array}{l} T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{l'}{g}} \\ T' = \dfrac{T}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{T}{2} = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}}$$

$$\rightarrow \frac{T}{\frac{T}{2}} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}}} \rightarrow 2 = \sqrt{\frac{l}{l'}} \rightarrow l' = \frac{l}{4}$$

Para que **o péndulo duplique a** súa **frecuencia** hai que **diminuír a súa lonxitude á cuarta parte**.

13.- Unha vez realizada a experiencia do resorte para determinar a constante elástica, como pescudarías o valor dunha masa descoñecida (método estático e dinámico)? (*Set. 03*).

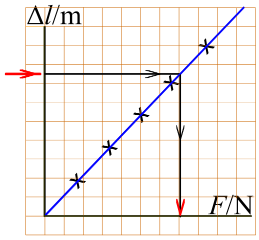
Solución:

Unha vez realizada a experiencia do resorte elástico para determinar a súa constante elástica k, consideramos coñecido o seu valor. Agora para chegar a coñecer o valor dunha masa m descoñecida podemos proceder de distinta maneira:

· Método estático: Mídese a deformación Δl que no resorte causa o peso G da masa descoñecida m. Con este fin mídese a lonxitude inicial do resorte, l_0, e a súa lonxitude, l, cando se colga nel a masa descoñecida. Agora podemos determinar k de dúas formas:

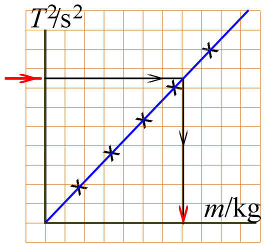
·· Método analítico: Aplícase a lei de Hooke: $\vec{F} = k\,\Delta\vec{l} \rightarrow m\,g = k\,(l - l_0) \rightarrow m = k\,(l - l_0)/g$.

·· Método gráfico: Na representación gráfica da deformación do resorte fronte á forza deformadora utilizada para o cálculo de k, entramos polo eixe de ordenadas polo valor correspondente á Δl que a masa descoñecida causa no resorte, a continuación imos horizontalmente ata a recta representada e logo baixamos verticalmente ata o eixe de abscisas, onde lemos o valor da forza deformadora G correspondente: $G = m\,g \rightarrow m = G/g$.



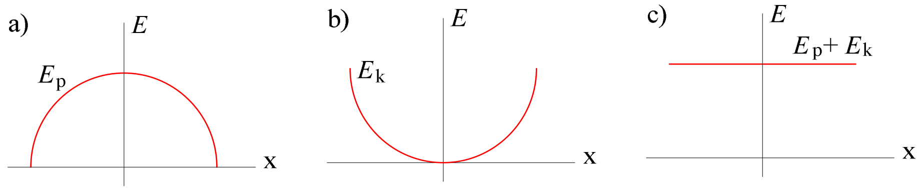
· Método dinámico: Cólgase do resorte a masa descoñecida e tirando dela cara abaixo déixase libre de modo que vibre verticalmente. Mídese o tempo t de n oscilacións e calcúlase o período correspondente, T: $T = t/n$. Agora podemos determinar k de dúas formas:

·· Método analítico: Faise uso da expresión: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow m = \frac{k\,T^2}{4\pi^2}$.



·· Método gráfico: Na representación gráfica do período ó cadrado fronte á masa vibrante utilizada para o cálculo de k, entramos polo eixe de ordenadas polo valor correspondente a T^2, a continuación imos horizontalmente ata a recta representada e logo baixamos verticalmente ata o eixe de abscisas, onde lemos o valor da masa vibrante correspondente.

14.- Nun péndulo simple, indica cal das seguintes gráficas se axusta correctamente á relación enerxía/elongación: (*Set. 03*).



Solución:

Un péndulo simple pode asimilarse a un oscilador harmónico e a expresión da enerxía mecánica, E_m, dun oscilador harmónico é: $E_m = \frac{1}{2} k\, A^2$, sendo k a constante elástica do oscilador e A a elongación máxima (amplitude). Vemos que E_m é constante para calquera valor da elongación, como corresponde a unha forza conservativa.

As expresións da enerxía potencial, E_p, e da enerxía cinética, E_k, en función da elongación x, respectivamente, son: $E_p = \frac{1}{2} k\, x^2$ e $E_k = \frac{1}{2} k \left(A^2 - x^2\right)$.

Analizando as gráficas diriamos:

Caso a): Non é correcto. Basta recordar que a enerxía potencial ten o valor máximo nos extremos da traxectoria, $x = \pm A$, e o valor mínimo (nulo) no centro da traxectoria, $x = 0$. E, segundo a gráfica, nestas posicións a enerxía potencial é, respectivamente, mínima e máxima.

Caso b): Non é correcto. Basta recordar que a enerxía cinética ten o valor máximo no centro de oscilación, $x = 0$, e o valor mínimo (nulo) nos extremos da traxectoria, $x = \pm A$. E, segundo a gráfica, nestas posicións a enerxía cinética é, respectivamente, mínima e máxima.

Caso c): É correcto. **A enerxía mecánica dun oscilador harmónico é constante**, independentemente do valor da elongación. Esta é a situación que aparece no gráfica do ítem c).

15.- Medíronse no laboratorio os seguintes valores de masas e períodos de oscilación dun resorte; obtén a partir deles o valor da constante elástica. (Xuño 03).

***T*/s:**	**3,52**	**3,91**	**4,12**	**4,24**	**4,35**
***m*/kg:**	**0,62**	**0,75**	**0,85**	**0,90**	**0,95**

Solución:

O cálculo da constante elástica do resorte, k, pode facerse:

a) Polo método analítico: Relaciónase a masa vibrante m co período T correspondente segundo a ecuación: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$. Cos datos da táboa calculamos a k_i correspondente ás distintas medidas realizadas e a k do resorte obtémola coa media aritmética.

$$k_1 = \frac{4\cdot\pi^2\cdot 0{,}62}{3{,}52^2} \rightarrow k_1 = 1{,}98\ \mathrm{N\ m^{-1}}$$

$$k_2 = \frac{4\cdot\pi^2\cdot 0{,}75}{3{,}91^2} \rightarrow k_2 = 1{,}94\ \mathrm{N\ m^{-1}}$$

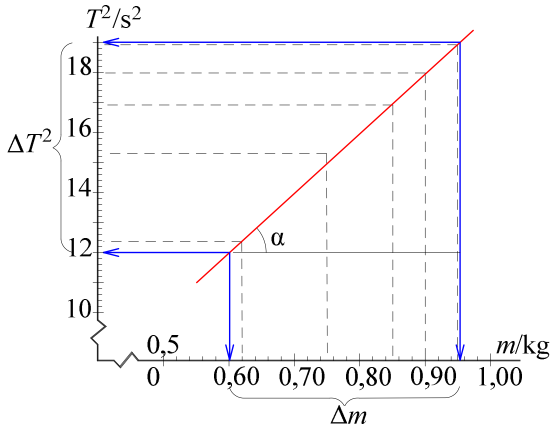
$$k_3 = \frac{4\cdot\pi^2\cdot 0{,}85}{4{,}12^2} \rightarrow k_3 = 1{,}98\ \mathrm{N\ m^{-1}}$$

$$k_4 = \frac{4\cdot\pi^2\cdot 0{,}90}{4{,}24^2} \rightarrow k_4 = 1{,}98\ \mathrm{N\ m^{-1}}$$

$$k_5 = \frac{4\cdot\pi^2\cdot 0{,}95}{4{,}35^2} \rightarrow k_5 = 1{,}98\ \mathrm{N\ m^{-1}}$$

$$k = k_{\text{media}} = \frac{1{,}98+1{,}94+1{,}98+1{,}98+1{,}98}{5} \rightarrow \boxed{k = k_{\text{media}} = 1{,}97\ \mathrm{N\ m^{-1}}}$$

b) Polo método gráfico:



· Represéntanse o cadrado do período de vibración fronte á masa vibrante.

· Trázase a recta que mellor se axuste ós datos representados.

· Tómanse dous puntos sobre a recta, que estean cara ós seus extremos, calculando a súa pendente.

· Relacionase o valor obtido da pendente coa k do resorte:

$$\left.\begin{array}{l} \text{pte.} = \tan\alpha = \dfrac{\Delta T^2}{\Delta m} \rightarrow \text{pte.} = \dfrac{(19{,}00-12{,}00)}{(0{,}95-0{,}60)} = 20{,}0 \\ T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \rightarrow \dfrac{T^2}{m} = \dfrac{4\pi^2}{k} \end{array}\right\} \rightarrow k = \frac{4\pi^2}{\text{pte.}} \rightarrow k = \frac{4\pi^2}{20{,}0} \rightarrow \boxed{k = 1{,}97\ \mathrm{N\ m^{-1}}}$$

16.- Na práctica do péndulo simple: depende o período do ángulo de oscilación? Canto varía o período se se aumenta a lonxitude un 20 %?. (*Xuño 03*).

Solución:

En canto á dependencia do período de oscilación do ángulo véxase o apartado b) da sexta destas cuestións.

O período de oscilación, T, dun péndulo simple de lonxitude l, nun punto da Terra onde o valor da aceleración da gravidade é g, vén dado pola expresión: $T = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. Nesta expresión vemos que se variamos a lonxitude do péndulo causamos unha variación no seu período de oscilación. Para o caso de que aumentemos a súa lonxitude nun 20 %, o novo período que resulta é:

$$\left.\begin{array}{l} T = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} \\ \\ \left.\begin{array}{l} T' = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{l'}{g}} \\ l' = l + \dfrac{20}{100}\,l = 1{,}2\,l \end{array}\right\} \rightarrow T' = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{1{,}2\,l}{g}} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{T}{T'} = \frac{2\,\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}}{2\,\pi\sqrt{1{,}2\,\dfrac{l}{g}}} \rightarrow T' = \sqrt{1{,}2}\;T$$

17.- Na práctica do péndulo simple medíronse os seguintes datos de lonxitudes e períodos:

***l*/m**	**0,50**	**0,55**	**0,60**	**0,65**	**0,70**
***T*/s**	**1,40**	**1,46**	**1,53**	**1,60**	**1,66**

Cal é o valor de *g* obtido con estes datos? (*Set. 02*).

Solución:

Realizada a parte experimental da práctica do péndulo simple e tabuladas as medidas obtidas na experiencia, o cálculo de g pode facerse de dúas formas:

a) Analiticamente: Substituíndo na fórmula do período: $T = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} \rightarrow g = 4\,\pi^2\,\dfrac{l}{T^2}$, obtéñense os valores de g_i para cada par de valores: lonxitude, l_i, do péndulo e período de oscilación correspondente, T_i; tomando como valor de g o da media aritmética.

$$g_1 = 4\,\pi^2\,\frac{0{,}50}{1{,}40^2} \rightarrow g_1 = 10{,}07 \text{ m s}^{-2}$$

$$g_2 = 4\,\pi^2\,\frac{0{,}55}{1{,}46^2} \rightarrow g_2 = 10{,}19 \text{ m s}^{-2}$$

$$g_3 = 4\,\pi^2\,\frac{0{,}60}{1{,}53^2} \rightarrow g_3 = 10{,}12 \text{ m s}^{-2}$$

$$g_4 = 4\,\pi^2\,\frac{0{,}65}{1{,}60^2} \rightarrow g_4 = 10{,}02 \text{ m s}^{-2}$$

$$g_5 = 4\,\pi^2\,\frac{0{,}70}{1{,}66^2} \rightarrow g_5 = 10{,}03 \text{ m s}^{-2}$$

$$g = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} g_i}{n} \rightarrow g = \frac{10,07 + 10,19 + 10,12 + 10,02 + 10,03}{5} \rightarrow \boxed{g = 10,09 \text{ m s}^{-2}}$$

b) Graficamente, mediante os pasos seguintes:

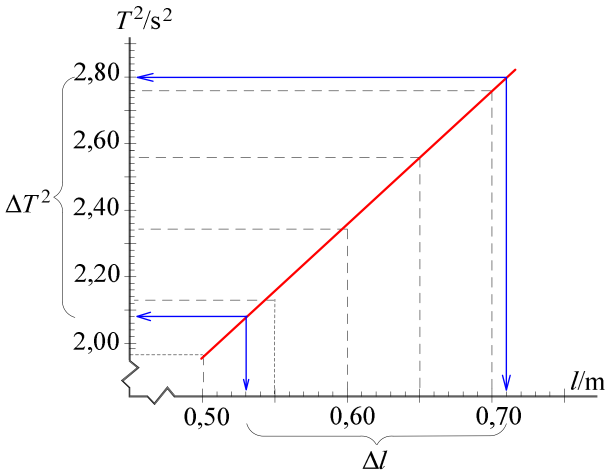
· Represéntase T^2 (magnitude dependente) fronte a l (magnitude independente).

· Trázase a recta que "mellor se axusta" os datos experimentais.

· Calcúlase a pendente desta recta: pendente = tax α = $\frac{\Delta T^2}{\Delta l}$, que se determina tomando dous puntos sobre a mesma, cara ós seus extremos, lendo os valores correspondentes de ΔT e Δl.

· Coa expresión $g = \frac{4\pi^2}{\text{pte.}}$ obtense o valar de g.

l/m	T/s	T^2/s^2
0,50	1,40	1,96
0,55	1,46	2,13
0,60	1,53	2,34
0,65	1,60	2,56
0,70	1,66	2,76



$$\text{pte.} = \frac{\Delta T^2}{\Delta l} \rightarrow \text{pte.} = \frac{2,80 - 2,08}{0,71 - 0,53} = 4,00 \text{ s}^2 \text{ m}^{-1}$$

$$g = \frac{4\pi^2}{\text{pte.}} \rightarrow g = \frac{4\pi^2}{4,00} \rightarrow g = 9,87 \text{ m s}^{-2}$$

18.- Na medida de k_e polo método dinámico: a) Como inflúe na medida de k_e a masa do propio resorte; b) poderías avaliar a masa "efectiva" do resorte? (*Xuño 02*).

Solución:

a) O período, T, de oscilación dun resorte elástico de constante recuperadora k_e vén dado pola expresión: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_e}}$, sendo m a masa vibrante. Esta masa m consta da masa do portapesas, $m_{\text{portapesas}}$, da masa das pesas engadidas, m_{pesas}, e da masa vibrante do resorte, $m_{\text{vibrante resorte}}$.

A masa da parte inferior do resorte inflúe no período da súa parte superior e as diferentes partes do mesmo, debido ó seu propio peso, oscilan con períodos lixeiramente diferentes e considérase que contribúe na masa total, m, que aparece na fórmula do período, coa terceira parte do seu valor: $m_{\text{vibrante do resorte}} \simeq \frac{1}{3} \cdot m_{\text{resorte}}$.

A constante elástica k_e é característica de cada resorte, sendo independente da súa masa, m_{resorte}: Un aumento da masa do resorte, m_{resorte}, fai aumentar o período de oscilación, T; pero a relación m/T^2 é constante: $k_e = 4\pi^2 \dfrac{m}{T^2} = \text{cte}$.

Se no valor de m non se ten en conta a masa vibrante do resorte, o período medido corresponde a unha masa maior ($m_{\text{portapesas}} + m_{\text{pesas}} + m_{\text{vibrante resorte}} = m_{\text{vibrante}}$) que a que se utiliza na fórmula ($m_{\text{portapesas}} + m_{\text{pesas}}$) e o valor que se obtén para a constante elástica do resorte, $k_{\text{e obtida}}$, $\left(k_{\text{e obtida}} = 4\pi^2 \dfrac{(m_{\text{portapesas}} + m_{\text{pesas}})}{T^2} \right)$ é menor que o valor que lle corresponde, $k_{\text{e resorte}}$, $\left(k_{\text{e resorte}} = 4\pi^2 \dfrac{(m_{\text{portapesas}} + m_{\text{pesas}} + m_{\text{vibrante resorte}})}{T^2} \right)$.

b) A masa "efectiva" do resorte pódese avaliar de dúas formas:

b_1)

· Determínase o valor da constante elástica do resorte, k_e, polo método estático: mídese a deformación, l_i, que unha masa coñecida, m_i, causa no resorte, calculando o valor de k_e: $k_e = \dfrac{m_i \cdot g}{\Delta l_i}$.

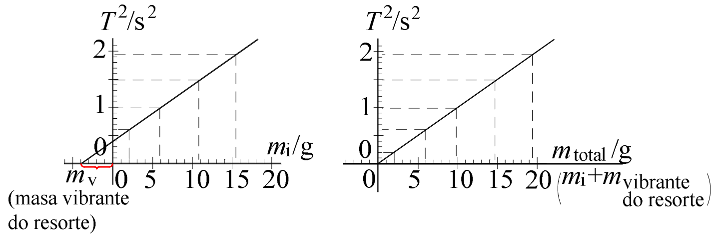
· Cólgase do resorte un portapesas de masa coñecida, $m_{\text{portapesas}}$, engádeselle unha pesa de masa coñecida, m_{pesas}, e mídese o período de oscilación correspondente, T.

· Substitúese na expresión do período de oscilación do resorte, $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{m_{\text{portapesas}} + m_{\text{pesas}} + m_{\text{vibrante resorte}}}{k_e}}$, o valor de k_e (obtido polo método estático), o de T, o de $m_{\text{portapesas}}$ e o de m_{pesas} e calcúlase a $m_{\text{vibrante do resorte}}$.

b_2)

· Colgadas do resorte distintas masas coñecidas, m_i, desprazámolas verticalmente da súa posición de equilibrio e medimos, para cada unha delas, o período de oscilación correspondente T_i.

· Facemos a representación gráfica de T^2 (magnitude dependente) fronte á masa, $m_{\text{portapesas}} + m_{\text{pesas}}$, (magnitude independente) e trazamos a recta que mellor se axusta os datos representados.



· Lemos o valor da abscisa que corresponde ó punto de corte coa recta da gráfica. Este valor é o que corresponde á masa vibrante do resorte. (Na representación de T^2 fronte a $m_{\text{total vibrante}}$ obtense unha liña recta paralela á anterior e que pasa pola orixe). A ordenada na orixe corresponde a un período inicial, T_0, debido á masa vibrante do resorte, $m_{\text{vibrante do resorte}}$.

19.- Na determinación de *g* cun péndulo simple, describe brevemente o procedemento e o material empregado. (*Set. 01*).

Solución:

Ver a resposta da sexta destas cuestións.

20.- Na determinación de k_e polo método dinámico, valora a influencia que teñen as seguintes magnitudes: a) a masa total do resorte; b) a amplitude das oscilacións; c) o número de medidas feitas; d) a lonxitude do resorte. (*Xuño 01*).

Solución:

a) Ver a resposta do apartado a) da número dezaoito destas cuestións.

b) Polo método dinámico, o valor da constante elástica, k_e, dun resorte obtense coa expresión: $k_e = \dfrac{4\,\pi^2\, m}{T^2}$ sendo m a masa vibrante e T o período de oscilación. Nela vemos que **k_e non depende da amplitude das oscilacións** (e unha característica do propio resorte).

c) Toda media experimental vai acompañada dun erro, que pode ser sistemático ou accidental, ou deberse a unha equivocación. Tanto as equivocacións como os erros sistemáticos poden eliminarse. Sen embargo, os erros accidentais débense ó propio método utilizado e ós nosos sentidos, e non se poden eliminar, pero si minimizar ó aplicarlles as leis da estatística a un gran número de medidas, xa que a probabilidade de cometer un erro por exceso é a mesma que a de cometelo por defecto e os distintos valores que se obteñen oscilarán en torno a un valor medio. Polo demais, **non inflúe no valor de k_e**.

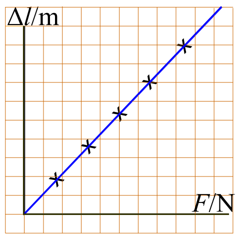
d) Ver a resposta do apartado a) da cuarta destas cuestións.

21.- No estudo estático dun resorte elástico, que magnitudes se miden e que gráficas se usan para avaliar a constante elástica. Inflúe a masa do resorte? Poderías usar o resorte para pesar un obxecto? (*Set. 00*).

Solución:

O estudo estático dun resorte elástico basease en que a deformación causada, Δl, é directamente proporcional á forza, $\vec{F}$, aplicada: $\vec{F} = k\,\Delta\vec{l}$. Polo tanto, **as magnitudes a medir son: A forza aplicada ó resorte e a deformación causada nel**. Con este fin, cólganse distintas masas coñecidas e mídense as deformacións que causan, tabulando estes valores. Para o cálculo do valor de k polo método gráfico **faise a representación das deformacións causadas** (magnitude dependente) **fronte ás forzas deformadoras** (magnitude independente) e obtense o valor de k facendo a inversa da 0pendente da recta trazada.

$$\left.\begin{array}{l} \text{pte} = \dfrac{\Delta l}{F} \\ F = k\,\Delta l \;\rightarrow\; k = \dfrac{F}{\Delta l} \end{array}\right\} \rightarrow\; k = \dfrac{1}{\text{pte.}}$$



Como se pode ver na lei de Hooke, **a masa do resorte non inflúe no valor da súa constante elástica**.

Coñecida a constante elástica, k, do resorte **pódese pesar un corpo de masa descoñecida**. Con este fin mídese a deformación, $\Delta l'$, que no resorte causa o peso da masa descoñecida, G, e, coa k obtida anteriormente e a expresión $\vec{F}_{\text{aplicada}} = k\,\Delta\vec{l}$, calcúlase o peso descoñecido: $G_{\text{descoñecido}} = k\,\Delta l'$.

22.- Na determinación da constante elástica dun resorte polo método dinámico, o período de oscilación é independente da amplitude?, depende da lonxitude e da masa do resorte?, que gráfica se constrúe a partir das magnitudes medidas? (*Xuño 00*).

Solución:

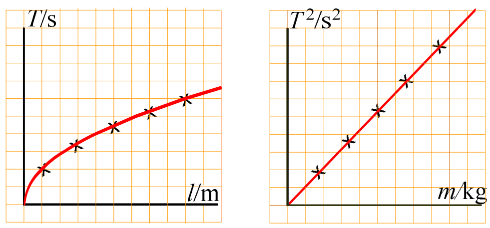
O período, T, de oscilación dun resorte elástico de constante recuperadora k vén dado pola expresión: $T = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, sendo m a masa vibrante, que se obtén sumando a masa vibrante do resorte, a masa do portapesas e a masa das pesas engadidas.

Como k é unha característica de cada resorte, independentemente da masa m vibrante, **o período de oscilación é independente da amplitude das oscilacións**. Sen embargo **si depende da masa do resorte**; a masa da parte inferior do resorte inflúe no período da súa parte superior e as diferentes partes do resorte, debido ó seu propio peso, oscilan con períodos lixeiramente diferentes. Pode considerarse que a súa masa contribúe no valor de m que aparece na fórmula do período coa terceira parte da súa masa: $m_{\text{vibrante do resorte}} = ⅓ \cdot m_{\text{resorte}}$. Canto maior sexa a masa suspendida que oscila menos influencia ten a masa do propio resorte.

O período de oscilación **tampouco depende da lonxitude do resorte**. Para unha constante elástica k, o período soamente depende da masa vibrante: $T = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \rightarrow T = \text{cte}\cdot\sqrt{m} \rightarrow T \propto \sqrt{m}$.

As magnitudes medidas nesta experiencia son as masas vibrantes e os períodos de oscilación correspondentes. Ó representalas graficamente obtense unha rama de parábola da forma que se indica na figura. **Para obter unha representación gráfica en recta representamos o período ó cadrado fronte á masa** e coa pendente desta recta determinamos o valor de k:

$$\left.\begin{array}{l} \text{pte.} = \dfrac{\Delta T^2}{\Delta m} \\[2ex] \dfrac{T^2}{m} = \dfrac{4\,\pi^2}{k} \end{array}\right\} \rightarrow \text{pte.} = \dfrac{4\,\pi^2}{k} \rightarrow k = \dfrac{4\,\pi^2}{\text{pte.}}$$



23.- Un resorte de masa desprezable e de lonxitude 20 cm, alóngase 4 cm cando se lle colga un peso de 1 kg. Se se estira 4 cm máis e se solta, cal será a frecuencia de oscilación? (*Set. 99*).

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} F = k\,\Delta l \;\rightarrow\; k = \dfrac{F}{\Delta l} \;\rightarrow\; k = \dfrac{1\cdot 9{,}8}{4\cdot 10^{-2}} = 245\ \mathrm{N\,m^{-1}} \\ \left.\begin{array}{l} T = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \\ T = \dfrac{1}{\nu} \end{array}\right\} \rightarrow \nu = \dfrac{1}{2\,\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{array}\right\} \rightarrow \nu = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{245}{1}} \;\rightarrow\; \nu = 2{,}5\ \mathrm{Hz}$$

24.- Na práctica do péndulo simple, explica como afectaría á medida do período o seguinte: a) duplicar a masa; b) reducir a lonxitude á metade; c) facer oscilacións con ángulos maiores de 45º; d) realizar unha soa medida. (*Xuño 99*).

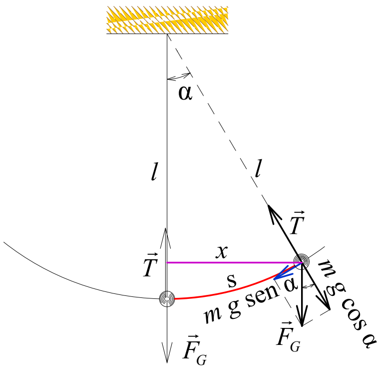
Solución:

O período, T, de oscilación dun péndulo simple de lonxitude l, que oscila con pequenas amplitudes, vén dado pola expresión: $T = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, sendo g a aceleración da gravidade.

Da anterior igualdade facilmente se ve que:

· **Ó duplicar a masa** do péndulo, **o período** de oscilación **non varía**.

· **Ó reducir a lonxitude do péndulo á metade, o seu período de oscilación diminúe**, pero non de forma lineal: $T \propto l^{1/2}$. A representación gráfica de T fronte a l é unha rama de parábola.



O novo valor do período, $T_{l/2}$, en relación ó período inicial, T_l, é:

$$\left.\begin{array}{l} T_l = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} \\ T_{l/2} = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{l/2}{g}} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{T_l}{T_{l/2}} = \sqrt{2} \;\rightarrow\; T_{l/2} = \frac{T_l}{\sqrt{2}}$$

· Ó facer oscilacións con ángulos maiores de 45º, a anterior expresión do período de oscilación non se cumpre. **Para desprazamentos angulares grandes**, aínda que o movemento do péndulo é periódico, **o período é función da amplitude**. A forza que acelera a masa m cara ó equilibrio é: $m \cdot g \cdot \operatorname{sen}\alpha$, sendo un valor menor que $m \cdot g \cdot \alpha$ (que causa un m.h.s., que é periódico e independente da amplitude), **resultando un período lixeiramente maior**, que podemos calcular con axuda da expresión:

$$T = T_0\left[1 + \frac{1}{2^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\alpha_0\right) + \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\operatorname{sen}^4\left(\frac{1}{2}\alpha_0\right) + \ldots\right]$$

onde α_0 é o desprazamento angular máximo e $T_0 = 2\,\pi\sqrt{l/g}$ é o período correspondente ó límite dos ángulos pequenos.

· O realizar unha soa medida non permite minimizar os erros accidentais, aplicando as leis da estatística a un gran número de medidas. Polo demais non inflúe no valor do período.

25.- No desenvolvemento da práctica do resorte elástico, obtivéronse valores parecidos da constante elástica polos métodos estático e dinámico? Cal pode ser a causa? *(Set. 98*).

Solución:

A constante elástica, k, dun resorte depende das características do propio resorte e o seu valor non depende do método utilizado na súa determinación. Polo tanto, o valor de k, xa sexa obtido polo método estático ou polo método dinámico, hai de ser o mesmo, dentro dos erros experimentais, e tomarase como valor da constante o da media aritmética das k obtidas polos dous métodos. A razón de que se obteñan valores parecidos está en que se trata do mesmo resorte e o feito de que estes valores non sexan exactamente iguais débese ós errores experimentais.

Se a $k_{\text{media estática}}$ é maior que a $k_{\text{media dinámica}}$, unha posible causa da diferenza entre estes valores pode estar en non considerar no método dinámico a masa vibrante do resorte. Esta constante obtense coa expresión: $k_{\text{dinámica}} = 4\,\pi^2 \dfrac{m_{\text{vibrante}}}{T^2} = \text{cte.}$

Se no valor de m_{vibrante} non se ten en conta a masa vibrante do resorte, o valor que se calcula para a constante elástica, $k_{\text{dinámica obtida}}$, $\left(k_{\text{dinámica obtida}} = 4\,\pi^2 \dfrac{\left(m_{\text{portapesas}} + m_{\text{pesas}}\right)}{T^2}\right)$ é menor que o valor que lle corresponde, $k_{\text{dinámica resorte}}$, $\left(k_{\text{dinámica resorte}} = 4\,\pi^2 \dfrac{\left(m_{\text{portapesas}} + m_{\text{pesas}} + m_{\text{vibrante resorte}}\right)}{T^2}\right)$, sendo este último valor o que se corresponde co obtido polo método estático. Esta suposición confírmaa o feito de que as $k_{\text{i dinámica obtidas}}$ sexan sempre menores que a $k_{\text{media estática}}$, sendo esta diferenza menor conforme aumenta a masa total vibrante.

Ademais, de non ter en conta a masa vibrante do resorte, veremos que para os valores máis pequenos da masa das pesas, as $k_{\text{i dinámica obtidas}}$ son menores que a $k_{\text{media dinámica}}$, mentres que para as masas maiores das pesas resulta que as $k_{\text{i dinámica obtidas}}$ son maiores á $k_{\text{media dinámica}}$.

26.- Ó desenvolver a práctica do péndulo para o cálculo de "*g*", desempeña algunha función importante a lonxitude do fío? (*Xuño 98*).

Solución:

O período de oscilación, T, do péndulo simple de lonxitude l vén dado pola expresión: $T = 2\,\pi \sqrt{\dfrac{l}{g}}$, sendo g a aceleración da gravidade.

Ó variar a lonxitude do péndulo varía o seu período de oscilación, sendo a relación $\dfrac{T^2}{l}$ constante ($T^2 \propto l$): $\dfrac{T^2}{l} = \text{cte.} = \dfrac{4\,\pi^2}{g} \;\rightarrow\; g = \dfrac{4\,\pi^2}{T^2/l} = \text{cte'}$. Polo tanto, **o valor da lonxitude non desenvolve ningunha función importante na determinación de *g***, que ten un único valor para cada punto da superficie da Terra. Sen embargo pode influír lixeiramente porque se o valor de l é moi pequeno, o error cometido nas medidas experimentais ten unha contribución porcentual máis alta.

27.- Na práctica do péndulo, que lonxitude de fío e amplitudes angulares iniciais consideras razoables? Por que? (*Set. 97*).

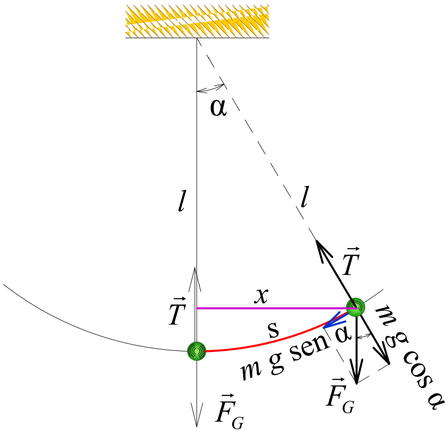
Solución:

O período de oscilación, T, do péndulo simple de lonxitude l vén dado pola expresión: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, sendo g a aceleración da gravidade.

Se a lonxitude l do péndulo é moi pequena, o período é pequeno e as oscilacións prodúcense moi rapidamente dificultando a súa medida de forma precisa. Ademais, o error cometido na lonxitude l ten unha influencia porcentual máis alta. Polo tanto, **a lonxitude razoable debe ser a máis grande posible tendo en conta as posibilidades do laboratorio xunto a un desenvolvemento cómodo da práctica** (2-3 metros).

A traxectoria do péndulo é a dun arco de circunferencia, que podemos confundir coa corda correspondente para pequenas amplitudes angulares (α pequeno). Esta coincidencia é necesaria para poder considerar o movemento pendular como un movemento harmónico simple (este movemento é periódico, rectilíneo e a forza que o causa é do tipo: $\vec{F} = -k \cdot \vec{x}$).

Que forza causa o movemento pendular?



A forza que actúa sobre a bóla é a do seu peso e a da tensión do fío. Descompoñemos o peso en dúas direccións:

· Unha, na dirección do fío: $m \cdot g \cdot \cos\alpha$.

· Outra, na dirección perpendicular á anterior: $m \cdot g \cdot \operatorname{sen}\alpha$. Esta compoñente é a resultante das forzas que actúan sobre a bóla, orixinando o movemento oscilante do péndulo. Como é esta forza?

$F = m \cdot g \cdot \operatorname{sen}\alpha \quad \rightarrow \quad \vec{F} = -m \cdot g \cdot \vec{x} / l$ (O signo menos indica que o sentido de $\vec{F}$ é contrario ó de $\vec{x}$).

Pero a traxectoria do corpo non é a de x (corda), senón a de s (arco). Pero para pequenos ángulos (α < 15º) a corda confúndese co arco e a traxectoria do corpo pode considerarse rectilínea e o movemento harmónico simple: $\vec{F} = -k \cdot \vec{x}$ onde $k = m \cdot g / l$.

E como $x = s$ cando sen α = α, (sen α = x/l e α = s/l), **hai que utilizar pequenas amplitudes angulares**: inferiores a 15º.

28.- Na práctica do resorte elástico, consideras que o resorte utilizado tiña unha constante elástica grande ou pequena e por que? (*Xuño 97*).

Solución:

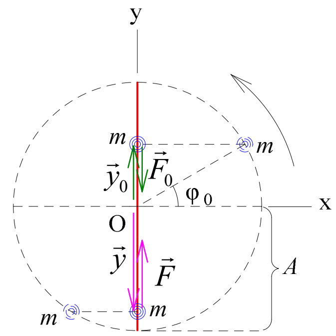
A constante recuperadora dun resorte elástico, k, relaciónase coa forza que se lle aplica, $\vec{F}$, e a deformación que esta forza lle causa, $\Delta\vec{l}$, segundo a expresión: $\vec{F} = -k \cdot \Delta\vec{l}$. Polo tanto, o valor grande ou pequeno de k vén dado polo valor da relación $F/\Delta l$. Como na práctica desenvolta no laboratorio era suficiente a forza do peso dunha pequena masa para causarlle unha deformación considerable, **o resorte utilizado tiña unha constante elástica pequena**.

29.- Nun movemento harmónico simple, o sentido da forza recuperadora apunta sempre cara ó punto de equilibrio. O seu valor, a) é constante, b) é sinusoidal como a elongación, c) é proporcional á elongación. (*Xuño 97*).

Solución:

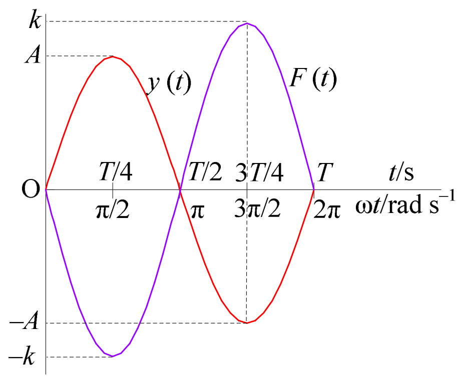
Unha partícula que se move segundo a ecuación $y = A \cdot \text{sen}\left(\omega t + \varphi_0\right)$ posúe unha velocidade, v, que obtemos coa derivada de y: $v = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \rightarrow v = A \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$ e unha aceleración, $\vec{a}$, que obtemos coa derivada da velocidade:

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \\ \vec{a} &= \vec{a}_\mathrm{n} + \vec{a}_\mathrm{t} \\ \vec{a}_\mathrm{n} &= \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_\mathrm{n} \\ \vec{a}_\mathrm{t} &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{u}_\mathrm{t} \end{aligned}\right\} \rightarrow \vec{a} = \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_\mathrm{n} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{u}_\mathrm{t}$$



$\vec{a} = \dfrac{v^2}{\infty}\vec{u}_\mathrm{n} - A \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}\left(\omega t + \varphi_0\right)\vec{u}_\mathrm{t} \rightarrow \vec{a} = \vec{a}_\mathrm{t} = -\omega^2\, y\, \vec{u}_\mathrm{t}$. Polo tanto, **a aceleración** deste movemento (que é tanxente á traxectoria) **non é constante**, sendo diferente para as distintas posicións y da partícula.

A elongación $\vec{y}$ dunha partícula m que se move con m.h.s. é unha función sinusoidal: $\vec{y} = A \cdot \text{sen}\left(\omega t + \varphi_0\right)\vec{j}$. Tamén a forza $\vec{F}$ que causa este movemento é sinusoidal: $\vec{F} = -k \cdot \vec{y} = -k \cdot \text{sen}\left(\omega t + \varphi_0\right)\vec{j}$, pero esta función nunca é igual á da elongación: A e k son constantes distintas e, para o caso de que teñan igual valor, a función sinusoidal da forza é oposta á da elongación.



Relacionamos agora a forza, $\vec{F}$, coa a aceleración, $\vec{a}$:

$$\left.\begin{aligned} \vec{F} &= m\,\vec{a} \\ \vec{a} &= -\omega^2\,\vec{y} \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} \vec{F} &= -m\,\omega^2\,\vec{y} \\ m\,\omega^2 &= k \end{aligned}\right\} \rightarrow \vec{F} = -k\,\vec{y}$$

Polo tanto, **a forza que causa o m.h.s. é proporcional á elongación**.

30.- A enerxía mecánica total dun oscilador harmónico, a) duplícase cando se duplica a amplitude da oscilación, b) duplícase cando se duplica a frecuencia da oscilación, c) cuadriplícase cando se duplica a amplitude da oscilación. (*Set. 96*).

Solución:

A enerxía mecánica, $E_{\text{mecánica}}$, do oscilador harmónico vén dada pola expresión:

$$E_{\text{mecánica}} = \frac{1}{2} k\, A^2 = \frac{1}{2} m\, \omega^2\, A^2 = \frac{1}{2} m\, 4\, \pi^2\, \nu^2\, A^2$$

a) Cando se duplica a amplitude da oscilación do oscilador harmónico, a súa enerxía mecánica cuadriplícase:

Para unha amplitude A: $E_{\text{mecánica}} \propto A^2$.

Para unha amplitude $2 \cdot A$: $E_{\text{mecánica}} \propto (2 \cdot A)^2 = 4\, A^2$.

b) Cando se duplica a frecuencia das oscilacións, a súa enerxía mecánica cuadriplícase:

Para unha frecuencia ν: $E_{\text{mecánica}} \propto \nu^2$

Para unha frecuencia $2 \cdot \nu$: $E_{\text{mecánica}} \propto (2 \cdot \nu)^2 = 4 \cdot \nu^2$

c) **Cando se duplica a amplitude da oscilación, a súa enerxía mecánica cuadriplícase**:

Para unha amplitude A: $E_{\text{mecánica}} \propto A^2$.

Para unha amplitude $2 \cdot A$: $E_{\text{mecánica}} \propto (2 \cdot A)^2 = 4\, A^2$.

Polo tanto, a opción correcta é a c).

31.- Fai unha descrición do material e do desenvolvemento experimental na determinación da constante elástica dun resorte polo método dinámico. (*Xuño 96*).

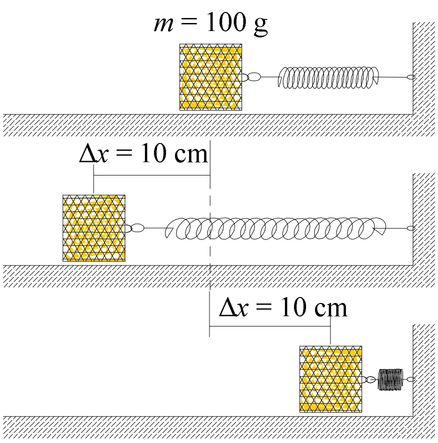
Solución:

Ver a resposta da cuestión número sete dos exercicios propostos.

EXERCICIOS DE SELECTIVIDADE (Problemas)

1.- Un corpo de masa 100 g está unido a un resorte que oscila nun plano horizontal. Cando se estira 10 cm e se solta, oscila cun período de 2 s. Calcula: a) a velocidade cando se atopa a 5 cm da súa posición de equilibrio; b) a aceleración nese momento; c) a enerxía mecánica. *(Set. 08)*.

Solución:



a) A velocidade v dunha masa m, que se move segundo un m.h.s., en función da posición x vén dada pola expresión:

$$\left.\begin{array}{l} v=\omega\cdot\sqrt{A^2-x^2} \\ \omega=\dfrac{2\cdot\pi}{T}\end{array}\right\} \rightarrow v=\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot\sqrt{A^2-x^2}$$

Substituíndo valores resulta:

$$v=\frac{2\cdot\pi}{2}\cdot\sqrt{0{,}10^2-0{,}05^2} \rightarrow \boxed{v=0{,}27\ \mathrm{m\,s^{-1}}}$$

b) A aceleración a dunha masa m, que se move segundo un m.h.s., en función da posición x vén dada pola expresión: $\vec{a}=-\,\omega^2\,\vec{x}$. Tomando para x valores positivos cara á dereita do centro de oscilación e negativos cara á esquerda, resulta:

Se a masa m se encontra na parte positiva do eixe x:

$$\vec{a}=-\left(\frac{2\,\pi}{2}\right)^2\cdot 0{,}05\,\vec{i} \rightarrow \boxed{\vec{a}=0{,}49\,\vec{i}\ \left(\mathrm{m\,s^{-2}}\right)}$$

Se a masa m se encontra na parte negativa do eixe x:

$$\vec{a}=-\left(\frac{2\,\pi}{2}\right)^2\cdot(-0{,}05)\,\vec{i} \rightarrow \boxed{\vec{a}=0{,}49\,\vec{i}\ \left(\mathrm{m\,s^{-2}}\right)}$$

c)

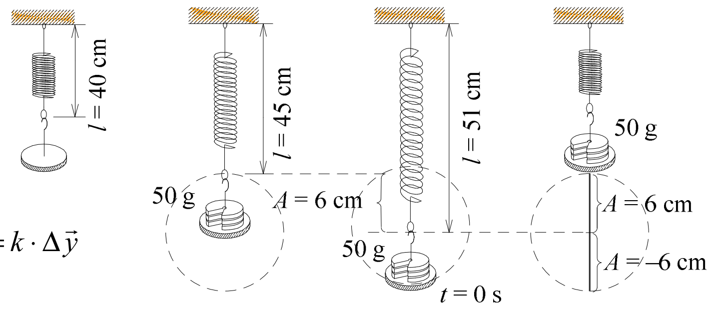
$$\left.\begin{array}{l} E_{\text{total}}=E_{\text{p máxima}}=E_{\text{k máxima}}=E_{\text{mecánica}} \\ E_{\text{p}}=\dfrac{1}{2}k\,y^2 \rightarrow E_{\text{p máxima}}=\dfrac{1}{2}k\,A^2 \\ E_{\text{k}}=\dfrac{1}{2}k\left(A^2-y^2\right) \rightarrow E_{\text{k máxima}}=\dfrac{1}{2}k\,A^2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} E_{\text{m}}=\dfrac{1}{2}k\,A^2 \\ k=m\,\omega^2=m\left(\dfrac{2\,\pi}{T}\right)^2 \end{array}\right\} \rightarrow E_{\text{m}}=\frac{1}{2}m\left(\frac{2\,\pi}{T}\right)^2 A^2$$

$$E_{\text{m}}=\frac{1}{2}\cdot 100\cdot 10^{-3}\cdot\left(\frac{2\,\pi}{2}\right)^2\left(10\cdot 10^{-2}\right)^2 \rightarrow \boxed{E_{\text{m}}=4{,}93\cdot 10^{-3}\ \mathrm{J}}$$

2.- Dun resorte de 40 cm de lonxitude cólgase un peso de 50 g de masa e, alcanzado o equilibrio, a lonxitude do resorte é de 45 cm. Estírase coa man o conxunto masa-resorte 6 cm e sóltase. Acha: a) a constante do resorte; b) a ecuación do M.H.S. que describe o movemento; c) deduce a ecuación da enerxía potencial elástica. Dato: g = 9,8 m s^{-2}. *(Set. 07).*

Solución:

a) A constante elástica do resorte obtémola coa lei de Hooke, que relaciona a deformación causada nun resorte elástico coa forza que a causa:



$$\left.\begin{array}{l}\vec{F}_{\text{elástica}} = -k\cdot\Delta\vec{y}\\ \vec{F}_{\text{aplicada}} = -\vec{F}_{\text{elástica}}\end{array}\right\} \rightarrow \vec{F}_{\text{aplicada}} = k\cdot\Delta\vec{y}$$

$$F = k\cdot\Delta y \rightarrow 50\cdot10^{-3}\cdot9{,}8 = k\cdot(45-40)\cdot10^{-2} \rightarrow \boxed{k = 9{,}8\ \text{N m}^{-1}}$$

b) A ecuación do movemento é aquela que relaciona coordenada e tempo, que para o m.h.s. é:

$$y = A\,\text{sen}\,(\omega t+\varphi_0) \rightarrow y = 6\cdot10^{-2}\cdot\text{sen}\left(\frac{2\,\pi}{T}+\varphi_0\right)\text{m}.$$

Para coñecer a pulsación, ω, recordamos que a forza recuperadora (resultante entre a forza recuperadora elástica e a forza do peso), que causa o m.h.s. da masa vibrante, é do tipo: $\vec{F}_{\text{recuperadora}} = -k\,\Delta\vec{y}$, onde $k = m\cdot\omega^2$.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{9{,}8}{50\cdot10^{-3}}} \rightarrow \omega = 14\ \text{rad s}^{-1}$$

Tomamos como orixe do sistema de referencia a posición de equilibrio, que é a da masa m cando colga do resorte sen oscilar. O eixe Y facémolo coincidir coa dirección vertical, que é a dirección do movemento da masa m, e tomamos valores positivos cara arriba. Con este criterio, no instante inicial, t = 0 s, $y = -A$ e a fase inicial, φ_0, calculámola a partir das condicións iniciais:

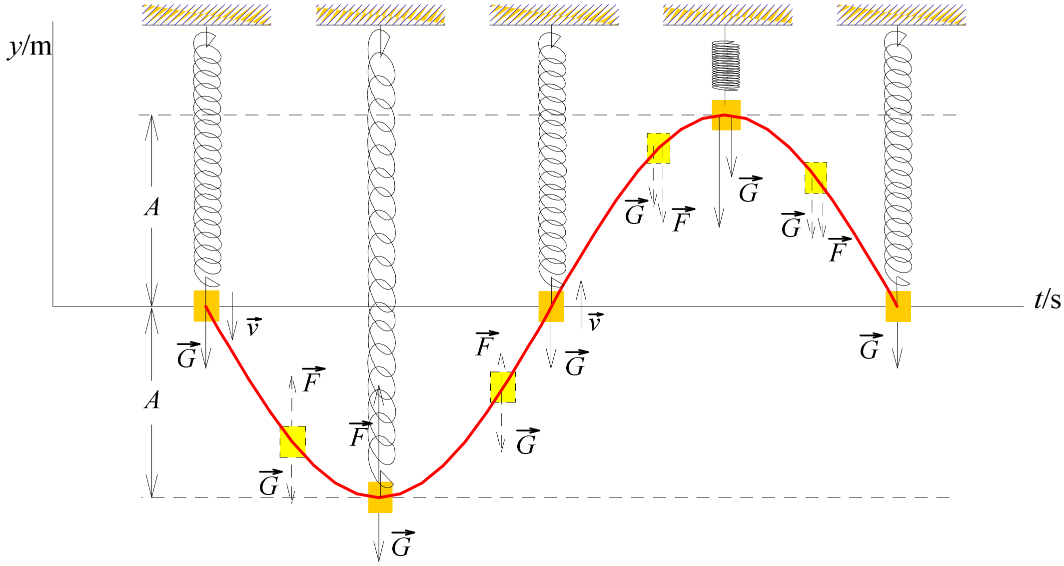
$$-A = A\,\text{sen}\,(\omega\cdot0+\varphi_0) \rightarrow -1 = \text{sen}\,\varphi_0 \rightarrow \varphi_0 = \frac{3\,\pi}{2}\ \text{rad}$$

Con todo esto, a ecuación do movemento que describe o sistema é:

$$y = 6\cdot10^{-2}\cdot\text{sen}\left(14\cdot t+\frac{3\,\pi}{2}\right) \rightarrow \boxed{y = 6\cdot10^{-2}\cdot\text{sen}\,(14\,t+1{,}5\,\pi)\ \text{m}}$$

c) Empezamos analizando como é a forza que causa o m.h.s.

Consideremos un resorte de aceiro suxeito por un extremo e colgamos do outro extremo unha masa m. O resorte alóngase ata que se alcanza a posición de equilibrio. Unha vez establecido este, tiramos verticalmente cara abaixo da masa m, aparecendo unha forza recuperadora, sendo a forza neta $\vec{F}$ que actúa sobre a masa do tipo: $\vec{F} = -k\cdot\vec{y}$. Como é esta forza?



Ó tirar do resorte realizamos un traballo que se "almacena" no propio resorte, sendo totalmente recuperable. Trátase, polo tanto, dunha forza conservativa podendo escribir: $\Delta E_p = -W$. Tamén podemos razoar o carácter conservativo da forza que causa o m.h.s. ó ver que sempre está dirixida cara a un punto fixo (o punto de equilibrio) e só é función da distancia, sendo unha forza central que, como toda forza central, é conservativa.

$$\Delta E_p = -\int_0^y \vec{F}\cdot d\vec{y} = -\int_0^y -k\cdot\vec{y}\cdot d\vec{y} = k\int_0^y y\cdot dy\cdot\cos 0^{\circ} = \frac{1}{2}k\cdot\left[y^2\right]_0^y = \frac{1}{2}k\cdot y^2$$

3.- Unha masa de 0,01 kg realiza un movemento harmónico simple de ecuación $y = 5\cos(2\cdot t + \pi/6)$, magnitudes no SI. Calcula: a) a posición, velocidade e aceleración en $t = 1$ s; b) enerxía potencial en $y = 2$ m; c) a enerxía potencial é negativa en algún instante? *(Xuño 07).*

Solución:

a) A posición para t = 1 s obtense substituíndo o valor do tempo na ecuación de movemento:

$$y(t) = 5\cos(2\cdot t + \pi/6) \rightarrow y_{t=1\,s} = 5\cdot\cos(2\cdot 1 + \pi/6) \rightarrow \boxed{y_{t=1\,s} = -4{,}1\ \mathrm{m}}$$

A velocidade obtense derivando a ecuación do movemento.

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[5\cos(2t + \pi/6)\right] = -5\cdot 2\cdot \mathrm{sen}(2t + \pi/6)$$

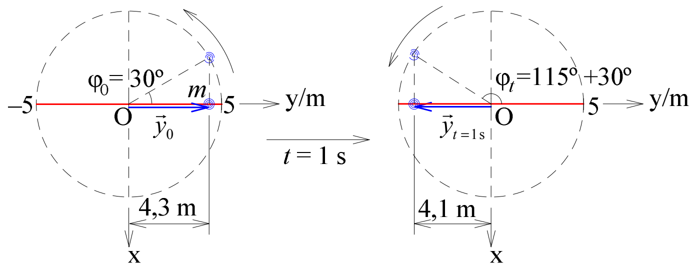
$$v_{t=1\,s} = 5\cdot 2\cdot \mathrm{sen}(2\cdot 1 + \pi/6) \rightarrow \boxed{v_{t=1\,s} = -5{,}8\ \mathrm{m\,s^{-1}}}$$

Derivando a velocidade con respecto ó tempo temos a aceleración:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-10\,\mathrm{sen}(2t + \pi/6)\right] = -10\cdot 2\cdot\cos(2t + \pi/6)$$

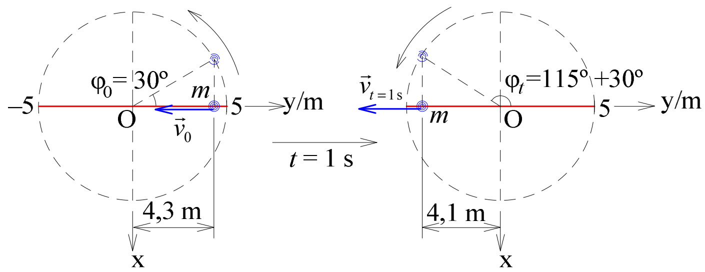
$$a_{t=1\,\mathrm{s}} = -10 \cdot 2 \cdot \cos\left(2 \cdot 1 + \pi / 6\right) \rightarrow \boxed{a_{t=1\,\mathrm{s}} = 16{,}3\ \mathrm{m\,s^{-2}}}$$

A continuación represéntanse os valores das magnitudes estudadas, no instante inicial, $t = t_0 = 0$ s, e para o instante en que transcorre 1 s, $t = 1$ s.



$$y_{t=0\,\mathrm{s}} = 5\cos\left(2 \cdot 0 + \pi/6\right) \rightarrow y_0 = 4{,}3\ \mathrm{m}$$

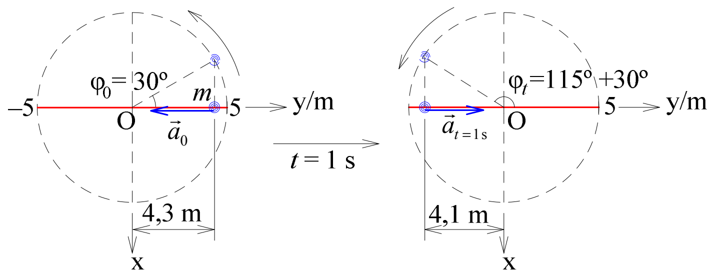
$$\varphi_0 = \frac{\pi}{6}\ \mathrm{rad} = 30^{\mathrm{o}}$$



$$\varphi_{t=1\,\mathrm{s}} = 2 \cdot 1 + \frac{\pi}{6} = \frac{13\,\pi}{6}\ \mathrm{rad} = \left(115^{\mathrm{o}}\ +\ 30^{\mathrm{o}}\right)$$

$$v_{t=0\,\mathrm{s}} = -10\ \mathrm{sen}\left(2 \cdot 0 + \pi/6\right)$$

$$v_0 = -5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$



$$a_0 = -\,20\cos\left(2 \cdot 0 + \pi/6\right)$$

$$a_0 = -17{,}3\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

b) A enerxía potencial elástica calcúlase coa expresión: $E_{\mathrm{p}} = \dfrac{1}{2} k\, y^2$.

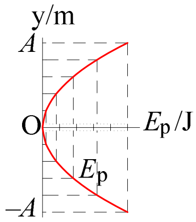
$$\left.\begin{array}{l} E_{\mathrm{p}} = \dfrac{1}{2} k\, y^2 \rightarrow E_{\mathrm{p}\,(y=2\,\mathrm{m})} = \dfrac{1}{2} k\, 2^2 \\ \left.\begin{array}{l} k = m\,\omega^2 \\ m = 0{,}01\ \mathrm{kg} \\ \omega = 2\ \mathrm{rad/s} \end{array}\right\} \rightarrow k = 0{,}01 \cdot 2^2 = 0{,}04\ \mathrm{N/m} \end{array}\right\} \rightarrow E_{\mathrm{p}\,(y=2\,\mathrm{m})} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}04 \cdot 2^2 \rightarrow \boxed{E_{\mathrm{p}\,(y=2\,\mathrm{m})} = 0{,}08\ \mathrm{J}}$$

A enerxía potencial elástica da masa m, que oscila segundo un m.h.s., cando ocupa a posición $y = 2$ m, tamén se pode calcular restándolle á enerxía mecánica a correspondente enerxía cinética. Operando desta forma obtense igual resultado.

$$\left.\begin{array}{l} E_{\mathrm{p}\,(y=2\,\mathrm{m})} = E_{\text{mecánica}} - E_{\mathrm{k}\,(y=2\,\mathrm{m})} \\ E_{\text{mecánia}} = E_{\text{p máxima}} = \dfrac{1}{2} k\, A^2 \;\rightarrow\; E_{\text{mecánia}} = \dfrac{1}{2}\cdot 0{,}04\cdot 5^2 = 0{,}50\ \mathrm{J} \\ \left.\begin{array}{l} E_{\mathrm{k}\,(y=2\,\mathrm{m})} = \dfrac{1}{2} m\, v^2_{(y=2\,\mathrm{m})} \\ v = \omega\sqrt{A^2 - y^2} \;\rightarrow\; v_{(y=2\,\mathrm{m})} = 2\cdot\sqrt{5^2-2^2} = 9{,}17\ \mathrm{J} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} E_{\mathrm{k}\,(y=2\,\mathrm{m})} = \dfrac{1}{2}\cdot 0{,}01\cdot 9{,}17^2 \\ E_{\mathrm{k}\,(y=2\,\mathrm{m})} = 0{,}42\ \mathrm{J} \end{array} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$E_{\mathrm{p}\,(y=2\,\mathrm{m})} = 0{,}50 - 0{,}42 \;\rightarrow\; \boxed{E_{\mathrm{p}\,(y=2\,\mathrm{m})} = 0{,}08\ \mathrm{J}}$$

c) A enerxía potencial dunha masa m que oscila segundo un m.h.s. vén dada pola expresión: $E_\mathrm{p} = \dfrac{1}{2} k\, y^2$, onde a constante elástica k é sempre positiva e a elongación y, aínda que pode ser positiva ou negativa, está elevada ó cadrado, resultando que **a enerxía potencial elástica é sempre positiva.** Na gráfica que se acompaña pode verse a representación de E_p fronte a y.

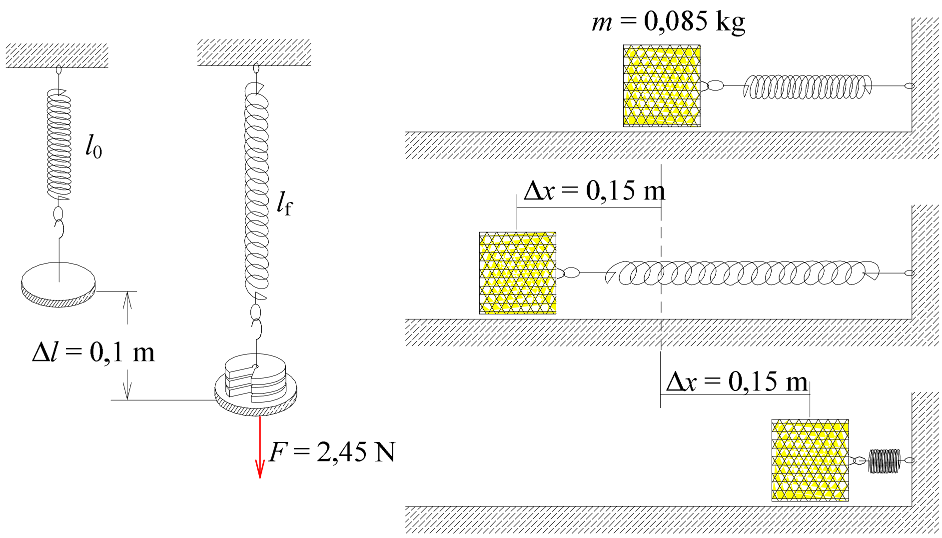


4.- Un resorte de masa desprezable estírase 0,1 m cando se lle aplica unha forza de 2,45 N. Fíxase no seu extremo libre unha masa de 0,085 kg e estírase 0,15 m ó longo dunha mesa horizontal a partir da súa posición de equilibrio e sóltase deixándoo oscilar libremente sen rozamento. Calcula: a) a constante elástica do resorte e o período de oscilacións; b) a enerxía total asociada á oscilación e as enerxías potencial e cinética cando x = 0,075 m. (*Xuño 04*).

Solución:

a) A constante elástica do resorte k obtémola coa lei de Hooke, que relaciona a deformación causada, $\Delta\vec{x}$, nun resorte elástico coa forza que a causa, $\vec{F}$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F}_{\text{recuperadora}} = -k\cdot\Delta\vec{l} \\ \vec{F}_{\text{aplicada}} = -\vec{F}_{\text{recuperadora}} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{F}_{\text{aplicada}} = k\cdot\Delta\vec{l} \;\rightarrow\; F = k\cdot\Delta l \;\rightarrow\; 2{,}45 = k\cdot 0{,}1 \;\rightarrow\; k = 24{,}5\ \mathrm{N\,m^{-1}}$$



O período de oscilación, T, dunha masa m, que colga dun resorte elástico e se move cun m.h.s., relaciónase coa constante elástica do resorte, k, segundo a expresión:

$$T = 2\,\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \;\rightarrow\; T = 2\,\pi \cdot \sqrt{\frac{0{,}085}{24{,}5}} \;\rightarrow\; \boxed{T = 0{,}37\ \mathrm{s}}$$

b) A expresión da enerxía mecánica, E_m, dun oscilador harmónico é: $E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\,k\,A^2$, sendo k a constante elástica do oscilador e A a elongación máxima (amplitude). Vemos que E_m é constante para calquera valor da elongación, como corresponde a unha forza conservativa.

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\,k\,A^2 \;\rightarrow\; E_\mathrm{m} = \frac{1}{2} \cdot 24{,}5 \cdot 0{,}15^2 \;\rightarrow\; \boxed{E_\mathrm{m} = 0{,}28\ \mathrm{J}}$$

A expresión da enerxía potencial, E_p, no instante en que a elongación vale x é: $E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}\,k\,x^2$. Substituíndo valores resulta:

$$\left.\begin{aligned} E_\mathrm{p} &= \frac{1}{2}\,k\,x^2 \\ x &= 0{,}075\ \mathrm{m} \end{aligned}\right\} \rightarrow\; E_\mathrm{p} = \frac{1}{2} \cdot 24{,}5 \cdot 0{,}075^2 \;\rightarrow\; \boxed{E_\mathrm{p} = 0{,}07\ \mathrm{J}}$$

Escribimos agora a expresión da enerxía cinética, E_k, en función da posición x: $E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\,k\left(A^2 - x^2\right)$. Substituíndo valores temos:

$$\left.\begin{aligned} E_\mathrm{k} &= \frac{1}{2}\,k\left(A^2 - x^2\right) \\ x &= 0{,}075\ \mathrm{m} \end{aligned}\right\} \rightarrow\; E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} \cdot 24{,}5 \cdot \left(0{,}15^2 - 0{,}075^2\right) \;\rightarrow\; \boxed{E_\mathrm{k} = 0{,}21\ \mathrm{J}}$$

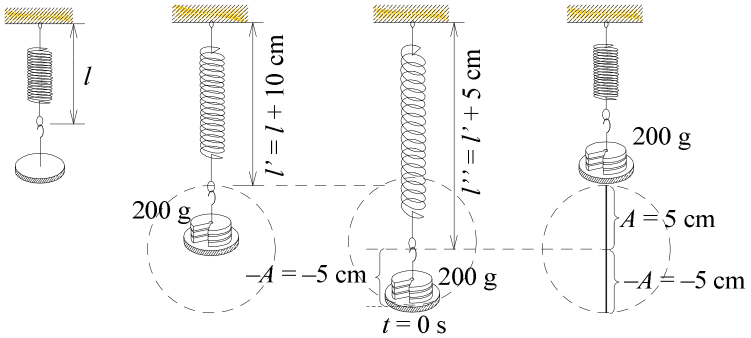
Podemos comprobar que: $E_\mathrm{p} + E_\mathrm{k} = E_\mathrm{m}$.

5.- Un resorte de masa desprezable estírase 10 cm cando se lle colga unha masa de 200 g. A continuación o sistema formado polo resorte e a masa estírase coa man outros 5 cm e sóltase no instante $t = 0$ s. Calcula: a) a ecuación do movemento que describe o sistema; b) a enerxía cinética e potencial cando a elongación é de 3 cm. Dato: g = 9,80 m/s^2 (*Xuño 03*).

Solución:

a) A ecuación do movemento é aquela que relaciona coordenada e tempo, que para o m.h.s. é: $y = A\,\mathrm{sen}\left(\omega\,t + \varphi_0\right) \;\rightarrow\; y = 5 \cdot 10^{-2} \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{2\,\pi}{T} + \varphi_0\right)$.

Para coñecer a pulsación, ω, recordamos que a forza recuperadora (resultante entre a forza recuperadora elástica e a forza do peso) que causa o m.h.s. da masa vibrante, é do tipo:



$\vec{F}_{\text{recuperadora}} = -k\,\vec{y}$, onde $k = m \cdot \omega^2$.

O valor de k obtémolo a partir da expresión: $\vec{F}_{\text{aplicada}} = k\,\Delta\vec{y}$.

$$\vec{F}_{\text{aplicada}} = k\,\Delta\vec{y} \;\rightarrow\; 200 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}80 = k \cdot 10 \cdot 10^{-2} \;\rightarrow\; k = 19{,}6\ \text{N m}^{-1}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \;\rightarrow\; \omega = \sqrt{\frac{19{,}6}{200 \cdot 10^{-3}}} \;\rightarrow\; \omega = 9{,}90\ \text{rad s}^{-1}$$

Tomamos como orixe do sistema de referencia a posición de equilibrio, que é a da masa m cando colga do resorte sen oscilar. O eixe Y facémolo coincidir coa dirección vertical, que é a dirección de movemento da masa m, e tomamos valores positivos cara arriba. Con este criterio, no instante inicial, $t = 0$ s, $y = -A$ e a fase inicial, φ_0, calculámola a partir das condicións iniciais:

$$-A = A \,\text{sen}\left(\omega \cdot 0 + \varphi_0\right) \;\rightarrow\; -1 = \text{sen}\ \varphi_0 \;\rightarrow\; \varphi_0 = \frac{3\,\pi}{2}\ \text{rad}$$

Con todo esto, a ecuación do movemento que describe o sistema é:

$$y = 5 \cdot 10^{-2} \cdot \text{sen}\left(9{,}90 \cdot t + \frac{3 \cdot \pi}{2}\right) \;\rightarrow\; \boxed{y = 5 \cdot 10^{-2} \cdot \text{sen}\left(9{,}90\,t + 1{,}5\,\pi\right)\text{m}}$$

b) A expresión da enerxía potencial, E_p, no instante en que a elongación vale y é: $E_\text{p} = \frac{1}{2}\,k\,y^2$. Substituíndo valores resulta:

$$\left.\begin{array}{l} E_\text{p} = \frac{1}{2}\,k\,y^2 \\ y = 3 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \end{array}\right\} \rightarrow\; E_\text{p} = \frac{1}{2} \cdot 19{,}6 \cdot \left(3 \cdot 10^{-2}\right)^2 \;\rightarrow\; \boxed{E_\text{p} = 8{,}8 \cdot 10^{-3}\ \text{J}}$$

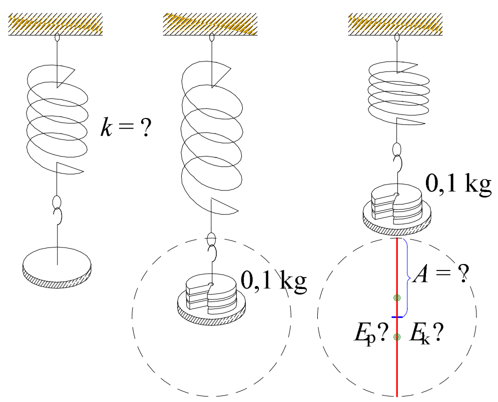
Escribimos agora a expresión da enerxía cinética, E_k, en función da posición y: $E_\text{k} = \frac{1}{2}\,k\left(A^2 - y^2\right)$. Substituíndo valores temos:

$$\left.\begin{array}{l} E_\text{k} = \frac{1}{2}\,k\left(A^2 - y^2\right) \\ y = 3 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \end{array}\right\} \rightarrow\; E_\text{k} = \frac{1}{2} \cdot 19{,}6 \cdot \left[\left(5 \cdot 10^{-2}\right)^2 - \left(3 \cdot 10^{-2}\right)^2\right] \;\rightarrow\; \boxed{E_\text{k} = 1{,}57 \cdot 10^{-2}\ \text{J}}$$

6.- Unha masa de 0,1 kg, xunguida a un resorte de masa desprezable, realiza oscilacións, arredor da súa posición de equilibrio, cunha frecuencia de 4 Hz, sendo a enerxía total do sistema oscilante de 1 xulio. Calcula: a) a constante elástica do resorte e a amplitude das oscilacións (*A*); b) a enerxía cinética e potencial da masa oscilante nun punto situado á distancia *A*/4 da posición de equilibrio. (*Set. 02*).

Solución:

a) A frecuencia de oscilación, ν, dunha masa m, que colga dun resorte e se move cun m.h.s., relaciónase coa constante elástica do resorte, k, segundo a expresión:



$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\nu^2 = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{k}{m} \rightarrow k = \nu^2 \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot m$$

$$k = 4^2 \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot 0{,}1 \rightarrow \boxed{k = 63{,}2 \text{ N m}^{-1}}$$

Para o cálculo da amplitude, A, das oscilacións, coñecida a enerxía total, E_{total}, da masa oscilante, escribimos E_{total} en función de A:

$$\left.\begin{array}{l} E_{\text{total}} = E_{\text{p máxima}} = E_{\text{k máxima}} = E_{\text{mecánica}} \\ E_{\text{p}} = \frac{1}{2} k\, y^2 \rightarrow E_{\text{p máxima}} = \frac{1}{2} k\, A^2 \\ E_{\text{k}} = \frac{1}{2} k \left(A^2 - y^2\right) \rightarrow E_{\text{k}} = \frac{1}{2} k\, A^2 \end{array}\right\} \rightarrow E_{\text{total}} = \frac{1}{2} k\, A^2$$

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 63{,}2 \cdot A^2 \rightarrow \boxed{A = 0{,}18 \text{ m}}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} E_{\text{p}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2 \\ y = \frac{A}{4} \end{array}\right\} \rightarrow E_{\text{p}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(\frac{A}{4}\right)^2$$

$$E_{\text{p}} = \frac{1}{2} \cdot 63{,}2 \cdot \frac{0{,}18^2}{16} \rightarrow \boxed{E_{\text{p}} = 0{,}06 \text{ J}}$$

$$\left.\begin{array}{l} E_{\text{k}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(A^2 - y^2\right) \\ y = \frac{A}{4} \end{array}\right\} \rightarrow E_{\text{k}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(A^2 - \left(\frac{A}{4}\right)^2\right)$$

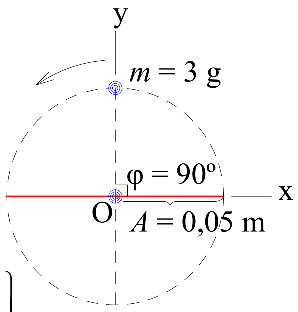
$$E_{\text{k}} = \frac{1}{2} \cdot 63{,}2 \cdot \left(0{,}18^2 - \frac{0{,}18^2}{16}\right) \rightarrow \boxed{E_{\text{k}} = 0{,}96 \text{ J}}$$

Cos resultados obtidos podemos comprobar que: $E_{\text{total}} = E_{\text{p}} + E_{\text{k}}$.

7.- Unha masa de $3 \cdot 10^{-3}$ kg describe un m.h.s. de frecuencia 0,1 Hz e amplitude 0,05 m. Sabendo que en $t = 0$ s → $x = 0$, determina: a) a velocidade e a aceleración cando $t = 3$ s; b) as enerxías cinética e potencial nese instante. (*Set. 01*).

Solución:

a)



$$\left.\begin{array}{l} v=\omega\cdot\sqrt{A^2-x^2} \\ \omega=2\cdot\pi\cdot\nu \end{array}\right\}\rightarrow v=2\cdot\pi\cdot\nu\cdot\sqrt{A^2-x^2}$$

$$x=A\cdot\cos\left(\omega t+\varphi_0\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x=A\cdot\cos\left(\omega t+\varphi_0\right) \\ \text{Para } t=0 \ \rightarrow \ x=0 \end{array}\right\}\rightarrow 0=A\cdot\cos\varphi_0 \ \rightarrow \ \varphi_0=\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2}\text{ rad ou} \\ \dfrac{3\,\pi}{2}\text{ rad} \end{array}\right. \rightarrow x=A\cdot\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$$

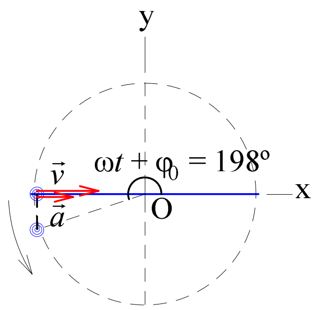
$$v=2\cdot\pi\cdot\nu\cdot\sqrt{A^2-A^2\cdot\cos^2\left(2\cdot\pi\cdot\nu\cdot t+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$v=2\cdot\pi\cdot 0{,}1\cdot\sqrt{0{,}05^2-0{,}05^2\cdot\cos^2\left(2\cdot\pi\cdot 0{,}1\cdot 3+\frac{\pi}{2}\right)} \rightarrow \boxed{v=9{,}7\cdot 10^{-3}\text{ m s}^{-1}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \vec{a}=-\omega^2\cdot\vec{x} \\ \omega=2\cdot\pi\cdot\nu \end{array}\right\}\rightarrow \vec{a}=-4\cdot\pi^2\cdot\nu^2\cdot\vec{x} \\ \vec{x}=A\cdot\cos\left(\omega\cdot t+\dfrac{\pi}{2}\right)\vec{i} \end{array}\right\}\rightarrow \vec{a}=-4\cdot\pi^2\cdot\nu^2\cdot A\cdot\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\vec{i}$$

$$\vec{a}=-4\cdot\pi^2\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}05\cdot\cos\left(2\cdot\pi\cdot 0{,}1\cdot 3+\frac{\pi}{2}\right)\vec{i} \rightarrow \boxed{\vec{a}=0{,}019\,\vec{i}\ \left(\text{m s}^{-2}\right)}$$

Podemos ver que o ángulo $\left(\omega t+\varphi_0\right)$, que lle corresponde á masa que describe o m.h.s. no instante $t=3$ s, ten o valor de: $2\cdot\pi\cdot 0{,}1\cdot 3+\dfrac{\pi}{2}=1{,}1\cdot\pi\text{ rad}=198^{\text{o}}$. Polo tanto, a masa está na parte negativa do eixe x é móvese cara ó centro, sendo: $\vec{v}=0{,}0097\,\vec{i}\left(\text{m s}^{-1}\right)$ e $\vec{a}=0{,}019\,\vec{i}\left(\text{m s}^{-2}\right)$.



b)

$$\left.\begin{array}{l} E_{\text{k}}=\dfrac{1}{2}\cdot k\cdot\left(A^2-x^2\right) \\ k=m\cdot\omega^2 \\ \omega=2\cdot\pi\cdot\nu \\ x=A\cdot\cos\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right) \end{array}\right\}\rightarrow E_{\text{k}}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot 2^2\cdot\pi^2\cdot\nu^2\cdot\left(A^2-A^2\cdot\cos^2\left(\omega\cdot t+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 2^2 \cdot \pi^2 \cdot 0{,}1^2 \cdot \left(0{,}05^2 - 0{,}05^2 \cdot \cos^2 \left(2 \cdot \pi \cdot 0{,}1 \cdot 3 + \frac{\pi}{2} \right) \right) \rightarrow \boxed{E_k = 1{,}41 \cdot 10^{-7}\ \text{J}}$$

$$\left. \begin{array}{l} E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \\ k = m \cdot \omega^2 \\ \omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu \\ x = A \cdot \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \end{array} \right\} \rightarrow E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2^2 \cdot \pi^2 \cdot \nu^2 \cdot A^2 \cdot \cos^2 \left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 2^2 \cdot \pi^2 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}05^2 \cdot \cos^2 \left(2 \cdot \pi \cdot 0{,}1 \cdot 3 + \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \boxed{E_p = 1{,}34 \cdot 10^{-6}\ \text{J}}$$

Podemos comprobar que: $E_k + E_p = E_{k\ máxima} = E_{p\ máxima} = E_{total}$.

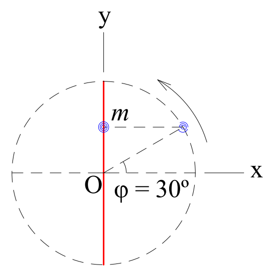
$$\left. \begin{array}{l} E_{total} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \\ k = m \cdot \omega^2 \\ \omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu \end{array} \right\} \rightarrow E_{total} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2^2 \cdot \pi^2 \cdot \nu^2 \cdot A^2$$

$$E_{total} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 2^2 \cdot \pi^2 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}05^2 \rightarrow E_{total} = 1{,}48 \cdot 10^{-6}\ \text{J}$$

$$\left. \begin{array}{l} E_{total} = 1{,}48 \cdot 10^{-6}\ \text{J} \\ \left. \begin{array}{l} E_k = 1{,}41 \cdot 10^{-7}\ \text{J} \\ E_p = 1{,}34 \cdot 10^{-6}\ \text{J} \end{array} \right\} \rightarrow E_k + E_p = 1{,}48 \cdot 10^{-6}\ \text{J} \end{array} \right\} \rightarrow E_{total} = E_k + E_p$$

8.- A forza máxima que actúa sobre unha partícula que realiza un movemento harmónico simple e $2 \cdot 10^{-3}$ N e a enerxía total é de $5 \cdot 10^{-4}$ J. a) Escribe a ecuación do movemento desa partícula se o período é de 4 s e a fase inicial é de 30º; b) canto vale a velocidade ó cabo de 1 s de comezar o movemento? (*Xuño 00*).

Solución:



a) A ecuación do movemento (aquela que relaciona coordenada e tempo) dunha partícula que describe un m.h.s. é:

$$y = A \operatorname{sen} (\omega t + \varphi_0) \rightarrow y = A \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{4} t + \frac{\pi}{6} \right)$$

Cos datos da forza máxima que actúa sobre a partícula e o da enerxía total calculamos a amplitude:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{F} = -k\, \vec{y} \rightarrow F_{máxima} = k\, A \rightarrow 2 \cdot 10^{-3} = k \cdot A \\ E_{total} = \frac{1}{2} k\, A^2 \rightarrow 5 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \end{array} \right\} \rightarrow 5 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot A \rightarrow A = 0{,}5\ \text{m}$$

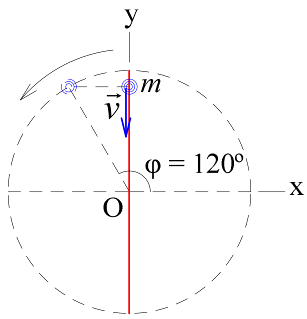
$$\boxed{y = 0{,}5\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot t+\frac{\pi}{6}\right)\text{m}}$$

b) Como hai que calcular a velocidade nun instante *t*, escribimos *v*(*t*):

$$v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[0{,}5\cdot\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot t+\frac{\pi}{6}\right)\right]\rightarrow v=0{,}5\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$v=0{,}25\cdot\pi\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1+\frac{\pi}{6}\right)\rightarrow v=-0{,}39\ \text{m s}^{-1}$$

$$\boxed{\vec{v}=-0{,}39\ \vec{j}\ \left(\text{m s}^{-1}\right)}$$



Podemos ver que o ángulo ($\omega t + \varphi_0$), que lle corresponde á partícula no instante $t = 1$ s, é: $\frac{\pi}{2}\cdot 1+\frac{\pi}{6}=\frac{2\cdot\pi}{3}\text{rad}=120^{\circ}$; sendo, para esta posición, a velocidade negativa (a partícula está na parte positiva do eixe y é móvese no sentido negativo).

9.- Unha masa de 0,05 kg realiza un M.H.S. segundo a ecuación $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$. As súas velocidades son 1 m/s e 2 m/s cando as súas elongacións son, respectivamente, 0,04 m e 0,02 m. Calcula: a) o período e a amplitude do movemento; b) a enerxía do movemento oscilatorio e a enerxía cinética e potencial cando $x = 0{,}03$ m. (*Xuño 99*).

Solución:

a) Como coñecemos a velocidade en función da posición escribimos *v*(*y*): $v=\omega\sqrt{A^2-y^2}$.

$$\left.\begin{array}{l}1=\omega\sqrt{A^2-0{,}04^2}\\ \\ 2=\omega\sqrt{A^2-0{,}02^2}\end{array}\right\}\rightarrow\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{A^2-0{,}04^2}}{\sqrt{A^2-0{,}02^2}}\rightarrow\boxed{A=\sqrt{2\cdot 10^{-3}}\ \text{m}}$$

$$1=\frac{2\,\pi}{T}\cdot\sqrt{2\cdot 10^{-3}-0{,}04^2}\rightarrow\boxed{T=0{,}126\ \text{s}}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l}E_\text{m}=\frac{1}{2}k\ A^2\\ \\ k=m\,\omega^2\rightarrow k=0{,}05\cdot\left(\frac{2\,\pi}{0{,}126}\right)^2\rightarrow k=124{,}3\ \text{N m}^{-1}\end{array}\right\}\rightarrow E_\text{m}=\frac{1}{2}\cdot 124{,}3\cdot\left(\sqrt{1\cdot 10^{-3}}\right)^2$$

$$\boxed{E_\text{m}=12{,}48\cdot 10^{-2}\ \text{J}}$$

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2 \;\rightarrow\; E_p = \frac{1}{2} \cdot 124{,}3 \cdot 0{,}03^2 \;\rightarrow\; \boxed{E_p = 5{,}6 \cdot 10^{-2}\ \text{J}}$$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(A^2 - y^2\right) \;\rightarrow\; E_k = \frac{1}{2} \cdot 124{,}3 \cdot \left[\left(\sqrt{2 \cdot 10^{-3}}\right)^2 - 0{,}03^2\right] \;\rightarrow\; \boxed{E_k = 6{,}8 \cdot 10^{-2}\ \text{J}}$$

Podemos comprobar que: $E_{\text{mecánica}} = E_k + E_p$.

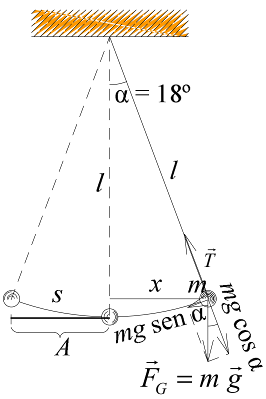
$$\left.\begin{array}{l} E_{\text{mecánica}} = 12{,}4 \cdot 10^{-2}\ \text{J} \\ \left.\begin{array}{l} E_k = 6{,}8 \cdot 10^{-2}\ \text{J} \\ E_p = 5{,}6 \cdot 10^{-2}\ \text{J} \end{array}\right\} \rightarrow\; E_k + E_p = 12{,}4 \cdot 10^{-2}\ \text{J} \end{array}\right\} \rightarrow\; E_{\text{mecánica}} = E_k + E_p$$

10.- Un péndulo simple oscila cunha elongación de 18º, desenvolvendo 10 oscilacións por segundo. Tomando como instante inicial a posición de equilibrio: a) escribe a súa elongación en función do tempo, b) determina o seu período de oscilación na Lúa, onde a gravidade é aproximadamente un sexto da terrestre. (*Xuño 98*).

Solución:

a) $x = A \operatorname{sen}\left(\omega t + \varphi_0\right) \;\rightarrow\; x = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi_0\right)$

A fase inicial, φ_0, calcúlase a partir das condicións iniciais: Tomamos como orixe do sistema de referencia a posición de equilibrio, que é a da masa *m* cando colga do fío en posición vertical. O eixe x facémolo coincidir coa dirección horizontal, que é a dirección de movemento da masa *m*, e tomamos valores positivos cara á dereita. Con este criterio, no instante inicial, $t = 0$ s, $x = 0$ e a fase inicial, φ_0, vale:



$$0 = A \operatorname{sen}\left(\omega \cdot 0 + \varphi_0\right) \;\rightarrow\; 0 = \operatorname{sen}\varphi_0 \;\rightarrow\; \varphi_0 = 0\ \text{rad ou } \pi\ \text{rad}$$

$$\left.\begin{array}{l} t = 1\ \text{s} \;\rightarrow\; T = \dfrac{t}{n} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1\ \text{s} \\ T_{\text{péndulo}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} \end{array}\right\} \rightarrow\; 0{,}1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{9{,}8}} \;\rightarrow\; l = 2{,}48 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

$$0{,}1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{9{,}8}} \;\rightarrow\; l = 2{,}48 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

$$\operatorname{sen} 18° = \frac{A}{l} \;\rightarrow\; A = 2{,}48 \cdot 10^{-3} \cdot \operatorname{sen} 18° \;\rightarrow\; A = 7{,}7 \cdot 10^{-4}\ \text{m}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \;\rightarrow\; \omega = \frac{2\pi}{0{,}1} \;\rightarrow\; \omega = 20\,\pi\ \text{s}^{-1}$$

$$\boxed{x = 7{,}7 \cdot 10^{-4} \cdot \text{sen}\,(20\,\pi\,t)\ \text{m}}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} T_{\text{Lúa}} = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_{\text{Lúa}}}} \\ g_{\text{Lúa}} = \dfrac{g_{\text{Terra}}}{6} \end{array}\right\} \rightarrow T_{\text{Lúa}} = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{2{,}5 \cdot 10^{-3}}{\dfrac{9{,}8}{6}}} \rightarrow \boxed{T_{\text{Lúa}} = 0{,}25\ \text{s}}$$

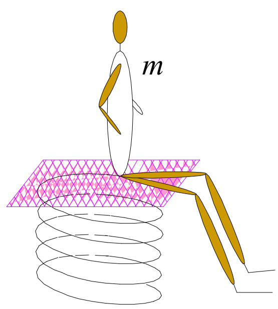
11.- Unha butaca está montada sobre un resorte. Cando se senta unha persoa de 75 kg, oscila cunha frecuencia de 1 Hz. Se sobre ela se senta agora outra persoa de 50 kg, a) cal será a nova frecuencia de vibración?, b) canto descenderá a butaca cando alcance o equilibrio? g = 9,81 m s^{-2}. (*Set. 97*).

Solución:

a) A frecuencia de vibración, ν, dun resorte elástico relaciónase coa constante recuperadora k e a masa vibrante m segundo a ecuación: $\nu = \dfrac{1}{2\,\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

Para calcular $\nu_{50\ \text{kg}}$, necesitamos coñecer k, que conseguimos a partir do dato de $\nu_{75\ \text{kg}}$.

$$\left.\begin{array}{l} \nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{2\,\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ \nu = 1\ \text{Hz} \\ m = 75\ \text{kg} \end{array}\right\} \rightarrow 1 = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{\text{k}}{75}} \rightarrow k = 2961\ \text{N m}^{-1}$$



Para m = 50 kg, a nova frecuencia de vibración é:

$$\nu = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \nu = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{2961}{50}} \rightarrow \boxed{\nu = 1{,}22\ \text{Hz}}$$

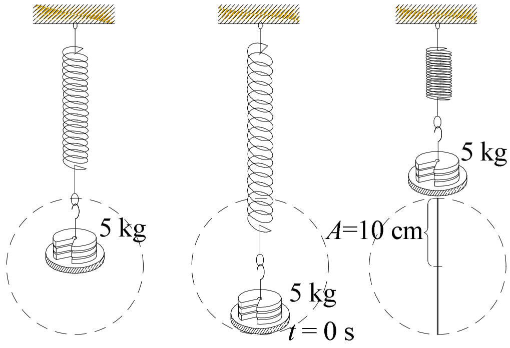
b)

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F}_{\text{persoa}} = k\,\vec{y} \rightarrow F_{\text{persoa}} = k\,y \\ F_{\text{persoa}} = 50 \cdot 9{,}81\ \text{m s}^{-2} \\ k = 2961\ \text{N m}^{-1} \end{array}\right\} \rightarrow 50 \cdot 9{,}81 = 2961 \cdot y \rightarrow \boxed{y = 0{,}17\ \text{m}}$$

12.- Dun resorte elástico de constante k = 500 N m^{-1} colga unha masa puntual de 5 kg. Estando o conxunto en equilibrio, desprázase a masa 10 cm, deixándoa oscilar a continuación libremente. Calcula: a) a ecuación do movemento harmónico que describe a masa puntual e b) os puntos nos que a aceleración desta masa é nula. (*Xuño 96*).

Solución:

a) A ecuación do movemento é aquela que relaciona coordenada e tempo, que para o m.h.s. é:



$$y = A\,\text{sen}\left(\omega\, t + \varphi_0\right) \rightarrow y = 10 \cdot 10^{-2} \cdot \text{sen}\left(\frac{2\,\pi}{T} \cdot t + \varphi_0\right)$$

Para coñecer o período, T, relacionámolo coa constante elástica, k, e a masa, m:

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow T = 2\,\pi\sqrt{\frac{5}{500}} \rightarrow T = 0{,}2\,\pi\text{ s}$$

A fase inicial, φ_0, calculámola a partir das condicións iniciais: Para t = 0 s, $y = -A$. Polo tanto:

$$-A = A\,\text{sen}\left(\omega \cdot 0 + \varphi_0\right) \rightarrow -1 = \text{sen}\,\varphi_0 \rightarrow \varphi_0 = \frac{3\,\pi}{2}\text{ rad}$$

$$y = 10 \cdot 10^{-2} \cdot \text{sen}\left(\frac{2\,\pi}{0{,}2\,\pi} \cdot t + \frac{3 \cdot \pi}{2}\right) \rightarrow \boxed{y = 10^{-1} \cdot \text{sen}\left(10\,t + 1{,}5\,\pi\right)\text{ m}}$$

b) Recordando que $\vec{a} = -\omega^2 \cdot \vec{y}$, resulta que ***a* = 0 m s^{-2} cando *y* = 0 m**: a aceleración é nula no centro.

Tema 7. MOVEMENTO ONDULATORIO

EXERCICIOS (Cuestións)

1.- Mapa conceptual dos contidos do tema.

Solución:

Ver páxina 271 do texto "Física" de 2º de Bacharelato, Ed. Baía.

2.- Considera dúas ondas de radio: Unha en onda media (AM) de 1000 kHz e outra en frecuencia modulada (FM) de 100 MHz. Razoa cal das dúas posúe maior lonxitude de onda. (*Selectividade COU*; *set. 02*).

Solución:

Sabemos que a velocidade de propagación das ondas de radio (ondas electromagnéticas) no baleiro é constante e vale 300000 km/s. E a relación que hai entre a velocidade, c, a lonxitude de onda, λ, e a frecuencia, ν, dunha onda vén dada pola expresión: $c = \lambda \cdot \nu$.

Substituíndo na igualdade anterior o valor da frecuencia para o caso da onda media (AM) e para o da onda de frecuencia modulada (FM) resulta:

$$\left.\begin{array}{l} v_{\mathrm{AM}} = \lambda_{\mathrm{AM}} \cdot 1000 \cdot 10^3 \\ v_{\mathrm{FM}} = \lambda_{\mathrm{FM}} \cdot 100 \cdot 10^6 \\ v_{\mathrm{AM}} = v_{\mathrm{FM}} = c \end{array}\right\} \rightarrow \lambda_{\mathrm{AM}} \cdot 1000 \cdot 10^3 = \lambda_{\mathrm{FM}} \cdot 100 \cdot 10^6 \rightarrow \frac{\lambda_{\mathrm{AM}}}{\lambda_{\mathrm{FM}}} = 10^2$$

En consecuencia, **a onda de AM ten maior lonxitude de onda ca de FM** ($\lambda_{AM} = 10^2 \cdot \lambda_{FM}$).

3.- Nunha onda mecánica nun medio material, as partículas desprázanse necesariamente na dirección de propagación da onda? Póñase algún exemplo. (*Selectividade COU*; *xuño 02*).

Solución:

Unha onda dise mecánica (ou material) cando transporta enerxía mecánica e necesita dun medio material para propagarse. Pero como tal onda non transporta masa (non causa un desprazamento das partículas do medio).

Se nos referimos á dirección de vibración das partículas do medio con respecto á dirección de propagación da perturbación, no concepto de onda mecánica vemos que **nada ten que ver a dirección de vibración das partículas coa dirección de propagación da onda**. Segundo esta última relación aparece a clasificación de ondas transversais e lonxitudinais.

Son exemplos de ondas mecánicas:

· As do son, que ademais son lonxitudinais e tridimensionais.

· As que se propagan nunha corda, que ademais son transversais e unidimensionais.

· As que aparecen na superficie da auga, que ademais son transversais e bidimensionais.

4.- Escribe a ecuación dunha onda de frecuencia 100 Hz, que se propaga coa velocidade de 200 m s^{-1} na dirección do eixe "x", cara á esquerda e con amplitude de 0,1 m. (*Selectividade COU*; *set. 01*).

Solución:

A ecuación dunha onda harmónica unidimensional, que se propaga ó longo do eixe x e no seu sentido negativo (cara á esquerda) e que a vibración asociada ó movemento harmónico simple ten lugar na dirección do eixe y, vén dada pola expresión: $y\,(x,t) = A\,\text{sen}\,(\omega t + k\,x)$, sendo: y a elongación; A a amplitude; ω a pulsación; t o instante no que se estuda o estado de perturbación dunha partícula en torno á súa posición central; k o número de onda e x a distancia da partícula ó longo da dirección de propagación da perturbación.

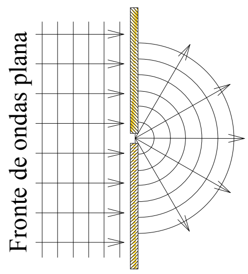
$$\omega = 2\,\pi\,\nu \;\rightarrow\; \omega = 2\,\pi\,100 = 200\,\pi\,\text{s}^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} k = \dfrac{2\,\pi}{\lambda} \\ v = \lambda\,\nu \end{array}\right\} \rightarrow\; k = \frac{2\,\pi}{v/\nu} \;\rightarrow\; k = \frac{2\,\pi}{200/100} = \pi\,\text{m}^{-1}$$

$$\boldsymbol{y\;(x,t) = 0{,}1 \cdot \text{sen}\,(200\,\pi\,t + \pi\,x)\;\text{m}}$$

5.- Unha onda plana incidente atravesa unha fenda, na que o seu ancho posúe unha magnitude da orde da lonxitude da onda incidente. Debuxa e explica as ondas incidente e a emerxente da fenda. (*Selectividade COU*; *xuño 00*).

Solución:



Cando unha fronte de ondas alcanza unha fenda, que ten un ancho da orde de magnitude (ou un tamaño menor) da lonxitude de onda, λ, da onda que se propaga, **aparece un novo foco emisor de ondas, das mesmas características que as que chegan á fenda**, propagando a vibración ós puntos do seu arredor, producíndose o fenómeno de difracción. Así, se a onda incidente é harmónica, o punto da fenda alcanzado pola vibración convértese tamén nun vibrador harmónico, cun movemento harmónico da mesma natureza que o foco.

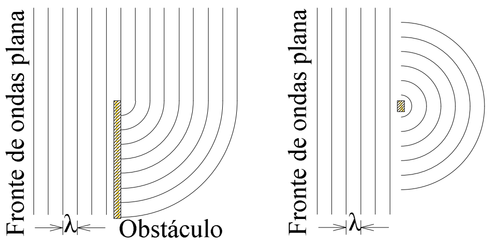
Como a **onda** que alcanza ó obstáculo é **plana**, o seu foco emisor está a gran distancia da fenda coa que se encontra e **debuxámola con rectas paralelas**.

6.- Que tipo de fenómeno se presenta cando unha onda atopa un obstáculo de dimensións comparables á súa lonxitude de onda? Pon algún exemplo. (*Selectividade COU*; *xuño 99*).

Solución:

Cando unha onda atopa un obstáculo de menor tamaño ou de dimensións comparables á súa lonxitude de onda, λ, aparece o **fenómeno de difracción**, que é característico do movemento ondulatorio. Consiste en que a onda bordea ó obstáculo, propagándose ó seu arredor.

Así, nas ondas de radio, que teñen lonxitudes de onda comprendidas entre 10 km e 1 m; as ondas de λ comprendida entre 10–1 km, chamadas **ondas longas**, posúen un gran poder de difracción e poden bordear a maioría dos obstáculos que atopan no seu camiño; as ondas de λ comprendida entre 1000–100 m, chamadas **ondas medias**, teñen menor poder de difracción que as ondas longas e as ondas de λ comprendida entre 100–1 m, chamadas **ondas curtas**, aínda posúen menor poder de difracción que as anteriores.

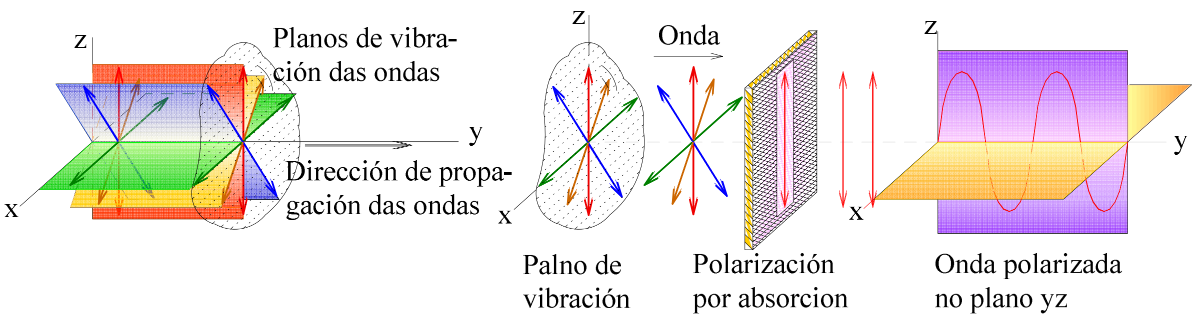


Para unha onda incidente plana, o debuxo desta onda e o da onda emerxente (difractada) é o que se indica no gráfico.

7.- Poden polarizarse as ondas sonoras? Xustifica a resposta. (*Selectividade COU*; *xuño 97*).

Solución:

Polarizar unha onda, no seu sentido máis amplo, consiste en limitar, dalgún modo, a forma libre de vibración das partículas do medio. Se conseguimos que a vibración teña lugar nun único plano dise que a onda está **polarizada linealmente**: as partículas afectadas pola onda efectúan vibracións nunha única dirección, perpendicular á de propagación.



No caso do son, que é unha onda lonxitudinal, non ten sentido falar de polarización, xa que a dirección de vibración coincide coa dirección de propagación (ó eliminar unha dirección de vibración eliminamos a onda nesa dirección).

8.- Establece as diferenzas entre difracción e interferencia. (*Selectividade COU*; *set. 96*).

Solución:

Tanto a difracción como as interferencias son dúas propiedades das ondas. A difracción consiste na propiedade que teñen as ondas para:

· Bordear os obxectos cando a lonxitude de onda é do orde de tamaño (ou maior) que o tamaño do obxecto a bordear.

· Converterse nun novo foco emisor de ondas cando alcanza un burato de diámetro menor (ou parecido) á lonxitude de onda da onda que se propaga.

En ambos casos a onda que resulta é das mesmas características que a que se propaga.

A interferencia aparece cando dúas ou máis ondas producidas por focos diferentes coinciden nun ou varios puntos do medio en que se propagan. A perturbación resultante obedece ó principio de superposición de ondas, segundo o cal a elongación dunha partícula do medio afectada simultaneamente por varias ondas é igual á suma das elongacións que lle produciría cada onda por separado. Despois da interferencia as ondas continúan sen modificación ningunha.

9.- Comenta a diferenza entre ondas lonxitudinais e transversais. (*Selectividade COU*; *xuño 96).*

Solución:

Unha forma de clasificar as ondas é atendendo á relación que garda a dirección de vibración das partículas e a dirección de propagación da perturbación.

Unha onda dise transversal cando a perturbación ten lugar na dirección perpendicular á dirección de propagación da onda. Así, cando se deixa caer unha pedra nun estanque, as ondas propáganse horizontalmente na superficie da auga e as partículas de líquido vibran na dirección vertical.

Unha onda dise lonxitudinal cando a dirección de perturbación coincide coa dirección de propagación. Un exemplo pode ser o caso de varias bólas de billar que están en contacto formando unha liña recta. Ó darlle un golpe á primeira bóla na dirección e sentido en que están as demais, vemos que a perturbación avanza ó longo da fila, sendo transmitida á última.

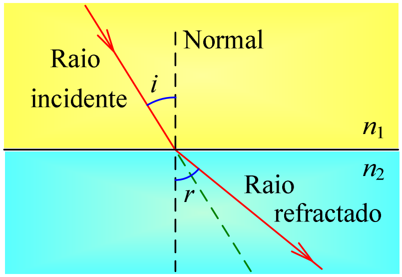
Vemos que **a diferenza** entre as ondas transversais e as lonxitudinais **está en que nas transversais a dirección de vibración é perpendicular á dirección de propagación e nas lonxitudinais a dirección de vibración e a de propagación coinciden**.

10.- Un feixe de luz láser pasa dun medio a outro de índice de refracción menor. O ángulo de refracción será maior ou menor que o ángulo de incidencia? Xustifica a resposta. (*Selectividade COU*; *xuño 94*).

Solución:

Cando un feixe de luz pasa dun medio a outro de distintos índices de refracción cambia de dirección, aparecendo o fenómeno da refracción.

A relación entre o seno do ángulo formado polo raio incidente coa normal á superficie de separación dos dous medios, chamado ángulo de incidencia, *i*, e o ángulo formado pola normal co raio refractado, chamado ángulo de refracción, *r*, co índice de refracción dos dous medios, n_1 e n_2, vén dada pola lei de Snell: $\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r}=\frac{n_2}{n_1}=n_{12}$.



Coa condición de que $n_2<n_1$, a relación de senos é menor que a unidade, resultando que $i<r$: $\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r}<1 \rightarrow \operatorname{sen} i<\operatorname{sen} r \rightarrow i<r$.

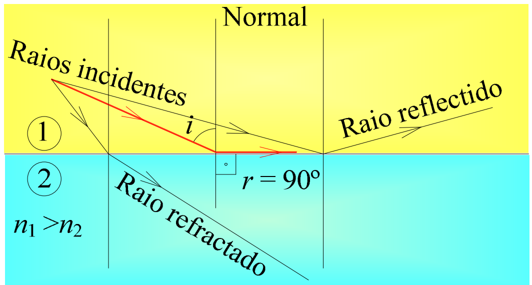
11.- Que se entende por refracción dunha onda? Calcula as condicións que deben cumprir os índices de refracción para que o ángulo de incidencia dunha onda luminosa sexa $\theta<\pi/2$ e o ángulo de refracción sexa $\theta = \pi/2$. (*Selectividade COU*; *set. 91*).

Solución:

Enténdese por refracción dunha onda o cambio de dirección que esta experimenta cando pasa dun medio a outro de distinto índice de refracción.

No fenómeno de refracción, a relación entre o seno do ángulo formado polo raio incidente coa normal á superficie de separación dos dous medios, chamado ángulo de incidencia, *i*, e o seno do ángulo formado pola normal co raio refractado, chamado ángulo de refracción, *r*, cos índices de refracción dos dous medios, n_1 e n_2, vén dada pola lei de Snell:

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r}=\frac{n_2}{n_1}=n_{12}$$



Nela vemos que para que o ángulo *i* sexa menor que o ángulo *r*, o índice de refracción do primeiro medio, n_1, ten que ser maior que o índice de refracción do segundo medio, n_2:

$$\operatorname{sen} i<\operatorname{sen} r \Rightarrow i<r \Rightarrow n_1>n_2 .$$

12.- Sexa unha onda electromagnética, que se propaga nun medio material ideal a unha frecuencia f_1; se lle variamos a súa frecuencia a f_2, sendo $f_1>f_2$, diminúe tamén a velocidade de propagación da onda electromagnética? Razoa a resposta. (*Selectividade COU*; *set. 91*).

Solución:

Na gran maioría dos casos, a rapidez de propagación das ondas depende unicamente do medio en que se propagan. Isto permite que, por exemplo, nun concerto se escoiten simultaneamente todas as notas musicais emitidas por distintos instrumentos e que, no caso da luz, se vexa a cor branca que corresponde á mestura das ondas de todas as frecuencias da parte visible do espectro electromagnético

A velocidade da onda, *v*, relaciónase coa frecuencia, *f*, mediante a expresión: $v=\lambda \cdot f$, sendo λ a lonxitude de onda. Se a frecuencia diminúe, pasando de f_1 a f_2, sendo $f_1>f_2$, tamén varía a lonxitude de onda, pasando de λ_1 a λ_2, sendo $\lambda_1<\lambda_2$, de modo que $\lambda_1 \cdot f_1 = \lambda_2 \cdot f_2$.

Polo tanto, **a velocidade dunha onda electromagnética**, que se propaga nun medio material ideal, **é independente da súa frecuencia, *f*, propagándose cunha velocidade *v* constante** que, para o caso do baleiro, ten o valor de 300000 km s^{-1}.

Cando a velocidade de propagación dunha onda depende (ademais das características do medio) dalgunha característica da onda, como é a súa frecuencia, dise que o medio é dispersivo. Un exemplo é a formación do arco iris, que aparece porque a luz de cada frecuencia (de cada cor) viaxa a unha velocidade determinada.

13.- Explica a diferenza entre as ondas lonxitudinais e transversais. De que tipo son as ondas electromagnéticas? Razoa a resposta. (*Selectividade COU*; *xuño 91*).

Solución:

Unha forma de clasificar as ondas é atendendo á relación que garda a dirección de vibración das partículas e a de propagación da perturbación.

Unha onda dise transversal cando a perturbación ten lugar na dirección perpendicular á dirección de propagación da onda. Así, cando se deixa caer unha pedra nun estanque, as ondas propáganse horizontalmente na superficie da auga e as partículas de líquido vibran na dirección vertical.

Unha onda dise lonxitudinal cando a dirección de perturbación coincide coa dirección de propagación. Un exemplo pode ser o caso de varias bólas de billar que están en contacto formando unha liña recta. Ó darlle á primeira bóla un golpe na dirección e sentido en que están as demais, vemos que a perturbación avanza ó longo da fila, sendo transmitida á última.

Vemos que **a diferenza** entre as ondas transversais e as lonxitudinais **está en que nas transversais a dirección de vibración é perpendicular á dirección de propagación e nas lonxitudinais a dirección de vibración e a de propagación coinciden**.

O feito de que as ondas electromagnéticas sexan polarizables indícanos que son transversais. Consisten nun campo eléctrico e outro magnético, perpendiculares entre si, que varían periodicamente como unha dobre onda transversal harmónica, sendo á súa vez estas vibracións perpendiculares á dirección de propagación da onda. Polo tanto, todo raio de luz pode considerarse como un eixe arredor do cal se efectúan vibracións electromagnéticas, a gran velocidade e en todas as direccións, perpendiculares ó raio, tratándose dunha onda transversal.

14.- Que é unha onda unidimensional harmónica? Na onda definida pola ecuación $y = 8\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{8}t\right)$ (en m) determina os parámetros: amplitude, número de onda, frecuencia e lonxitude de onda. (*Selectividade COU*; *xuño 91*).

Solución:

Onda unidimensional harmónica é a propagación dun movemento harmónico nunha dirección. A ecuación desta onda, que se propaga ó longo do eixe x, no seu sentido negativo, e que a vibración asociada ó movemento harmónico simple ten lugar na dirección do eixe y, é da forma:

$y\left(x,\ t\right)=A\operatorname{sen}\left(k\,x+\omega\,t\right)$, sendo:

· $y\,(x,t)$, a elongación, que depende da posición, x, e do tempo, t.

· A, a amplitude.

· k, o número de onda, que se relaciona coa lonxitude de onda, λ, coa expresión: $k=\dfrac{2\,\pi}{\lambda}$.

· x, a posición do punto en que se estuda o estado de perturbación.

· ω, a frecuencia angular ou pulsación, que se relaciona coa frecuencia, ν, coa expresión: $\omega=2\,\pi\,\nu$.

· t, o instante no que se estuda a perturbación.

Comparando a ecuación da onda harmónica coa que corresponde á onda da cuestión resulta:

· $A = 8$ m

· $k = \pi/2\ \text{m}^{-1}$

$$\left.\begin{array}{l}\omega=\dfrac{\pi}{8}\\ \omega=2\,\pi\,\nu\end{array}\right\}\rightarrow\ \frac{\pi}{8}=2\,\pi\,\nu\ \rightarrow\ \nu=\frac{\frac{\pi}{8}}{2\,\pi}\ \rightarrow\ \nu=\frac{1}{16}\ \text{s}^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l}k=\dfrac{\pi}{2}\\ k=\dfrac{2\,\pi}{\lambda}\end{array}\right\}\rightarrow\ \frac{\pi}{2}=\frac{2\,\pi}{\lambda}\ \rightarrow\ \lambda=4\ \text{m}$$

15.- Escribe a ecuación dunha onda que se propaga por unha corda no sentido negativo do eixe x sabendo que a velocidade de propagación é de 8 m s^{-1}, o período de 0,3 s e a amplitude de 20 cm.

Solución:

A ecuación dunha onda que se propaga por unha corda no sentido negativo do eixe x e que a vibración asociada ó movemento harmónico simple ten lugar na dirección do eixe y é da forma:

$y\left(x,t\right)=A\operatorname{sen}\left(\omega\,t+k\,x\right)$, sendo:

· $y\,(x,t)$, a elongación, que depende da posición, x, e do tempo, t.

· A, a amplitude, que na cuestión ten o valor de 0,20 m.

· ω, a frecuencia angular ou pulsación, que se relaciona co período, T, coa expresión:

$\omega = \dfrac{2\,\pi}{T}$, correspondéndolle o valor de: $\omega = \dfrac{2\,\pi}{0{,}3}\ \text{s}^{-1}$.

· t, o instante no que se estuda a perturbación.

· k, o número de onda, que se relaciona coa lonxitude de onda, λ, coa expresión: $k = \dfrac{2\,\pi}{\lambda}$. O seu valor obtémolo relacionando a velocidade de propagación, v, da onda coa súa lonxitude de onda, λ, e o período, T:

$$\left.\begin{array}{l} k = \dfrac{2\,\pi}{\lambda} \\ \lambda = v \cdot T \;\rightarrow\; \lambda = 8 \cdot 0{,}3 = 2{,}4\ \text{m} \end{array}\right\} \rightarrow\; k = \frac{2\,\pi}{2{,}4}\ \text{m}^{-1}$$

· x, a posición do punto en que se estuda o estado de perturbación.

Levando os valores destas magnitudes á ecuación de onda de máis arriba resulta:

$$\boldsymbol{y\left(x,t\right) = 0{,}20\ \text{sen}\left(\frac{2\,\pi}{0{,}3}\,t + \frac{2\,\pi}{2{,}4}\,x\right)\text{m}}$$

16.- Que relación hai entre a intensidade de dúas ondas harmónicas da mesma frecuencia e unha de dobre amplitude que a outra?

Solución:

A intensidade I dunha onda harmónica nun punto é a cantidade de enerxía, E, que na unidade de tempo, t, atravesa a unidade de superficie, S, colocada nese punto perpendicularmente á dirección de propagación da onda: $I = \dfrac{E}{t \cdot S}$.

E como sabemos que a enerxía dunha onda harmónica é directamente proporcional ó cadrado da amplitude, A, segundo a expresión: $E = 2\,\pi^2\,m\,A^2\,\nu^2$, sendo m a masa da partícula que oscila coa frecuencia ν, resulta que:

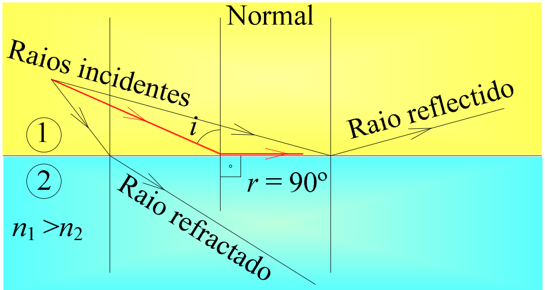
$$\left.\begin{array}{l} I_1 \propto A_1^2 \\ \\ I_2 \propto A_2^2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{A_1^2}{A_2^2} \\ A_1 = 2\,A_2 \end{array}\right\} \rightarrow\; \frac{I_1}{I_2} = \frac{\left(2\,A_2\right)^2}{A_2^2} \;\rightarrow\; \frac{I_1}{I_2} = 4$$

17.- Unha onda plana que incide sobre a superficie de separación de dous medios nos que a velocidade de propagación é v_1 e v_2; existe a posibilidade de que a onda non se refracte?

Solución:

Enténdese por refracción dunha onda o cambio de dirección que esta experimenta cando pasa dun medio a outro de distinto índice de refracción.

No fenómeno de refracción, a relación entre o seno do ángulo formado polo raio incidente coa normal á superficie de separación dos dous medios, chamado ángulo de incidencia, *i*, e o seno do ángulo formado pola normal co raio refractado, chamado ángulo de refracción, *r*, coa velocidade da onda no medio do que proceden os raios, v_1, e a velocidade coa que se propagan no medio en que se refractan, v_2, vén dada pola lei de Snell:



$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Se $v_1 < v_2$ resulta que sen $i <$ sen r e $i < r$, habendo un ángulo de incidencia, chamado ángulo límite, para o cal o ángulo refractado chega a valer 90º. **Para ángulos de incidencia superiores ó ángulo límite**, o raio que emerxe está no mesmo medio que o raio incidente e **non se produce o fenómeno de refracción**.

18.- Dúas ondas de igual amplitude interfiren destrutivamente nun punto do espazo resultando unha onda de amplitude nula. Que ocorre coas ondas despois da interferencia?

Solución:

Cando dúas ondas producidas en focos diferentes que se propagan nun mesmo medio coinciden nun punto, as ondas superpoñen os seus efectos. A elongación dunha partícula do medio afectada simultaneamente polas dúas ondas é igual á suma das elongacións que lle produciría debido a cada unha das ondas por separado. **Despois da interferencia, as ondas continúan sen modificación ningunha**. Así, por exemplo, é posible que catro persoas manteñan dúas conversacións distintas aínda que falen de forma cruzada.

19.- Unha onda sinusoidal transversal, coa dirección de vibración vertical, y, propágase de dereita a esquerda, eixe x, cunha velocidade de 400 cm s^{-1}, tendo unha amplitude de 50 cm e unha lonxitude de onda de 20 cm. Escribe: a) A ecuación de movemento da onda e b) A velocidade máxima de vibración dun punto do medio alcanzado pola onda.

Solución:

a) A ecuación dunha onda sinusoidal transversal, coa dirección de vibración vertical, eixe y, que se propaga no sentido negativo do eixe x é: $y(x,t) = A \text{ sen}(\omega t + k\,x)$, sendo:

· $y(x,t)$, a elongación, que depende da posición, x, e do tempo, t.

· A, a amplitude, que na cuestión ten o valor de 0,50 m.

· ω, a frecuencia angular ou pulsación. Para o seu cálculo establecemos as seguintes relacións:

$$\left.\begin{array}{l}\omega = 2\,\pi\,\nu \\ v = \lambda\,\nu\end{array}\right\} \rightarrow \omega = \frac{2\,\pi\,v}{\lambda} \rightarrow \omega = \frac{2\cdot\pi\cdot 4{,}00}{0{,}20} \rightarrow \omega = 40\,\pi\,\text{s}^{-1}$$

· t, o instante no que se estuda a perturbación.

· k, o número de onda, que se relaciona coa lonxitude de onda, λ, coa expresión: $k=\frac{2\,\pi}{\lambda}$. O seu valor é: $k=\frac{2\,\pi}{0{,}20} \rightarrow k=10\,\pi\,\text{m}^{-1}$.

· x, a posición do punto en que se estuda o estado de perturbación.

Levando os valores destas magnitudes á ecuación de onda de máis arriba resulta:
$y\,(x,\,t) = 0{,}50\ \text{sen}\,(40\,\pi\ t+10\,\pi\,x)\,\text{m}$

b) A velocidade de vibración dun punto do medio alcanzado pola onda obtense derivando a elongación (ecuación de onda): $v=\frac{\text{d}y}{\text{d}t}$. Para o caso da cuestión resulta:

$$v=\frac{\text{d}}{\text{d}t}\left[0{,}50\,\text{sen}\,(40\,\pi\,t+10\,\pi\,x)\right]=0{,}50\,\cos\,(40\,\pi\,t+10\,\pi\,x)\cdot 40\,\pi$$

A velocidade é máxima, $v_{\text{máxima}}$, cando o valor do coseno valla 1, sendo: $v_{\text{máxima}}= 0{,}50\cdot 40\cdot\pi \rightarrow$ $\boldsymbol{v_{\text{máxima}} = 20\,\pi\ \text{m s}^{-1}}$.

20.- A ecuación dunha onda harmónica transversal que se propaga nun medio é: $y=4\ \text{sen}\,(8\,\pi\ t-\pi\,x)\,\text{m}$. Indica: a) O valor da amplitude, período, frecuencia e lonxitude de onda; b) A velocidade de propagación da onda e o valor de vibración dun punto do medio, en función do tempo e c) O tempo que tarda a perturbación en percorrer unha distancia de 48 m.

Solución:

a) A ecuación dunha onda harmónica transversal, que se propaga no sentido positivo do eixe x e vibra na dirección vertical do eixe y, é: $y\,(x,t)=A\,\text{sen}\,(\omega\,t-k\,x)$, sendo y a elongación, A a amplitude, ω a frecuencia angular ou pulsación, t o instante no que se estuda o estado de perturbación, k o número de onda e x a posición da partícula da que estudamos o seu estado de vibración.

Comparando coa ecuación de onda da cuestión resulta:

· $A = 4$ m

· $\pi = 8\,\pi\ \text{s}^{-1}$

· $k = \pi\ \text{m}^{-1}$

Co dato da pulsación obtense o período, T, e a frecuencia, ν:

$$\omega=\frac{2\,\pi}{T} \rightarrow 8\,\pi=\frac{2\,\pi}{T} \rightarrow T=\frac{1}{4}\ \text{s}$$

$$\omega=2\,\pi\,\nu \rightarrow 8\,\pi=2\,\pi\,\nu \rightarrow \nu = 4\ \text{Hz}$$

Co dato do número de onda obtense a lonxitude de onda, λ:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \pi = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = 2 \text{ m}$$

b) A velocidade de propagación da onda, ou velocidade de fase, $v_{\text{propagación}}$, é o cociente entre o espazo avanzado pola onda, x, e o tempo, t, investido: $v_{\text{propagación}} = \frac{x}{t}$.

Cando x toma o valor de λ (lonxitude de onda), a t correspóndelle o valor de T (período), e con estas novas magnitudes a expresión da velocidade é: $v_{\text{propagación}} = \frac{\lambda}{T}$.

$$v_{\text{propagación}} = \frac{2}{0{,}25} \rightarrow v = 8 \text{ m s}^{-1}.$$

A velocidade de vibración, $v_{\text{vibración}}$, dun punto do medio que é alcanzado pola onda obtense derivando no tempo a ecuación de onda:

$$v_{\text{vibración}} = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[4 \operatorname{sen}(8\pi t - \pi x)\right] \rightarrow v_{\text{vibracion}} = 4\cos(8\pi t - \pi x)\cdot 8\pi$$

$$v_{\text{vibración}} = 32\pi \cos(8\pi t - \pi x) \text{ m s}^{-1}$$

c)

$$\left.\begin{array}{l} v_{\text{propagación}} = \frac{x}{t} \\ v_{\text{propagación}} = 8 \text{ m s}^{-1} \\ x = 48 \text{ m} \end{array}\right\} \rightarrow 8 = \frac{48}{t} \rightarrow t = 6 \text{ s}$$

21.- Un raio de luz monocromática propágase desde o aire cara á auga. Pode darse o fenómeno de reflexión total? E se o raio se propaga desde a auga cara ó aire? Dato: n_{auga}= 4/3.

Solución:

Un raio de luz que incide sobre a superficie de separación de dous medios transparentes de distinto índice de refracción experimenta o fenómeno de **reflexión total** cando o raio emerxente continúa no mesmo medio que o raio incidente, non producíndose o fenómeno de refracción (soamente ten lugar a reflexión).

A relación entre o ángulo de incidencia, i, (ángulo formado polo raio incidente coa normal á superficie de separación dos dous medios) e o ángulo de refracción, r, (ángulo formado polo raio refractado coa normal) co índice de refracción do medio de onde proceden os raios, n_1, e do medio no que se refractan, n_2, vén dado pola lei de Snell: $\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{n_2}{n_1}$.

Para o caso de que o raio de luz pase do aire (n_1 = 1) á auga (n_2 = 4/3) resulta:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{4/3}{1} \rightarrow \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{4}{3} \rightarrow \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} > 1 \Rightarrow i > r$$

O raio luminoso, para calquera valor de *i*, despois de incidir na superficie de separación dos dous medios, pasa á auga, acercándose á normal, non producíndose o fenómeno de reflexión total.

Para o caso de que o raio de luz pase da auga (n_1 = 4/3) ó aire (n_2 = 1) resulta:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{1}{4/3} \rightarrow \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} < 1 \Rightarrow i < r$$

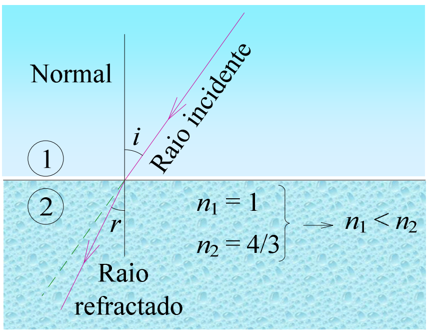
O raio luminoso despois de incidir na superficie libre da auga sepárase da normal e pode:

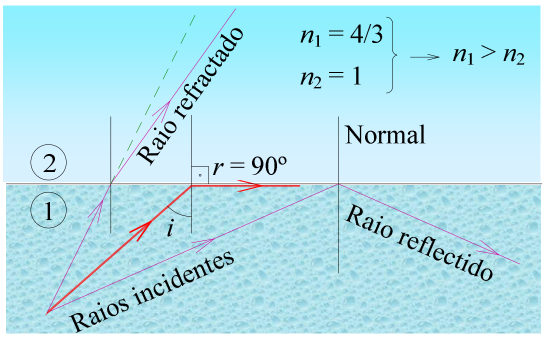
· Pasar ó aire experimentando o fenómeno de refracción. O ángulo máximo de incidencia para o cal se produce refracción vale:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } 90^\circ} = \frac{1}{4/3} \rightarrow i = 48{,}6^\circ$$

Este ángulo de incidencia coñécese co nome de ángulo límite.

· Continuar na auga non producíndose o fenómeno de refracción. Este feito coñécese co nome de reflexión total e ten lugar para ángulos de incidencia superiores ó ángulo límite.

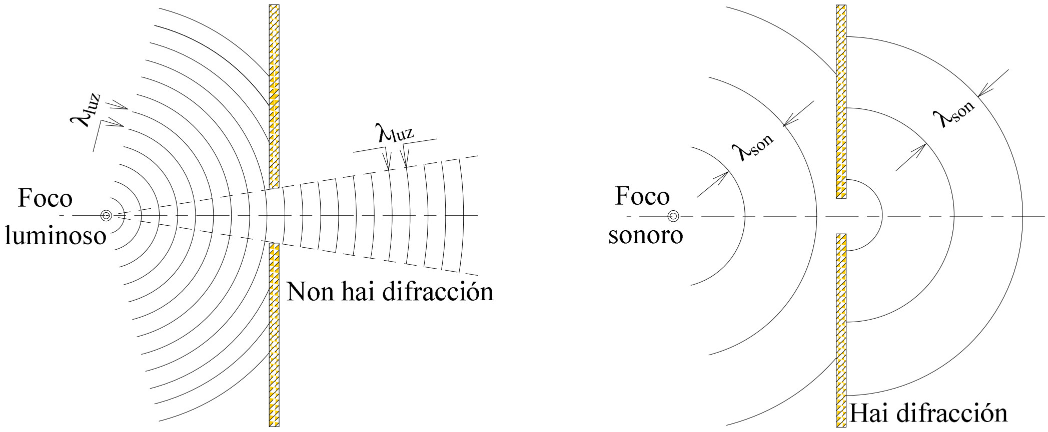




22.- Explica por qué nun burato de pequenas dimensións, da orde do centímetro, non se observa o fenómeno de difracción das ondas luminosas e si o das ondas sonoras. Dato: $\lambda_{luz} \simeq 10^{-7}$ m, $\lambda_{son} \simeq$ 10 cm.

Solución:

Unha onda que pasa por un burato experimenta o fenómeno de difracción cando a lonxitude de onda, λ, da onda que se propaga é maior ou dun tamaño parecido ó diámetro do burato que atravesa. Como **a lonxitude de onda da luz**, λ_{luz}, é de 10^{-7} m e este valor **é moito menor que o tamaño do burato que atravesa**, que supoñemos da orde de varios centímetros, a onda luminosa propágase sen experimentar o fenómeno de difracción. Sen embargo, **para o caso da onda sonora**, cunha lonxitude de onda, λ_{son}, de 10 cm, **o tamaño do burato é máis pequeno** e o son difráctase.



23.- Relaciona as seguintes calidades subxectivas do son coa correspondente propiedade física da onda:

Efecto sensorial	Propiedade física da onda
Sonoridade (a) **Ton (b)** **Timbre (c)**	**Forma de onda (d)** **Intensidade da onda (e)** **Frecuencia da onda (f)**

Solución:

A sonoridade é unha sensación asociada á percepción do son, que diminúe coa distancia, r, ó foco emisor e aumenta coa amplitude, A; magnitudes estas que se relacionan coa intensidade, I, da onda: $\frac{I_1}{I_2}=\frac{r_2^2}{r_1^2}$ e $\frac{I_1}{I_2}=\frac{A_1^2}{A_2^2}$.

A sonoridade relaciónase coa intensidade da onda.

O ton é unha calidade do son que depende do número de vibracións por segundo relacionándose **coa frecuencia**.

Unha mesma nota musical producida coa mesma intensidade e frecuencia por instrumentos distintos soa diferente. Débese a que os sons non son puros, é dicir, de unha soa frecuencia. Ademais dos sons principais, aparecen outros que os acompañan, resultando que a onda é harmónica, pero non sinusoidal e, en consecuencia, aparecen ondas de distinta forma.

O **timbre** é a calidade do son que nos permite distinguir sons de igual sonoridade e ton producidos por instrumentos distintos e débese á **forma da onda**.

24.- O oído humano pode percibir sons máis débiles que os que corresponden a unha intensidade da onda de 10^{-12} W m^{-2}?

Solución:

A sensibilidade do oído humano a un son depende da súa intensidade e da súa frecuencia. Para cada frecuencia é necesaria unha intensidade mínima, $I_{mín}$, por debaixo da cal non se produce sensación sonora.

Na audición non existe unha proporcionalidade directa entre a causa que produce a excitación (a intensidade da onda sonora, I) e a sensación fisiolóxica que percibimos, S. Segundo a lei de Weber-Fechner, esta relación é:

$$S = \log \frac{I}{I_0}$$

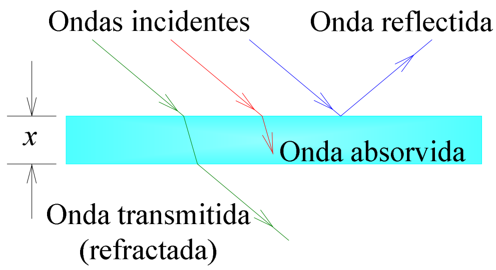
I_0 é a intensidade inicial mínima da onda sonora para que se poida percibir o son. No caso do oído humano, para unha onda sonora de 1000 Hz de frecuencia, que se propaga no aire, o seu valor é: $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2} (son débil).

Hai un pequeno intervalo de frecuencias, arredores do valor de 4000 Hz, para o cal o oído humano ten o máximo de sensibilidade e o valor da intensidade da onda sonora pode ser algo inferior a 10^{-12} W m^{-2}.

25.- Estuda cal é no SI a unidade do coeficiente de absorción e do número de onda.

Solución:

A intensidade, I, dunha onda que se propaga nun medio inelástico, no que se produce un amortecemento da onda por absorción, obtense coa lei de Lambert-Beer: $I = I_0 \cdot e^{-ax}$, sendo I_0 a intensidade inicial, x a lonxitude de traxecto e a o coeficiente de absorción, que depende do medio en que se propaga a onda.



Para que a ecuación anterior sexa dimensionalmente homoxénea, o coeficiente de absorción hai de ter dimensións de lonxitude elevada a menos un $\left(L^{-1}\right)$, correspondéndolle no SI a **unidade de m^{-1}**.

O número de onda, k, representa o número de lonxitudes de onda, λ, que hai nunha lonxitude de 2π m: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$.

Para que a ecuación sexa dimensionalmente homoxénea, o número de onda ten que ter a dimensión da inversa da lonxitude $\left(L^{-1}\right)$, correspondéndolle no SI a **unidade de m^{-1}**.

26.- No instante en que a enerxía potencial dunha partícula que vibra cunha amplitude A, segundo a ecuación dunha onda harmónica unidimensional, é a metade da súa enerxía total, estuda cal das opcións que se indican se cumpre:

· A posición y da partícula en relación coa amplitude é: a) $y = A/2$; b) $y = A/\sqrt{2}$; c) non se pode saber.

· A velocidade v da partícula en relación coa súa velocidade máxima, $v_{máxima}$, é: a) v =

$\boldsymbol{v}_{\text{máxima}}$**/2; b)** $\boldsymbol{v = v_{\text{máxima}}}$**; c)** $\boldsymbol{v = v_{\text{máxima}}/\sqrt{2}}$ **.**

Solución:

A enerxía potencial, E_p, dunha partícula de masa m que vibra cun movemento harmónico vén dada pola expresión: $E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot y^2$ e a súa enerxía cinética, E_k, é: $E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot \left(A^2 - y^2\right)$, sendo ω a pulsación, y a elongación e A a amplitude.

Coa consideración de que $E_p = \frac{1}{2} E_T$ resulta que $E_p = E_k$.

$$\left.\begin{array}{l} E_T = E_k + E_p \\ E_p = \frac{1}{2} E_T \end{array}\right\} \rightarrow E_k = E_p$$

$$\left.\begin{array}{l} E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2 \\ E_k = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(A^2 - y^2\right) \\ E_k = E_p \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2 = \frac{1}{2} k \cdot \left(A^2 - y^2\right) \rightarrow y^2 = A^2 - y^2 \rightarrow y = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

Para encontrar a resposta da segunda parte da cuestión escribimos a expresión da velocidade, v, dunha partícula que vibra cun movemento harmónico.

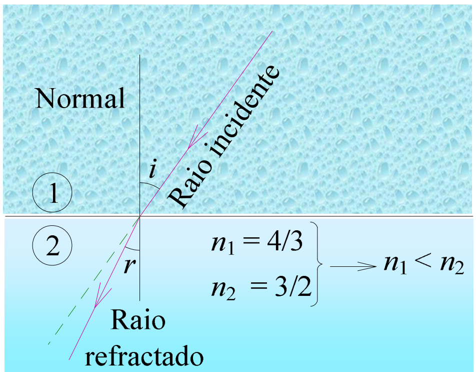
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2} \\ y = \frac{A}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \rightarrow v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - \left(\frac{A}{\sqrt{2}}\right)^2} \rightarrow v = \omega \cdot \frac{A}{\sqrt{2}} \\ \\ \left.\begin{array}{l} v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2} \\ v \text{ é máxima cando } y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow v_{\text{máxima}} = \omega \cdot A \end{array}\right\} \rightarrow v = \frac{v_{\text{máxima}}}{\sqrt{2}}$$

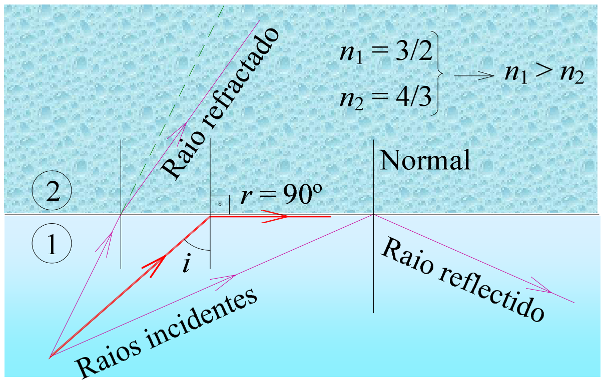
27.- Sabendo que o índice de refracción da auga é de 4/3 e o do vidro vale 3/2, a reflexión total aparece: a) sempre que o ángulo de incidencia da radiación supere o ángulo límite; b) sempre que o raio incidente emerxa do vidro; c) soamente cando o raio incidente emerxa do vidro e o seu ángulo de incidencia supere o ángulo límite.

Solución:

A relación entre o ángulo de incidencia, i, e de refracción, r, cando un raio de luz atravesa a superficie de separación de dous medios de índices de refracción n_1 e n_2 vén dada pola lei de Snell:

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{n_2}{n_1}$$





Polo tanto, se $n_1 > n_2$ → sen r>sen i e r>i, e o raio refractado afástase da normal á superficie de separación dos dous medios, habendo un ángulo de incidencia, chamado ángulo límite, para o cal o ángulo de refracción é de 90º. Para ángulos de incidencia maiores ó ángulo límite non se produce refracción, tendo lugar soamente a reflexión, coñecéndose este feito como **reflexión total**. Polo tanto, para que se produza reflexión total, é necesario que a radiación emerxa desde o medio de maior índice de refracción (vidro) cara ó de menos índice de refracción (auga) e que ademais o ángulo de incidencia supere ó ángulo límite, que para o caso da cuestión ten o valor de:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } 90^\circ} = \frac{4/3}{3/2} = \frac{8}{9} \rightarrow i = 62{,}7^\circ = 1{,}1 \text{ rad}$$

Estas condicións comentadas son as que corresponden ó ítem c) da cuestión.

28.- Un raio luminoso pasa desde a auga, de índice de refracción 4/3, cara a un segundo medio, que é de vidro cun índice de refracción de valor 3/2. O índice de refracción auga/vidro é: a) 2; b) 1/2; c) 9/8.

Solución:

$$n_{\text{auga-vidro}} = \frac{n_{\text{vidro}}}{n_{\text{auga}}} = \frac{3/2}{4/3} \rightarrow n_{\text{auga-vidro}} = \frac{9}{8}$$, resultado que corresponde ó ítem c) da cuestión.

29.- Cando un raio de luz pasa do aire á auga, de índice de refracción 4/3, sucede que: a) a súa velocidade aumenta; b) a súa frecuencia aumenta; c) a súa lonxitude de onda diminúe.

Solución:

Para o caso de ondas electromagnéticas defínese o índice de refracción absoluto n dun medio transparente como: $n = c/v$, sendo c a velocidade da luz no baleiro e v a velocidade da luz nese medio. Para o caso que nos ocupa resulta:

$$\left.\begin{array}{l} n_{\text{auga}} = \dfrac{c}{v_{\text{auga}}} \\ n_{\text{aire}} = \dfrac{c}{v_{\text{aire}}} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{n_{\text{auga}}}{n_{\text{aire}}} = \dfrac{\dfrac{c}{v_{\text{auga}}}}{\dfrac{c}{v_{\text{aire}}}} \\ n_{\text{auga}} = 4/3 \\ n_{\text{aire}} \cong n_{\text{baleiro}} = 1 \\ v_{\text{aire}} \cong c \end{array}\right\} \rightarrow \frac{4/3}{1} = \frac{c}{v_{\text{auga}}} \rightarrow \frac{4}{3} = \frac{c}{v_{\text{auga}}} \rightarrow v_{\text{auga}} < c$$

Polo tanto, cando un raio de luz pasa do aire á auga a súa velocidade diminúe. Como a frecuencia ν da radiación electromagnética depende do foco emisor e non do medio na que se propaga, resulta que **ó diminuír a velocidade**, *v*, da radiación, tamén **diminúe a súa lonxitude de onda**, λ: $v = \lambda \cdot \nu$, como aparece no ítem c) da cuestión.

30.- O ángulo que forma un raio de luz coa normal á superficie de separación de dous medios é de 55,000º. Se o índice de refracción do medio de onde procede o raio vale 2 e o índice de refracción do segundo medio é de 1,5; estuda se haberá raio refractado. En caso afirmativo calcula o ángulo de refracción e en caso negativo calculo o valor máximo do ángulo de incidencia para que poida haber refracción.

Solución:

A relación entre o ángulo de incidencia, *i*, e de refracción, *r*, cando un raio de luz atravesa a superficie de separación de dous medios, pasando desde o medio de índice de refracción n_1 ó de índice de refracción n_2, vén dada pola lei de Snell:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{n_2}{n_1}$$

Para os datos da cuestión resulta: $\dfrac{\text{sen } 55,000^{\circ}}{\text{sen } r} = \dfrac{1,5}{2} \rightarrow \text{sen } r = 1,09$

Como o valor máximo do seno dun ángulo é 1, o resultado anterior non é posible e isto indícanos que o raio que incide na superficie de separación dos dous medios non se refracta. Como o raio procede dun medio de maior índice de refracción a outro de menor índice de refracción, o raio refractado afástase da normal e, para un ángulo de incidencia maior ó ángulo límite, non se produce o fenómeno de refracción, tendo lugar soamente a reflexión, aparecendo o que se coñece como reflexión total. O valor do ángulo límite é:

$$\frac{\text{sen } i_{\text{límite}}}{\text{sen } 90^{\circ}} = \frac{1,5}{2} \rightarrow \text{sen } i_{\text{límite}} = 48,59^{\circ} = 0,85 \text{ rad}$$

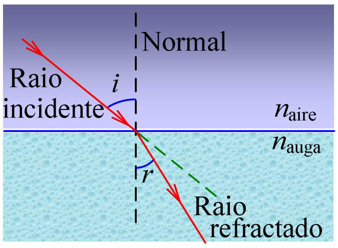
31.- Un raio de luz de lonxitude de onda λ = 0,70 μm (luz vermella) propágase desde o aire cara á auga. Sabendo que o índice de refracción da auga, n_{auga}, é 4/3, calcula a lonxitude de onda que posúe neste segundo medio, λ_{auga}.

Sabendo que no espectro electromagnético a lonxitude de onda obtida no apartado anterior corresponde á cor verde, di que cor verá unha persoa mergullada na auga.

Solución:

$$\left.\begin{aligned} n_{\text{auga}} &= \frac{c}{v_{\text{auga}}} \\ n_{\text{aire}} &= \frac{c}{v_{\text{aire}}} \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{n_{\text{auga}}}{n_{\text{aire}}} &= \frac{v_{\text{aire}}}{v_{\text{auga}}} \\ v_{\text{auga}} &= \lambda_{\text{auga}} \cdot \nu \\ v_{\text{aire}} &= \lambda_{\text{aire}} \cdot \nu \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{n_{\text{auga}}}{n_{\text{aire}}} = \frac{\lambda_{\text{aire}} \cdot \nu}{\lambda_{\text{auga}} \cdot \nu} \rightarrow \lambda_{\text{auga}} = \frac{n_{\text{aire}}\, \lambda_{\text{aire}}}{n_{\text{auga}}}$$

$$\lambda_{\text{auga}} = \frac{1 \cdot 0{,}70\ \mu\text{m}}{4/3} \rightarrow \lambda_{\text{auga}} = 0{,}525\ \mu\text{m}$$



O que estimula o nervio óptico e nos fai percibir unha determinada cor é a frecuencia de vibración da onda de luz. Polo tanto, a cor que vemos non depende da lonxitude de onda. E como a frecuencia da radiación depende do foco emisor e non do medio material no que se propague, cando a luz pasa do aire á auga, **unha persoa mergullada na auga ve a mesma cor vermella que o foco emite**.

31.- Unha onda propágase por unha corda, que ten un extremo fixo nunha parede, segundo a ecuación: $y(x, t) = 4 \cdot 10^{-2}$ sen $(20\,t - 5\,x)$, en unidades do SI. Escribe a ecuación de onda reflectida.

Solución:

A onda dada propágase no sentido positivo do eixe x e a onda reflectida faino en sentido contrario, propagándose cara á esquerda. Ademais, a onda reflectida está en oposición de fase respecto á onda incidente.

$$y(x, t) = 4 \cdot 10^{-2} \text{ sen } (20\,t + 5\,x + \pi)$$

Tendo en conta que: sen$(\alpha + \pi) = -$sen α, a ecuación da onda reflectida pódese escribir da forma:

$$y(x, t) = -4 \cdot 10^{-2} \cdot \text{sen } (20\,t + 5\,x)$$

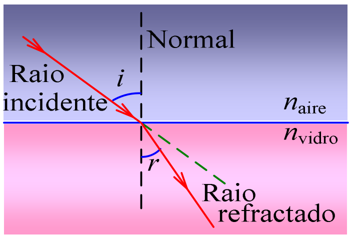
EXERCICIOS DE SELECTIVIDADE (Cuestións)

Razoa as respostas ás seguintes cuestións:

1.- Un raio de luz incide desde o aire ($n = 1$) sobre unha lámina de vidro de índice de refracción $n = 1,5$. O ángulo límite para a reflexión total deste raio é: a) 41,8º; b) 90º; c) non existe. *(Set. 08).*

Solución:

Un raio de luz, que incide sobre a superficie de separación de dous medios transparentes de distinto índice de refracción, pode pasar ó segundo medio, experimentando o fenómeno de refracción, ou continuar exclusivamente no medio de incidencia, aparecendo o fenómeno de reflexión total. Neste segundo caso, o ángulo de incidencia para o cal o raio refractado está na superficie de separación dos dous medios, recibe o nome de **ángulo límite**.



A relación entre o ángulo de incidencia, i, (ángulo formado polo raio incidente coa normal á superficie de separación dos dous medios) e o ángulo de refracción, r, (ángulo formado polo raio refractado coa normal) co índice de refracción do medio de onde proceden os raios, n_1, e do medio no que se refractan, n_2, vén dado pola lei de Snell: $\dfrac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \dfrac{n_2}{n_1}$.

Para o caso de que o raio de luz pase do aire ($n_1 = 1$) ó vidro ($n_2 = 1,5$) resulta:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{1,5}{1} \rightarrow \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} > 1 \Rightarrow i > r$$

O raio luminoso, para calquera valor de i, despois de incidir na superficie de separación dos dous medios, pasa ó vidro, acercándose á normal, non producíndose o fenómeno de reflexión total e, en consecuencia, **non hai ángulo límite**.

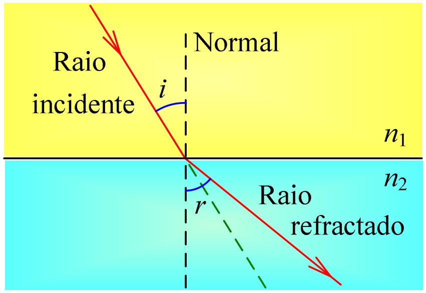
2.- Se a ecuación de propagación dun movemento ondulatorio é $y(x,t) = 2\,\text{sen}(8\pi t - 4\pi x)$ (SI); a súa velocidade de propagación é: a) 2 m/s; b) 32 m/s; c) 0,5 m/s. *(Xuño 08).*

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} v = \dfrac{x}{t} \rightarrow v = \dfrac{\lambda}{T} \\ \left.\begin{array}{l} k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \\ k = 4\pi\,\text{m}^{-1} \end{array}\right\} \rightarrow 4\pi = \dfrac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = 0,5\,\text{m} \\ \left.\begin{array}{l} \omega = \dfrac{2\pi}{T} \\ \omega = 8\pi\,\text{s}^{-1} \end{array}\right\} \rightarrow 8\pi = \dfrac{2\pi}{\text{T}} \rightarrow T = 0,25\,\text{s} \end{array}\right\} \rightarrow v = \frac{0,5}{0,25} \rightarrow v = 2\,\text{m s}^{-1}$$

3.- Cando un raio de luz incide nun medio de menor índice de refracción, o raio refractado: a) varía a súa frecuencia, b) acércase á normal; c) pode non existir raio refractado. *(Set. 07).*

Solución:



Cando un raio luminoso pasa desde un medio 1, de índice de refracción n_1, a outro medio 2, de índice de refracción n_2, a relación entre o ángulo de incidencia (o formado polo raio incidente coa normal á superficie de separación dos dous medios), i, e o de refracción (o formado polo raio refractado coa normal), r, vén dada pola lei de Snell: $\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{n_2}{n_1}$.

Polo tanto, se $n_1 > n_2$ resulta que $\text{sen } r > \text{sen } i$ e, en consecuencia, $r > i$, habendo un ángulo de incidencia, chamado ángulo límite, para o cal o raio refractado está na superficie de separación dos dous medios: $r = 90^{\circ}$. Para ángulos de incidencia superiores ó ángulo límite **non hai raio refractado**, aparecendo o que se coñece como reflexión total.

4.- Se un feixe de luz láser incide sobre un obxecto de pequeno tamaño (do orde da súa lonxitude de onda): a) detrás do obxecto hai sempre escuridade; b) hai zonas de luz detrás do obxecto; c) reflíctese cara ao medio de incidencia. *(Set. 07).*

Solución:

Cando un feixe de luz incide sobre un obxecto, que ten un tamaño do orde da lonxitude de onda da luz utilizada, λ, aparece o **fenómeno de difracción**, que é característico do movemento ondulatorio. Consiste en que a onda bordea ó obstáculo, propagándose ó seu arredor e, nunha pantalla situada detrás do obxecto, aparece unha serie de zonas claras e escuras, como consecuencia de interferencias construtivas e destrutivas.

5.- Unha onda electromagnética que se atopa cun obstáculo de tamaño semellante á súa lonxitude de onda: a) forma nunha pantalla, colocada detrás do obstáculo, zonas claras e escuras; b) polarízase e o seu campo eléctrico oscila sempre no mesmo plano; c) reflíctese no obstáculo. *(xuño 07).*

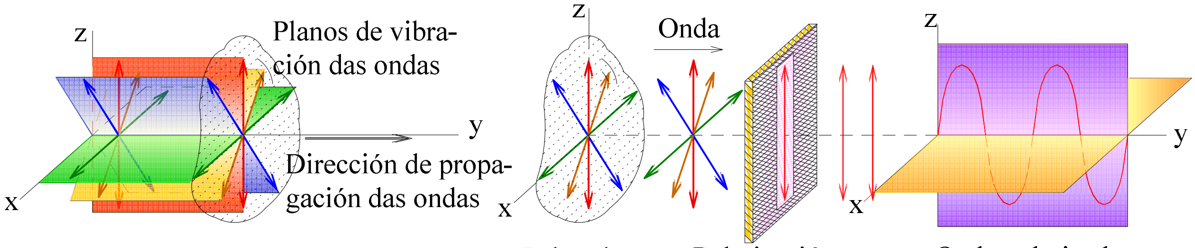
Solución:

Ver resposta da cuestión anterior.

6.- Na polarización lineal da luz: a) modifícase a frecuencia da onda; b) o campo eléctrico oscila sempre nun mesmo plano: c) non se transporta enerxía. (*Set. 06*).

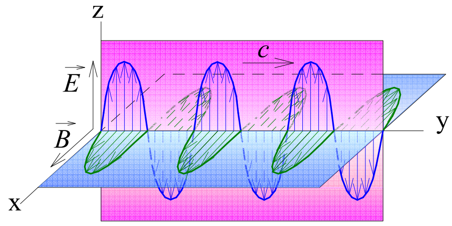
Solución:

Polarizar unha onda, no seu sentido máis amplo, consiste en limitar, dalgún modo, a forma libre de vibración das partículas do medio. Se conseguimos que a vibración teña lugar nun único plano dise que a onda está **polarizada linealmente**: as partículas afectadas pola onda efectúan vibracións nunha única dirección, perpendicular á de propagación.



Polo tanto, na polarización dunha onda, a frecuencia (que só depende do foco emisor) non se ve afectada e a onda polarizada, como toda onda, transporta enerxía.

A luz, como toda onda electromagnética, consiste na vibración, en planos perpendiculares, dun campo eléctrico e doutro magnético, propagándose nunha dirección perpendicular á dirección perturbación: son ondas transversais. E **o campo eléctrico oscila sempre no mesmo plano**, que no caso dos gráfico sería o plano (y,z).



7.- Cando a luz atravesa a zona de separación de dous medios experimenta: a) difracción; b) refracción; c) polarización. (*Xuño 06*).

Solución:

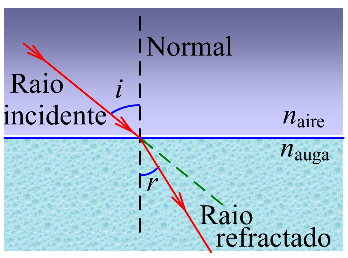
a) A difracción consiste na propiedade que teñen as ondas para:

· Bordear os obxectos cando a lonxitude de onda é do orde de tamaño (ou maior) que o tamaño do obxecto a bordear.

· Converterse nun novo foco emisor de ondas cando alcanza un burato de diámetro menor (ou parecido) á lonxitude de onda da onda que se propaga.

E a onda continúa no mesmo medio, condición que non se cumpre para o caso da cuestión.

b) Enténdese por **refracción dunha onda** o cambio de dirección que esta experimenta **cando pasa dun medio a outro de distinto índice de refracción**.



A relación entre o ángulo de incidencia, *i*, e de refracción, *r*, co índice de refracción do medio de onde proceden os raios, n_1, e do medio no que se refractan, n_2, vén dada pola lei de Snell:

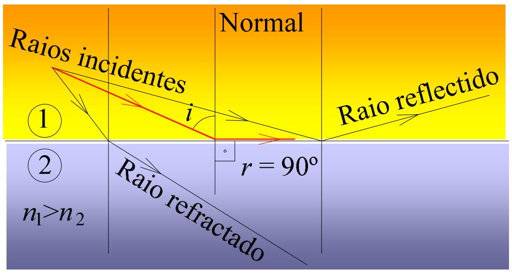
$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{n_2}{n_1}$$

c) Polarizar unha onda, no seu sentido máis amplo, consiste en limitar, dalgún modo, a forma libre de vibración das partículas do medio, sen que a onda cambie de medio.

8.- Cando a luz incide na superficie de separación de dous medios cun ángulo igual ó ángulo límite significa que: a) o ángulo de incidencia e o de refracción son complementarios; b) non se observa raio refractado; c) o ángulo de incidencia é maior que o de refracción. (*Set. 05*).

Solución:

Cando un raio luminoso pasa desde un medio 1, de índice de refracción n_1, a outro medio 2, de índice de refracción n_2, a relación entre o ángulo de incidencia (o formado polo raio incidente coa normal á superficie de separación dos dous medios), i, e o de refracción (o formado polo raio refractado coa normal), r, vén dada pola lei de Snell:



$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{n_2}{n_1}$$

Polo tanto, se $n_1 > n_2$ → sen r>sen i e r>i, e o raio refractado afástase da normal á superficie de separación dos dous medios, habendo un ángulo de incidencia, chamado **ángulo límite**, para o cal o ángulo de refracción é de 90º. Para ángulos de incidencia maiores ó ángulo límite non se produce refracción, tendo lugar soamente a reflexión, coñecéndose este feito como **reflexión total**.

Polo tanto, cando o ángulo de incidencia é igual ó ángulo límite:

a) O ángulo de incidencia é o de refracción **non** son complementarios:

b) **Si** deixa de observarse raio refractado.

c) O ángulo de incidencia **non** é maior que o de refracción.

9.- O son dunha guitarra propágase como: a) unha onda mecánica transversal; b) unha onda electromagnética; c) unha onda mecánica lonxitudinal. (*Set. 05*).

Solución:

As ondas sonoras son **mecánicas** e necesitan un medio material para propagarse, dependendo a súa velocidade de propagación da natureza do medio. Polo tanto non se transmiten no baleiro, como lle ocorre ás ondas electromagnéticas.

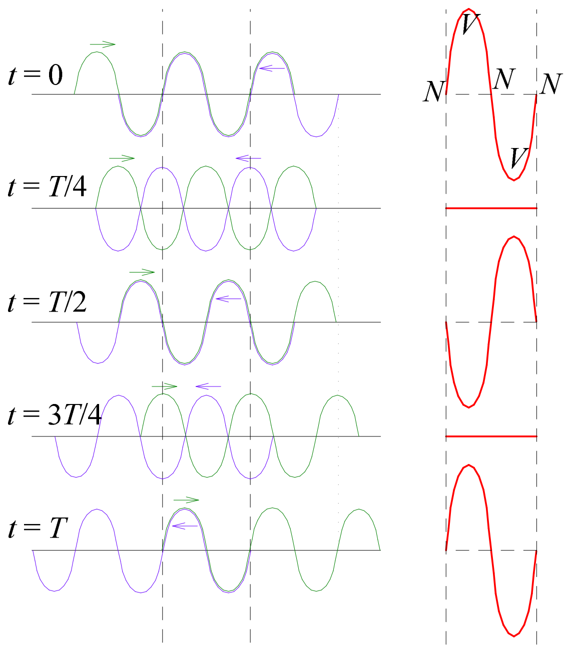
As ondas sonoras aparecen como consecuencia dunha sucesión de compresións e dilatacións do medio en que se propagan, sendo **lonxitudinais** (elementos de volume do medio de propagación móvense paralelamente á dirección de propagación, coincidindo a dirección de propagación da onda coa súa dirección de perturbación). Ademais, o feito de que o son se propague en calquera tipo de medio (sólido, líquido e gasoso) indícanos que se trata dunha onda lonxitudinal, xa que as ondas mecánicas transversais só se propagan nos medios sólidos e superficialmente en líquidos debido a que precisan forzas de suficiente intensidade entre as partículas veciñas para que a propagación transversal teña lugar.

Polo tanto, **o son dunha guitarra propágase como unha onda mecánica lonxitudinal**.

10.- Nunha onda estacionaria xerada por interferencia de dúas ondas cúmprese: a) a amplitude é constante; b) a onda transporta enerxía; c) a frecuencia é a mesma que a das ondas que interfiren. (*Xuño 05*).

Solución:

Unha onda estacionaria constitúe un caso particular de interferencia e fórmase cando se propagan, nun medio elástico e homoxéneo, coa mesma velocidade, na mesma dirección e en sentido contrario, dúas ondas harmónicas da mesma frecuencia, amplitude e lonxitude de onda; isto é: dúas ondas de idénticas características.



A onda estacionaria que resulta (debuxada en cor vermella) **é** harmónica e **de igual frecuencia** e lonxitude de onda **que as ondas compoñentes**, sendo a súa amplitude variable para cada punto. É o que sucede nunha corda, que está fixa por un dos seus extremos, cando no extremo libre se xera unha onda harmónica: a onda incidente e reflectida teñen as mesmas características.

Na figura aparecen dúas ondas harmónicas transversais unidimensionais que se propagan en sentido contrario, avanzando a de cor verde cara á dereita e a de cor azul cara á esquerda. Cada representación está feita, con respecto á anterior, cun avance de 1/4 de lonxitude de onda ($\lambda/4$).

Obsérvase que hai puntos que permanecen sempre en repouso: son os nodos, N, estando distanciados media lonxitude de onda. Entre cada dous nodos e a mesma distancia hai un punto que vibra con amplitude máxima: son os ventres, V. Os demais puntos vibran con amplitudes intermedias e o seu valor depende da posición da partícula e non do tempo.

Como pode verse na figura, **todos os puntos alcanzados pola onda estacionaria adquiren ó mesmo tempo as posicións centrais, polo que todos eles** (excepto os nodos) **vibran coa mesma frecuencia**.

Como hai puntos (os nodos) que se atopan sempre en repouso, a **onda estacionaria** non viaxa e dá a impresión de que permanece fixa sobre a dirección de propagación e, polo tanto, **non transporta enerxía**, non podendo considerala como onda en sentido estricto (non implica un movemento de avance da perturbación).

Se as ecuacións das ondas que se propagan as expresamos como:

$$y_1(x,t) = A \operatorname{sen}(\omega t - k\,x)$$
$$y_2(x,t) = A \operatorname{sen}(\omega t + k\,x)$$

o estado de perturbación resultante da interferencia vén dado por:

$$y(t) = A\,\text{sen}(\omega t - k\,x) + A\,\text{sen}(\omega t + k\,x)$$

Ó aplicar a fórmula de transformación dunha suma de dous senos nun produto de razóns trigonométricas resulta: $y(t) = 2\,A\cos(k\,x)\,\text{sen}(\omega t)$.

A fase desta ecuación é soamente temporal (como nos movementos harmónicos simples) e non presenta parte espacial (como nas funcións de onda), polo que esta ecuación non representa unha función de onda. Ademais, a amplitude das oscilacións non é a mesma para os distintos puntos, xa que depende de x: $2\,A\cos(k\,x)$.

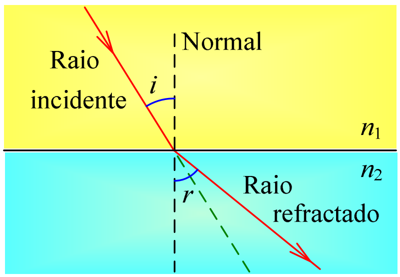
11.- Se o índice de refracción do diamante é 2,52 e o do vidro 1,27: a) a luz propágase con maior velocidade no diamante; b) o ángulo límite entre o diamante e o aire é menor que entre o vidro e o aire; c) cando a luz pasa do diamante ó vidro o ángulo de incidencia é maior que o ángulo de refracción. (*Xuño 05*).

Solución:

a) Para o caso de ondas electromagnéticas defínese o índice de refracción absoluto n dun medio material transparente como: $n = c/v$, sendo c a velocidade da luz no baleiro e v a velocidade da luz nese medio.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} n_{\text{diamante}} = \dfrac{c}{v_{\text{diamante}}} \\ n_{\text{vidro}} = \dfrac{c}{v_{\text{vidro}}} \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{v_{\text{diamante}}}{v_{\text{vidro}}} = \dfrac{\dfrac{c}{n_{\text{diamante}}}}{\dfrac{c}{n_{\text{vidro}}}} = \dfrac{n_{\text{vidro}}}{n_{\text{diamante}}} \\ v_{\text{diamante}} = 2{,}53 \\ v_{\text{vidro}} = 1{,}27 \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{v_{\text{diamante}}}{v_{\text{vidro}}} = \dfrac{1{,}27}{2{,}52} \rightarrow v_{\text{diamante}} < v_{\text{vidro}}$$

b) Cando un raio luminoso pasa desde un medio 1, de índice de refracción n_1, a un medio 2, de índice de refracción n_2, a relación entre o ángulo de incidencia (o formado polo raio incidente coa normal á superficie de separación dos dous medios), i, e o de refracción (o formado polo raio refractado coa normal), r, vén dada pola lei de Snell: $\dfrac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \dfrac{n_2}{n_1}$.



Polo tanto, se $n_1 > n_2 \rightarrow$ sen $r >$ sen i e $r > i$, e o raio refractado afástase da normal á superficie de separación dos dous medios, habendo un ángulo de incidencia, chamado **ángulo límite**, para o cal o ángulo de refracción é de 90º.

Para o caso de que a luz pase do diamante ó aire:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen}} = \frac{n_{\text{aire}}}{n_{\text{diamante}}} \rightarrow \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{1}{2{,}52} \rightarrow \text{sen } i < \text{sen } r \rightarrow i < r$$

Cando r = 90º, o ángulo de incidencia i é o ángulo límite:

$$\text{sen } i_{\text{límite para o diamante-vidro}} = \frac{1}{2,52} = 0,40$$

Para o caso de que a luz pase do vidro ó aire:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{n_{\text{aire}}}{n_{\text{vidro}}} \rightarrow \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{1}{1,27} \rightarrow \text{sen } i < \text{sen } r \rightarrow i < r$$

Cando r = 90º, o ángulo de incidencia i é o ángulo límite:

$$\text{sen } i_{\text{límite para o vidro-aire}} = \frac{1}{1,27} = 0,79$$

O resultado é que **o ángulo límite entre o diamante e o aire é menor que entre o vidro e o aire**.

c) Para o caso de que a luz pase do diamante ó vidro:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{n_{\text{vidro}}}{n_{\text{diamante}}} \rightarrow \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{1,27}{2,52} \rightarrow \text{sen } i < \text{sen } r \rightarrow i < r$$

12.- Tres cores da luz visible, o azul, o amarelo e o vermello, coinciden en que: a) posúen a mesma enerxía; b) posúen a mesma lonxitude de onda; c) propáganse no baleiro coa mesma velocidade. (*Xuño 04*).

Solución:

O que estimula o nervio óptico e nos fai percibir unha determinada cor é a frecuencia de vibración da onda electromagnética visible, podendo relacionar o valor da frecuencia dunha onda visible cunha determinada cor.

Os cuantos de enerxía que as ondas electromagnéticas intercambian (na súa interacción coa materia) mediante fotóns vén dada pola expresión: $E = h \cdot \nu$. Polo tanto, a enerxía da radiación de cada cor, ó corresponderlle unha frecuencia distinta, non é a mesma.

A velocidade de propagación c das ondas electromagnéticas vén dada pola expresión: $c = \lambda \cdot \nu$. Cando as ondas se propagan nun medio non dispersivo, que en sentido estricto só sería o baleiro, aínda que tamén se poden considerar como tal os gases a baixa presión, a medida que aumenta λ diminúe ν, e viceversa, sendo o produto destas dúas magnitudes constante, cun valor de 300.000 km/s.

Polo tanto, resulta que a resposta correcta é a c).

13.- O ángulo límite na refracción auga/aire é de 48,61º. Se se ten outro medio no que a velocidade da luz sexa $v_{\text{medio}} = 0,878 \cdot v_{\text{auga}}$, o novo ángulo límite (medio/aire) será: a) maior; b) menor; c) non se modifica. (*Xuño 04*).

Solución:

Cando unha onda electromagnética pasa desde un medio "1", de índice de refracción n_1 e velocidade v_1, a un medio "2", de índice de refracción n_2 e velocidade v_2, a relación entre o ángulo formado polo raio incidente co normal á superficie de separación dos dous medios (ángulo de incidencia, i) e o ángulo formado polo raio refractado coa normal, (ángulo de refracción, r), vén dada pola lei de Snell:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

Para os datos da cuestión resulta:

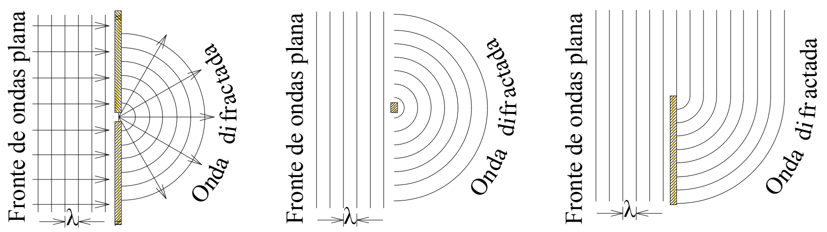
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\text{sen } i_{\text{auga}}}{\text{sen } r_{\text{aire}}} = \dfrac{v_{\text{auga}}}{v_{\text{aire}}} \\ \\ \dfrac{\text{sen } i_{\text{medio}}}{\text{sen } r_{\text{aire}}} = \dfrac{v_{\text{medio}}}{v_{\text{aire}}} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{\text{sen } i_{\text{auga}}}{\text{sen } i_{\text{medio}}} = \dfrac{v_{\text{auga}}}{v_{\text{medio}}} = \dfrac{1}{0{,}878} \\ \\ v_{\text{medio}} = 0{,}878\, v_{\text{auga}} \end{array}\right\} \rightarrow i_{\text{auga}} > i_{\text{medio}}$$

14.- A posibilidade de oír detrás dun obstáculo sons procedentes dunha fonte sonora, que se atopa fóra da nosa vista, é un fenómeno de: a) polarización; b) difracción; c) refracción. (*Set. 03*).

Solución:

Cando unha onda atopa un obstáculo ou atravesa un burato de menor tamaño ou de dimensións comparables á da lonxitude de onda, λ, aparece o **fenómeno de difracción**. É característico do movemento ondulatorio e consiste en que a onda se "abre" no burato ou bordea ó obstáculo, propagándose ó seu arredor.

Cando o foco emisor da onda está a gran distancia do burato que atravesa ou do obstáculo co que se encontra, a fronte de ondas é plana e represéntase con rectas paralelas. A onda emerxente (difractada) é a que se indica no gráfico.



15.- A enerxía dunha onda é proporcional: a) ó cadrado da amplitude; b) á inversa da frecuencia; c) á lonxitude de onda. (*Xuño 03*).

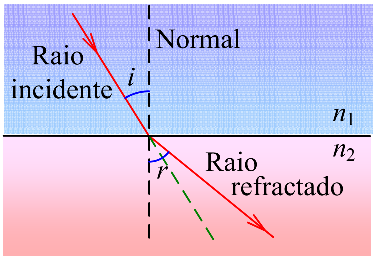
Solución:

A enerxía, E, que transporta unha onda material harmónica unidimensional vén dada pola expresión: $E = 2 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot A^2 \cdot \nu^2$, sendo m a masa da partícula que oscila, A a amplitude e ν a súa frecuencia. Nesta expresión vemos que ***E* é directamente proporcional ó cadrado da amplitude** (ítem a).

16.- Un raio luminoso que viaxa por un medio do que o índice de refracción é n_1, incide con certo ángulo sobre a superficie de separación dun segundo medio de índice n_2 (n_1>n_2). Respecto do ángulo de incidencia, o de refracción será: a) igual; b) maior; c) menor. (*Set. 02*).

Solución:

Cando un raio luminoso pasa desde un medio 1, de índice de refracción n_1, a outro medio 2, de índice de refracción n_2, a relación entre o ángulo de incidencia (o formado polo raio incidente coa normal á superficie de separación dos dous medios), *i*, e o de refracción (o formado polo raio refractado coa normal), *r*, vén dada pola lei de Snell: $\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{n_2}{n_1}$.

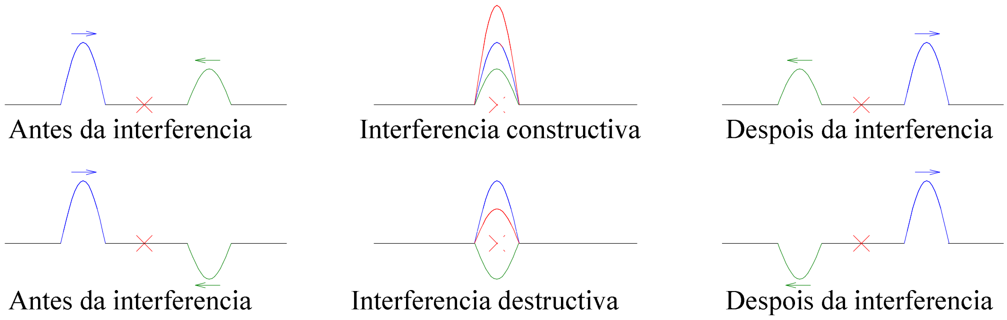


Polo tanto, se n_1>n_2 resulta que $\text{sen } r > \text{sen } i$ e, en consecuencia, r>i: **O ángulo de refracción é maior que o ángulo de incidencia**, como corresponde ó ítem b) da cuestión.

17.- Cando interfiren nun punto dúas ondas harmónicas coherentes, presentan interferencia construtiva se a diferenza de percorridos, Δ*r*, é: a) $\Delta r = (2\,n + 1) \cdot \lambda/2$; b) $\Delta r = (2\,n + 1) \cdot \lambda$; c) $\Delta r = n\,\lambda$ (sendo n = 0, 1, 2, etc. e λ a lonxitude de onda). (*Set. 02*).

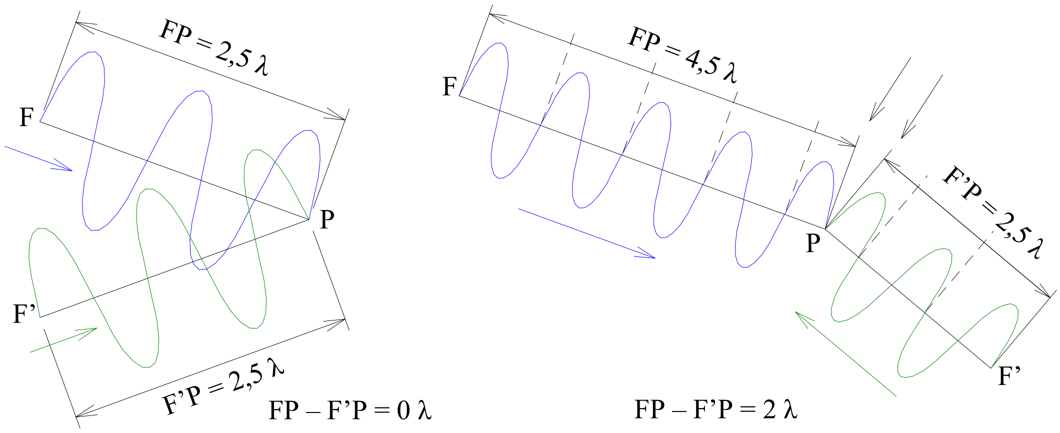
Solución:

A superposición de dúas ou máis ondas nun punto coñécese como interferencia e a perturbación resultante é a suma das perturbacións que produciría cada onda por separado. Nos puntos onde as ondas ó superpoñerse posúen elongacións do mesmo sentido, a elongación resultante é maior que a que corresponde a cada onda por separado e a interferencia dise que é construtiva. Nos puntos nos que as elongacións das ondas que interfiren son de sentido contrario, a elongación resultante é menor que a elongación de cada onda por separado e a interferencia é destrutiva.



Cando a diferenza de fase das ondas que se propagan é constante no tempo, dise que as ondas son coherentes.

Por sinxeleza estudaremos graficamente a interferencia de dúas ondas que, ademais de ser coherentes, teñan a mesma frecuencia, lonxitude de onda, amplitude e fase inicial (ó ser emitidas polos focos F e F'). Para que estas ondas interfiran construtivamente nun punto P é necesario que a diferenza de camiños que percorren sexa de 0λ, 1λ, 2λ, 3λ, ... É dicir, un número enteiro de lonxitudes de onda: $n\lambda$, sendo n un número enteiro.

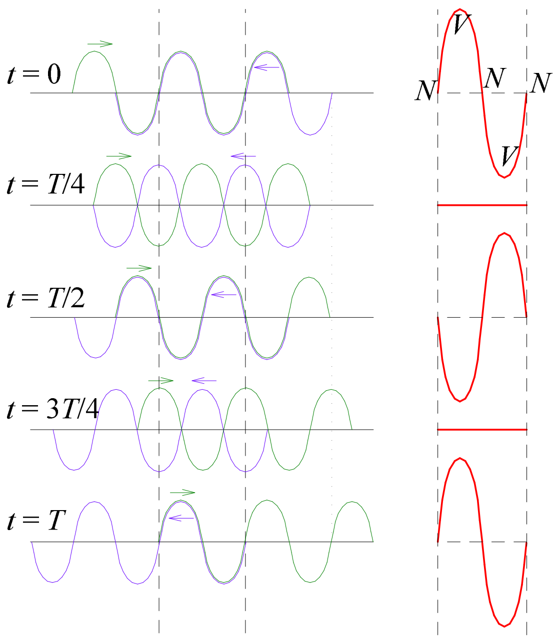


Para o caso das ondas que se representan nos debuxos, vemos que a elongación máxima á que está sometida a partícula P na que interfiren as dúas ondas é dobre da que lle causa unha soa das ondas, tratándose dunha interferencia construtiva.

18.- Cando a interferencia de dúas ondas orixina unha onda estacionaria, esta cumpre: a) a súa frecuencia duplícase; b) a súa amplitude posúe máximos e nulos cada λ/4; c) transporta enerxía proporcional ao cadrado da frecuencia. (*Xuño 02*).

Solución:

As ondas estacionarias constitúen un caso particular de interferencia e fórmanse cando se propagan, nun medio elástico e homoxéneo, co mesmo valor de velocidade, na mesma dirección e en sentidos contrarios, dúas ondas harmónicas da mesma frecuencia, amplitude e lonxitude de onda; isto é: dúas ondas de idénticas características.



A onda estacionaria que resulta (debuxada en cor vermella) é harmónica e de **igual frecuencia** e lonxitude de onda que as ondas compoñentes, sendo **a** súa **amplitude variable para cada punto**. É o que sucede nunha corda que está fixa por un dos seus estremos cando no estremo libre se xera unha onda: a onda incidente e reflectida teñen as mesmas características.

Na figura aparecen dúas ondas harmónicas transversais unidimensionais que se propagan en sentido contrario, avanzando a de cor verde cara á dereita e a de cor azul cara á esquerda. Cada representación está feita, con respecto á anterior, cun avance de 1/4 de lonxitude de onda (λ/4).

Obsérvase que hai puntos que permanecen sempre en repouso: son os nodos, N, estando distanciados media lonxitude de onda. Entre cada dous nodos e á mesma distancia hai un punto que vibra con amplitude máxima: son os ventres, V. Os demais puntos vibran con amplitudes intermedias e o seu valor depende da posición da partícula e non do tempo. Polo tanto, **a amplitude da onda estacionaria posúe máximos e nulos cada λ/4**.

Como os nodos están sempre en repouso, a onda non viaxa (de aí o nome de onda estacionaria) e **a enerxía non se propaga**, non sendo unha onda en sentido estricto (non implica un movemento de avance da perturbación) como imos ver:

Se as ecuacións das ondas que se propagan as expresamos como:

$$y_1(x,t) = A\,\text{sen}\,(\omega t - k\,x)$$
$$y_2(x,t) = A\,\text{sen}\,(\omega t + k\,x)$$

o estado de perturbación resultante da interferencia vén dada por:

$$y(t) = A\,\text{sen}\,(\omega t - k\,x) + A\,\text{sen}\,(\omega t + k\,x)$$

Ó aplicar a fórmula de transformación dunha suma de dous senos nun produto de razóns trigonométricas resulta:

$$y(t) = 2\,A\cos(k\,x)\,\text{sen}\,(\omega t)$$

A fase desta ecuación é soamente temporal (como nos movementos harmónicos simples) e non presenta parte espacial (como nas funcións de onda), polo que esta ecuación non representa unha función de onda. Ademais, a amplitude das oscilacións non é a mesma para os distintos puntos, xa que depende de x: $2\,A\cos(k\,x)$.

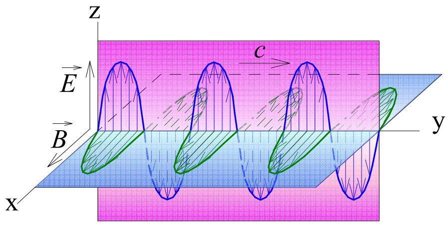
19.- Das seguintes ondas, cales poden ser polarizadas?: a) ondas sonoras; b) luz visible; c) ondas producidas na superficie da auga. (*Xuño 02*).

Solución:

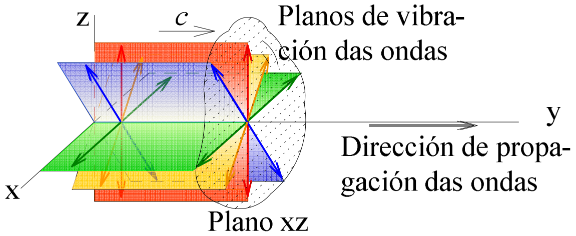
Polarización dunha onda, no seu sentido máis amplo, consiste en limitar, dalgún modo, a forma libre de vibración das partículas do medio. Se conseguimos que a vibración teña lugar nun único plano dise que a onda está polarizada linealmente: as partículas afectadas pola onda efectúan vibracións nunha única dirección, perpendiculares á de propagación.

No caso do son, que é unha onda lonxitudinal, non ten sentido falar de polarización, xa que a dirección de vibración coincide coa dirección de propagación (ó eliminar unha dirección de vibración eliminamos a onda nesa dirección).

A luz visible é unha onda electromagnética e, como toda onda electromagnética, consiste na vibración, en planos perpendiculares, dun campo eléctrico $\vec{E}$ e doutro magnético $\vec{B}$, propagándose nunha dirección perpendicular á dirección perturbación: son ondas transversais.



As ondas electromagnéticas que emite un foco luminoso orixínanse nos átomos (ou moléculas) que forman o foco e cada átomo ó vibrar irradia unha onda, co seu campo eléctrico $\vec{E}$ (e magnético, $\vec{B}$) orientado nunha determinada dirección, que está nun único plano, que é perpendicular á súa dirección de propagación. Pero como o foco está formado por un gran número de átomos (moléculas) que vibran en todas as direccións, a radiación resultante é unha superposición das ondas producidas polos átomos individuais e se a dirección de propagación é a do eixe y, os campos eléctricos (e magnéticos) das ondas individuais vibran en múltiples direccións do plano xz. Na figura adxunta represéntanse as direccións de vibración, e os seus correspondentes planos de vibración, do campo eléctrico de varias ondas que se propagan na dirección do eixe y.



Polo tanto, unha radiación luminosa pode considerarse como un eixe arredor do cal se efectúan vibracións electromagnéticas en todas as direccións perpendiculares ó eixe. Cando se elimina algunha das direccións de vibración conseguimos unha luz polarizada. Se se eliminan todas as direccións de vibración do campo eléctrico (e magnético), excepto as que teñan lugar nunha dirección determinada, obtense unha onda polarizada linealmente. É o que se representa no primeiro dos gráficos e é o que ocorre nas ondas electromagnéticas que emite unha antena: o vector campo eléctrico vibra nun plano que contén á antena.

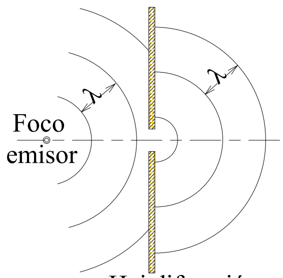
Polo tanto, no caso de unha onda luminosa, o campo eléctrico (e magnético) vibra nunha única dirección, que é perpendicular á dirección de propagación, estando linealmente polarizada; pero **unha radiación luminosa, formada por moitas ondas luminosas** (que cada unha delas vibra en distintos planos), **pode ser polarizada**.

Nas ondas producidas na superficie da auga, a dirección de vibración é vertical e a perturbación avanza na dirección horizontal (onda transversal). Como nesta onda a vibración soamente ten lugar nunha única dirección, de eliminar a dirección de vibración desaparecería a onda, polo que non é unha onda polarizable.

20.- Cando un movemento ondulatorio se atopa na súa propagación cunha fenda de dimensións pequenas comparables ás da súa lonxitude de onda prodúcese: a) polarización: b) onda estacionaria; c) difracción. (*Xuño 01*).

Solución:

Polarizar dunha onda, no seu sentido máis amplo, consiste en limitar dalgún modo a forma libre de vibración das partículas do medio. Que un movemento ondulatorio atope na súa propagación unha fenda non significa a eliminación dalgunha dirección de vibración e, en consecuencia, que se produza polarización.



Hai difracción

As ondas estacionarias fórmanse cando se propagan, nun medio elástico e homoxéneo, co mesmo valor de velocidade, na mesma dirección e en sentido contrario, dúas ondas harmónicas da mesma frecuencia, amplitude e lonxitude de onda. Polo tanto, do feito de que unha onda atravese unha fenda non aparece unha onda estacionaria.

Unha onda que pasa por un burato experimenta o fenómeno de difracción cando a lonxitude de onda, λ, da onda que se propaga é maior ou dun tamaño parecido ó diámetro do burato que atravesa. Como nas condicións da cuestión a lonxitude de onda da onda que se propaga é maior que as dimensións da fenda, **prodúcese**

o fenómeno de difracción.

21.- A enerxía que transporta unha onda é proporcional: a) á frecuencia, b) á amplitude, c) ós cadrados da frecuencia e amplitude. (*Set. 00*).

Solución:

A enerxía, E, que transporta unha onda material harmónica unidimensional vén dada pola expresión: $E = 2 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot A^2 \cdot \nu^2$, sendo m a masa da partícula que oscila, A a amplitude e ν a súa frecuencia. Nesta expresión vemos que ***E* é directamente proporcional ós cadrados da amplitude e da frecuencia** (ítem c) e, en consecuencia, tamén é proporcional (non directamente proporcional) á frecuencia (ítem a) e á amplitude (ítem b).

22.- Cal das expresións propostas representa unha onda transversal que se propaga no sentido positivo do eixe x cunha velocidade de 5 m s^{-1}, ten unha amplitude de 1 m e unha frecuencia de 10 Hz?: a) $y = \cos 2\pi\left(10t - 5x\right)$, b) $y = \cos 2\pi\left(10t + x\right)$, c) $y = \cos 4\pi\left(5t - x\right)$. (*Xuño 00*).

Solución:

A ecuación dunha onda harmónica unidimensional transversal, que se propaga ó longo do eixe x, no seu sentido positivo, e que a vibración ten lugar na dirección do eixe y, é:

$y\left(x,t\right) = A\cos\left(2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot t - \dfrac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot x\right)$, sendo: A, a amplitude; ν, a frecuencia; t, o instante no que se estuda a perturbación; λ, a lonxitude de onda e x a posición do punto do cal se estuda a súa elongación y. Relacionamos agora estas magnitudes cos datos da cuestión:

$A = 1$ m

$\nu = 10$ Hz

$$\left.\begin{array}{l} v = 5\ \mathrm{m\ s^{-1}} \\ v = \dfrac{x}{t} \ \rightarrow\ v = \dfrac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu \end{array}\right\} \rightarrow\ 5 = \lambda \cdot 10\ \rightarrow\ \lambda = 0{,}5\ \mathrm{m}$$

Levando estes datos á ecuación de onda resulta: $y\left(x,t\right) = 1 \cdot \cos\left(20 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x\right)$, que corresponde ó ítem c) da cuestión.

23.- A ecuación dunha onda transversal que se propaga a través dunha corda é $\psi = 0{,}1\ \mathrm{sen}\left[2\pi\left(0{,}4t - 6{,}25x\right)\right]$ (sistema internacional). Determina: a) a amplitude, lonxitude de onda, frecuencia, constante e velocidade de propagación; b) velocidade e aceleración transversal das partículas do medio en $x = 0$, $t = T/2$. (*Set. 99*).

Solución:

a) A ecuación dunha onda harmónica unidimensional que se propaga a través dunha corda no sentido positivo do eixe x e que a vibración ten lugar na dirección do eixe y é:

$$y(x,t) = A \operatorname{sen}(\omega t - k\,x) = A \operatorname{sen}\left(2\,\pi\,\nu\,t - \frac{2\,\pi}{\lambda}\,x\right)$$

Comparando esta ecuación coa ecuación de onda da cuestión, $\psi = 0{,}1 \operatorname{sen}\left[2\,\pi\left(0{,}4\,t - 6{,}25\,x\right)\right]$, resulta:

$A = 0{,}1$ m

$$\frac{2\,\pi}{\lambda} = 2 \cdot \pi \cdot 6{,}25 \;\rightarrow\; \lambda = \frac{1}{6{,}25} \text{ m}$$

$$2 \cdot \pi \cdot \nu = 2 \cdot \pi \cdot 0{,}4 \;\rightarrow\; \nu = 0{,}4 \text{ Hz}$$

$$k = 2 \cdot \pi \cdot 6{,}25 \;\rightarrow\; k = 12{,}50 \cdot \pi \text{ m}^{-1}$$

$$v = \frac{x}{t} \;\rightarrow\; v = \frac{\lambda}{T} \;\rightarrow\; v = \lambda \cdot \nu \;\rightarrow\; v = \frac{1}{6{,}25} \cdot 0{,}4 \;\rightarrow\; v = 0{,}064 \text{ m s}^{-1}$$

b) A velocidade transversal de vibración das partículas obtense derivando a ecuación de onda:

$$v_{\text{transversal}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{0{,}1 \cdot \operatorname{sen}\left[2 \cdot \pi \cdot \left(0{,}4 \cdot t - 6{,}25 \cdot x\right)\right]\right\}$$

$$v_{\text{transversal}} = 0{,}1 \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot \left(0{,}4 \cdot t - 6{,}25 \cdot x\right)\right] \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0{,}4$$

$$v_{\text{transversal}} = 0{,}08 \cdot \pi \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot \left(0{,}4 \cdot t - 6{,}25 \cdot x\right)\right]$$

Para $x = 0$ e $t = T/2$ resulta:

$$v_{\text{transversal}} = 0{,}08 \cdot \pi \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot \left(0{,}4 \cdot \frac{\frac{1}{0{,}4}}{2} - 6{,}25 \cdot 0\right)\right]$$

$$v_{\text{transversal}} = 0{,}08 \cdot \pi \cdot \cos \pi \;\rightarrow\; v_{\text{transversal}} = -\,0{,}08 \cdot \pi \text{ m s}^{-1}$$

Derivando a velocidade de vibración das partículas obtemos a aceleración:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \;\rightarrow\; a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{0{,}08 \cdot \pi \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot \left(0{,}4 \cdot t - 6{,}25 \cdot x\right)\right]\right\}$$

$$a = -\,0{,}08 \cdot \pi \cdot \operatorname{sen}\left[2 \cdot \pi \cdot \left(0{,}4 \cdot t - 6{,}25 \cdot x\right)\right] \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0{,}4$$

$$a = -\,0{,}064 \cdot \pi^2 \cdot \operatorname{sen}\left[2 \cdot \pi \cdot \left(0{,}4 \cdot t - 6{,}25 \cdot x\right)\right]$$

Para $x = 0$ e $t = T/2$ resulta:

$$a = -0,064 \cdot \pi^2 \cdot \text{sen}\left[2 \cdot \pi \cdot \left(0,4 \cdot \frac{\frac{1}{0,4}}{2} - 6,25 \cdot 0\right)\right]$$

$$a = -0,064 \cdot \pi^2 \cdot \text{sen}\,\pi \;\rightarrow\; a = 0 \text{ m s}^{-2}$$

24.- As ondas sonoras cumpren algunha das seguintes características: a) son transversais; b) son lonxitudinais; c) transmítense no baleiro. (*Xuño 99*).

Solución:

As ondas sonoras son mecánicas, necesitando un medio material para propagarse, dependendo a súa velocidade de propagación da natureza do medio. Polo tanto non se transmiten no baleiro.

As ondas sonoras aparecen porque as vibracións do foco emisor se propagan ás partículas do medio en que se encontra e estas transmítenas dunhas a outras e tamén ós outros medios que están en contacto.

Podemos dicir que **as ondas sonoras** aparecen como consecuencia dunha sucesión de compresións e dilatacións do medio en que se propagan, sendo **lonxitudinais** (elementos de volume do medio de propagación móvense paralelamente á dirección de propagación, coincidindo a dirección de propagación da onda coa súa dirección de perturbación).

25.- Nun movemento ondulatorio que se propaga a velocidade constante, a frecuencia e a lonxitude de onda: a) son independentes, b) están relacionadas, c) están relacionadas só se a onda se propaga nun medio material. (*Set. 98*).

Solución:

A velocidade, v, de propagación dunha onda (xa sexa mecánica ou electromagnética) vén dada pola expresión: $v = \lambda \cdot \nu$, sendo ν a frecuencia da onda e λ a súa lonxitude de onda. Se v é constante e λ varía, necesariamente ten que variar ν de modo que o produto $\lambda \cdot \nu$ sexa constante. Polo tanto, **as magnitudes λ e ν están relacionadas**, independentemente de que a onda sexa material ou electromagnética.

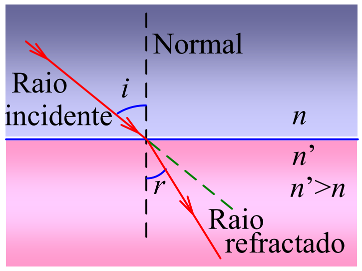
26.- Un raio luminoso que viaxa por un medio de índice de refracción *n*, incide con certo ángulo sobre a superficie de separación dun segundo medio de índice *n'* (*n'*>*n*). Respecto do ángulo de incidencia, o de refracción será: a) igual, b) maior, c) menor. (*Xuño 97*).

Solución:

A relación entre o ángulo formado polo raio incidente coa normal á superficie de separación de dous medios de índices de refracción n e n' (ángulo de incidencia, i) e o ángulo formado polo raio refractado coa normal, (ángulo de refracción, r) vén dada pola lei de Snell: $\dfrac{\text{sen}\, i}{\text{sen}\, r} = \dfrac{n'}{n}$.

Tendo en conta a relación dos valores dos índices de refracción dos dous medios polos que se propaga a onda resulta:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r}=\dfrac{n'}{n}\\[2ex] n'>n\end{array}\right\} \rightarrow \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r}>1 \rightarrow \operatorname{sen} i>\operatorname{sen} r \rightarrow i>r$$



O resultado é que **o ángulo de refracción respecto ó ángulo de incidencia é menor**, como aparece no ítem c) da cuestión.

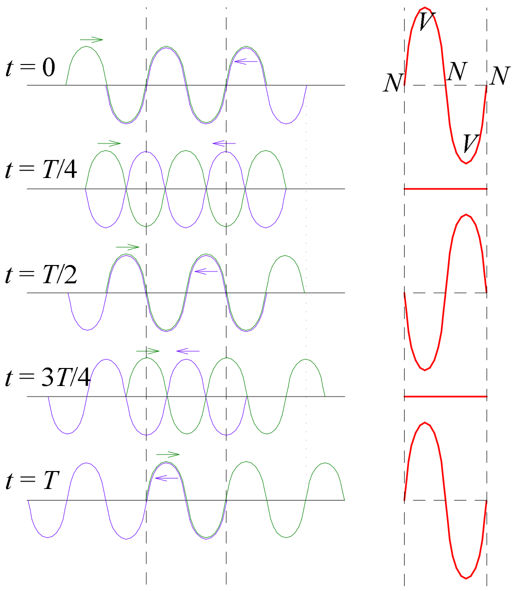
27.- Dos seguintes tipos de ondas dicir cal non é capaz de transportar enerxía, a) as ondas lonxitudinais, b) as ondas transversais, c) as ondas estacionarias. (*Set. 96*).

Solución:

Sabemos que o movemento ondulatorio é a propagación dunha perturbación con transporte de enerxía pero non de masa. Os conceptos de lonxitudinal e transversal aplicados a unha onda só fan referencia á relación que garda a dirección de propagación da perturbación con respecto á dirección de vibración.

As ondas estacionarias constitúen un caso particular de interferencia e fórmanse cando se propagan, nun medio elástico e homoxéneo, coa mesma velocidade, na mesma dirección e en sentido contrario, dúas ondas harmónicas da mesma frecuencia, amplitude e lonxitude de onda; isto é: dúas ondas de idénticas características.

A onda estacionaria que resulta é harmónica e de igual frecuencia e lonxitude de onda que as ondas compoñentes, sendo a súa amplitude variable para cada punto. É o que sucede nunha corda, que está fixa por un dos seus extremos, cando no extremo libre se xera unha onda harmónica: a onda incidente e reflectida teñen as mesmas características.



Na figura aparecen dúas ondas harmónicas transversais unidimensionais que se propagan en sentido contrario, avanzando a de cor verde cara á dereita e a de cor azul cara á esquerda. Cada representación está feita, con respecto á anterior, cun avance de 1/4 de lonxitude de onda ($\lambda/4$).

Obsérvase que hai puntos que permanecen sempre en repouso: son os nodos, N, estando distanciados media lonxitude de onda. Entre cada dous nodos e a mesma distancia hai un punto que vibra con amplitude máxima: son os ventres, V. Os demais puntos vibran con amplitudes intermedias e o seu valor depende da posición da partícula e non do tempo.

Como hai puntos (os nodos) que se atopan sempre en repouso, a **onda estacionaria** non viaxa e dá a impresión de que permanece fixa sobre a dirección de propagación e, polo tanto, **non transporta enerxía**, non podendo considerala como onda en sentido estricto (non implica un movemento de avance da perturbación).

Se as ecuacións das ondas que se propagan as expresamos como:

$$y_1(x,t) = A\,\text{sen}\,(\omega t - k\,x)$$
$$y_2(x,t) = A\,\text{sen}\,(\omega t + k\,x)$$

o estado de perturbación resultante da interferencia vén dada por:

$$y(t) = A\,\text{sen}\,(\omega t - k\,x) + A\,\text{sen}\,(\omega t + k\,x)$$

Ó aplicar a fórmula de transformación dunha suma de dous senos nun produto de razóns trigonométricas resulta:

$$y(t) = 2\,A\cos(k\,x)\,\text{sen}\,(\omega t)$$

A fase desta ecuación é soamente temporal (como nos movementos harmónicos simples) e non presenta parte espacial (como nas funcións de onda), polo que esta ecuación non representa unha función de onda. Ademais, a amplitude das oscilacións non é a mesma para os distintos puntos, xa que depende de x: $2\,A\cos(k\,x)$.

28.- Considéranse dúas ondas de radio, unha en onda media (AM) de 1000 kHz e outra en frecuencia modulada (FM) de 100 MHz; a) a onda de AM ten maior lonxitude de onda ca de FM; b) a onda de AM ten menor lonxitude ca de FM; c) todas as ondas de radio teñen igual lonxitude de onda. (*Xuño 96*).

Solución:

Sabemos que a velocidade de propagación das ondas de radio (ondas electromagnéticas) no baleiro é constante e vale 300000 km/s. E a relación que hai entre a velocidade, c, a lonxitude de onda, λ, e a frecuencia, ν, dunha onda vén dada pola expresión: $c = \lambda \cdot \nu$.

Substituíndo na igualdade anterior o valor da frecuencia para o caso da onda media (AM) e para o da onda de frecuencia modulada (FM) resulta:

$$\left.\begin{array}{l} v_{\text{AM}} = \lambda_{\text{AM}} \cdot 1000 \cdot 10^3 \\ v_{\text{FM}} = \lambda_{\text{FM}} \cdot 100 \cdot 10^6 \\ v_{\text{AM}} = v_{\text{FM}} = c \end{array}\right\} \rightarrow \lambda_{\text{AM}} \cdot 1000 \cdot 10^3 = \lambda_{\text{FM}} \cdot 100 \cdot 10^6 \rightarrow \frac{\lambda_{\text{AM}}}{\lambda_{\text{FM}}} = 10^2$$

En consecuencia, **a onda de AM ten maior lonxitude de onda ca de FM** ($\lambda_{\text{AM}} = 10^2 \cdot \lambda_{\text{FM}}$), situación que se corresponde co ítem a) da cuestión.

EXERCICIOS DE SELECTIVIDADE (Problemas)

1.- Unha onda harmónica transversal propágase na dirección do eixe x: $y(x,t) = 0{,}5\ \mathrm{sen}\,(4\,x - 6\,t)$ (SI). Calcula: a) a lonxitude de onda, a frecuencia coa que vibran as partículas do medio e a velocidade de propagación da onda; b) a velocidade dun punto situado en $x = 1$ m no instante $t = 2$ s; c) os valores máximos da velocidade e da aceleración. ***(Set. 08).***

Solución:

a) A ecuación dunha onda harmónica unidimensional, que se propaga no sentido positivo do eixe x e que a vibración ten lugar na dirección do eixe y, é:

$$y(x,t) = A\,\mathrm{sen}\,(k\cdot x - \omega\cdot t) = A\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\cdot\pi}{\lambda}\cdot x - 2\cdot\pi\cdot\nu\cdot t\right)$$

Comparando esta ecuación coa ecuación de onda dada, $y(x,t) = 0{,}5\ \mathrm{sen}\,(4\,x - 6\,t)$, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} k = \dfrac{2\,\pi}{\lambda} \\ k = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{2\,\pi}{\lambda} = 4 \rightarrow \boxed{\lambda = \frac{\pi}{2}\ \mathrm{m}}$$

$$2\,\pi\,\nu = 6 \rightarrow \boxed{\nu = \frac{3}{\pi}\ \mathrm{Hz}}$$

$$\left.\begin{array}{r} v = \dfrac{x}{t} \rightarrow v = \dfrac{\lambda}{T} \rightarrow v = \lambda\,\nu \\ \lambda = \dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{m} \\ \nu = \dfrac{3}{\pi}\,\mathrm{Hz} \end{array}\right\} \rightarrow v = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{\pi} \rightarrow \boxed{v = \frac{3}{2}\ \mathrm{m\,s^{-1}}}$$

b) A velocidade transversal de vibración dun punto do medio afectado polo onda obtense derivando a ecuación de movemento:

$$v_{\text{transversal}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[0{,}5\cdot\mathrm{sen}\,(4\,x - 6\,t)\right] = 0{,}5\cdot\cos\,(4\,x - 6\,t)\cdot(-6) = -3\cdot\cos\,(4\,x - 6\,t)$$

Para o punto situado en $x = 1$ m e no instante $t = 2$ s resulta:

$$v_{\text{transversal}} = -3\cdot\cos\,(4\cdot 1 - 6\cdot 2) \rightarrow \boxed{v_{\text{transversal}} = 0{,}44\ \mathrm{m\,s^{-1}}}$$

c) O módulo da velocidade é máximo cando o valor absoluto do coseno sexa máximo: $\cos\,(4\,x - 6\,t) = \pm 1$.

$$\boxed{\left|v_{\text{transversal máxima}}\right| = 3\ \mathrm{m\,s^{-1}}}$$

Derivando a velocidade de vibración das partículas obtemos a aceleración:

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \;\rightarrow\; a=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[-3\cdot\cos\left(4\,x-6\,t\right)\right]=-18\cdot\operatorname{sen}\left(4\,x-6\,t\right)$$

O módulo da aceleración é máximo cando o valor absoluto do seno sexa máximo: $\operatorname{sen}\left(4\,x-6\,t\right)=\pm 1$, resultando: $\boxed{\left|a_{\text{máxima}}\right|=18\ \mathrm{m\,s^{-2}}}$.

2.- A ecuación dunha onda sonora que se propaga na dirección do eixe x é $y=4\operatorname{sen}\,2\,\pi\left(330\,t-x\right)$ (SI). Acha: a) a velocidade de propagación; b) a velocidade máxima de vibración dun punto do medio no que se transmite a onda; c) define a enerxía dunha onda harmónica. ***(Set. 08).***

Solución:

a) A ecuación dunha onda harmónica unidimensional, que se propaga no sentido positivo do eixe x e que a vibración ten lugar na dirección do eixe y, é: $y(t,x)=A\operatorname{sen}\left(\omega t-k\,x\right)$.

Comparando esta ecuación coa ecuación de onda da cuestión, $y=4\operatorname{sen}\left(660\,\pi\,t-2\,\pi\,x\right)$, resulta:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} v=\dfrac{x}{t}\;\rightarrow\; v=\dfrac{\lambda}{T}\\[2mm] k=\dfrac{2\,\pi}{\lambda}\;\rightarrow\;\lambda=\dfrac{2\,\pi}{k}\\[2mm] \omega=\dfrac{2\,\pi}{T}\;\rightarrow\; T=\dfrac{2\,\pi}{\omega}\end{array}\right\}\rightarrow\; v=\dfrac{\dfrac{2\,\pi}{k}}{\dfrac{2\,\pi}{\omega}}\;\rightarrow\; v=\dfrac{\omega}{k}\\[8mm] \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\omega=660\,\pi\ \mathrm{rad/s}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k=2\,\pi\ \mathrm{m^{-1}}\end{array}\right\}\rightarrow\; v=\frac{660\,\pi}{2\,\pi}\;\rightarrow\;\boxed{v=330\ \mathrm{m\,s^{-1}}}$$

b) A velocidade transversal de vibración dun punto do medio afectado pola onda obtense derivando a ecuación de onda:

$$v_{\text{transversal}}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[4\operatorname{sen}\,2\,\pi\left(330\,t-x\right)\right]=4\cdot 2\cdot\pi\cdot 330\cdot\cos\left[2\,\pi\left(330\,t-x\right)\right]$$

A velocidade de vibración é máxima cando a función coseno toma o valor 1: $\boldsymbol{v_{\text{máxima}}}=$ **$8{,}3\cdot 10^{3}$ m/s**.

c) Cando unha onda chega a un punto, este empeza a vibrar e adquire enerxía cinética; simultaneamente, ó desprazalo da súa posición de equilibrio, adquire enerxía potencial. Polo tanto, a propagación dunha onda leva consigo un transporte de enerxía.

Consideremos que o foco realiza un m.h.s., aparecendo unha onda mecánica que se propaga por un medio material. A enerxía que transmite a onda harmónica produce un movemento harmónico simple das partículas do medio alcanzadas pola perturbación. Estas partículas posúen unha enerxía mecánica que é constante e será:

· Soamente cinética: na posición de equilibrio, cando a elongación é cero.

· Soamente potencial: nos puntos de máxima elongación.

· Cinética e potencial: para outra posición calquera da vibración.

Imos facer o cálculo da enerxía dunha onda harmónica para o caso máis sinxelo: cando está na posición de equilibrio, no que toda a súa enerxía está en forma de enerxía cinética.

$$E_{\text{total}} = E_{\text{k máx.}} = \frac{1}{2} m\, v^2_{\text{máx.}}$$, onde v é a velocidade de vibración do punto

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{A}\ \mathrm{sen}\left(\omega t - k\,x\right)\right] = \mathrm{A}\,\omega \cos\left(\omega t - k\,x\right)$$

Cando $\cos\left(\omega t - k\,x\right) = 1$, a velocidade é máxima: $v_{\text{máx.}} = A\,\omega$, resultando:

$$E_{\text{total}} = E_{\text{k máx.}} = \frac{1}{2} m\, v^2_{\text{máx.}} = \frac{1}{2} m\, A^2\, \omega^2 = \frac{1}{2} m\, A^2\, \frac{4\,\pi^2}{T^2} = 2\,\pi^2\, m\, A^2\, \nu^2$$

3.- A ecuación dunha onda transversal é $y(t, x) = 0{,}05\cos(5\,t - 2\,x)$ (magnitudes no SI). Calcula: a) os valores de t para os que un punto situado en x = 10 m ten velocidade máxima; b) o tempo que hai de transcorrer para que a onda percorra unha distancia igual a 3 λ; c) esta onda é estacionaria? *(Xuño 07).*

Solución:

a) A velocidade transversal de vibración das partículas do medio alcanzadas pola onda $y(t, x) = 0{,}05\cos(5\,t - 2\,x)$ (m) obtense derivando a ecuación de onda:

$$v_{\text{transversal}} = \frac{\mathrm{d}y(t,x)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[0{,}05 \cdot \cos\left(5\,t - 2\,x\right)\right] \rightarrow v_{\text{transversal}} = -\,0{,}25\ \mathrm{sen}\left(5\,t - 2\,x\right)\ \mathrm{m\ s^{-1}}$$

A $v_{\text{transversal}}$ é máxima (en valor absoluto) cando $\mathrm{sen}\left(5\,t - 2\,x\right) = \pm 1$, correspondéndolle o valor de **0,25 m/s**.

O valor do ángulo ($5t$ − $2x$) para cuxo seno teña o valor de ±1 hai de ser de π/2 ou 3π/2 radiáns, na primeira oscilación, e de $n\pi+\pi/2$ radiáns, en xeral, sendo n un número natural (n = 0, 1, 2, ...).

Polo tanto, para o punto situado en x = 10 m resulta:

$$\left(5\,t - 2\cdot 10\right) = n\,\pi + \pi/2 \rightarrow t = \frac{n\,\pi + \pi/2 + 20}{5} \rightarrow \boxed{t = \left(4{,}31 + 6{,}28\,n\right)\mathrm{s}}$$, sendo $n = 0, 1, 2, ...$

b) O tempo que tarda a onda en percorrer unha distancia igual á lonxitude de onda, λ, é o período, T. Polo tanto, o tempo t que hai de transcorrer para que a onda percorra unha distancia de 3λ será o triplo do período: $t = 3 \cdot T$.

$$\left.\begin{array}{l} \omega = \dfrac{2\pi}{T} \\ \omega = 5 \text{ rad/s} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} T = \dfrac{2\pi}{5} \text{ s} \\ t = 3 \cdot T \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{t = 3{,}8 \text{ s}}$$

c) A ecuación das chamadas ondas harmónicas é da forma: $y(t) = 2\,A \cos(k\,x) \operatorname{sen}(\omega t)$. Nela vemos que a fase é soamente temporal (como nos movementos harmónicos simples) e non presenta parte espacial (como nas funcións de onda). Polo tanto, esta ecuación non representa unha función de onda. Ademais, a amplitude das oscilacións non é a mesma para os distintos puntos, xa que depende de x: $2\,A \cos(k\,x)$, habendo puntos que non vibran: para aqueles valores de x que fan que $\cos(k\,x) = 0$.

Como a ecuación da onda do exercicio non se corresponde á ecuación das ondas estacionarias, ademais de que todos os puntos da onda vibran e vibran coa mesma amplitude, concluímos dicindo que a onda dada non é estacionaria.

4.- Unha onda transmítese ó longo dunha corda. O punto situado en $x = 0$ oscila segundo a ecuación: $y = 0{,}1\ \cos(10\,\pi\,t)$ e outro punto situado en $x = 0{,}03$ m oscila segundo a ecuación: $y = 0{,}1\ \cos(10\,\pi\,t - \pi/4)$. Calcula: a) a constante de propagación, a velocidade de propagación e a lonxitude de onda; b) a velocidade de oscilación dun punto calquera da corda. (*Xuño 06*).

Solución:

a) A ecuación dunha onda harmónica unidimensional, que se propaga a través dunha corda no sentido positivo do eixe x e que a vibración ten lugar na dirección do eixe y, é:

$$y(x,t) = A\cos(\omega\,t - k\,x) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t - \frac{2\pi}{\lambda}\cdot x\right)$$

Comparando esta ecuación xeral coa que corresponde a un punto da corda situado en $x = 0{,}03$ m, $y = 0{,}1\ \cos\left(10\,\pi\,t - \dfrac{\pi}{4}\right)$, resulta:

$$k \cdot x = \frac{\pi}{4} \rightarrow k \cdot 0{,}03 = \frac{\pi}{4} \rightarrow \boxed{k = 26{,}2 \text{ m}^{-1}}$$

$$\left.\begin{array}{l} v=\dfrac{x}{t} \;\rightarrow\; v=\dfrac{\lambda}{T} \\[2em] \left.\begin{array}{l} k=\dfrac{2\,\pi}{\lambda} \\ k=26{,}2\ \text{m}^{-1} \end{array}\right\} \rightarrow\; 26{,}2=\dfrac{2\,\pi}{\lambda} \;\rightarrow\; \lambda=0{,}24\ \text{m} \\[2em] \left.\begin{array}{l} \omega=\dfrac{2\,\pi}{T} \\ \omega=10\,\pi\,\text{s}^{-1} \end{array}\right\} \rightarrow\; 10\,\pi\ =\ \dfrac{2\,\pi}{T} \;\rightarrow\; T=0{,}2\,\text{s} \end{array}\right\} \rightarrow\; v=\frac{0{,}24}{0{,}2} \;\rightarrow\; \boxed{v=1{,}2\ \text{m s}^{-1}}$$

b) A velocidade de oscilación dun punto calquera da corda obtense derivando a ecuación do movemento da corda: $y(x,\ t)=0{,}01\cos\left(10\,\pi\,t-26{,}2\,x\right)$.

$$v_{\text{oscilación}}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\,0{,}1\cdot 10\cdot\pi\cdot\text{sen}\left(10\,\pi\,t-26{,}2\,x\right)$$

$$\boxed{v_{\text{oscilación}}=-\,\pi\,\text{sen}\left(10\,\pi\,t-26{,}2\,x\right)\ \text{m s}^{-1}}$$

5.- Unha onda periódica vén dada pola ecuación: $y(t,x)=10\ \text{sen}\left[2\,\pi\left(50\,t-0{,}20\,x\right)\right]$ en unidades do SI. Calcula: a) a frecuencia, a velocidade de fase e a lonxitude de onda; b) a velocidade máxima dunha partícula do medio e os valores do tempo *t* para os que esa velocidade é máxima (nun punto que dista 50 cm da orixe). (*Set. 05*).

Solución:

a) A ecuación dunha onda harmónica unidimensional que se propaga no sentido positivo do eixe x e que a vibración ten lugar na dirección do eixe y é:

$$y(t,\ x)=A\,\text{sen}\left(\omega\,t-k\,x\right)=A\,\text{sen}\left(2\,\pi\,\nu\,t-\frac{2\,\pi}{\lambda}\,x\right)$$

Comparando esta ecuación coa ecuación de onda do exercicio, $y(t,x)=10\ \text{sen}\left[2\,\pi\left(50\,t-0{,}20\,x\right)\right]$, resulta:

$$2\,\pi\,\nu=2\,\pi\cdot 50 \;\rightarrow\; \boxed{\nu = 50\ \text{Hz}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} v=\dfrac{x}{t} \;\rightarrow\; v=\dfrac{\lambda}{T} \;\rightarrow\; v=\lambda\,\nu \\ \nu=50\,\text{Hz} \end{array}\right\} \rightarrow\; v=\lambda\cdot 50 \\[2em] \left.\begin{array}{l} k=\dfrac{2\,\pi}{\lambda} \\ k=2\,\pi\,0{,}20\ \text{m}^{-1} \end{array}\right\} \rightarrow\; \dfrac{2\,\pi}{\lambda}=2\,\pi\,0{,}20 \;\rightarrow\; \lambda=5\ \text{m} \end{array}\right\} \rightarrow\; v=5\cdot 50 \;\rightarrow\; \boxed{v=250\ \text{m s}^{-1}}$$

b) A velocidade transversal de vibración das partículas obtense derivando a ecuación de onda:

$$v_{\text{transversal}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{10\,\text{sen}\left[2\,\pi\left(50\,t-0,20\,x\right)\right]\right\}$$

$$v_{\text{transversal}} = 10\cdot 2\cdot \pi\cdot 50\cdot \cos\left[2\,\pi\left(50\,t-0,20\,x\right)\right]$$

$$v_{\text{transversal}} = 1000\cdot \pi\cdot \cos\left[2\,\pi\cdot\left(50\,t-0,20\,x\right)\right]$$

Cando $\cos\left[2\,\pi\cdot\left(50\,t-0,20\,x\right)\right]=1$, a velocidade é máxima: $v_{\text{maxima}} = 1000\,\pi\ \text{m s}^{-1}$.

Para x = 50 cm, o valor máximo do coseno (en valor absoluto) ten lugar cando o ángulo φ = $\left[2\,\pi\cdot\left(50\,t-0,20\cdot 0,5\right)\right]$ vale 0 ou π radiáns, na primeira volta, e, en xeral, cando φ = n π rad, sendo n un número natural: n = 0, 1, 2, ...

$$\left[2\,\pi\cdot\left(50\,t-0,10\right)\right]=n\,\pi \;\rightarrow\; 100\,t=0,20+n \;\rightarrow\; \boxed{t=\left(0,002+0,01\,n\right)\text{s}}$$

Polo tanto, para x = 0,50 m a elongación é máxima, por primeira vez, no instante t = 0,002 s e volve a ser máxima cando transcorra un tempo de 0,01·n s; é dicir: cando transcorra un tempo que sexa múltiplo enteiro de medio período.

6.- Unha onda plana propágase na dirección x positiva con velocidade v = 340 m/s, amplitude A = 5 cm e frecuencia ν = 100 Hz (fase inicial φ_0 = 0): a) escribe a ecuación da onda; b) calcula a distancia entre dous puntos cuxa diferenza de fase nun instante dado é 2·π/3. (*Xuño 05*).

Solución:

a) A ecuación dunha onda harmónica unidimensional que se propaga no sentido positivo do eixe x e que a vibración ten lugar na dirección do eixe y é: $y(t,\ x)=A\,\text{sen}\left(\omega\,t-k\,x+\varphi_0\right)$.

A = 5 cm

$$\left.\begin{array}{r}\omega=\dfrac{2\,\pi}{T}=2\,\pi\,\nu\\ \nu=100\ \text{Hz}\end{array}\right\}\rightarrow\; \omega=2\cdot\pi\cdot 100 \;\rightarrow\; \omega=200\,\pi\ \text{rad s}^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l}k=\dfrac{2\,\pi}{\lambda}\\ \left.\begin{array}{r}v=\dfrac{x}{t}\;\rightarrow\; v=\dfrac{\lambda}{T}=\lambda\,\nu\\ v=340\ \text{m s}^{-1}\\ \nu=100\ \text{Hz}\end{array}\right\}\rightarrow\; 340=\lambda 100\;\rightarrow\;\lambda=3,40\ \text{m}\end{array}\right\}\rightarrow\; k=\frac{2\,\pi}{3,40}\;\rightarrow\; k=1,85\ \text{m}^{-1}$$

$$y(t,x)=5\cdot 10^{2}\cdot\text{sen}\left(200\cdot\pi\cdot t-\ 1,85\cdot x+0\right)\;\rightarrow\;\boxed{y(t,x)=0,05\cdot\text{sen}\left(200\cdot\pi\cdot t-1,85\cdot x\right)\text{m}}$$

b) Ó ángulo (ω *t* – *k x*) chámaselle fase da onda. Se nun mesmo instante a diferenza de fase entre dous puntos da onda é 2·π/3, a distancia mínima que hai entre estes puntos é:

$$\left.\begin{array}{r}(\omega\cdot t-k\cdot x')-(\omega\cdot t-k\cdot x)=\dfrac{2\,\pi}{3}\;\rightarrow\;k\cdot\Delta\,x=\dfrac{2\,\pi}{3}\\ k=1{,}85\ \mathrm{m^{-1}}\end{array}\right\}\rightarrow\;\boxed{\Delta x=1{,}13\ \mathrm{m}}$$

7.- A función de onda que describe a propagación dun son é: $\boldsymbol{y(t,x)=6\cdot 10^{-2}\cos(628\,t-1{,}90\,x)}$ (magnitudes no sistema internacional). Calcula: a) a frecuencia, a lonxitude de onda e a velocidade de propagación; b) a velocidade e a aceleración máximas dun punto calquera do medio no que se propaga a onda. (*Set. 04*).

Solución:

a) A ecuación dunha onda harmónica unidimensional, que se propaga no sentido positivo do eixe x e que a vibración ten lugar na dirección do eixe y, é: $y(t,\ x)=A\cos(\omega t-k\,x)$.

Comparando esta ecuación coa ecuación de onda da cuestión, $y(t,x)=6\cdot 10^{-2}\cos(628\,t-1{,}90\,x)$, resulta:

$$\left.\begin{array}{l}\omega=\dfrac{2\,\pi}{T}=2\,\pi\,\nu\\ \omega=\ 628\ \mathrm{Hz}\end{array}\right\}\rightarrow\;628=2\cdot\pi\cdot\nu\;\rightarrow\;\boxed{\nu=100\ \mathrm{Hz}}$$

$$\left.\begin{array}{l}k=\dfrac{2\,\pi}{\lambda}\\ k=1{,}90\ \mathrm{m^{-1}}\end{array}\right\}\rightarrow\;1{,}90=\dfrac{2\,\pi}{\lambda}\;\rightarrow\;\boxed{\lambda=3{,}31\ \mathrm{m}}$$

$$\left.\begin{array}{r}v=\dfrac{x}{t}\;\rightarrow\;v=\dfrac{\lambda}{T}\;\rightarrow\;v=\lambda\,\nu\\ \lambda=3{,}31\ \mathrm{m}\\ \nu=100\ \mathrm{Hz}\end{array}\right\}\rightarrow\;v=3{,}31\cdot 100\;\rightarrow\;\boxed{v=331\ \mathrm{m\,s^{-1}}}$$

b) A velocidade transversal de vibración dun punto do medio afectado polo onda obtense derivando a ecuación de movemento:

$$v_{\mathrm{transversal}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[6\cdot 10^{-2}\cdot\cos\ (628\cdot t-1{,}90\cdot x)\right]=-6\cdot 10^{-2}\cdot\mathrm{sen}\,(628\cdot t-1{,}90\cdot x)\cdot 628$$

O módulo da velocidade é máximo cando o valor absoluto do seno sexa máximo:

$$\mathrm{sen}\,(628\cdot t-1{,}90\cdot x)=\pm 1$$

$$\left|v_{\mathrm{tranvsersal\ máxima}}\right|=6\cdot 10^{-2}\cdot 628\;\rightarrow\;\boxed{\left|v_{\mathrm{tranvsersal\ máxima}}\right|=37{,}68\ \mathrm{m\,s^{-1}}}$$

Derivando a velocidade de vibración das partículas obtemos a aceleración:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \rightarrow a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[-6 \cdot 10^{-2} \cdot \operatorname{sen}\left(628 \cdot t - 1{,}90 \cdot x\right) \cdot 628\right]$$

$$a = -6 \cdot 10^{-2} \cdot \cos\left(628 \cdot t - 1{,}90 \cdot x\right) \cdot 628^2$$

O módulo da aceleración é máximo cando o valor absoluto do coseno sexa máximo:

$$\cos\left(628 \cdot t - 1{,}90 \cdot x\right) = \pm 1$$

$$\left|a_{\text{máxima}}\right| = 6 \cdot 10^{-2} \cdot 628^2 \rightarrow \boxed{\left|a_{\text{máxima}}\right| = 2{,}37 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-2}}$$

8.- Por unha corda tensa propágase unha onda transversal con amplitude 5 cm, frecuencia 50 Hz e velocidade de propagación 20 m/s. Calcula: a) a ecuación de onda *y*(*x*,*t*); b) os valores do tempo para os que *y*(*x*,*t*) é máxima na posición *x* = 1 m. (*Xuño 04*).

Solución:

a) A ecuación dunha onda harmónica unidimensional, que se propaga ó longo do eixe x e no seu sentido positivo (cara á dereita) e que a vibración asociada ó movemento harmónico simple ten lugar na dirección do eixe y, vén dada pola expresión: $y\left(x, t\right) = A \operatorname{sen}\left(\omega t - k\, x\right)$, sendo: y a elongación; A a amplitude; ω a pulsación; t o instante no que se estuda o estado de perturbación dunha partícula en torno á súa posición central; k o número de onda e x a distancia da partícula ó longo da dirección de propagación da perturbación.

$$\omega = 2\,\pi\,\nu \rightarrow \omega = 2\,\pi\, 50 \rightarrow \boxed{\omega = 100\,\pi\,\text{s}^{-1}}$$

$$\left.\begin{array}{l} k = \dfrac{2\,\pi}{\lambda} \\ \left.\begin{array}{l} v = \lambda\,\nu \\ v = 20 \text{ m/s} \\ \nu = 50 \text{ Hz} \end{array}\right\} \rightarrow 20 = \lambda \cdot 50 \rightarrow \lambda = 0{,}4 \text{ m} \end{array}\right\} \rightarrow k = \frac{2\,\pi}{0{,}4} \rightarrow k = 5 \cdot \pi \text{ m}^{-1}$$

$$\boxed{y\left(x,\ t\right) = 5 \cdot 10^{-2} \cdot \operatorname{sen}\left(100\,\pi\, t - 5\,\pi\, x\right) \text{m}}$$

b) O módulo da elongación é máximo, $\left|y_{\text{máxima}}\right|$, cando o valor absoluto do seno sexa máximo e, polo tanto: $\operatorname{sen}\left(100\,\pi\, t - 5\,\pi\, x\right) = \pm 1$, ó que lle corresponde un ángulo, na primeira circunferencia, de π/2 rad ou de 3π/2 rad e, en xeral, (π/2 + n π) rad, sendo n un número natural: n = 0, 1, 2, ... Igualando e substituíndo x = 1 m resulta:

$$100 \cdot \pi \cdot t - 5 \cdot \pi \cdot 1 = \frac{\pi}{2} + n\,\pi \;\rightarrow\; 100 \cdot t - 5 = 0{,}5 + n \;\rightarrow\; \boxed{t = \left(5{,}5 \cdot 10^{-2} + 10^{-2} \cdot n\right)\,\mathrm{s}}$$

9.- O ángulo límite vidro-auga é de 60º (n_a = 1,33). Un raio de luz que se propaga no vidro incide sobre a superficie de separación cun ángulo de 45º refractándose dentro da auga. Calcula: a) o índice de refracción do vidro; b) o ángulo de refracción na auga. (*Set. 03*).

Solución:

a) A relación do ángulo de incidencia, *i*, e de refracción, *r*, cando un raio de luz pasa desde un medio de índice de refracción n_1 a outro de índice de refracción n_2 vén dada pola lei de Snell: $\frac{\text{sen}\, i}{\text{sen}\, r} = \frac{n_2}{n_1}$.

Polo tanto, se $n_1 > n_2 \rightarrow$ sen r>sen i e $r>i$, e o raio refractado afástase da normal á superficie de separación dos dous medios, habendo un ángulo de incidencia, chamado ángulo límite, para o cal o ángulo de refracción é de 90º. Aplicando estes conceptos ó enunciado do exercicio resulta:

$$\frac{\text{sen}\, i}{\text{sen}\, r} = \frac{n_{\text{auga}}}{n_{\text{vidro}}} \;\rightarrow\; \frac{\text{sen}\, 60^{\text{o}}}{\text{sen}\, 90^{\text{o}}} = \frac{1{,}33}{n_{\text{vidro}}} \;\rightarrow\; \boxed{n_{\text{vidro}} = 1{,}54}$$

b)

$$\frac{\text{sen}\, i}{\text{sen}\, r} = \frac{n_{\text{auga}}}{n_{\text{vidro}}} \;\rightarrow\; \frac{\text{sen}\, 45^{\text{o}}}{\text{sen}\, r} = \frac{1{,}33}{1{,}54} \;\rightarrow\; \boxed{r = 55^{\text{o}}}$$

10.- A ecuación de propagación dun movemento ondulatorio é $y(x,t) = 2\ \text{sen}\left(8\,\pi\, t - 4\,\pi\, x\right)$ (SI). a) Cal é a amplitude, a frecuencia e a velocidade de propagación da onda?; b) cal é (en función do tempo) a velocidade e a aceleración dun punto para o que *x* é constante? (*Set. 01*).

Solución:

a) A ecuación dunha onda harmónica unidimensional, que se propaga no sentido positivo do eixe x e que a vibración ten lugar na dirección do eixe y, é:

$$y(x,\ t) = A\,\text{sen}\left(\omega\, t - k\, x\right) = A\,\text{sen}\left(2\,\pi\,\nu\, t - \frac{2\,\pi}{\lambda}\, x\right)$$

Comparando esta ecuación coa ecuación de onda da cuestión, $y(x,t) = 2\ \text{sen}\left(8\,\pi\, t - 4\,\pi\, x\right)$, resulta:

$$\boxed{A = 2\ \text{m}}$$

$$2 \cdot \pi \cdot \nu = 8 \cdot \pi \;\rightarrow\; \boxed{\nu = 4\,\text{Hz}}$$

$$\left.\begin{array}{l} v = \dfrac{x}{t} \;\rightarrow\; v = \dfrac{\lambda}{T} \\ \left.\begin{array}{l} k = \dfrac{2\,\pi}{\lambda} \\ k = 4\,\pi\ \mathrm{m}^{-1} \end{array}\right\} \rightarrow\; 4\,\pi = \dfrac{2\,\pi}{\lambda} \;\rightarrow\; \lambda = 0{,}5\ \mathrm{m} \\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{T} = \nu \\ \nu = 4\ \mathrm{Hz} \end{array}\right\} \rightarrow\; T = \dfrac{1}{4}\ \mathrm{s} \end{array}\right\} \rightarrow\; v = \dfrac{0{,}5}{\frac{1}{4}} \;\rightarrow\; \boxed{v = 2\ \mathrm{m\ s^{-1}}}$$

b) A velocidade transversal de vibración dun punto do medio afectado polo onda obtense derivando a ecuación de onda:

$$v_{\text{transversal}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[2 \cdot \mathrm{sen}\left(8 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x\right)\right] = 2 \cdot \cos\left(8 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x\right) \cdot 8 \cdot \pi$$

$$\boxed{v_{\text{transversal}} = 16 \cdot \pi \cdot \cos\left(8 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x\right)\ \mathrm{m\ s^{-1}}}$$

Derivando a velocidade de vibración das partículas obtemos a aceleración:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \;\rightarrow\; a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[16 \cdot \pi \cdot \cos\left(8 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x\right)\right]$$

$$a = -16 \cdot \pi \cdot \mathrm{sen}\left(8 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x\right) \cdot 8 \cdot \pi$$

$$\boxed{a = -128 \cdot \pi^2 \cdot \mathrm{sen}\left(8 \cdot \pi \cdot t - 4 \cdot \pi \cdot x\right)\ \mathrm{m\ s^{-2}}}$$

Tema 8. A LUZ E AS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

EXERCICIOS (Cuestións)

1.- Mapa conceptual dos contidos do tema.

Solución:

Ver páxina 298 do texto "Física" de 2º de Bacharelato, Ed. Baía.

2.- Interpreta a expresión: $h\nu = h\nu_0 + \frac{1}{2} m\, v^2_{\text{máx.}}$. (*Selectividade COU; xuño 02*).

Solución:

A expresión indicada é a ecuación de Einstein do efecto fotoeléctrico, na que:

· h é a constante de Planck.
· ν é a frecuencia da radiación incidente.
· ν_0 é a frecuencia mínima da radiación para que se produza o efecto fotoeléctrico. Coñécese como frecuencia limiar e o seu valor é característico de cada metal.
· m é a masa do electrón
· v é a velocidade dos fotoelectróns emitidos.

Se a enerxía da radiación que incide sobre un metal, $h\nu$, é maior que a enerxía necesaria para arrancar un electrón do metal (fotoelectrón), $h\nu_0$, coñecida como traballo de extracción, a enerxía sobrante adquírea o fotoelectrón emitido en forma de enerxía cinética, E_k.

3.- Cantas teorías existen sobre a natureza da luz? A cal vén apoiar o efecto fotoeléctrico? (*Selectividade COU*; *xuño 96*).

Solución:

Inicialmente, a finais do século XVII e comenzos do XVIII, había dúas teorías, a ondulatoria de Huygens e a corpuscular de Newton, para interpretar a natureza da luz. Algunhas das súas propiedades, como a propagación rectilínea, reflexión e refracción, podían ser interpretadas con ambas teorías.

A experiencia de Young de 1801 sobre a interferencia da luz pon en dúbida a teoría corpuscular.

A comprobación experimental de Foucault en 1850 de que a velocidade da luz é maior no aire que na auga e a demostración de Maxwell, en 1873, e posterior confirmación experimental por Hertz en 1885, de que as ondas luminosas e as ondas electromagnéticas producidas por unha corrente eléctrica oscilante son de igual natureza, salvo na visibilidade, parecen confirmar a teoría ondulatoria para a luz.

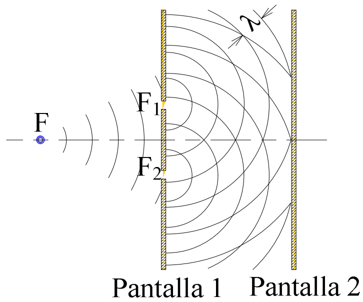
Hertz, en 1887, observa que ó iluminar o cátodo dunha célula fotoeléctrica con luz monocromática soamente se arrancan os fotoelectróns para radiacións con frecuencia superior a un valor mínimo, independentemente da intensidade da radiación. Se a luz fose unha onda, a enerxía E que transporta crecería ó aumentar a intensidade da radiación, $E \propto I$, podendo producirse o efecto fotoeléctrico para calquera frecuencia con tal de que a intensidade da radiación fose o suficientemente grande. En consecuencia non se pode explicar o efecto fotoeléctrico supoñendo para a luz un comportamento ondulatorio. A interpretación deste fenómeno faina Einstein en 1905, supoñendo para a luz unha natureza corpuscular, recibindo estes corpúsculos o nome de fotóns.

Como a natureza ondulatoria da luz e a dos fotóns son evidentes e indiscutibles, hoxe en día considérase como única teoría que a radiación electromagnética posúe o dobre carácter: o ondulatorio e o corpuscular, manifestando unha ou a outra natureza segundo as condicións do fenómeno que se observe.

4.- Describe algún exemplo ou exemplos nos que se poñan de manifesto o dobre comportamento, ondulatorio e corpuscular, da luz. (*Selectividade COU; set. 95*)

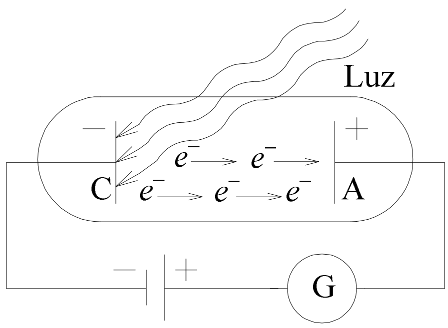
Solución:

A experiencia de Young da dobre abertura pon de manifesto o carácter ondulatorio da luz. Consiste en facer pasar a luz monocromática procedente dun foco puntual, F, a través de dous pequenos buratos, moi próximos entre si (separados menos de 1 cm) e equidistantes do foco emisor de luz, que se abren nunha pantalla opaca. Estes buratos compórtanse, segundo o principio de Huygens, como dous novos focos emisores de luz, F_1 e F_2, de igual amplitude, frecuencia, lonxitude de onda e fase inicial.



Nunha segunda pantalla, colocada despois da primeira e a unha distancia de varios metros, obsérvanse distintas zonas de iluminación, que é máxima cando a diferenza de camiños percorridos sexa un múltiplo enteiro de lonxitudes de onda, $n\lambda$, (interferencia construtiva). Se a diferenza de camiños percorridos polas ondas procedentes dos dous buratos é un número impar de semilonxitudes de onda, $(2n+1)\lambda/2$, a interferencia é destrutiva e aparece a escuridade.

O comportamento corpuscular da luz ponse de manifesto, entre outros, no efecto fotoeléctrico. Consiste na emisión de electróns por parte dalgúns metais ó ser iluminados con radiación visible ou ultravioleta que, independentemente da intensidade da radiación, ha de ter un valor mínimo de frecuencia, chamada frecuencia limiar, ν_0. Isto non concorda coa teoría de onda para a luz, xa que a enerxía dunha onda, ademais de ser proporcional á frecuencia, é directamente proporcional á súa intensidade, de modo que aínda que a frecuencia sexa pequena, se a intensidade é suficientemente grande, a onda debería posuír suficiente enerxía para arrancar os electróns dos átomos.



Tamén se observa que a enerxía cinética dos electróns arrancados non depende da intensidade da radiación utilizada, pero si aumenta co aumento da súa frecuencia. Sen embargo, ó aumentar a intensidade da radiación con frecuencia maior ou igual a frecuencia limiar, $\nu \geq \nu_0$, aumenta de forma directamente proporcional o número de electróns arrancados.

5.- Observouse que cando a frecuencia da radiación que incide sobre unha placa dun metal é *f*, a enerxía cinética dos electróns extraídos é E_k; de se triplicar a frecuencia da radiación incidente, pódese afirmar que a enerxía cinética dos electróns extraídos é $3\,E_k$? Razoa a resposta. (*Selectividade COU*; *set. 92*).

Solución:

A ecuación de Einstein do efecto fotoeléctrico é: $h \cdot f = W_0 + E_k$, sendo h a constante de Planck, f a frecuencia da radiación incidente, W_0 o traballo de extracción (que é característico de cada metal) e E_k a enerxía cinética dos fotoelectróns. Tendo en conta as consideracións da cuestións resulta:

· Para a radiación de frecuencia f:

$$h \cdot f = W_0 + E_k \;\rightarrow\; E_k = h \cdot f - W_0$$

· Para a radiación de frecuencia $f' = 3f$:

$$h \cdot f' = W_0 + E'_k \;\rightarrow\; 3 \cdot h \cdot f = W_0 + E'_k \;\rightarrow\; E'_k = 3 \cdot h \cdot f - W_0$$

Como W_0 é constante (independentemente da frecuencia da radiación incidente) temos que:

$$E'_k = 3 \cdot h \cdot f - W_0 \neq 3 \cdot (h \cdot f - W_0) = 3 \cdot E_k \;\rightarrow\; E'_k \neq 3 \cdot E_k$$

6.- Dá unha explicación do efecto fotoeléctrico e xustifica o aspecto corpuscular da luz. (*Selectividade COU*; *set. 91*).

Solución:

No efecto fotoeléctrico, a enerxía de 1 fotón, $h \cdot \nu$, da radiación monocromática incidente de frecuencia ν, distribúese da seguinte forma:

· Na enerxía necesaria para liberar un electrón dun átomo do metal, que recibe o nome de traballo de extracción, W_0, e

· Na enerxía cinética con que sae o electrón do metal, E_k; segundo a ecuación de Einstein do efecto fotoeléctrico: $h \cdot \nu = W_0 + E_k$.

Con esta teoría, a interpretación do efecto fotoeléctrico é a seguinte:

· O feito de que o efecto fotoeléctrico non se produza para radiacións con frecuencia inferior á frecuencia limiar débese a que se a enerxía do fotón incidente, $h \cdot \nu$, é inferior ó traballo de extracción, W_0, non se chega a arrancar o electrón e, en consecuencia, non se produce o efecto fotoeléctrico por moi intensa que sexa a radiación utilizada, xa que a intensidade inflúe no número de fotóns, pero non na enerxía de cada fotón, que soamente depende da súa frecuencia.

· O feito de que o número de fotoelectróns sexa directamente proporcional á intensidade da radiación débese a que ó aumentar a intensidade, (o número de fotóns), con frecuencia igual ou superior á frecuencia limiar, tamén aumenta o número de fotoelectróns, non variando a súa enerxía cinética ($E_{k\,\text{máx.}} = h \cdot \nu - W_0$) ó non depender da intensidade. Sen embargo, se o que variamos é a frecuencia, tamén varía a $E_{k\ máx}$.

· A interpretación de que o potencial de detención aumenta coa frecuencia e é independente da intensidade da radiación é a seguinte: os electróns de masa m son emitidos polo cátodo cunha velocidade v, adquirindo unha enerxía cinética, E_k, de valor: $E_k = m \cdot v^2/2$. Ó inverter o potencial, os electróns están sometidos a unha forza que os rexeita coa enerxía $e \cdot V_0$ (función traballo). A súa velocidade anúlase cando:

$$\left.\begin{array}{l} e \cdot V_0 = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = E_k \\ E_k = h \cdot \nu - W_0 \end{array}\right\} \rightarrow e \cdot V_0 = h \cdot \nu - W_0$$

Nesta última expresión vemos que o potencial de detención depende da frecuencia da radiación, ν: da enerxía do fotón, $h \cdot \nu$; pero non da súa intensidade: do número de fotóns.

En consecuencia, o efecto fotoeléctrico explícase co comportamento corpuscular da luz, non podendo interpretalo coa teoría ondulatoria, xa que, segundo esta teoría, a enerxía da radiación non soamente depende da súa frecuencia senón tamén da súa intensidade, de modo que aínda que ν sexa pequena, se a intensidade é suficientemente grande, a onda tería suficiente enerxía para poder arrancar o electrón e, en consecuencia, producirse o efecto fotoeléctrico.

7.- De que depende a enerxía dun fotón?

Solución:

A enerxía dun fotón é: $E = h \cdot \nu$, sendo h a constante de Planck e ν a frecuencia da radiación. Polo tanto, **a enerxía dun fotón** soamente **depende da frecuencia da radiación: $E \propto \nu$**.

8.- Con que relacionas o feito de que un fotón de frecuencia ν, que choca cun electrón na superficie dun metal, non logra arrancalo? Se a intensidade da radiación se duplicara (2 fotóns); lograríase arrancar o citado electrón? Nota: $2 \cdot h \cdot \nu > W_{extracción}$.

Solución:

Cando unha radiación electromagnética incide sobre un metal e non logra arrancar electróns débese a que **a enerxía dos fotóns da radiación utilizada, $h\nu$, é menor que a enerxía necesaria para liberar os electróns dos átomos do metal**, traballo de extracción, W_0: $h \cdot \nu < W_0 = h \cdot \nu_0$, sendo h a constante de Planck, ν a frecuencia da radiación utilizada e ν_0 a frecuencia limiar.

Como a enerxía do fotón é independente da intensidade da radiación utilizada, se $\nu < \nu_0$, o fotón non ten suficiente enerxía para arrancar o electrón e, polo tanto, aínda que a enerxía da radiación ($2 \cdot h\,\nu$) sexa superior ó traballo de extracción ($2 \cdot h\,\nu > W_0$), como os fotóns actúan sobre o electrón de forma individual e non de forma simultánea, **non se produce efecto fotoeléctrico**, xa que $h\nu < h\nu_0$.

9.- Un fotón de frecuencia ν logra arrancar un electrón na superficie dun metal, adquirindo unha certa enerxía cinética. Se se triplica a intensidade da radiación, lograrase aumentar a E_k do electrón arrancado? Esta nova radiación causa algunha diferenza na radiación

dos fotoelectróns emitidos con respecto á anterior?

Solución:

No efecto fotoeléctrico, a enerxía dun fotón, $h\nu$, relaciónase co traballo de extracción, W_0, (que é característico de cada metal) e a enerxía cinética, E_k, do fotoelectrón arrancado, segundo a ecuación de Einstein do efecto fotoeléctrico: $h \cdot \nu = W_0 + E_k$, sendo h a constante de Planck e ν a frecuencia da radiación incidente.

Triplicar a intensidade da radiación significa triplicar o número de fotóns da radiación, pero a enerxía de cada fotón non varía (esta soamente depende da frecuencia, ν, da radiación), polo que **a E_k dos fotoelectróns non varía**. Sen embargo, **ó triplicar a intensidade da radiación**, triplícase o número de fotóns, que ó ter enerxía suficiente para arrancar os electróns **tamén se triplica o número de fotoelectróns arrancados**.

10.- Para o caso de que soamente queiramos aumentar a enerxía cinética dos fotoelectróns arrancados dun certo metal facéndolle incidir unha radiación electromagnética, é necesario: a) aumentar a frecuencia e a intensidade da radiación incidente; b) aumentar a intensidade da radiación e c) aumentar a frecuencia da radiación. Elixe de forma razoada a opción que consideres correcta.

Solución:

Algúns metais teñen a propiedade de emitir electróns cando sobre eles se fai incidir radiación electromagnética de determinada frecuencia, ν. A relación entre a enerxía da radiación incidente, $h\nu$, o traballo de extracción, $h\nu_0$, e a enerxía cinética dos fotoelectróns arrancados, E_k, vén dada pola ecuación de Einstein do efecto fotoeléctrico: $h \cdot \nu = h \cdot \nu_0 + E_k$, sendo h a constante de Planck, ν a frecuencia da radiación incidente e ν_0 a frecuencia limiar.

Como o traballo de extracción é característico de cada metal; se queremos **aumentar a enerxía cinética dos fotoelectróns hai que aumentar a** enerxía da radiación incidente, aumentando o valor da súa **frecuencia**.

Aumentar a intensidade da radiación incidente significa aumentar o número de fotóns, sen variar o valor da súa enerxía, tendo como consecuencia un aumento do número de electróns arrancados, non variando o valor da súa enerxía cinética.

Polo tanto, o ítem correcto é o c).

11.- Para o caso de que soamente queiramos aumentar a intensidade da corrente fotoeléctrica facéndolle incidir unha radiación electromagnética a un certo metal, é necesario: a) aumentar a frecuencia e a intensidade da radiación incidente; b) aumentar a intensidade da radiación e c) aumentar a frecuencia da radiación. Elixe de forma razoada a opción que consideres correcta.

Solución:

Segundo o argumentado na cuestión anterior, a opción correcta é a b).

12.- Un chorro de electróns posúe: a) soamente propiedades corpusculares; b) soamente propiedades ondulatorias; c) propiedades corpusculares e ondulatorias.

Solución:

Sabido que a luz presentaba propiedades de onda ou de partícula, segundo as condicións do fenómeno observado; De Broglie estendeu no ano 1924 o carácter dual da luz a calquera partícula (electrón, protón, ···) en movemento, considerando que **toda partícula en movemento leva asociada unha onda**, cunha lonxitude de onda λ que vén dada pola expresión: $\lambda = h/p$, sendo h a constante de Planck e p a cantidade de movemento da partícula. Esta suposición foi confirmada experimentalmente en 1927 ó facer incidir un feixe de electróns sobre un cristal metálico, obténdose imaxes de difracción, cunha λ que se corresponde coa da ecuación de De Broglie. (Ítem c).

A igual que ocorre coas ondas electromagnéticas, os aspectos ondulatorio e de partícula dos corpos en movemento nunca se observan simultaneamente.

13.- Ó observar cun hipotético microscopio a posición e a cantidade de movemento dunha partícula resulta que: a) a incerteza na cantidade de movemento diminúe se empregamos unha radiación de menor lonxitude de onda; b) canto maior sexa a precisión con que se mide a súa cantidade de movemento maior é a incerteza coa que se obtén a súa posición; c) a incerteza na posición diminúe se utilizamos unha radiación de lonxitude de onda maior. Elixe razoadamente a/s opción/s que consideres correcta/s.

Solución:

Para medir a posición, x, dunha partícula temos que iluminala. Os fotóns de luz que a partícula iluminada dispersa permítenos observala e poder medir a súa posición. Se a luz utilizada ten unha lonxitude de onda λ, a difracción que sofre a luz permite fixar a posición da partícula cunha incerteza, Δx, que, como mínimo, ha de ser igual a λ: $\Delta x \geq \lambda$ (o límite de resolución do microscopio é proporcional á lonxitude da luz dispersada). Polo tanto, canto maior sexa λ maior será a incerteza na medida da posición da partícula, Δx.

No caso máis simple, unha partícula (electrón, ···) pode ser detectada cun só fotón, o cal ten unha cantidade de movemento, $\vec{p}_{\text{fotón}}$, que se relaciona coa lonxitude de onda, λ, da radiación utilizada e a constante de Planck, h, segundo a expresión: $p_{\text{fotón}} = \dfrac{h}{\lambda}$. Cando este fotón interacciona coa partícula pode transferirlle toda a súa cantidade de movemento ou só parte dela, modificando a que inicialmente posúe a partícula. Polo tanto, a medida da cantidade de movemento da partícula pode estar afectada pola incerteza de: $\Delta p_{\text{partícula}} \approx \dfrac{h}{\lambda}$. En consecuencia, ó utilizar radiacións de menor lonxitude de onda aumenta a incerteza que se comete na medida na cantidade de movemento da partícula.

O resultado é que canto maior sexa a precisión con que se mide a cantidade de movemento dunha partícula (canto maior sexa λ) maior é a incerteza coa que se obtén a súa posición, e viceversa. Polo tanto, soamente é correcta a opción b) das tres que se presentan na cuestión.

14.- A enerxía dun fotón é directamente proporcional á súa: a) velocidade; b) frecuencia; c) lonxitude de onda.

Solución:

A enerxía dun fotón, E, vén dada pola expresión: $E = h\,\nu$, sendo h a constante de Planck e ν a frecuencia da radiación. Polo tanto, **a enerxía dun fotón é directamente proporcional á frecuencia: $\boldsymbol{E \propto \nu}$**.

No baleiro, a velocidade dun fotón, c, vale $3 \cdot 10^8$ m s^{-1} e é independente da frecuencia. Por outro lado sabemos que a lonxitude de onda, λ, relaciónase coa frecuencia, ν, segundo a expresión: $\lambda = c/\nu$. Polo tanto:

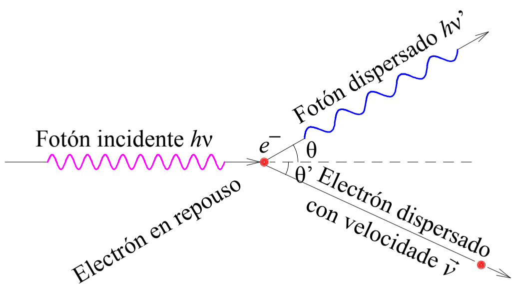
$$\left.\begin{array}{l} E = h\,\nu \\ \lambda = \dfrac{c}{\nu} \;\rightarrow\; \nu = \dfrac{c}{\lambda} \end{array}\right\} \rightarrow\; E = h\,\frac{c}{\lambda}$$

Este resultado dinos que a enerxía dun fotón é directamente proporcional á inversa da lonxitude de onda. Polo tanto, soamente é correcto o ítem b) da cuestión.

15.- Un fotón en movemento choca cun electrón libre, que inicialmente está en repouso. Se o fotón emerxe cun ángulo θ con respecto á súa dirección inicial e o electrón é dispersado cunha velocidade $\vec{v}$ e un ángulo θ', o fotón secundario con respecto ó fotón inicial ten: a) a mesma cantidade de movemento; b) maior lonxitude de onda; c) maior frecuencia. Elixe razoadamente a/s opción/s que consideres correcta/s.

Solución:

Compton encontrou experimentalmente que cando un fotón incide cun electrón case libre e inicialmente en repouso, **a lonxitude de onda, λ', do fotón dispersado é maior que a do fotón incidente, λ,** sendo a diferenza destas lonxitudes de onda soamente función do ángulo θ formado polas direccións destes fotóns, segundo a ecuación: $\lambda' - \lambda = \lambda_C\,(1 - \cos\theta)$. (Ítem b).



A este mesmo resultado se chega aplicando (en termos relativistas) os principios de conservación da enerxía (significa igualar a enerxía do electrón en repouso máis a enerxía do fotón incidente á enerxía do electrón despois do choque máis a enerxía do fotón dispersado) e da cantidade de movemento (hai que igualar a cantidade de movemento do fotón incidente á cantidade de movemento do fotón dispersado máis a cantidade de movemento do electrón dispersado).

O fotón, ó chocar co electrón, diminúe a súa enerxía porque aumenta a enerxía cinética do electrón e, polo tanto, tamén diminúe a súa frecuencia ($E = h\,\nu$) e aumenta a súa lonxitude de onda ($E = h\,c/\lambda$). O fotón tamén intercambia co electrón cantidade de movemento, p:

$$\left.\begin{array}{l} p = m\,c \\ E = m\,c^2 \rightarrow \dfrac{E}{c} = m\,c \end{array}\right\} \rightarrow\; \left.\begin{array}{l} p = \dfrac{E}{c} \\ E = h\,\nu \end{array}\right\} \rightarrow\; \left.\begin{array}{l} p = \dfrac{h\,\nu}{c} \\ c = \lambda\,\nu \end{array}\right\} \rightarrow\; p = \frac{h}{\lambda}$$

Nesta última expresión vemos que ó aumentar a lonxitude de onda do fotón dispersado con respecto á do fotón incidente, tamén diminúe a súa cantidade de movemento, *p*, non permanecendo constante.

16.- As ondas de radio difiren das ondas luminosas en que: a) se propagan a distinta velocidade; b) teñen diferente frecuencia; c) necesitan dun medio material para propagarse. Elixe razoadamente a/s opción/s que consideres correcta/s.

Solución:

Tanto as ondas de radio como as ondas luminosas son ondas electromagnéticas. Estas abarcan unha gamma moi ampla de frecuencias, constituíndo o chamado espectro electromagnético. Segundo o intervalo de frecuencias, as ondas electromagnéticas reciben nomes específicos, entre os que están os de ondas de radio e ondas luminosas.

Todas as ondas electromagnéticas son da mesma natureza: son ondas transversais, formadas por un campo eléctrico e outro magnético oscilantes, que vibran en planos perpendiculares entre si e, á súa vez, perpendiculares á dirección de propagación. Ademais, non necesitan dun medio material para propagarse. No baleiro teñen a velocidade de $3 \cdot 10^8$ m/s. Estas ondas **diferéncianse na** súa **frecuencia** (ítem b).

EXERCICIOS (Problemas)

1.- A enerxía limiar necesaria para extraer un electrón dun átomo de potasio é de 2,0 eV. Se sobre unha mostra de potasio inciden fotóns de lonxitude de onda $\lambda = 4 \cdot 10^{-7}$ m, calcula a enerxía cinética máxima dos fotoelectróns arrancados do metal. Datos: $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J s, carga do electrón: $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

Solución:

A ecuación de Einstein do efecto fotoeléctrico é: $E_{\text{k máx.}} = h\nu - h\nu_0$, sendo h a constante de Planck, ν a frecuencia da radiación incidente e ν_0 a frecuencia limiar (valor mínimo da frecuencia para que sexan arrancados os electróns do metal). O produto $h\,\nu_0$ representa a enerxía limiar necesaria para que teña lugar o efecto fotoeléctrico e coñécese como traballo de extracción.

Sabemos que o electrón-voltio (eV) é a enerxía que adquire un electrón cando se somete á diferenza de potencial de 1 voltio. No sistema internacional esta unidade de enerxía equivale a: 1 eV = $1 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C V = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J, xa que neste sistema de unidades a carga exprésase en culombios, C, e o potencial en voltios, V.

Como ademais sabemos que: $c = \lambda \cdot \nu$, sendo c a velocidade da radiación incidente, $3 \cdot 10^5$ km/s, resulta que:

$$E_{\text{k máx.}} = h \cdot \frac{c}{\lambda} - h \cdot \nu_0$$

Substituíndo queda:

$$E_{\text{k máx.}} = 6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^{-7}} - 2{,}0 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \rightarrow \boxed{E_{\text{k máx.}} = 1{,}77 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}$$

2.- O platino, igual ca outros metais, presenta efecto fotoeléctrico, sendo a súa lonxitude de onda limiar $1{,}96 \cdot 10^{-7}$ m. a) Calcula o seu traballo de extracción. b) Se unha superficie de platino é iluminada por un feixe de luz dun láser que emite con lonxitude de onda $1{,}67 \cdot 10^{-7}$ m, acha a velocidade dos electróns extraídos. Datos: constante de Planck $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J s; velocidade da luz no baleiro $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ m s^{-1}; masa do electrón $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg. (*Selectividade COU*; *set. 97*).

Solución:

a) No efecto fotoeléctrico, a enerxía necesaria para liberar un electrón dun átomo do metal é o que se chama traballo de extracción, W_0, e calcúlase coa expresión: $W_0 = h \cdot \nu_0$, sendo h a constante de Planck e ν_0 a frecuencia limiar.

$$\left.\begin{aligned} W_0 &= h \cdot \nu_0 \\ \nu_0 &= \frac{c}{\lambda_0} \end{aligned}\right\} \rightarrow W_0 = h \cdot \frac{c}{\lambda_0} \rightarrow W_0 = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3{,}00 \cdot 10^8}{1{,}96 \cdot 10^{-7}} \rightarrow \boxed{W_0 = 1{,}015 \cdot 10^{-18}\ \text{J}}$$

b) Cando a frecuencia da radiación incidente, ν, é maior á frecuencia limiar, ν_0; a enerxía sobrante do fotón invístese en comunicarlle unha enerxía cinética, E_k, ó electrón arrancado de acordo coa ecuación de Einstein do efecto fotoeléctrico: $h \cdot \nu = W_0 + E_k$.

$$\left.\begin{array}{r} h\cdot\nu = h\cdot\nu_0 + \dfrac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 \;\rightarrow\; v = \sqrt{\dfrac{2\cdot h\cdot(\nu-\nu_0)}{m}} \\ \nu \;=\; \dfrac{c}{\lambda} \\ \nu_0 \;=\; \dfrac{c}{\lambda_0} \end{array}\right\} \rightarrow\; v = \sqrt{\dfrac{2\cdot h\cdot c\cdot\left(\dfrac{1}{\lambda}-\dfrac{1}{\lambda_0}\right)}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2\cdot 6{,}63\cdot 10^{-34} - 3{,}00\cdot 10^{8} - \left(\dfrac{1}{1{,}67\cdot 10^{-7}} - \dfrac{1}{1{,}96\cdot 10^{-7}}\right)}{9{,}11\cdot 10^{-31}}} \;\rightarrow\; \boxed{v = 6{,}22\cdot 10^{5}\ \mathrm{m\ s^{-1}}}$$

3.- O traballo de extracción fotoeléctrico da superficie do sodio metálico é de 2,0 eV. Determina: a) a velocidade máxima coa que son emitidos os electróns dunha superficie de sodio cando se ilumina con luz de lonxitude de onda $\lambda = 400$ nm; b) a mínima lonxitude de onda, correspondente á frecuencia limiar, necesaria para que sexan emitidos os electróns da superficie metálica. Datos: carga do $e^- = 1{,}60\cdot 10^{-19}$ C; $m_e =$ $9{,}11\cdot 10^{-31}$ kg; $c = 3{,}00\cdot 10^{8}$ m s^{-1}; $h =$ $6{,}63\cdot 10^{-34}$ J s; 1 nm = 10^{-9} m. (*Selectividade COU*; *xuño 97*).

Solución:

a) No efecto fotoeléctrico, a enerxía do fotón da radiación utilizada, $h\nu$, de frecuencia maior á frecuencia limiar, $\nu > \nu_0$, invístese en arrancar ó electrón, W_0, e, a enerxía sobrante, en comunicarlle unha enerxía cinética, E_k, segundo a ecuación de Einstein do efecto fotoeléctrico: $h\cdot\nu = W_0 + \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2$.

$$\left.\begin{array}{l} h\cdot\nu = W_0 + \dfrac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 \\ \nu = \dfrac{c}{\lambda} \end{array}\right\} \rightarrow\; h\cdot\frac{c}{\lambda} = W_0 + \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 \;\rightarrow\; v = \sqrt{\left(h\cdot\frac{c}{\lambda} - W_0\right)\cdot\frac{2}{m}}$$

$$v = \sqrt{\left(6{,}63\cdot 10^{-34}\cdot\frac{3{,}00\cdot 10^{8}}{400\cdot 10^{-9}} - 2{,}0\cdot 1{,}60\cdot 10^{-19}\right)\cdot\frac{2}{9{,}11\cdot 10^{-31}}} \;\rightarrow\; \boxed{v = 6{,}24\cdot 10^{5}\ \mathrm{m\ s^{-1}}}$$

b) No efecto fotoeléctrico, a enerxía do fotón que se necesita para arrancar un electrón dun metal é o que se coñece como traballo de extracción, W_0, e relaciónase coa frecuencia da radiación, segundo a ecuación: $W_0 = h\cdot\nu_0$. Recordando agora a relación da frecuencia da radiación, ν, coa súa lonxitude de onda, λ, e a súa velocidade, c, ($c = \lambda\cdot\nu$), resulta:

$$\left.\begin{array}{l} W_0 = h\cdot\nu_0 \\ \nu_0 = \dfrac{c}{\lambda_0} \end{array}\right\} \rightarrow\; W_0 = h\cdot\frac{c}{\lambda_0} \;\rightarrow\; \lambda_0 = \frac{h\cdot c}{W_0}$$

$$\lambda_0 = \frac{6{,}63\cdot 10^{-34}\cdot 3{,}00\cdot 10^{8}}{2{,}0\cdot 1{,}60\cdot 10^{-19}} \;\rightarrow\; \boxed{\lambda_0 = 6{,}22\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}}$$

4.- Un feixe de luz monocromática de lonxitude de onda $488 \cdot 10^{-9}$ m incide sobre un metal, sendo o traballo de extracción de $3{,}2 \cdot 10^{-19}$ J. Calcula: a) a lonxitude de onda limiar e b) a velocidade dos electróns emitidos. Datos: constante de Planck h = $6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J s, velocidade da luz no baleiro $c = 3 \cdot 10^{8}$ m s^{-1}, masa do electrón $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg. (*Selectividade COU*; *set. 94*).

Solución:

a) No efecto fotoeléctrico, a enerxía necesaria para liberar un electrón dun átomo do metal é o que se chama traballo de extracción, W_0, e, en función da frecuencia, calcúlase coa expresión: $W_0 = h \cdot \nu_0$, sendo h a constante de Planck e ν_0 a frecuencia limiar da radiación.

$$\left.\begin{array}{l} W_0 = h \cdot \nu_0 \\ \nu_0 = \dfrac{c}{\lambda_0} \end{array}\right\} \rightarrow W_0 = h \cdot \frac{c}{\lambda_0} \rightarrow 3{,}2 \cdot 10^{-19} = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^{8}}{\lambda_0} \rightarrow \boxed{\lambda_0 = 6{,}22 \cdot 10^{-7}\ \text{m}}$$

b) Cando a frecuencia da radiación incidente, ν, é maior á frecuencia limiar, ν_0; a enerxía sobrante do fotón invístese en comunicarlle unha enerxía cinética, E_k, ó electrón arrancado de acordo coa ecuación de Einstein do efecto fotoeléctrico: $h \cdot \nu = W_0 + E_k = W_0 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$.

$$\left.\begin{array}{r} h \cdot \nu = W_0 + \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\dfrac{2 \cdot (h \cdot \nu - W_0)}{m}} \\ \nu = \dfrac{c}{\lambda} \end{array}\right\} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(h \cdot c \cdot \dfrac{1}{\lambda} - W_0\right)}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8} \cdot \dfrac{1}{488 \cdot 10^{-9}} - 3{,}2 \cdot 10^{-19}\right)}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} \rightarrow \boxed{v = 4{,}4 \cdot 10^{5}\ \text{m s}^{-1}}$$

EXERCICIOS DE SELECTIVIDADE (Cuestións)

Razoa as respostas ás seguintes cuestións:

1.- Prodúcese efecto fotoeléctrico cando fotóns máis enerxéticos que os visibles, por exemplo luz ultravioleta, inciden sobre a superficie limpa dun metal. De que depende que haxa ou non emisión de electróns?: a) da intensidade da luz; b) da frecuencia da luz e da natureza do metal; c) só do tipo de metal. ***(Set. 08).***

Solución:

Algúns metais teñen a propiedade de emitir electróns cando sobre eles se fai incidir radiación electromagnética de determinada frecuencia, ν. A relación entre a enerxía dos fotóns da radiación incidente, $h\nu$, o traballo de extracción, $h\nu_0$, e a enerxía cinética dos fotoelectróns arrancados, E_k, vén dada pola ecuación de Einstein do efecto fotoeléctrico: $h\,\nu = h\,\nu_0 + E_k$, sendo h a constante de Planck e ν_0 a frecuencia limiar.

O traballo de extracción, que é a enerxía necesaria para liberar un electrón dos átomos do metal, é característico de cada metal. Polo tanto, **para que se produza o efecto fotoeléctrico**, **a radiación incidente hai de ter unha frecuencia mínima** (unha enerxía mínima), chamada frecuencia limiar, de modo que o valor de $h\nu$ iguale, cando menos, á enerxía de extracción do electrón do metal.

Aumentar a intensidade da radiación incidente significa aumentar o número de fotóns, sen variar o valor da súa enerxía, tendo como consecuencia un aumento do número de electróns arrancados.

Polo tanto, o ítem correcto é o b).

2.- Da hipótese de De Broglie, dualidade onda-corpúsculo, derívase como consecuencia: a) que a enerxía total dunha partícula é $E = m \cdot c^2$; b) que as partículas en movemento poden mostrar comportamento ondulatorio; c) que se pode medir simultaneamente e con precisión ilimitada a posición e o momento dunha partícula. ***(Xuño 08).***

Solución:

Hai fenómenos luminosos que son interpretados mediante a teoría ondulatoria (interferencia, polarización, difracción, etc.), mentres que outros hai que interpretalos coa teoría corpuscular (efecto fotoeléctrico e efecto Compton).

Parece que nos encontramos ante un dilema: uns experimentos indican que a luz se comporta como unha onda, cunha lonxitude de onda λ, e outros como un chorro de partículas, cunha cantidade de movemento, p. Como consecuencia considérase que o comportamento das ondas electromagnéticas é dual: nalgúns experimentos ten un comportamento ondulatorio e noutros o seu comportamento é corpuscular.

Isto fixo pensar a L. De Broglie se a materia se podía comportar como unha onda, é dicir, se toda partícula en movemento tería asociada unha onda. De Broglie estendeu no ano 1924 o carácter dual da luz a calquera partícula (electrón, protón, ...) en movemento, considerando que **toda partícula en movemento leva asociada unha onda**, cunha lonxitude de onda λ que vén dada pola expresión: $\lambda = h/p$, sendo h a constante de Planck e p a cantidade de movemento da partícula. Esta suposición foi confirmada experimentalmente en 1927 ó facer incidir un feixe de electróns sobre un cristal metálico, obténdose imaxes de difracción, cunha λ que se corresponde coa da ecuación de De Broglie. (Ítem b).

Por outra banda, a expresión $E = m\,c^2$ é a ecuación de Einstein para a equivalencia masa-enerxía e a frase correspondente ó ítem c) é falsa no que enuncia.

3.- Un metal, cuxo traballo de extracción é 4,25 eV, ilumínase con fotóns de 5,5 eV. Cal é a enerxía cinética máxima dos fotoelectróns emitidos: a) 5,5 eV; b) 1,25 eV; c) 9,75 eV. *(Set. 07)*.

Solución:

A ecuación de Einstein do efecto fotoeléctrico é: $E_{\mathrm{f}} = W_0 + E_{\mathrm{k}}$, sendo E_{f} a enerxía do fotón incidente, W_0 o traballo de extracción do metal e E_{k} a enerxía cinética dos electróns (fotoelectróns) emitidos. Substituíndo valores resulta:

$$E_{\mathrm{f}} = W_0 + E_{\mathrm{k}} \;\rightarrow\; 5{,}5 = 4{,}25 + E_{\mathrm{k}} \;\rightarrow\; E_{\mathrm{k}} = 1{,}25\ \mathrm{eV}$$

4.- A relación entre a velocidade dunha partícula e a lonxitude de onda establécese: a) a través da relación de Einstein masa-enerxía; b) por medio do principio de Heisenberg; c) coa ecuación de De Broglie. *(Xuño 05)*.

Solución:

a) A relación de Einstein masa-enerxía: $E = \Delta m \cdot c^2$, sendo c a velocidade da luz no baleiro, establece a equivalencia entre a cantidade de masa convertida en enerxía e viceversa. Así, se un sistema intercambia cos seus arredores unha enerxía ΔE, a súa masa debe cambiar na cantidade equivalente $\Delta E/c^2$. Polo tanto esta expresión non relaciona a velocidade dunha partícula e a lonxitude de onda asociada.

b) Este ítem tamén é incorrecto xa que o principio de incerteza de Heisenberg establece que existen pares de magnitudes físicas que o medilas simultaneamente, todo incremento de precisión na medida dunha delas entraña unha menor exactitude na medida da outra, de tal modo que o produto dos erros cometidos na medida de dúas magnitudes asociadas é igual ou maior a $h/(2\pi)$. Estas magnitudes asociadas teñen as dimensións de enerxía por tempo.

c) O efecto fotoeléctrico é interpretado por Einstein supoñendo un comportamento de partícula para a radiación electromagnética. Ó interaccionar a onda co electrón, a porción de enerxía que pasa da onda ó electrón, chamada fotón, é sempre fixa e o seu valor depende da frecuencia da onda, ν: $E_{\text{fotón}} = h\nu$, sendo h a constante de Planck.

No efecto Compton, o fotón compórtase como unha partícula, cunha cantidade de movemento, p, que se relaciona coa lonxitude de onda, λ, da onda asociada ó fotón mediante expresión: $p = h/\lambda$.

Chégase a que hai fenómenos luminosos que son interpretados mediante a teoría ondulatoria (interferencia, difracción, ...), mentres que outros hai que interpretalos coa teoría corpuscular (efecto fotoeléctrico, efecto Compton, ...), tendo como resultado un comportamento dual para a luz: onda-corpúsculo. Este comportamento dual foi xeneralizado por **De Broglie** para toda partícula en movemento, establecendo o seguinte principio: a toda partícula en movemento (electrón, protón, ...), de masa m e velocidade v, correspóndelle unha onda, cuxa lonxitude de onda λ vén dada pola expresión:

$\lambda = \dfrac{h}{m\,v}$. Esta hipótese de De Broglie foi confirmada no ano 1927 mediante experimentos de difracción de electróns.

5.- A luz xerada polo Sol: a) está formada por ondas electromagnéticas de diferente lonxitude de onda; b) son ondas que se propagan no baleiro a diferentes velocidades; c) son fotóns da mesma enerxía. (*Set. 04*).

Solución:

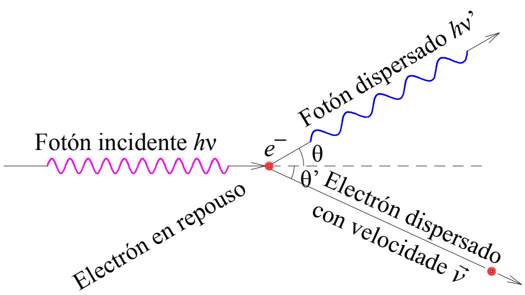
a) O espectro electromagnético que emite o Sol está formado por **ondas electromagnéticas de moi diferente lonxitude de onda**, λ, e frecuencia, ν. Estas ondas non necesitan dun medio material para propagarse e consisten nun campo eléctrico e outro magnético, perpendiculares entre si, que varían periodicamente como unha dobre onda transversal harmónica, sendo, á súa vez, estas vibracións perpendiculares á dirección de propagación da onda, tratándose dunha onda transversal.

b) A velocidade de propagación c das ondas electromagnéticas vén dada pola expresión: $c = \lambda \cdot \nu$. Cando as ondas se propagan nun medio non dispersivo, que en sentido estricto só sería o baleiro, aínda que tamén se poden considerar como tal os gases a baixa presión, a medida que aumenta λ diminúe ν, e viceversa, sendo o produto destas dúas magnitudes constante, cun valor de 300000 km/s.

c) Os cuantos de enerxía que as ondas electromagnéticas intercambian (na súa interacción coa materia) mediante fotóns vén dada pola expresión: $E = h \cdot \nu = h \cdot c/\lambda$, sendo h a constante de Planck. Polo tanto, a enerxía de cada radiación depende do valor da lonxitude de onda.

6.- Cando se dispersan raios X en grafito, obsérvase que emerxen fotóns de menor enerxía que a incidente e electróns de alta velocidade. Este fenómeno pode explicarse por: a) unha colisión totalmente inelástica entre un fotón e un átomo; b) elástica entre un fotón e un electrón; c) elástica entre dous fotóns. *(Set. 04)*.

Solución:



As consideracións da cuestión corresponden ó coñecido efecto Compton. Nel, os raios X, ó incidir sobre os electróns dos átomos de carbono, son dispersados cunha frecuencia menor (cunha lonxitude de onda maior) que a da radiación incidente e, ademais, o electrón adquire unha certa enerxía cinética.

Considerando que o electrón e o fotón se comportan como dúas partículas que efectúan unha colisión elástica, ha de conservarse a enerxía e a cantidade de movemento. Desta forma, Compton chegou á mesma expresión que a obtida experimentalmente: $\lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta)$, sendo λ' e λ, respectivamente, a lonxitude de onda da radiación dispersada e incidente, θ o ángulo formado polas direccións destas dúas radiacións e λ_C unha constante, igual para todas as substancias.

O ítem a) non pode ser correcto porque nun choque inelástico as partículas quedan xuntas. Cando un fotón incide nun átomo, e a súa enerxía non é suficiente para expulsar un electrón, cáusase un salto do electrón a un nivel de enerxía superior e, cando o electrón retorna a un nivel de enerxía máis baixo, emítese un novo fotón.

O ítem c) tampouco é correcto. Nun choque entre dous fotóns, se a enerxía é suficiente e as condicións son adecuadas, prodúcese un par electrón-positrón, de acordo coa ecuación de equivalencia masa-enerxía de Einstein: $E = m \cdot c^2$.

7.- Da hipótese de De Broglie, dualidade onda-corpúsculo, derívase como consecuencia: a) que os electróns poden mostrar comportamento ondulatorio $\lambda = h/p$; b) que a enerxía das partículas atómicas está cuantizada: $E = h\,\nu$; c) que a enerxía total dunha partícula é $E = m\,c^2$. *(Set. 03)*.

Solución:

Hai fenómenos luminosos que son interpretados mediante a teoría ondulatoria (interferencia, difracción, ...), mentres que outros hai que interpretalos coa teoría corpuscular (efecto fotoeléctrico, efecto Compton, ...), tendo como resultado un comportamento dual para a luz: onda-corpúsculo. Este comportamento dual foi xeneralizado por De Broglie para toda partícula en movemento, establecendo o seguinte principio: **a toda partícula en movemento** (electrón, protón, ...), de masa m e velocidade v, **correspóndelle unha onda, cuxa lonxitude de onda λ vén dada pola expresión:** $\lambda = \dfrac{h}{m\,v} = \dfrac{h}{p}$. Esta hipótese de De Broglie foi confirmada no ano 1927 mediante experimentos de difracción de electróns.

Mentres que unha partícula se caracteriza pola súa masa, cantidade de movemento, posición, ...; unha onda identifícase pola súa frecuencia, lonxitude de onda, ... A ecuación $\lambda = h/p$ reúne o aspecto ondulatorio, λ, e o aspecto corpuscular, p, do electrón en movemento: expresa a súa dobre natureza.

A expresión $E = h \cdot \nu$, sendo h a constante de Planck e ν a frecuencia da radiación, corresponde á enerxía dos cuantos que as ondas electromagnéticas intercambian (na súa interacción coa materia) mediante fotóns. Polo tanto, o ítem b) non é correcto.

A expresión $E = \Delta m \cdot c^2$, sendo c a velocidade da luz no baleiro, é a ecuación de Einstein para a equivalencia masa-enerxía e establece a equivalencia entre a cantidade de masa m convertida en enerxía e viceversa. Así, se un sistema intercambia co seu arredor unha enerxía ΔE, a súa masa debe cambiar na cantidade equivalente $\Delta E/c^2$. Polo tanto, o ítem c) non é correcto.

8.- No efecto fotoeléctrico: a) a enerxía cinética dos electróns emitidos depende da intensidade da luz incidente; b) hai unha frecuencia mínima para a luz incidente; c) o traballo de extracción non depende da natureza do metal. *(Xuño 03)*.

Solución:

Algúns metais teñen a propiedade de emitir electróns cando sobre eles se fai incidir radiación electromagnética de determinada frecuencia, ν. A relación entre a enerxía dos fotóns da radiación incidente, $h\,\nu$, o traballo de extracción, $h\,\nu_0$, e a enerxía cinética dos fotoelectróns arrancados, E_k, vén dada pola ecuación de Einstein do efecto fotoeléctrico: $h\,\nu = h\,\nu_0 + E_k$, sendo h a constante de Planck, ν a frecuencia da radiación incidente e ν_0 a frecuencia limiar.

O traballo de extracción é a enerxía necesaria para liberar un electrón dos átomos do metal e é característico de cada metal. Polo tanto, **para que se produza o efecto fotoeléctrico**, **a radiación**

incidente hai de ter unha frecuencia mínima (unha enerxía mínima), chamada frecuencia limiar, de modo que o valor de $h\,\nu$ iguale á enerxía de extracción do electrón do metal.

A enerxía cinética dos fotoelectróns, $E_k = h\,\nu - h\,\nu_0 = h\,\nu - \text{cte.}$, soamente depende da frecuencia ν, sendo independente da intensidade da luz incidente (ó aumentar a intensidade da radiación incidente aumenta o número de fotóns, sen variar o valor da súa enerxía, causando un aumento do número de electróns arrancados, sen variar o valor da súa enerxía cinética).

9.- Se a incerteza na medida na posición dunha partícula é de 6,00 · 10^{-30} m, a incerteza mínima na medida do seu momento lineal é: a) a mesma; b) maior; c) ningunha. (Dato: *h* = 6,62 · 10^{-34} J s). ***(Set. 02).***

Solución:

Sabemos que existen pares de magnitudes físicas que ó medilas simultaneamente, todo incremento de precisión na medida dunha destas magnitudes entraña unha menor exactitude na medida da outra, de tal modo que o produto dos erros cometidos na medida simultánea das dúas magnitudes asociadas é igual ou maior a *h*/2π, sendo *h* a constante de Planck: principio de incerteza de Heisenberg. Estas magnitudes asociadas teñen as dimensións de enerxía por tempo.

Para o caso da medida da posición, *x*, e da cantidade de movemento, *p*, dunha partícula, o produto dos erros correspondentes, Δ*x* e Δ*p*, será: $\Delta x \cdot \Delta p \geq \dfrac{h}{2\,\pi}$. Para o caso da cuestión resulta:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x \cdot \Delta p \geq \dfrac{h}{2\,\pi} \\ \Delta x = 6{,}00 \cdot 10^{-30}\ \text{m} \\ h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \end{array}\right\} \rightarrow\ 6{,}00 \cdot 10^{-30} \cdot \Delta p \geq \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{2\,\pi}\ \rightarrow\ \Delta p \geq 1{,}76 \cdot 10^{-5}\ \text{kg m s}^{-1}$$

O resultado é que **Δ*p* > Δ*x*** e, en consecuencia, o ítem correcto é o b).

10.- A enerxía dun cuanto de luz é directamente proporcional: a) á súa lonxitude de onda; b) á súa frecuencia; c) ó cadrado da velocidade da luz. ***(Set. 01).***

Solución:

A luz propágase polo espazo transportando enerxía, *E*, en cuantos ("paquetes" discretos), que se chaman fotóns, que teñen por enerxía: $E = h \cdot \nu$, sendo *h* a constante de Planck e ν a frecuencia da radiación. Polo tanto, a enerxía dun fotón soamente depende da frecuencia, sendo estas magnitudes directamente proporcionais: $\boldsymbol{E \propto \nu}$. (Ítem b).

No baleiro, a velocidade dun fotón, *c*, vale $3 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}$ e é independente da frecuencia. Por outro lado sabemos que a lonxitude de onda, λ, relaciónase coa frecuencia, ν, segundo a expresión: λ = *c*/ν. Polo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} E = h\,\nu \\ c = \lambda\,\nu\ \rightarrow\ \nu = \dfrac{c}{\lambda} \end{array}\right\} \rightarrow\ E = h\,\frac{c}{\lambda}$$

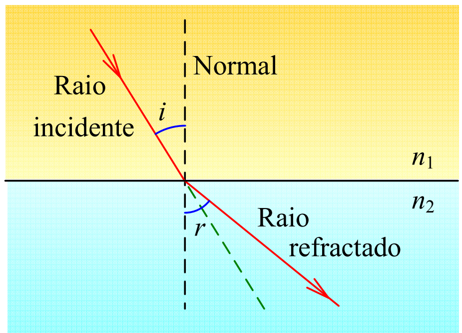
Este resultado dinos que a enerxía dun fotón é directamente proporcional á inversa da lonxitude de onda.

Polo tanto, dos tres ítems propostos, soamente e correcto o ítem b).

11.- Cal dos seguintes fenómenos constitúe unha proba da teoría corpuscular da luz: a) a refracción; b) a difracción; c) o efecto fotoeléctrico. *(Set. 01)*.

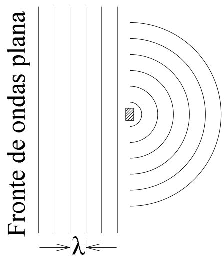
Solución:

a) Cando unha onda luminosa viaxa por un medio homoxéneo e transparente, faino cunha velocidade que depende do medio. Ó chegar á superficie de separación de dous medios e cambiar de medio, varía a súa velocidade e a súa dirección de propagación, coñecéndose este feito co nome de refracción.



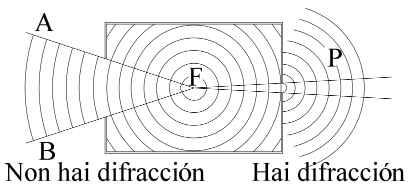
Polo tanto, a refracción é unha propiedade das ondas e consiste no cambio de dirección de propagación que unha onda experimenta cando atravesa a superficie de separación de dous medios de distinto índice de refracción.

A relación entre o ángulo de incidencia, i, e de refracción, r, e a velocidade da onda no medio 1, v_1, e 2, v_2, vén dada pola lei de Snell: $\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{v_1}{v_2}$; que se xustifica supoñendo un comportamento de onda para a luz.



b) A difracción é un fenómeno especificamente ondulatorio, de modo que soamente o presentan as ondas, non podendo ser explicado co concepto de partícula. Consiste na propiedade que teñen as ondas en bordear os obstáculos. Para que a fronte de ondas rodee o obstáculo e se propague ó redor del, o tamaño deste hai de ser igual ou menor que a lonxitude de onda da onda que se propaga.

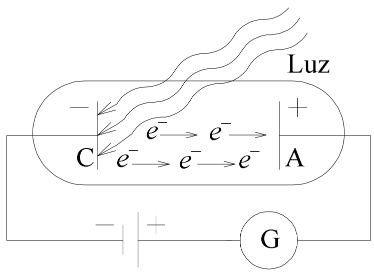
O fenómeno da difracción tamén se pode observar se se trata dunha barreira cunha pequena regaña. Agora o diámetro da regaña hai de ser menor que a lonxitude de onda da onda que se propaga.



Sexa, por exemplo, un foco luminoso F. Se a abertura do tabique é moi grande, fóra do cono AFB non hai luz: non aparece o fenómeno de difracción. Sen embargo, cando esta abertura é do mesmo orde de magnitude que a lonxitude da onda do movemento ondulatorio considerado (preferiblemente menor que esta) aparece nela, segundo o principio de Huygens, un novo foco emisor de ondas, habendo luz no punto P: os raios difráctanse.

c) No efecto fotoeléctrico, que consiste na propiedade que teñen algúns metais de emitir electróns cando son sometidos á acción da radiación visible ou ultravioleta, obsérvase que:

· Soamente se logra arrancar electróns do metal cando a frecuencia, ν, da radiación utilizada é igual ou superior a un valor mínimo, chamado frecuencia limiar, ν_0, sendo independente da intensidade, I, da radiación. Este feito non se pode interpretar coa teoría ondulatoria para a luz, xa que a enerxía dunha onda é directamente proporcional á súa intensidade, $E \propto I$, e se a intensidade é suficientemente grande, a onda debería ter dabondo enerxía para poder arrancar o electrón e, en consecuencia, producirse o efecto fotoeléctrico.



· A enerxía cinética, E_k, dos electróns arrancados é independente da intensidade da radiación e soamente depende da súa frecuencia. A igual que antes, se a luz tivese un comportamento de onda, a enerxía cinética dos fotoelectróns dependería da súa intensidade.

· O número de fotoelectróns arrancados é directamente proporcional a intensidade da radiación e non depende da súa frecuencia.

· O potencial que se necesita para deter os electróns arrancados é directamente proporcional á frecuencia da radiación e non depende da intensidade.

Einstein fai a interpretación destas observacións supoñendo que a luz se propaga polo espazo transportando enerxía en cuantos, chamados fotóns, que teñen unha enerxía que vén dada pola expresión: $E = h \cdot \nu$. Así:

· O feito de que o efecto fotoeléctrico non se produza para radiacións con frecuencia inferior á frecuencia limiar débese a que se a enerxía do fotón incidente, $h \cdot \nu$, é inferior ó traballo de extracción, W_0, que é característico de cada metal, non se chega a arrancar o electrón e, en consecuencia, non se produce o efecto fotoeléctrico por moi intensa que sexa a radiación utilizada, xa que a intensidade inflúe no número de fotóns, pero non na enerxía de cada fotón, que soamente depende da frecuencia.

· O feito de que o número de fotoelectróns sexa directamente proporcional á intensidade da radiación débese a que ó aumentar a intensidade, (o número de fotóns), con frecuencia igual ou superior á frecuencia limiar, tamén aumenta o número de fotoelectróns, non variando a súa enerxía cinética ($E_{k\,máx.} = h \cdot \nu - W_0$) ó non depender da intensidade. Sen embargo, se o que variamos é a frecuencia, tamén varía a $E_{k\,máx}$.

· A interpretación de que o potencial de detención, V_0, aumenta coa frecuencia e é independente da intensidade da radiación é a seguinte: os electróns son emitidos polo cátodo cunha velocidade v, adquirindo unha enerxía cinética, E_k, de valor: $E_k = m \cdot v^2/2$. Ó inverter o potencial, os electróns están sometidos a unha forza que os rexeita coa enerxía $e \cdot V_0$ (función traballo). A súa velocidade anúlase cando:

$$\left.\begin{aligned} e \cdot V_0 &= \frac{1}{2} m \cdot v^2 = E_k \\ E_k &= h \cdot \nu - W_0 \end{aligned}\right\} \rightarrow e \cdot V_0 = h \cdot \nu - W_0$$

Nesta última expresión vemos que o potencial de detención depende da frecuencia da radiación, ν: da enerxía do fotón, $h \cdot \nu$; pero non da súa intensidade: do número de fotóns.

En consecuencia, o efecto fotoeléctrico explícase co comportamento corpuscular da luz, non podendo interpretalo coa teoría ondulatoria, xa que, segundo esta teoría, a enerxía da radiación non soamente depende da súa frecuencia senón tamén da súa intensidade, de modo que aínda que ν sexa pequena, se a intensidade é suficientemente grande, a onda tería dabondo enerxía para poder arrancar o electrón e, en consecuencia, producirse o efecto fotoeléctrico.

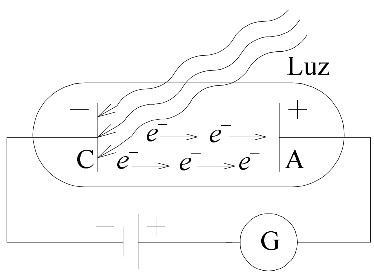
12.- A cantidade de movemento dun fotón vén expresada por: a) $p = m \cdot c^2$; b) $p = h \cdot \nu$; c) $p = h/\lambda$. *(Xuño 01)*.

Solución:

A cantidade de movemento, p, dun fotón vén dada pola expresión: $p = h/\lambda$, sendo h a constante de Planck e λ a lonxitude de onda correspondente ó fotón, como aparece no ítem c) da cuestión. Esta ecuación reúne o aspecto ondulatorio (λ) e o aspecto corpuscular (p): expresa a súa dobre natureza.

13.- No efecto fotoeléctrico cando un fotón interacciona ca materia: a) transfórmase nun fotón de menor enerxía e en enerxía cinética de electróns; b) emprégase en arrincar e acelerar electróns do metal e el desaparece; c) transfórmase en dous fotóns de menor enerxía. (*Set. 00*).

Solución:



O efecto fotoeléctrico consiste en que, cando sobre certos metais se fai incidir radiación electromagnética de frecuencia, ν, superior á frecuencia limiar, ν_0, cada fotón da radiación utilizada arranca un electrón e adquire unha determinada enerxía cinética, desaparecendo o fotón incidente.

A radiación propágase polo espazo transportando enerxía en cuantos, chamados fotóns, coa cantidade de enerxía, E, que vén dada pola expresión: $E = h \cdot \nu$, sendo h a constante de Planck e ν a frecuencia da radiación. Esta enerxía distribúese da seguinte forma:

· Na enerxía necesaria para liberar un electrón dos átomos do metal, que é característica de cada metal e recibe o nome de traballo de extracción: W_0.

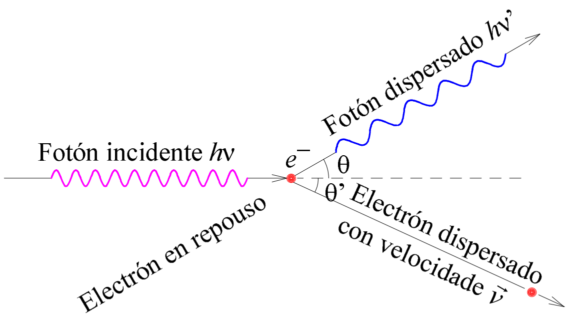
· Na enerxía cinética con que sae o electrón do metal, E_k.

Polo tanto, a enerxía dun fotón emprégase en arrancar e acelerar un electrón do metal e o fotón desaparece (ítem b). Poderiamos dicir que **o electrón é o protagonista**, de modo que **o fotón**, ó interaccionar co metal, aporta a súa enerxía e **"desaparece"** da escena.

14.- No efecto Compton orixínanse: a) fotóns de maior lonxitude de onda e electróns acelerados; b) fotóns de menor e maior frecuencia que os incidentes, c) electróns acelerados. (*Set. 99*).

Solución:

O efecto Compton consiste en que ó bombardear con radiación electromagnética de alta enerxía (RX o raios γ) un electrón case libre (ligado debilmente co núcleo do seu átomo) e inicialmente en repouso, a radiación é dispersada, tendo unha lonxitude de onda maior que a radiación incidente, sendo a diferenza da lonxitude de onda da radiación dispersada, λ', e incidente, λ, soamente función do ángulo θ formado polas direccións destas radiacións, segundo a ecuación: $\lambda' - \lambda = \lambda_C \cdot (1 - \cos\theta)$, onde λ_C é unha constante para todas as substancias, chamada lonxitude de onda de Compton para o electrón.



Por outro lado, o electrón bombardeado tamén é dispersado, adquirindo unha velocidade e, en consecuencia, unha aceleración. Todo sucede como se o fotón e o electrón se comportasen como dúas partículas que efectúan unha colisión elástica, conservándose a cantidade de movemento e a enerxía. Estas son as condicións que marca o item a) da cuestión.

Ó revés que no efecto fotoeléctrico, podemos dicir que no efecto Compton, o **fotón é o protagonista**: O fotón interacciona co electrón (a quen lle comunica parte da súa enerxía e adquire unha certa aceleración) e continúa no medio cunha lonxitude de onda maior.

15.- Nun movemento ondulatorio, que se propaga a velocidade constante, a frecuencia e a lonxitude de onda: a) son independentes, b) están relacionadas, c) están relacionadas só se a onda se propaga nun medio material. (*Set. 98*).

Solución:

No movemento ondulatorio, a velocidade da onda, v, relaciónase coa lonxitude de onda, λ, e a frecuencia, ν, segundo a expresión: $v = \lambda \cdot \nu$. En consecuencia, se v é constante, ó aumentar λ diminúe ν e viceversa e, en consecuencia, **lonxitude de onda e frecuencia están relacionadas**. Polo tanto, o item correcto é o b). Esta relación cúmprese tanto para as ondas mecánicas como para as electromagnéticas.

16.- Determínase a posición dunha partícula cun erro de 10^{-5} m e o seu momento lineal con outro erro de 10^{-7} kg m s^{-1}. a) É imposible, pois viola o principio de indeterminación de Heisenberg, b) é posible xa que non o viola, c) non se pode asegurar, pois compre a enerxía da partícula. Dato: constante de Planck: $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J s. (*Set. 97*).

Solución:

Sabemos que existen pares de magnitudes físicas que ó medilas simultaneamente, todo incremento de precisión na medida dunha destas magnitudes entraña unha menor exactitude na medida da outra, de tal modo que o produto dos erros cometidos na medida simultánea das dúas magnitudes asociadas é igual ou maior a $h/2\pi$, sendo h a constante de Planck: principio de incerteza de Heisenberg. Estas magnitudes asociadas teñen as dimensións de enerxía por tempo.

Para o caso da medida da posición, x, e da cantidade de movemento, p, dunha partícula, o produto dos erros correspondentes, Δx e Δp, será: $\Delta x \cdot \Delta p \geq \dfrac{h}{2\,\pi}$.

Para o caso da cuestión resulta:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta x\cdot\Delta p = 10^{-5}\cdot 10^{-7} = 10^{-12}\ \text{J s} \\ &\frac{h}{2\,\pi} = \frac{6{,}6\cdot 10^{-34}}{2\,\pi} = 1{,}05\cdot 10^{-12}\ \text{J s} \end{aligned}\right\} \rightarrow\ \Delta x\cdot\Delta p > \frac{h}{2\,\pi}$$

Este resultado correspóndese co do ítem b) da cuestión.

17.- Disponse de luz monocromática capaz de extraer electróns dun metal. A medida que medra a lonxitude de onda da luz incidente, a) os electróns emitidos son máis enerxéticos; b) os electróns emitidos son menos enerxéticos; c) a luz monocromática non é capaz de extraer electróns. (*Xuño 96*).

Solución:

No efecto fotoeléctrico, a enerxía transportada por un fotón, E, distribúese na seguinte forma:

· Na enerxía necesaria para liberar un electrón dun átomo do metal, que se coñece como traballo de extracción, W_0, e é característico de cada metal.

· Na enerxía cinética con que sae o electrón do metal, E_k; cumpríndose a ecuación de Einstein do efecto fotoeléctrico: $E = W_0 + E_k$. Polo tanto, canto maior sexa a enerxía do fotón incidente maior será a enerxía cinética dos electróns emitidos.

Fáltanos agora por analizar que relación hai entre a lonxitude de onda, λ, da radiación utilizada e a súa enerxía.

Como a enerxía, E, dun fotón é directamente proporcional á frecuencia da radiación, ν, segundo a expresión: $E = h\,\nu$, (sendo h a constante de Planck), e a frecuencia relaciónase coa lonxitude de onda, λ, e a velocidade, c, segundo a expresión: $c = \lambda\cdot\nu$; resulta que:

$$\left.\begin{aligned} E &= h\cdot\nu \\ \nu &= \frac{c}{\lambda} \end{aligned}\right\} \rightarrow\ E = h\cdot\frac{c}{\lambda}$$

Polo tanto, **ó aumentar a lonxitude de onda** diminúe a enerxía do fotón e, en consecuencia, **os electróns emitidos son menos enerxéticos**, que é o que aparece no ítem b) da cuestión.

EXERCICIOS DE SELECTIVIDADE (Problemas)

1.- O traballo de extracción do cátodo metálico dunha célula fotoeléctrica é 3,32 eV. Sobre el incide radiación de lonxitude de onda λ = 325 nm; calcula: a) a velocidade máxima con que son emitidos os electróns; b) o potencial de freado. Datos: 1 eV = $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ J; 1 *e* = $-1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C; 1 nm = 10^{-9} m; $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J s. *(Xuño 05)*.

Solución:

a) No efecto fotoeléctrico, a enerxía do fotón da radiación utilizada, $h\,\nu$, de frecuencia maior á frecuencia limiar, $\nu > \nu_0$, invístese en arrancar o electrón, W_0, e, a enerxía sobrante, en comunicarlle unha enerxía cinética, E_k, segundo a ecuación de Einstein do efecto fotoeléctrico: $h \cdot \nu = W_0 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$.

$$\left.\begin{array}{l} h \cdot \nu = W_0 + \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \\ \nu = \dfrac{c}{\lambda} \end{array}\right\} \rightarrow h \cdot \frac{c}{\lambda} = W_0 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\left(h \cdot \frac{c}{\lambda} - W_0\right) \cdot \frac{2}{m}}$$

$$v = \sqrt{\left(6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{325 \cdot 10^{-9}} - 3{,}32 \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}\right) \cdot \frac{2}{9{,}11 \cdot 10^{-31}}} \rightarrow \boxed{v = 4{,}2 \cdot 10^5 \text{ m s}^{-1}}$$

b) O potencial de freado V, que anularía a enerxía cinética dos fotoelectróns, é:

$$Q_e \cdot V = \frac{1}{2} m\, v^2 \rightarrow 1{,}60 \cdot 10^{-19} \cdot V = \frac{1}{2} \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot \left(4{,}2 \cdot 10^5\right)^2 \rightarrow \boxed{V = 0{,}5 \text{ V}}$$

2.- Se o traballo de extracción para certo metal é $5{,}6 \cdot 10^{-19}$ J, calcula: a) a frecuencia limiar por debaixo da cal non hai efecto fotoeléctrico nese metal; b) o potencial de freado que se debe aplicar para que os electróns emitidos non cheguen ó ánodo se a luz incidente é de 320 nm. Datos: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J s; 1 nm = 10^{-9} m; $Q_e = -1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C. *(Set. 03)*.

Solución:

a) No efecto fotoeléctrico, a enerxía do fotón que se necesita para arrancar un electrón dun metal é o que se coñece como traballo de extracción, W_0, e relaciónase coa frecuencia da radiación segundo a ecuación: $W_0 = h \cdot \nu_0$, sendo h a constante de Planck e ν_0 a frecuencia limiar.

$$\left.\begin{array}{l} W_0 = h \cdot \nu_0 \\ W_0 = 5{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\ h = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \end{array}\right\} \rightarrow 5{,}6 \cdot 10^{-19} = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot \nu_0 \rightarrow \boxed{\nu_0 = 8{,}45 \cdot 10^{14} \text{ Hz}}$$

b) Cando a frecuencia da radiación incidente, ν, é maior á frecuencia limiar, ν_0; a enerxía sobrante do fotón invístese en comunicarlle ó electrón arrancado unha enerxía cinética, E_k, de acordo coa ecuación de Einstein do efecto fotoeléctrico: $h \cdot \nu = W_0 + E_k$. Relacionando a enerxía cinética dos fotoelectróns co potencial de freado, V, e a frecuencia coa lonxitude de onda, λ, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} h\cdot\nu = W_0 + E_\mathrm{k} \\ E_\mathrm{k} = e\cdot V \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} h\cdot\nu = W_0 + e\cdot V \\ c = \lambda\cdot\nu \;\rightarrow\; \nu = \dfrac{c}{\lambda} \end{array}\right\} \rightarrow h\cdot\frac{c}{\lambda} = W_0 + e\cdot V$$

$$6,63\cdot 10^{-34}\cdot\frac{3\cdot 10^{8}}{320\cdot 10^{-9}} = 5,6\cdot 10^{-19} + 1,60\cdot 10^{-19}\cdot V \;\rightarrow\; \boxed{V = 0,39\ \mathrm{V}}$$

3.- O traballo de extracción de electróns dun metal é de $5\cdot 10^{-19}$ J. Unha luz de lonxitude de onda 375 nm incide sobre o metal; calcula: a) a frecuencia limiar (umbral); b) a enerxía cinética dos electróns extraídos. Datos: constante de Planck, h = $6,62\cdot 10^{-34}$ J s; c = $3\cdot 10^{8}$ m s^{-1}; 1 nm = 10^{-9} m. *(Set. 02).*

Solución:

a) No efecto fotoeléctrico, a enerxía necesaria para liberar un electrón dun átomo do metal é o que se chama traballo de extracción, W_0, e relaciónase coa frecuencia segundo a expresión: $W_0 = h\cdot\nu_0$, sendo h a constante de Planck e ν_0 a frecuencia limiar.

$$W_0 = h\cdot\nu_0 \;\rightarrow\; 5\cdot 10^{-19} = 6,62\cdot 10^{-34}\cdot\nu_0 \;\rightarrow\; \boxed{\nu_0 = 7,55\cdot 10^{14}\ \mathrm{s}^{-1}}$$

b) Cando a frecuencia da radiación incidente, ν, é maior á frecuencia limiar, ν_0; a enerxía sobrante do fotón invístese en comunicarlle unha enerxía cinética, E_k, ó electrón arrancado de acordo coa ecuación de Einstein do efecto fotoeléctrico: $h\cdot\nu = W_0 + E_\mathrm{k}$.

Como ademais sabemos que: $c = \lambda\cdot\nu$, sendo c a velocidade da radiación incidente, $3\cdot 10^{8}$ m/s, resulta que: $E_{\mathrm{k\ máx.}} = h\cdot\dfrac{c}{\lambda} - W_0$.

Substituíndo queda:

$$E_{\mathrm{k\ máx.}} = 6,62\cdot 10^{-34} - \frac{3\cdot 10^{-8}}{375\cdot 10^{-9}} - 5\cdot 10^{-19} \;\rightarrow\; \boxed{E_{\mathrm{k\ máx.}} = 2,96\cdot 10^{-20}\ \mathrm{J}}$$

4.- Nunha célula fotoeléctrica, o cátodo metálico ilumínase cunha radiación de λ = 175 nm, o potencial de freado para os electróns é de 1 V. Cando se usa luz de 200 nm, o potencial de freado é de 1,86 V. Calcula: a) O traballo de extracción do metal e a constante de Planck, h; b) Produciríase efecto fotoeléctrico se se iluminase con luz de 250 nm? Datos: e = $1,6\cdot 10^{-19}$ C; c = $3\cdot 10^{8}$ m s^{-1}; 1 m = 10^{9} nm. *(Xuño 02).*

Solución:

a) Cando a frecuencia da radiación incidente, ν, é maior á frecuencia limiar, ν_0; a enerxía sobrante do fotón invístese en comunicarlle ó electrón arrancado unha enerxía cinética, E_k, de acordo coa ecuación de Einstein do efecto fotoeléctrico: $h\cdot\nu = W_0 + E_\mathrm{k}$. Relacionando agora a enerxía cinética dos fotoelectróns co potencial de freado, V, e a frecuencia coa lonxitude de onda, λ, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} h\cdot\nu = h\cdot\nu_0 + E_k \\ E_k = e\cdot V \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} h\cdot\nu = h\cdot\nu_0 + e\cdot V \\ c = \lambda\cdot\nu \;\rightarrow\; \nu = \dfrac{c}{\lambda} \end{array}\right\} \rightarrow h\cdot\frac{c}{\lambda} = h\cdot\frac{c}{\lambda_0} + e\cdot V$$

Substituíndo nesta última igualdade os datos do enunciado para cando o cátodo metálico se ilumina cunha radiación de λ = 175 nm resulta:

$$h\cdot\frac{3\cdot 10^8}{175\cdot 10^{-9}} = h\cdot\frac{3\cdot 10^8}{\lambda_0} + 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 1 \;\rightarrow\; h\cdot 3\cdot 10^8 - \left(\frac{1}{175\cdot 10^{-9}} - \frac{1}{\lambda_0}\right) = 1{,}6\cdot 10^{-19}$$

Traballando de forma análoga para cando λ = 200 nm temos:

$$h\cdot\frac{3\cdot 10^8}{200\cdot 10^{-9}} = h\cdot\frac{3\cdot 10^8}{\lambda_0} + 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 1{,}86 \;\rightarrow\; h\cdot 3\cdot 10^8 - \left(\frac{1}{200\cdot 10^{-9}} - \frac{1}{\lambda_0}\right) = 2{,}98\cdot 10^{-19}$$

Dividindo membro a membro as dúas últimas igualdades anteriores resulta:

$$\frac{\dfrac{1}{175\cdot 10^{-9}} - \dfrac{1}{\lambda_0}}{\dfrac{1}{200\cdot 10^{-9}} - \dfrac{1}{\lambda_0}} = \frac{1{,}6}{2{,}96} \;\rightarrow\; \lambda_0 = 153\,\text{nm}$$

$$h\cdot 3\cdot 10^8 - \left(\frac{1}{175\cdot 10^{-9}} - \frac{1}{153\cdot 10^{-9}}\right) = 1{,}6\cdot 10^{-19} \;\rightarrow\; \boxed{h = -\,6{,}5\cdot 10^{-34}\ \text{J s}}$$

A constante de Planck é sempre positiva e o resultado obtido débese a que os datos do enunciado están equivocados.

$$\left.\begin{array}{l} W_0 = h\cdot\nu_0 \\ \nu_0 = \dfrac{c}{\lambda_0} \end{array}\right\} \rightarrow W_0 = h\cdot\frac{c}{\lambda_0} \;\rightarrow\; W_0 = -\,6{,}5\cdot 10^{-34}\cdot\frac{3{,}00\cdot 10^8}{152\cdot 10^{-9}} \;\rightarrow\; \boxed{W_0 = -\,1{,}3\cdot 10^{-18}\ \text{J}}$$

O traballo de extracción debería ser positivo.

b) Para que se produza efecto fotoeléctrico, a lonxitude de onda da radiación utilizada debe de ser menor ou igual á lonxitude de onda limiar, λ_0:

$$\left.\begin{array}{l} W_0 = h\cdot\nu_0 \\ \nu_0 = \dfrac{c}{\lambda_0} \end{array}\right\} \rightarrow W_0 = h\cdot\frac{c}{\lambda_0}$$

Se $\lambda > \lambda_0 \rightarrow W < W_0$ e non se produce o efecto fotoeléctrico. Polo tanto, tomando como válido o dato de λ_0 = 153 nm, cando sobre o metal se fai incidir unha radiación de λ = 250 nm **non se producirá** efecto fotoeléctrico.

Nota: Estes malos resultados obtidos débese a que segundo o enunciado do exercicio temos:

· Para unha radiación de lonxitude de onda $\lambda = 175$ nm necesítase un potencial de detención $V = 1$ V e

· Para unha radiación de lonxitude de onda $\lambda = 200$ nm necesítase un potencial de detención $V = 1,86$ V,

sendo estes datos contradictorios: a maior lonxitude de onda maior potencial de detención, cando na realidade a relación destas magnitudes non é directa, senón inversa.

TEMA 9. ÓPTICA XEOMÉTRICA

EXERCICIOS (Cuestións)

1.- Mapa conceptual dos contidos do tema.

Solución:

Ver páxina 333 do texto "Física" de 2º de Bacharelato, Ed. Baía.

2.- Comenta cal é a consideración que se fai para considerar o dioptro plano como un caso particular do dioptro esférico.

Solución:

O dioptro plano pode considerarse como un caso particular do dioptro esférico cando o **raio de curvatura** é **infinito**.

3.- Fai a construción gráfica da imaxe que aparece nun espello esférico cóncavo para os casos de que o obxecto sexa perpendicular ó eixe óptico e estea: a) entre o foco e o centro de curvatura do espello, b) entre o vértice e o foco e c) entre o infinito e o centro de curvatura.

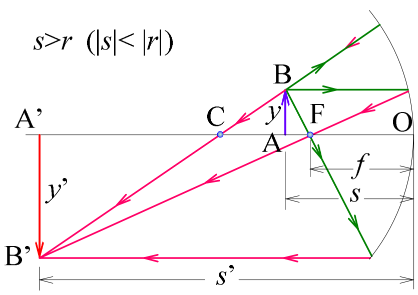
Solución:

A construción gráfica da imaxe realízase buscando a intersección de alomenos dous raios de traxectoria coñecida, despois de que se reflictan no espello. Con este fin recordamos que:

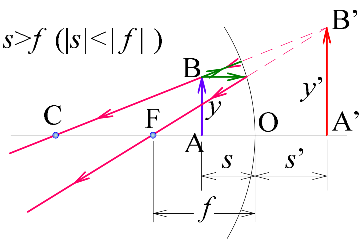
· Todo raio que chega paralelamente ó eixe óptico do espello cóncavo, despois de reflectirse no espello, pasa polo foco F.

· Todo raio que pasa polo foco do espello cóncavo, F, ó reflectirse emerxe paralelamente ó eixe óptico.

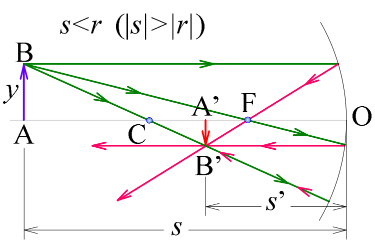
· Todo raio que pasa polo centro de curvatura do espello, C, non sofre desviación.



A imaxe que se forma é real, invertida e de maior tamaño que o obxecto



A imaxe que se forma é virtual, dereita e de maior tamaño que o obxecto



A imaxe que se forma é real, invertida e de menor tamaño que o obxecto

4.- Fai a construción gráfica da imaxe que aparece nunha lente delgada converxente para os casos de que o obxecto sexa perpendicular ó eixe óptico e estea: a) entre o foco, F, e o vértice; b) entre F e 2F; c) a unha distancia maior a dúas veces a distancia focal.

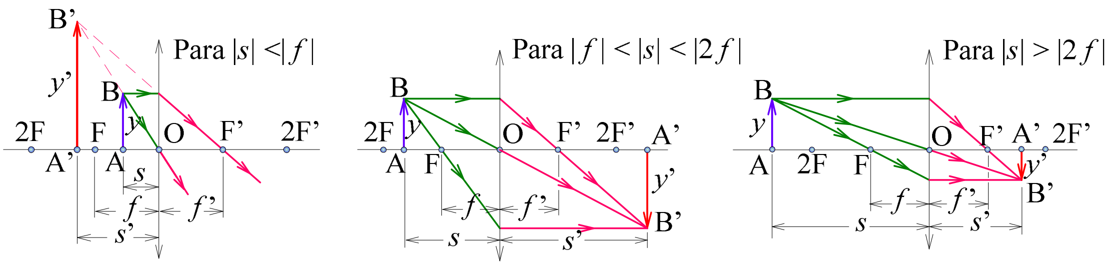
Solución:

A construción gráfica da imaxe formada por unha lente realízase buscando a intersección de alomenos dous raios de traxectoria coñecida, despois de que se refracten na lente. Con este fin recordamos que:

· Todo raio que chega paralelamente ó eixe óptico da lente converxente, despois de refractarse na lente, pasa polo foco imaxe, F'.

· Todo raio que pasa polo foco obxecto, F, ó refractarse na lente converxente, emerxe paralelo ó eixe óptico.

· Todo raio que pase polo centro óptico da lente non sofre desviación.



A imaxe que se forma é virtual, dereita e de maior tamaño que o obxecto

A imaxe que se forma é real, invertida e de maior tamaño que o obxecto, sendo $s' > 2f'$

A imaxe que se forma é real, invertida e de menor tamaño que o obxecto, sendo $f' < s' < 2f'$

5.- Un instrumento óptico sen ningún defecto de construción, causa na imaxe algún defecto? A que se debe?

Solución:

Na práctica, os instrumentos ópticos causan nas imaxes certos defectos, coñecidos co nome de **aberracións**, que **son consecuencia das leis da refracción-reflexión**. Débese a que as imaxes que se obteñen cos instrumentos ópticos non se axustan exactamente ás leis obtidas coas simplificacións de considerar raios paraxiais e luz monocromática.

6.- Que é a dioptría?

Solución:

É unha unidade para expresar a potencia, P, dunha lente ou espello. Esta potencia defínese como a inversa da distancia focal imaxe, f': $P = 1/f'$. Se esta distancia focal se mide en metros, a unidade de potencia é o m^{-1} e coñecese co nome de **dioptría**.

7.- Co criterio de signos DIN indica como é (positiva ou negativa) a distancia imaxe para unha lente: a) converxente e b) diverxente.

Solución:

En función da distancia focal imaxe, *f*', a ecuación fundamental das lentes delgadas, situadas no aire, pode escribirse da forma:

$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'} \rightarrow s'=\frac{s \cdot f'}{f'+s}$, sendo *s* a distancia obxecto e *s*' a distancia imaxe.

Cos correspondentes signos para *f*' e *s*, segundo as normas DIN, resulta que:

a) Para unha lente converxente: $s'=\frac{-|s| \cdot |f'|}{|f'|-|s|}$

En consecuencia, se:

· $|s| > |f'|$; **$s' > 0$**

· $|s| < |f'|$; **$s' < 0$**

· $|s| = |f'|$; **non se forma imaxe ou esta está no infinito**.

b) Para unha lente diverxente: $s'=\frac{-|s| \cdot (-|f'|)}{-|f'|-|s|}=-\frac{|s| \cdot |f'|}{|f'|+|s|}$

En consecuencia, **para calquera posición do obxecto, $s' < 0$**.

8.- Temos dúas lentes e queremos coñecer cal delas é máis converxente. Con este fin recollemos coas lentes os raios do Sol e formamos a súa imaxe sobre un papel ata que quede ben enfocada. Como recoñeces a lente máis converxente?

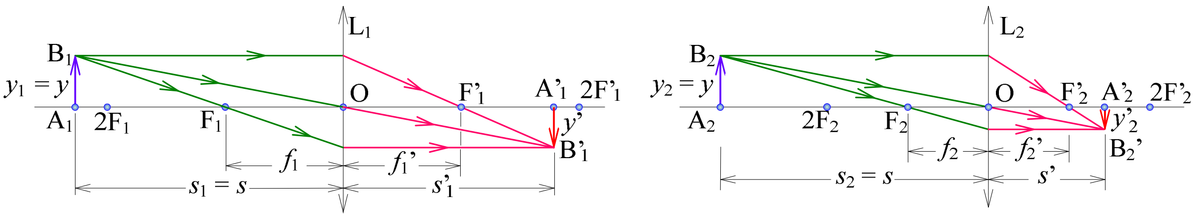
Solución:

Como a imaxe producida pola lente é recollida sobre un papel, trátase dunha imaxe real e, para que isto suceda, a distancia obxecto *s* (en valor absoluto) ten que ser maior que a distancia focal imaxe, *f* ': $|s| > |f'|$. Neste caso, a expresión que relaciona *f*' con $|s|$ e $|s'|$ é:

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'} \rightarrow f'=\frac{s' \cdot s}{s-s'} \rightarrow f'=\frac{s}{\frac{s}{s'}-1} \rightarrow f'=\frac{-|s|}{\frac{-|s|}{|s'|}-1} \rightarrow f'=\frac{|s|}{\frac{|s|}{|s'|}+1}$$

Nela vemos que **aquela lente converxente que forme a imaxe real máis preto de si**, (menor valor de *s*'), menor distancia focal lle corresponde e **maior converxencia ten**.

Para un mesmo obxecto de tamaño *y* situado á mesma distancia *s* das lentes L_1 e L_2, a imaxe que forman é a que aparece a continuación.



Tamén podemos estudar a converxencia da lente en función do tamaño da imaxe, y'. Para un obxecto de tamaño y, o aumento lateral é:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \;\rightarrow\; y' = \frac{s' \cdot y}{s}$$

E relacionando y' con f' (escrita en función da distancia obxecto e imaxe) resulta:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \;\rightarrow\; s' = \frac{s \cdot f'}{s + f'} \\ y' = \frac{s' \cdot y}{s} \end{aligned}\right\} \rightarrow\; y' = \frac{\dfrac{s \cdot f'}{s + f'} \cdot y}{s} = \frac{f' \cdot y}{s + f'} = \frac{y}{\dfrac{s}{f'} + 1} \;\rightarrow\; y' = \frac{|\,y\,|}{-\dfrac{|\,s\,|}{|\,f'\,|} + 1}$$

Como $|s| > |f'|$ $\Rightarrow$ $\dfrac{|\,s\,|}{|\,f'\,|} > 1$ e canto maior sexa $|f'|$ menor é o cociente $\dfrac{|\,s\,|}{|\,f'\,|}$ e maior é o tamaño da imaxe obtida, y'. En consecuencia, **aquela lente converxente que dun mesmo obxecto**, situado á mesma distancia s das lentes L_1 e L_2, **forme a imaxe real máis grande menor converxencia ten**.

9.- Relaciona a distancia focal dunha lente converxente coa doutra lente diverxente, de igual material e de idénticos raios de curvatura.

Solución:

Escribirmos a distancia focal f' dunha lente en función dos seus raios de curvatura, r_1 e r_2, e índice de refracción n:

$$\frac{1}{f'} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

que cos correspondentes signos para os raios r_1 e r_2, segundo as normas DIN, resulta:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{f'_{\text{converxente}}} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{|\,r_1\,|} + \frac{1}{|\,r_2\,|} \right) \\ \frac{1}{f'_{\text{diverxente}}} = (n-1) \cdot \left(-\frac{1}{|\,r_1\,|} - \frac{1}{|\,r_2\,|} \right) \end{aligned}\right\} \rightarrow\; f'_{\text{converxente}} = -\,f'_{\text{diverxente}}$$

10.- As lentes converxentes forman imaxes virtuais: a) sempre (independentemente da posición do obxecto); b) nunca; c) soamente cando o obxecto está entre a distancia focal e o vértice.

Solución:

Chámase imaxe á representación dun obxecto físico formado por unha lente, espello ou outro instrumento óptico. Se os raios de luz atravesan a imaxe dise que esta é real e pode proxectarse nunha pantalla colocada no plano da imaxe. Se a imaxe é vista nun punto desde o cal o raios parecen ir cara ó observador, dise que a imaxe e virtual e non se pode proxectar nunha pantalla colocada neste punto.

Para o caso dunha lente, a imaxe dun obxecto será real ou virtual segundo sexa, respectivamente, a distancia imaxe *s*' maior ou menor que cero.

Para estudar se a imaxe producida por unha lente converxente é real ou virtual, imos escribir a ecuación fundamental das lentes delgadas, situadas no aire, en función da distancia focal *f'* e das distancias obxecto, *s,* e imaxe, *s*':

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow s' = \frac{s \cdot f'}{f' + s}$$

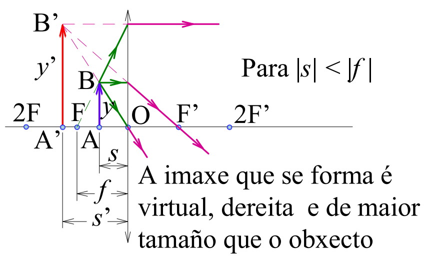
Cos correspondentes signos para *f*' e *s*, segundo as normas DIN, resulta: $s' = \dfrac{-|s| \cdot |f'|}{|f'| - |s|}$

En consecuencia, se:

· $|s| = |f'|$; non se forma imaxe ou esta está no infinito.

· $|s| > |f'| = |f|$; $s'>0$ e a imaxe é real.

· $|s| < |f'| = |f|$; $s'<0$ e a imaxe é virtual.



Polo tanto, **só cando o obxecto está entre o foco obxecto, F, e o vértice da lente, O, se forman imaxes virtuais**.

11.- As lentes diverxentes forman imaxes virtuais; a) sempre (independentemente da posición do obxecto); b) nunca; c) ás veces.

Solución:

A **imaxe** dun obxecto dise **real** cando a luz converxe cara a ela e dise **virtual** cando a luz diverxe a partir dela. Para o caso da imaxe formada por unha lente, a imaxe é real ou virtual segundo sexa, respectivamente, a distancia imaxe *s*' maior ou menor que cero.

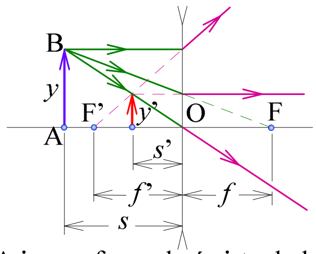
Para estudar se a imaxe producida por unha lente diverxente é real ou virtual, imos escribir a ecuación fundamental das lentes delgadas, situadas no aire, en función da distancia focal *f* ' e das distancias obxecto, *s,* e imaxe, *s*':

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow s' = \frac{s \cdot f'}{f' + s}$$

Cos correspondentes signos para *f*' e *s*, segundo as normas DIN, resulta:

$$s' = \frac{-|s| \cdot (-|f'|)}{-|f'| - |s|} = -\frac{|s| \cdot |f'|}{|f'| + |s|}$$

Como *s*' é sempre negativo, a **imaxe** dun obxecto producida por unha **lente diverxente é sempre virtual**.

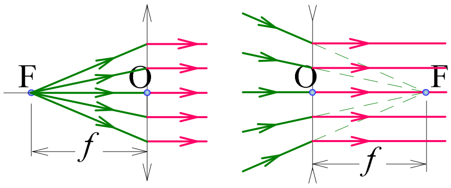


A imaxe formada é virtual, dereita e de menor tamaño que o obxecto

12.- Un raio incidente sobre unha lente, procedente dun dos focos, refráctase pasando: a) polo outro punto focal; b) paralelamente ó eixe da lente; c) por calquera dirección, dependendo do índice de refracción e dos raios de curvatura das caras da lente. (Elixe razoadamente a opción que consideres correcta).

Solución:

Os raios procedentes dun dos focos dunha lente ó refractarse emerxen paralelos ó eixe óptico. O punto do eixe de onde emerxen os raios é o foco obxecto, F, e a distancia que hai desde este punto ata a lente, O, é a distancia focal obxecto, *f*. Este é o concepto de foco obxecto e correspóndese co ítem b) da cuestión.



13.- Unha imaxe, que se encontra ó mesmo lado da lente que o obxecto, é unha imaxe: a) real; b) virtual; c) real ou virtual, dependendo da clase de lente. (Elixe razoadamente a opción que consideres correcta).

Solución:

Dise que a imaxe dun obxecto formada por unha lente é real cando os raios refractados converxen nela, podendo ser recollida nunha pantalla colocada no plano da imaxe. Para o caso dunha lente, a imaxe é real cando a distancia imaxe *s*' é maior que cero (positiva).

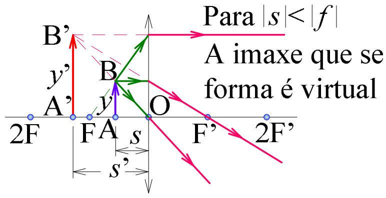
A imaxe dise que é virtual cando se forma pola prolongación dos raios refractados. Neste caso, os raios diverxen a partir da imaxe e esta non se pode recoller nunha pantalla. Para o caso dunha lente, a imaxe é virtual cando a distancia imaxe *s*' é menor que cero (negativa).

No caso das lentes, **cando a imaxe está no mesmo lado da lente que o obxecto**, a distancia imaxe *s*' é negativa e non hai unha converxencia real dos raios refractados, senón unha diverxencia dos mesmos e **a imaxe é sempre virtual**.

A posición do obxecto con respecto á lente para que a imaxe sexa virtual coñécese a partir da ecuación fundamental das lentes delgadas, que escrita en función da súa distancia focal *f*' e das distancias obxecto, *s*, e imaxe, *s*', é:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow s' = \frac{s \cdot f'}{f' + s}$$

Cos correspondentes signos para f' e s, segundo as normas DIN, resulta:

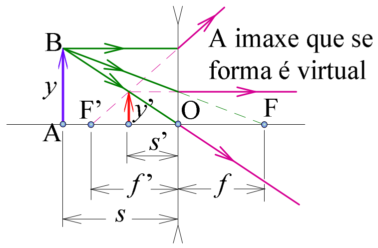


· Para unha lente converxente: $s' = \dfrac{-|s|\cdot|f'|}{|f'|-|s|}$

Cando $|s|<|f'|$, $s'<0$ e a imaxe é virtual.

· Para unha lente diverxente:

$$s' = \frac{-|s|\cdot(-|f'|)}{-|f'|-|s|} = -\frac{|s|\cdot|f'|}{|f'|+|s|}$$



Como s' é sempre negativo, a **imaxe** dun obxecto producida por unha **lente diverxente é sempre virtual**.

14.- A imaxe dun obxecto real, formada nun espello convexo, é: a) sempre virtual; b) sempre real; c) real ou virtual, dependendo da posición do obxecto con respecto ó espello. (Elixe razoadamente a opción que consideres correcta).

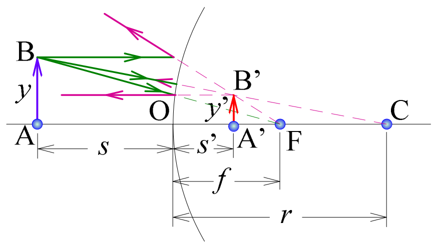
Solución:

Dise que a imaxe dun obxecto formada nun espello é real cando os raios reflectidos converxen nela; a imaxe fórmase diante do espello, sendo a distancia imaxe s' menor que cero (negativa).

A imaxe dise que é virtual cando se forma pola prolongación dos raios reflectidos. Neste caso os raios diverxen a partir da imaxe e fórmase ó outro lado do espello de onde proceden os raios luminosos, sendo a distancia imaxe s' maior que cero (positiva).

Para estudar se a imaxe producida dun obxecto por un espello convexo é real ou virtual, imos escribir a ecuación fundamental que relaciona o raio do espello, r, coa distancia obxecto, s, e a distancia imaxe, s':

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{2}{r} \rightarrow s'=\frac{s\cdot r}{2\,s-r}$$



A imaxe que se forma e, para calquera posición do obxecto, virtual, dereita e de menor tamaño que o obxecto

Cos correspondentes signos para r e s, segundo as normas DIN, resulta:

$$s' = \frac{-|s|\cdot|r|}{-|2\,s|-|r|} = \frac{|s|\cdot|r|}{|2\,s|+|r|}$$

Como a distancia s' é sempre positiva, **a imaxe é sempre virtual**. Este resultado é o que corresponde ó ítem a).

15.- O ollo humano ve: a) soamente as imaxes reais; b) soamente as imaxes virtuais; c) as imaxes reais e as virtuais. (Elixe razoadamente a opción que consideres correcta).

Solución:

A imaxe dun obxecto dise real cando se forma por intersección dos raios luminosos que emerxen do sistema óptico, mentres que a imaxe é virtual cando se forma por intersección das prolongacións destes raios (os raios diverxen a partir da imaxe).

No caso das imaxes virtuais, o ollo humano, que é un sistema óptico, funciona recollendo os raios diverxentes procedentes de puntos luminosos e forma unha imaxe real na retina. Agora o cerebro interpreta a imaxe formada na retina como un obxecto exterior ó ollo e situado na posición da imaxe virtual inicial.

A imaxe real formada por un sistema óptico, que é recollida nunha pantalla, tamén é vista polo ollo, xa que cada punto luminoso da pantalla emite (reflicte) raios diverxentes que se someten ó proceso de visión xa comentado.

O resultado é que **o ollo humano ve tanto as imaxes reais como as virtuais**, non distinguindo entre ambas.

16.- Estuda que lle ocorre ás propiedades dunha lente de vidro (en canto á súa distancia focal), de índice de refracción 3/2, cando se introduce en auga, de índice de refracción 4/3.

Solución:

O poder de enfoque dunha lente depende da diferenza entre o índice de refracción, n, da lente e o do medio en que esta está situada, n'. Para o caso de que a lente estea no aire, $n' = 1$ e a ecuación fundamental é:

$$\frac{1}{s'_{\text{aire}}} - \frac{1}{s_{\text{aire}}} = (n-1)\cdot\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Recordando os conceptos de foco e de distancia focal, f', dunha lente podemos escribir:

$$\frac{1}{f'_{\text{aire}}} = (n-1)\cdot\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Se a lente está inmersa en auga de índice de refracción n', as ecuacións anteriores son:

$$\frac{n'}{s'_{\text{auga}}} - \frac{n'}{s_{\text{auga}}} = (n-n')\cdot\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \text{ e}$$

$$\frac{n'}{f'_{\text{auga}}} = (n-n')\cdot\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \;\rightarrow\; \frac{1}{f'_{\text{auga}}} = \frac{(n-n')}{n'}\cdot\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Relacionando a distancia focal da lente cando está no aire e cando está na auga e substituíndo valores resulta:

$$\frac{f'_{\text{auga}}}{f'_{\text{aire}}} = \frac{(n-1)\cdot n'}{(n-n')} \;\rightarrow\; \frac{f'_{\text{auga}}}{f'_{\text{aire}}} = \frac{(3/2-1)\cdot 4/3}{(3/2-4/3)} \;\rightarrow\; \frac{f'_{\text{auga}}}{f'_{\text{aire}}} = 4$$

A distancia focal dunha lente de índice de refracción $n = 3/2$ somerxida en auga de índice de refracción $n' = 4/3$ **é catro veces maior** e, en consecuencia, a súa potencia P catro veces menor: $P = 1/f'$.

Na expresión que relaciona as distancias focais vemos que para o caso de que o índice de refracción do medio en que está inmersa a lente, n', sexa maior que o índice de refracción da propia lente, n, o signo da relación $\frac{f'_{\text{medio}}}{f'_{\text{aire}}}$ é negativo e unha lente converxente no aire faise diverxente nese medio (e á inversa).

17.- Estuda se ó introducir una lente biconvexa nun líquido pode chegar a diverxer os raios luminosos.

Solución:

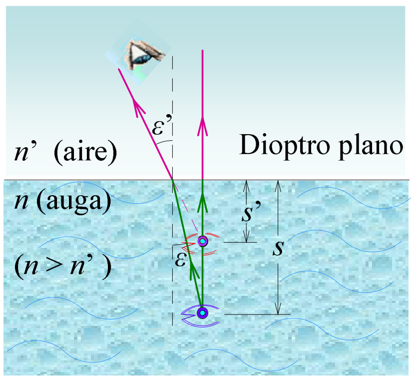
Como se ve na resposta á cuestión anterior, a relación entre a distancia focal dunha lente somerxida nun medio de índice de refracción n', f'_{medio}, e a distancia focal desa mesma lente no aire de índice de refracción 1, f'_{aire}, é:

$$\frac{f'_{\text{medio}}}{f'_{\text{aire}}} = \frac{(n-1)\cdot n'}{(n-n')}$$

Polo tanto, se $n'>n$ resulta que $\frac{f'_{\text{medio}}}{f'_{\text{aire}}} < 0$ e se $f'_{\text{aire}} > 0$ (lente converxente) $\Rightarrow f'_{\text{medio}} < 0$ (lente diverxente).

18.- A relación entre a profundidade á que está un obxecto mergullado na auga ($n_{\text{auga}} = 4/3$) coa profundidade aparente con que é visto por un observador situado no aire é: a) 1; b) 3/4; c) 4/3; d) ningunha das anteriores. Nota: estes valores de relación de profundidades son obtidos coa distancia que hai ata a superficie de separación dos dous medios, non tendo en conta a distancia que hai desde a superficie da auga ata o observador. (Elixe razoadamente a opción que consideres correcta).

Solución:



Trátase dun dioptro plano, sendo o primeiro medio a auga, de índice de refracción n, e o segundo o aire, de índice de refracción n'.

Se con respecto á superficie da auga, o obxecto está a unha profundidade de s m, a distancia obxecto é: $-|s|$; xa que o obxecto está, con respecto á superficie de separación dos dous medios, do lado de onde proceden os raios; e a profundidade aparente s' á que se observa o obxecto obtense substituíndo na ecuación fundamental do dioptro plano:

$$\frac{\text{Profundidade aparente, } s'}{\text{Profundidade real, } s} = \frac{n'}{n} \;\rightarrow\; s' = s\cdot\frac{n'}{n} \;\rightarrow\; s' = (-|s|)\cdot\frac{1}{4/3}$$

O signo menos indica que a imaxe está, con respecto á superficie de separación dos dous medios, do lado de onde proceden os raios e a relación entre a profundidade real e aparente é: $\frac{s}{s'} = \frac{|s|}{|s'|} = \frac{4}{3}$, como se indica no ítem c) da cuestión.

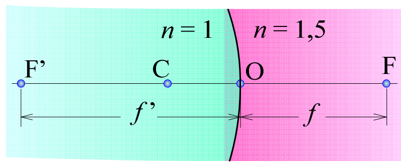
EXERCICIOS (Problemas)

1.- Calcula as distancias focais dun dioptro esférico cóncavo de 10 cm de raio, no que os índices de refracción dos dous medios transparentes son *n* = 1 e *n'* = 1,5.

Solución:

$$f' = \frac{r \cdot n'}{n' - n} \rightarrow f' = \frac{-10 \cdot 10^{-2} \cdot 1{,}5}{1{,}5 - 1} \rightarrow \boxed{f' = -0{,}30 \text{ m}}$$

$$f = -\frac{r \cdot n}{n' - n} \rightarrow f = -\frac{-10 \cdot 10^{-2} \cdot 1}{1{,}5 - 1} \rightarrow \boxed{f = 0{,}20 \text{ m}}$$

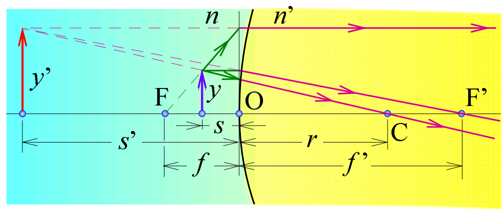


2.- Nun dioptro esférico, as distancias focais son: *f* = −10 cm e *f'* = 30 cm. Calcula:
a) O raio de curvatura do dioptro.
b) A relación dos índices de refracción dos dous medios.
c) A distancia imaxe dun obxecto de 1 cm de alto que dista 5 cm do vértice do dioptro, estando situado á esquerda da superficie de separación dos dous medios.
d) O tamaño da imaxe.

Solución:

a) $r = f + f' \rightarrow r = -10 + 30 \rightarrow \boxed{r = 20 \text{ cm}}$

b) $\frac{n'}{n} = -\frac{f'}{f} \rightarrow \frac{n'}{n} = -\frac{30}{-10} \rightarrow \boxed{\frac{n'}{n} = 3}$



c) $$\left.\begin{array}{l} \frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r} \rightarrow \frac{n'/n}{s'} - \frac{n/n}{s} = \frac{n'/n - n/n}{r} \\ \frac{n'}{n} = 3 \\ s = -5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{3}{s'} - \frac{1}{-5 \cdot 10^{-2}} = \frac{3 - 1}{20 \cdot 10^{-2}} \rightarrow$$

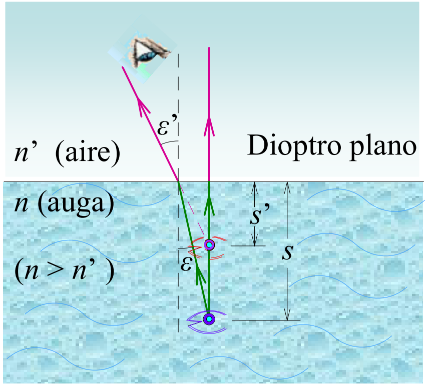
$$\boxed{s' = -0{,}30 \text{ m}}$$

d) $$y' = y \cdot \frac{s' \cdot n}{s \cdot n'} \rightarrow y' = 1 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{-30 \cdot 10^{-2}}{-5 \cdot 10^{-2}} \cdot \frac{1}{3} \rightarrow \boxed{y' = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}}$$

3.- Un pescador encóntrase a 3 m de altura por encima da superficie da auga e un peixe nada a 2 m de profundidade. Calcula: a) A distancia á que o pescador ve o peixe e b) A distancia á que o peixe ve o pescador. Dato: n_{auga} = 4/3.

Solución:

a) Trátase dun dioptro plano, sendo a auga, de índice de refracción *n*, o primeiro medio e o aire, de índice de refracción *n'*, o segundo medio. A construción gráfica da imaxe obtense buscando dous raios que se corten, que son:



· Un, que incide perpendicularmente á superficie de separación dos dous medios e non sofre desviación.

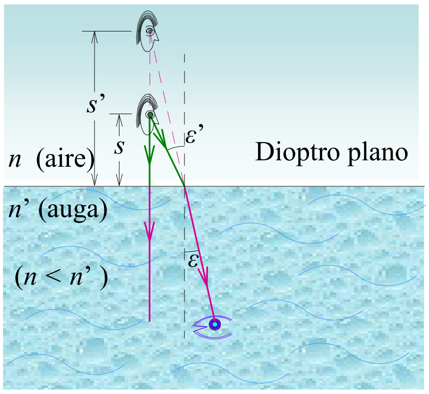
· Outro, que incide cunha pequena inclinación, refractándose de acordo coa lei de Snell. A prolongación do raio refractado córtase coa normal que pasa polo obxecto e se a súa inclinación é pequena (menor de 10º) obtense unha só imaxe e o dioptro pode considerarse estigmático.

Como o peixe está a unha profundidade de 2 m, a distancia obxecto, *s*, é: *s* = −2 m e a profundidade aparente *s*' á que se observa o peixe obtense substituíndo na ecuación do dioptro plano:

$$\frac{\text{Profundidade aparente, } s'}{\text{Profundidade real, } s} = \frac{n'}{n} \rightarrow s' = \frac{n' \cdot s}{n} \rightarrow s' = \frac{1 \cdot (-2)}{4/3} \rightarrow \boxed{s' = -1{,}5\ \text{m}}$$

A distancia á que o pescador ve o peixe é: 1,5+3 = **4,5 m**.

b) Agora os raios proceden do aire e este é o primeiro medio, sendo *n* = 1, e o segundo medio é a auga, con *n*' = 4/3.



Como o obxecto (pescador) está, con respecto á superficie de separación dos dous medios, do lado do que proceden os raios, *s* = −3 m. Substituíndo na ecuación do dioptro plano resulta:

$$\frac{\text{Profundidade aparente, } s'}{\text{Profundidade real, } s} = \frac{n'}{n} \rightarrow s' = \frac{n' \cdot s}{n} \rightarrow$$

$$s' = \frac{\frac{4}{3} \cdot (-3)}{1} \rightarrow s' = -4\ \text{m}$$

E a distancia á que o peixe ve o pescador é: 4+2 = **6 m**.

4.- Un obxecto de 3 cm de altura está situado a 40 cm dunha lente converxente de 10 cm de distancia focal. Calcula a posición e o tamaño da imaxe, comentando se é dereita ou invertida.

Solución:

Para calcular a posición da imaxe, aplicamos a ecuación fundamental das lentes delgadas en función da distancia focal *f*':

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{s'} - \frac{1}{-0{,}40} = \frac{1}{0{,}10} \rightarrow \boxed{s' = 0{,}13\ \text{m}}$$

Para obter o tamaño da imaxe, substituímos na fórmula do aumento lateral da lente:

$$y' = \frac{s'}{s} \cdot y \;\rightarrow\; y' = \frac{0{,}13}{-0{,}40} \cdot 0{,}03 \;\rightarrow\; \boxed{y' = -0{,}01\ \text{m}}$$

O signo menos, −, que aparece en y' indícanos que a **imaxe** é **invertida** respecto ó obxecto.

5.- Temos unha lente delgada diverxente de −4 dioptrías e queremos que a imaxe dun obxecto de 2,5 cm colocado perpendicularmente ó eixe óptico sexa dun tamaño de 0,5 cm. Calcula a distancia focal da lente e a distancia obxecto e fai a construción gráfica da marcha dos raios luminosos que dan lugar á formación da imaxe.

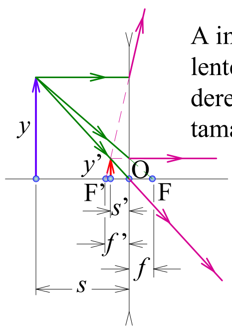
Solución:

$$P = \frac{1}{f'} \;\rightarrow\; f' = \frac{1}{P} \;\rightarrow\; f' = \frac{1}{-4} \;\rightarrow\; \boxed{f' = -0{,}25\ \text{m}}$$

Para calcular a distancia obxecto relacionamos a ecuación fundamental das lentes e a expresión do aumento lateral:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{s'} - \dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{f'} \;\rightarrow\; \dfrac{1}{s'} - \dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{-0{,}25} \\[2ex] \dfrac{y'}{y} = \dfrac{s'}{s} \;\rightarrow\; \dfrac{0{,}5}{2{,}5} = \dfrac{s'}{s} \;\rightarrow\; s' = 0{,}2\,s \end{array}\right\} \rightarrow\; \frac{1}{0{,}2\,s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{-0{,}25} \;\rightarrow\; \boxed{s = -1\ \text{m}}$$

A construción gráfica da marcha dos raios luminosos que dan lugar á formación da imaxe é a indicada na figura adxunta:



A imaxe que se forma na lente diverxente é virtual, dereita e de menor tamaño que o obxecto

6.- Un obxecto de 5 cm de altura está situado perpendicularmente ó eixe óptico dunha lente delgada converxente de 40 cm de distancia focal. Se a distancia obxecto é de 60 cm, calcula: a) a potencia da lente; b) a posición da imaxe e c) o tamaño da imaxe.

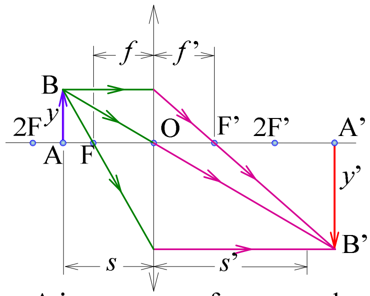
Solución:

a) $P = \dfrac{1}{f'} \;\rightarrow\; P = \dfrac{1}{0{,}4} \;\rightarrow\; P = 2{,}5\ \text{m}^{-1} \rightarrow P = 2{,}5$ dioptrías

b) $\dfrac{1}{s'} - \dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{f'} \;\rightarrow\; \dfrac{1}{s'} - \dfrac{1}{-0{,}6} = \dfrac{1}{0{,}4} \;\rightarrow\; \boxed{s' = 1{,}20\ \text{m}}$

c) $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{s'}{s} \rightarrow y'=\dfrac{s'}{s}\,y \rightarrow y'=\dfrac{120}{-60}\cdot 5 \rightarrow \boxed{y' = -10\ \text{cm}}$

A construción gráfica da marcha dos raios luminosos que dan lugar á formación da imaxe é a indicada na figura.



A imaxe que se forma e real, invertida e de maior tamaño que o obxecto, sendo $s' > 2f'$

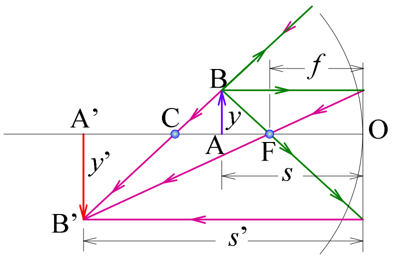
EXERCICIOS DE SELECTIVIDADE (Cuestións)

1.- Se cun espello se quere obter unha imaxe maior que o obxecto, haberá que empregar un espello: a) plano; b) cóncavo; c) convexo. ***(Set. 08).***

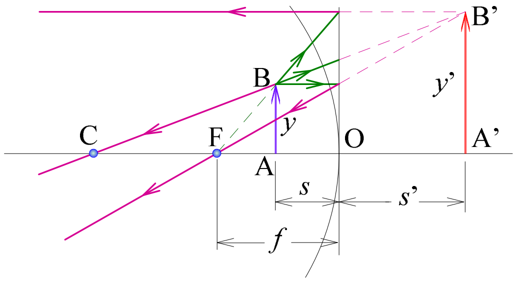
Solución:

Nos espellos, a expresión do aumento lateral, A_L, vén dada pola relación: $A_L = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$, sendo y' o tamaño da imaxe, y o tamaño do obxecto, s' a distancia imaxe e s a distancia obxecto.

Nos espellos planos, o tamaño da imaxe é sempre igual ó tamaño do obxecto e, nos espellos convexos, o tamaño da imaxe é sempre menor que o tamaño do obxecto. Polo tanto haberá que utilizar un espello cóncavo é situar o obxecto tal como se ve na figura.



A imaxe que se forma é real, invertida é de maior tamaño que o obxecto



A imaxe que se forma é vitual, dereita é de maior tamaño que o obxecto

Analiticamente:

Da expresión do aumento lateral, e coa condición de que $|y'| > |y|$, resulta que: $|s'| > |s|$.

Para saber se o espello é cóncavo, convexo ou plano, estudamos a distancia focal. Con este fin escribimos a ecuación fundamental dos espellos en función da distancia focal f:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{f} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} \rightarrow f = \frac{s' \cdot s}{s + s'} \\ \left.\begin{array}{l} A_L = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \\ |y'| > |y| \end{array}\right\} \rightarrow |s'| > |s| \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{se } s'>0} f = \frac{|s'|(-|s|)}{(-|s|) + |s'|} \rightarrow f < 0 \\ \xrightarrow{\text{se } s'<0} f = \frac{(-|s'|)(-|s|)}{(-|s|) + (-|s'|)} \rightarrow f < 0 \end{array}$$

Como $f<0$, o **espello** ten que ser **cóncavo**.

2.- Debuxa a marcha dos raios nunha lente converxente, cando a imaxe producida é virtual. ***(Set. 08).***

Solución:

Para o caso dunha lente, a imaxe dun obxecto será real ou virtual segundo sexa, respectivamente, a distancia imaxe s' maior ou menor que cero.

Imos estudar cal hai de ser a posición dun obxecto para que a imaxe formada por unha lente converxente sexa virtual. Con este obxectivo escribimos a ecuación fundamental das lentes delgadas, situadas no aire, en función da distancia focal f' e das distancias obxecto, s, e imaxe, s':

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'} \rightarrow s'=\frac{s\cdot f'}{f'+s}$$

Cos correspondentes signos para f' e s, segundo as normas DIN, resulta: $s'=\dfrac{-|s|\cdot|f'|}{|f'|-|s|}$.

En consecuencia, se $|s|<|f'|=|f|$ resulta que $s'<0$ e a imaxe é virtual.

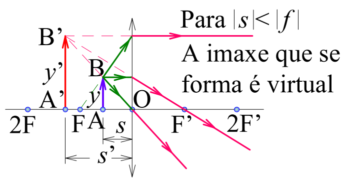
Polo tanto, **só cando o obxecto está entre o foco obxecto, F, e o vértice da lente converxente, O, se forman imaxes virtuais**.

A construción gráfica da imaxe formada realízase buscando a intersección de alomenos dous raios de traxectoria coñecida, despois de que se refracten na lente. Con este fin recordamos que:

· Todo raio que chega paralelamente ó eixe óptico, despois de refractarse na lente converxente, pasa polo foco imaxe, F'.

· Todo raio que pase polo foco obxecto, F, ó refractarse na lente converxente, emerxe paralelo ó eixe óptico.

· Todo raio que pase polo centro óptico da lente non sofre desviación.



3.- Fai un esquema da práctica de óptica, situando o obxecto, a lente e a imaxe, e debuxando a marcha dos raios para obter unha imaxe dereita e de maior tamaño que o obxecto. *(Set. 07).*

Solución:

A montaxe e realización da práctica consiste en:

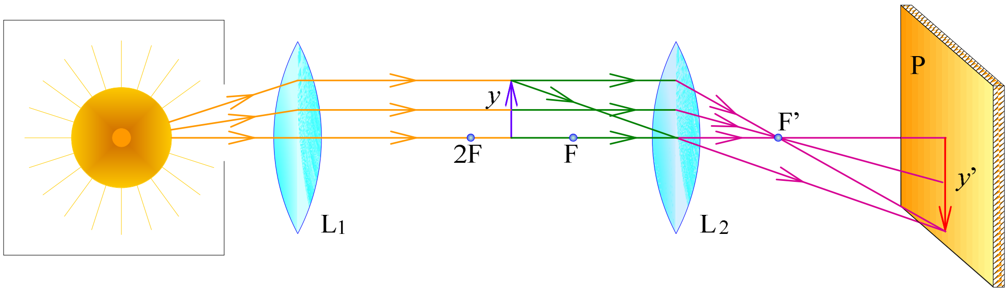
Á distancia do foco obxecto dunha lente converxente, L_1, colócase o foco luminoso. Os raios que emerxen desta lente son paralelos ó seu eixe óptico.

A continuación móntase, de forma aliñada co foco luminoso e a lente anterior, un obxecto e unha segunda lente converxente, L_2, da cal queremos obter a imaxe.

De seguido colocamos, normalmente ó eixe óptico, unha pantalla, na cal queremos que se forme a imaxe do obxecto.

Por último desprazamos, ó longo do eixe óptico, a segunda lente e a pantalla, ata obter na pantalla, de forma nítida, a imaxe desexada.

De forma xeral, un esquema gráfico da práctica pode ser o que se indica a continuación:



Estudamos agora en que condicións a imaxe dun obxecto formada por unha lente converxente é dereita e de maior tamaño que o obxecto. Sabemos que para que a imaxe dun obxecto teña a mesma orientación que o obxecto, o aumento lateral, A_L, ten que ser maior que cero: $A_L>0$.

$$\left.\begin{array}{l} A_L = \dfrac{y'}{y} = \dfrac{s'}{s} \\ A_L > 0 \\ s = -|s| \end{array}\right\} \rightarrow s' < 0$$

Como a distancia imaxe, s', é negativa, a imaxe fórmase á esquerda da lente é trátase dunha imaxe virtual. Cal hai ser a posición do obxecto, a distancia obxecto s, para que a imaxe formada pola lente converxente sexa virtual?

A partir da ecuación fundamental das lentes delgadas encontramos a relación da distancia obxecto s en función da distancia focal:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow s' = \frac{s \cdot f'}{f' + s}$$

Cos correspondentes signos para f' e s, segundo as normas DIN, resulta: $s' = \dfrac{-|s| \cdot |f'|}{|f'| - |s|}$.

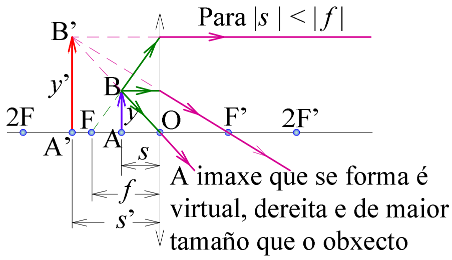
En consecuencia, só cando $|s|<|f'|=|f|$, $s'<0$ e a imaxe é virtual. Polo tanto, para que unha lente converxente forme unha imaxe virtual, o obxecto ten que estar situado entre o foco obxecto, F, e o vértice da lente, O.

Estudamos agora como é, nestas condicións, o tamaño da imaxe en relación ó tamaño do obxecto.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y'}{y} = \dfrac{s'}{s} \\ s' = \dfrac{-|s| \cdot |f'|}{|f'| - |s|} \\ s = -|s| \end{array}\right\} \rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{\dfrac{-|s| \cdot |f'|}{|f'| - |s|}}{-|s|} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{y'}{y} = \dfrac{|f'|}{|f'| - |s|} \\ |f'| > |s| \end{array}\right\} \rightarrow \frac{y'}{y} > 1$$

A construción gráfica da imaxe formada realízase buscando a intersección de alomenos dous raios de traxectoria coñecida, despois de que se refracten na lente. Con este fin recordamos que:

· Todo raio que chega paralelamente ó eixe óptico da lente converxente, despois de refractarse, pasa polo foco imaxe, F'.



· Todo raio que pasa polo foco obxecto, F, ó refractarse na lente converxente, emerxe paralelo ó eixe óptico.

· Todo raio que pase polo centro óptico da lente non sofre desviación.

4.- Se se desexa formar unha imaxe virtual, dereita e de menor tamaño que o obxecto, débese utilizar; a) un espello cóncavo; b) unha lente converxente; c) unha lente diverxente. ***(Xuño 07).***

Solución:

a) Empezamos facendo o estudo analítico de se a imaxe dun obxecto formada por un espello cóncavo pode ter as características que aparecen na cuestión. Partimos da ecuación fundamental dos espellos, que relaciona a distancia focal do espello, *f*, coa distancia obxecto, *s*, e a distancia imaxe, *s*':

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{2}{r}=\frac{1}{f} \rightarrow s'=\frac{s\cdot f}{s-f}=\frac{-|s|\cdot(-|f|)}{-|s|-(-|f|)}=\frac{|s|\cdot|f|}{-|s|+|f|}$$

Se $s'>0$, a imaxe é virtual. Isto ten lugar cando o obxecto se encontra entre o foco e o vértice, $|s|<|f|$.

Estudamos, para este caso, como é o tamaño da imaxe *y*' respecto ó tamaño do obxecto *y*:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{y'}{y}=-\dfrac{s'}{s}\\ s'=\dfrac{|s|\cdot|f|}{-|s|+|f|}\\ s=-|s|\end{array}\right\} \rightarrow \frac{y'}{y}=-\frac{\dfrac{|s|\cdot|f|}{-|s|+|f|}}{-|s|} \rightarrow \left.\begin{array}{l}\dfrac{y'}{y}=\dfrac{|f|}{-|s|+|f|}\\ \\ |f|>-|s|+|f|\\ |s|<|f|\end{array}\right\} \rightarrow \frac{y'}{y}>1$$

Neste caso non estamos nas condicións do enunciado da cuestión.

b) Repetimos o estudo anterior para o caso dunha lente converxente.

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'} \rightarrow s'=\frac{s\cdot f'}{f'+s}$$

Cos correspondentes signos para *f*' e *s*, segundo as normas DIN, resulta: $s'=\dfrac{-|s|\cdot|f'|}{|f'|-|s|}$.

Se $s'<0$ a imaxe é virtual e, para que isto suceda, $|f'|>|s|$: O obxecto hai de estar situado entre o foco e o vértice da lente.

Estudamos, para este caso, como é o tamaño da imaxe *y*' respecto ó tamaño do obxecto *y*:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y'}{y}=\dfrac{s'}{s} \\ s'=\dfrac{-|s|\cdot|f'|}{|f'|-|s|} \\ s=-|s| \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{y'}{y}=\dfrac{\dfrac{-|s|\cdot|f'|}{|f'|-|s|}}{-|s|} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{y'}{y}=\dfrac{|f'|}{|f'|-|s|} \\ \\ |f'|>|s| \\ |f'|>|f'|-|s| \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{y}{y'}>1$$

Neste caso non estamos nas condicións do enunciado da cuestión.

c) Repetimos o estudo anterior para o caso dunha lente diverxente.

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'} \rightarrow s'=\frac{s\cdot f'}{f'+s}$$

Cos correspondentes signos para f' e s, segundo as normas DIN, resulta:

$$s'=\frac{-|s|\cdot(-|f'|)}{(-|f'|)-|s|}$$

Se $s'<0$ a imaxe é virtual. Polo tanto, a imaxe dunha lente diverxente **é** sempre **virtual**.

Como s e s' son números negativos, a súa relación é positiva e a orientación da imaxe coincide coa do obxecto, tratándose dunha **imaxe dereita**: $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{s'}{s}=\dfrac{-|s'|}{-|s|}>0$.

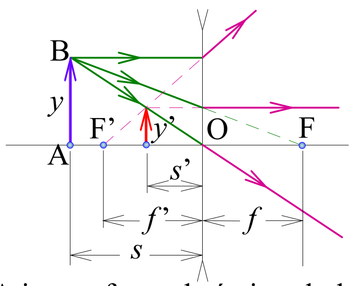
Para encontrar a relación entre o tamaño do obxecto e o tamaño da imaxe, imos relacionar, coa fórmula do aumento lateral, estas magnitudes:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y'}{y}=\dfrac{s'}{s} \\ s'=-\dfrac{|s|\cdot|f'|}{|f'|+|s|} \\ s=-|s| \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{y'}{y}=\dfrac{-\dfrac{|s|\cdot|f'|}{|f'|+|s|}}{-|s|} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{y'}{y}=\dfrac{|f'|}{|f'|+|s|} \\ \\ |f'|<|f'|+|s| \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{y'}{y}<1$$

Polo tanto, **a imaxe dunha lente diverxente é sempre virtual, dereita e de menor tamaño que o obxecto**.

A construción gráfica da imaxe realízase buscando a intersección de alomenos dous raios de traxectoria coñecida, despois de que se refracten na lente. Con este fin recordamos que:

· Todo raio que chega paralelamente ó eixe óptico, despois de refractarse na lente diverxente, a prolongación do raio refractado, en sentido contrario ó da súa propagación, pasa polo foco imaxe, F'.



A imaxe formada é virtual, dereita e de menor tamaño que o obxecto

· Todo raio, cuxa dirección pasa polo foco obxecto, F, da lente diverxente, ó refractarse na lente, emerxe paralelo ó eixe óptico.

· Todo raio que pase polo centro óptico da lente non sofre desviación.

5.- Cun banco óptico de lonxitude *l*, obsérvase que a imaxe producida por unha lente converxente é sempre virtual. Como se pode interpretar isto? *(Xuño 07).*

Solución:

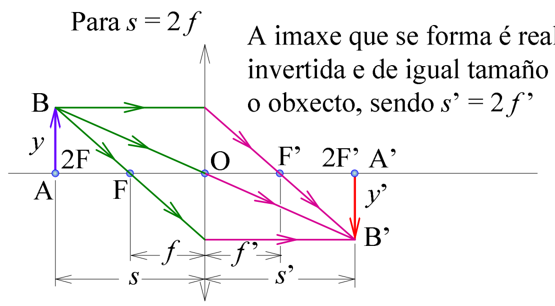
A imaxe dun obxecto formada por unha lente dise real cando se forma pola intersección dos raios refractados e pode proxectarse nunha pantalla colocada no plano da imaxe. Se a imaxe non se forma pola intersección dos raios refractados, senón que para coñecer a súa posición hai que prolongalos en sentido contrario ó da súa propagación, dise virtual e non se pode recoller nunha pantalla.

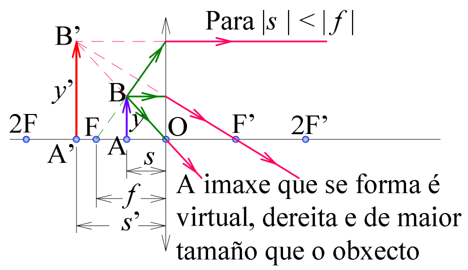
Sabemos que a imaxe dun obxecto formada por unha lente converxente pode ser:

· Real: Cando o obxecto está máis afastado da lente que a distancia focal: $|s| > |f|$.

· Virtual: Cando o obxecto está situado entre o centro óptico da lente e o foco: $|s| < |f|$.

Se na práctica realizada soamente se obteñen imaxes virtuais é porque a lonxitude l do banco óptico é pequena para a distancia focal f da lente empregada.





6.- A imaxe formada nos espellos é: a) real se o espello é convexo; b) virtual se o espello é cóncavo e a distancia obxecto é menor que a focal; c) real se o espello é plano. (*Set. 06*).

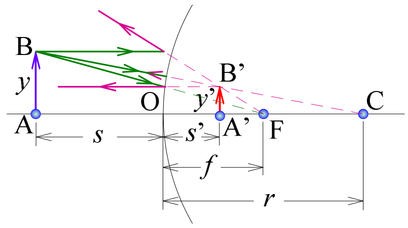
Solución:

a) Dise que a imaxe dun obxecto formada nun espello é real cando os raios reflectidos converxen nela; a imaxe fórmase diante do espello, sendo a distancia imaxe s' menor que cero (negativa).

A imaxe dise que é virtual cando se forma pola prolongación dos raios reflectidos. Neste caso os raios diverxen a partir da imaxe e fórmase ó outro lado do espello de onde proceden os raios luminosos, sendo a distancia imaxe s' maior que cero (positiva).

Para estudar se a imaxe producida dun obxecto por un espello convexo é real ou virtual, imos escribir a ecuación fundamental que relaciona o raio do espello, r, coa distancia obxecto, s, e a distancia imaxe, s':

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{2}{r} \rightarrow s'=\frac{s \cdot r}{2\,s-r}$$

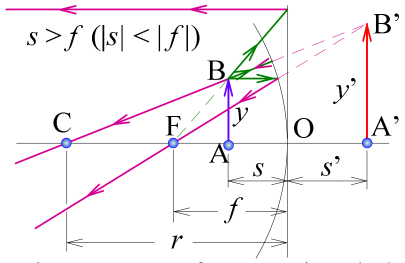


A imaxe que se forma e, para calquera posición do obxecto, virtual, dereita e de menor tamaño que o obxecto

Cos correspondentes signos para *r* e *s*, segundo as normas DIN, resulta:

$$s'=\frac{-|s|\cdot|r|}{-|2\,s|-|r|}=\frac{|s|\cdot|r|}{|2\,s|+|r|}$$

Como a distancia *s*' é sempre positiva, a imaxe é sempre virtual, non sendo correcto o ítem a).

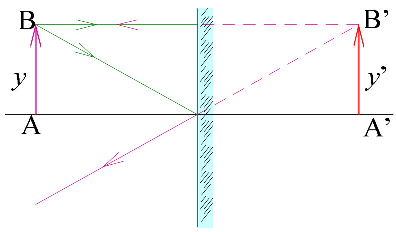


A imaxe que se forma é virtual, dereita e de maior tamano que o obxecto

b) Para estudar se a imaxe formada dun obxecto situado entre o foco e o vértice dun espello cóncavo é virtual, procedemos como no caso anterior:

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{2}{r}=\frac{1}{f} \rightarrow s'=\frac{-|s|\cdot(-|f|)}{-|s|-(-|f|)}=\frac{|s|\cdot|f|}{-|s|+|f|}$$

Cando o obxecto está entre o foco e o vértice, $|s|<|f|$, resulta que $s'>0$, sendo a **imaxe virtual**.



c) De substituír na ecuación fundamental dos espellos esféricos o valor do raio que corresponde á superficie plana dos espellos planos ($r=\infty$) resulta que $s'=-s$ é a imaxe é sempre virtual.

7.- Disponse dunha lente delgada converxente, describe brevemente un procedemento práctico para coñecer o valor da súa focal. (*Set. 06*).

Solución:

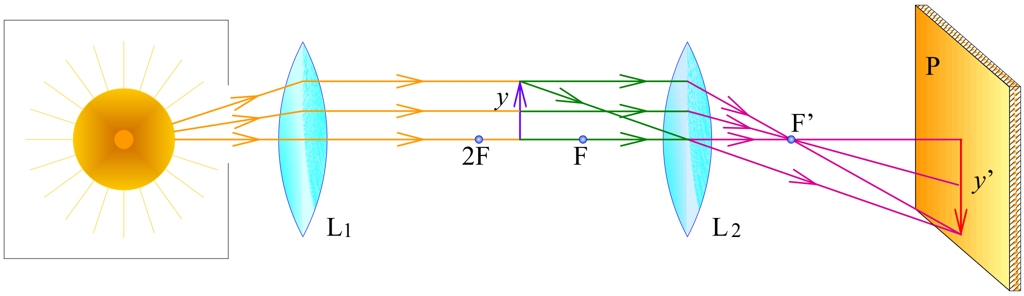
Coa práctica de óptica pódese determinar a distancia focal dunha lente converxente. Con este fin, procédese a expoñer a súa montaxe e realización:

Á distancia do foco obxecto dunha lente converxente, L_1, colócase o foco luminoso. Esta lente ten por obxectivo favorecer que os raios luminosos que incidan sobre o obxecto sexan paralelos ó eixe óptico.

A continuación móntase, de forma aliñada co foco luminoso e a lente anterior, un obxecto e unha segunda lente converxente, L_2, que é a que vai formar a imaxe do obxecto e da cal queremos estudar a súa distancia focal *f* '.

Por último, colocamos normalmente ó eixe óptico unha pantalla, na cal queremos obter a imaxe nítida do obxecto.

Desprazando ó longo do eixe óptico a segunda lente e a pantalla, observamos as distintas posibilidades de formación de imaxes nítidas sobre a pantalla.



Mídese, para as distintas posicións relativas de obxecto, lente e imaxe, a distancia obxecto, *s*, e a distancia imaxe, *s*', tabulando os datos obtidos.

Aplícase a ecuación fundamental das lentes en función da distancia focal *f* ', $\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$, calculando o seu valor para cada medida. Por último faise a media dos valores calculados.

8.- Nas lentes diverxentes a imaxe sempre é: a) dereita, menor e virtual; b) dereita, maior e real; c) dereita, menor e real. (*Xuño 06*).

Solución:

Para coñecer as características da imaxe dun obxecto formada por unha lente diverxente temos que estudar se é:

· Real ou virtual, segundo se forme, respectivamente, pola converxencia dos raios refractados ou pola súa prolongación en sentido contrario ó de propagación.

· Dereita ou invertida con respecto ó obxecto.

· De igual, maior ou menor tamaño que o obxecto.

Empezamos facendo o estudo analítico destas características da imaxe:

Para estudar se a imaxe producida por unha lente diverxente é real ou virtual, imos escribir a ecuación fundamental dunha lente delgada, situada no aire, en función da distancia focal *f* ' e das distancias obxecto, *s,* e imaxe, *s*'.

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow s' = \frac{s \cdot f'}{f' + s}$$

Cos correspondentes signos para *f*' e *s*, segundo as normas DIN, resulta: $s' = \frac{-|s| \cdot (-|f'|)}{(-|f'|) - |s|}$

Como para o caso dunha lente, a imaxe dun obxecto é real ou virtual segundo sexa, respectivamente, a distancia imaxe *s*' maior ou menor que cero, resulta que a imaxe dunha lente diverxente é sempre virtual: *s*'<0 e **a imaxe é virtual**.

Como *s* e *s*' son números negativos, a súa relación é positiva e a orientación da imaxe coincide coa do obxecto, tratándose dunha **imaxe dereita**: $\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = \frac{-|s'|}{-|s|} > 0$.

Para saber cal é a relación entre o tamaño do obxecto e o tamaño da imaxe, imos relacionar, coa fórmula do aumento lateral, estas magnitudes:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{y'}{y}=\dfrac{s'}{s}\\[2ex] s'=-\dfrac{|s|\cdot|f'|}{|f'|+|s|}\\[2ex] s=-|s|\end{array}\right\}\rightarrow\frac{y'}{y}=\frac{-\dfrac{|s|\cdot|f'|}{|f'|+|s|}}{-|s|}\rightarrow\left.\begin{array}{l}\dfrac{y'}{y}=\dfrac{|f'|}{|f'|+|s|}\\[4ex] |f'|<|f'|+|s|\end{array}\right\}\rightarrow\frac{y'}{y}<1$$

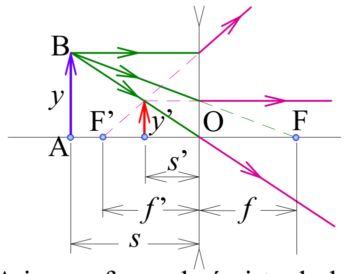
Polo tanto, **a imaxe dunha lente diverxente é sempre virtual, dereita e de menor tamaño que o obxecto**.

A construción gráfica da imaxe realízase buscando a intersección de alomenos dous raios de traxectoria coñecida, despois de que se refracten na lente. Con este fin recordamos que:

· Todo raio que chega paralelamente ó eixe óptico, despois de refractarse na lente diverxente, a prolongación do raio refractado, en sentido contrario ó da súa propagación, pasa polo foco imaxe, F'.

· Todo raio, cuxa dirección pasa polo foco obxecto, F, da lente diverxente, ó refractarse na lente, emerxe paralelo ó eixe óptico.

· Todo raio que pase polo centro óptico da lente non sofre desviación.



A imaxe formada é virtual, dereita e de menor tamaño que o obxecto

9.- Na práctica da lente converxente, fai un esquema da montaxe experimental seguido no laboratorio, explicando brevemente a misión de cada un dos elementos empregados. (*Set. 05*).

Solución:

Ver a resposta da sétima destas cuestións.

10.- Disponse dun proxector cunha lente delgada converxente e deséxase proxectar unha transparencia de forma que a imaxe sexa real, invertida e maior que o obxecto. Explica como facelo (fai un debuxo mostrando a traxectoria dos raios). (*Xuño. 05*).

Solución:

Sabemos que a imaxe formada por unha lente converxente, segundo a posición da imaxe con respecto ó foco da lente, pode ser:

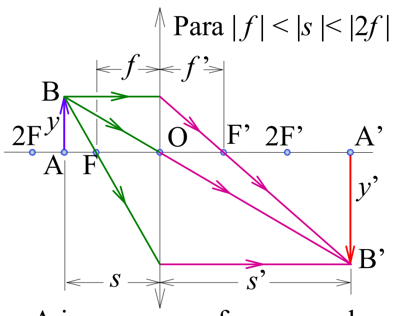
· Real, invertida e menor que o obxecto (cando o obxecto está máis afastado da lente que o dobre da distancia focal: $|s|>|2f|$).

· Real, invertida e de igual tamaño que o obxecto (cando o obxecto está a unha distancia igual ó dobre da distancia focal: $s = 2f$).

· Real, invertida e de maior tamaño que o obxecto (cando o obxecto está entre o foco e dúas veces a distancia focal: $|2f|>|s|>|f|$).

· Virtual, dereita e de maior tamaño que o obxecto (cando o obxecto está entre o foco e o vértice da lente: $|s| < |f|$).

Como o que queremos é obter unha imaxe real, invertida e de maior tamaño que o obxecto, a transparencia (diapositiva que fai de obxecto) hai que colocala a unha distancia s da lente que vén dada pola expresión: $|2f|>|s|>|f|$.



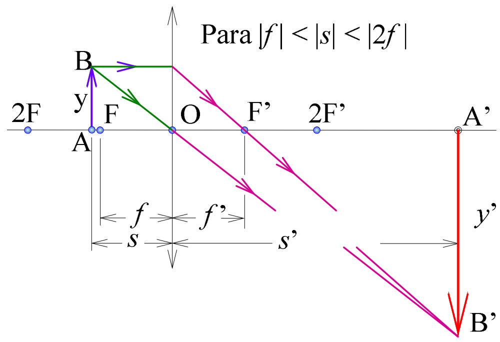
A imaxe que se forma e real, invertida e de maior tamaño que o obxecto, sendo $s' > 2f'$

Comentario: Os aparellos de proxección, que se utilizan para obter sobre unha pantalla unha imaxe real e de maior tamaño que o obxecto, constan dunha lente converxente (obxectivo). A transparencia (obxecto) sitúase entre o foco luminoso e a lente, a unha distancia comprendida entre a distancia focal e o dobre da mesma, e colócase invertida para que a imaxe sexa dereita.

O aumento do aparello de proxección, A_L, que é igual á relación entre o tamaño da imaxe y' e o tamaño do obxecto y, pode chegar a ser igual á distancia da pantalla á lente s' dividida pola súa distancia focal f:

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = \frac{s'}{f}$$

Para que a imaxe sexa clara é preciso unha boa iluminación da transparencia, razón pola que hai que concentrar sobre ela o raios procedentes do foco luminoso. Isto lógrase cun sistema de lentes ou colocando detrás do foco luminoso un espello cóncavo.

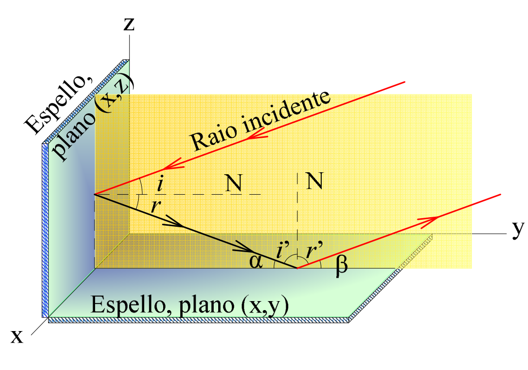


11.- Dous espellos planos están colocados perpendicularmente entre si. Un raio de luz que se despraza nun terceiro plano perpendicular ós dous reflíctese sucesivamente nos dous espellos; o raio reflectido no segundo espello, con respecto ó raio orixinal: a) é perpendicular; b) é paralelo; c) depende do ángulo de incidencia. (*Set. 04*).

Solución:

Segundo o gráfico, un dos espellos está situado no plano (x,y) e o outro espello no plano (x,z). Polo tanto, o raio desprázase no plano (y,z).

O raio de luz, ó incidir sobre un dos espellos, no gráfico sobre o do plano (x,z), cun certo ángulo de incidencia, i, reflíctese co ángulo r, e, segundo as leis da reflexión, cúmprese que $i = r$. Agora, este raio reflectido incide sobre o segundo dos espellos cun ángulo de incidencia i' e reflíctese cun novo ángulo r', sendo $i' = r'$. No gráfico podemos ver que:



$$\left.\begin{aligned} i' + \alpha &= 90^{\circ} \\ r' + \beta &= 90^{\circ} \\ i' &= r' \end{aligned}\right\} \rightarrow \alpha = \beta \qquad \left.\begin{aligned} i &= r \\ r &= \alpha \end{aligned}\right\} \rightarrow i = \alpha \qquad \Bigg\} \rightarrow i = \beta$$

Polo tanto, **o raio reflectido no segundo espello, con respecto ó raio orixinal, é paralelo**, independentemente do ángulo de incidencia.

12.- Na práctica da lente converxente explica se hai algunha posición do obxecto para a que a imaxe sexa virtual e dereita, e outra para a que a imaxe sexa real, invertida e do mesmo tamaño que o obxecto. (*Xuño 04*).

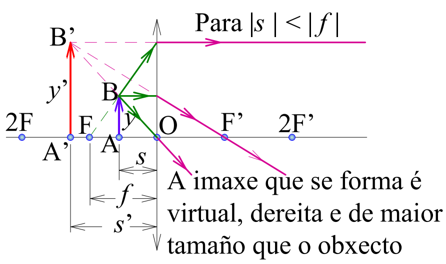
Solución:

A imaxe dun obxecto formada por unha lente dise real cando se forma pola intersección dos raios refractados e pode proxectarse nunha pantalla colocada no plano da imaxe. Se a imaxe non se forma pola intersección dos raios refractados, senón que para coñecer a súa posición hai que prolongalos en sentido contrario ó da súa propagación, dise virtual e non se pode recoller nunha pantalla.

Para o caso dunha lente, a imaxe dun obxecto será real ou virtual segundo sexa, respectivamente, a distancia imaxe s' maior ou menor que cero.

Para estudar se a imaxe producida por unha lente converxente é real ou virtual, imos escribir a ecuación fundamental das lentes delgadas, situadas no aire, en función da distancia focal f' e das distancias obxecto, s, e imaxe, s'.

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow s' = \frac{s \cdot f'}{f' + s}$$



Cos correspondentes signos para f' e s, segundo as normas DIN, resulta: $s' = \dfrac{-|s| \cdot |f'|}{|f'| - |s|}$.

Se a **imaxe** é **virtual**, $s'<0$ e, para que isto suceda, $|f'| > |s|$: **O obxecto hai de estar situado entre o foco e o vértice da lente**.

Como neste caso s e s' son números negativos, a súa relación é positiva e a orientación da imaxe coincide coa do obxecto, tratándose dunha **imaxe dereita**: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{s'}{s} = \dfrac{-|s'|}{-|s|} > 0$.

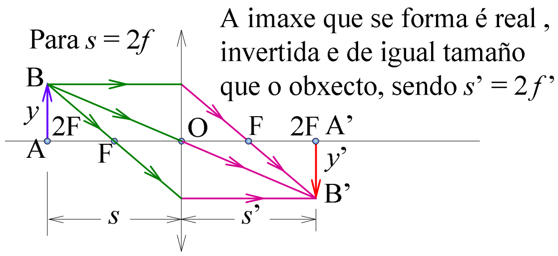
Se a **imaxe** é **real**, $s'>0$ e, para que isto suceda, $|f'| < |s|$: **O obxecto hai de estar situado a unha distancia maior que a focal da lente**.

Como neste caso $s<0$ e $s'>0$, a súa relación é negativa e a orientación da imaxe non coincide coa do obxecto, tratándose dunha **imaxe invertida**: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{s'}{s} = \dfrac{|s'|}{-|s|} < 0$.

Para que o tamaño da imaxe coincida co do obxecto (aumento lateral, A_L, igual á unidade), estudamos a posición do obxecto con respecto á lente facendo uso da fórmula do aumento lateral:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{y'}{y}=\frac{s'}{s} \\ s'=\frac{-|s|\cdot|f'|}{|f'|-|s|} \\ s=-|s| \end{array}\right\} \rightarrow \frac{y'}{y}=\frac{\frac{-|s|\cdot|f'|}{|f'|-|s|}}{-|s|} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{y'}{y}=\frac{|f'|}{|f'|-|s|} \\ \frac{y'}{y}=-1 \end{array}\right\} \rightarrow |s|=2|f'|$$

Polo tanto, **só cando o obxecto está situado a unha distancia igual a dúas veces a focal, a imaxe será real, invertida e do mesmo tamaño que o obxecto**.



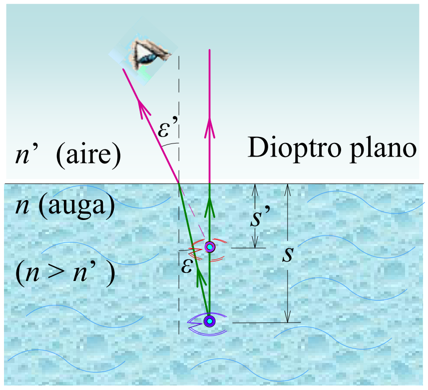
13.- Cando se observa o fondo dun río en dirección case perpendicular, a profundidade real con relación á aparente é: a) maior; b) menor; c) a mesma. Dato $n_{auga}>n_{aire}$). (*Set. 03*).

Solución:

Escribimos a ecuación fundamental do dioptro plano:

$$\frac{\text{Profundicade aparente, } s'}{\text{Profundidade real, } s}=\frac{n_{aire}}{n_{auga}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\text{Profundidade real, } s}{\text{Profundidade aparente, } s'}=\frac{n_{auga}}{n_{aire}} \\ n_{auga}>n_{aire} \end{array}\right\} \rightarrow s>s'$$



A profundidade real, *s*, é maior que a profundidade aparente, *s*'.

14.- Que clase de imaxes se forman nunha lente converxente se o obxecto se atopa a unha distancia superior ó dobre da distancia focal? Fai unha representación gráfica. (*Set. 03*).

Solución:

Para coñecer as características da imaxe dun obxecto formada por unha lente converxente temos que estudar se é:

· Real ou virtual, segundo se forme, respectivamente, pola converxencia dos raios refractados ou pola súa prolongación en sentido contrario ó de propagación.

· Dereita ou invertida con respecto ó obxecto.

· De igual, maior ou menor tamaño que o obxecto.

Empezamos facendo o estudo analítico destas características da imaxe:

Para estudar se a imaxe producida por unha lente converxente é real ou virtual, imos escribir a ecuación fundamental dunha lente delgada, situada no aire, en función da distancia focal f' e das distancias obxecto, s, e imaxe, s':

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'} \rightarrow s'=\frac{s\cdot f'}{f'+s}$$

Cos correspondentes signos para f' e s, segundo as normas DIN, resulta: $s'=\dfrac{-|s|\cdot|f'|}{|f'|-|s|}$

Como para o caso dunha lente, a imaxe dun obxecto é real ou virtual segundo sexa, respectivamente, a distancia imaxe s' maior ou menor que cero, resulta que **se o obxecto está a unha distancia maior que dúas veces a focal**, a imaxe é real: $|s|> 2|f'|= 2|f| \Rightarrow s'>0$ e **a imaxe é real**.

Como s é menor que cero e s' maior que cero, a súa relación é negativa e a orientación da imaxe non coincide coa do obxecto, tratándose dunha **imaxe invertida**: $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{s'}{s}=\dfrac{|s'|}{-|s|}<0$

Para ver cal é a relación entre o tamaño do obxecto e o tamaño da imaxe, imos relacionar, coa fórmula do aumento lateral, estas magnitudes:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s}\\ &s'=\frac{-|s|\cdot|f'|}{|f'|-|s|}\\ &s=-|s|\end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{y'}{y}=\frac{\dfrac{-|s|\cdot|f'|}{|f'|-|s|}}{-|s|} \rightarrow \left.\begin{aligned}&\frac{y'}{y}=\frac{|f'|}{|f'|-|s|}\\ &|s|>2|f'|\end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{y'}{y}<0 \text{ e } \frac{|y'|}{|y|}<1$$

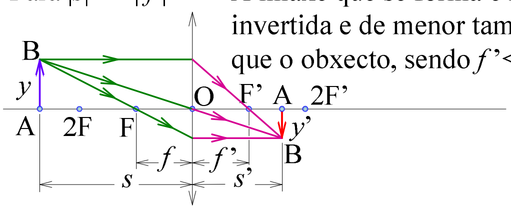
Polo tanto, **a imaxe dunha lente converxente, cando o obxecto está situado a unha distancia maior ó dobre da distancia focal, é real, invertida é de menor tamaño que o obxecto**.

A construción gráfica da imaxe formada por unha lente realízase buscando a intersección de alomenos dous raios de traxectoria coñecida, despois de que se refracten na lente. Con este fin recordamos que:

· Todo raio que chega paralelamente ó eixe óptico da lente converxente, despois de refractarse, pasa polo foco imaxe, F'.

· Todo raio que pasa polo foco obxecto, F, ó refractarse na lente converxente, emerxe paralelo ó eixe óptico.

Para $|s| > 2|f|$



A imaxe que se forma é real, invertida e de menor tamaño que o obxecto, sendo $f'<s'<2f'$

· Todo raio que pase polo centro óptico da lente non sofre desviación.

15.- Nas lentes diverxentes a imaxe sempre é: a) dereita, maior e real; b) dereita, menor e virtual; c) dereita, menor e real. (*Xuño 03*).

Solución:

Ver a resposta da oitava destas cuestións.

16.- Nunha lente converxente, se se coloca un obxecto entre o foco e a lente, como é a imaxe? Debuxa a marcha dos raios. (*Set. 02*).

Solución:

Para coñecer as características da imaxe dun obxecto formada por unha lente converxente temos que estudar se é:

· Real ou virtual, segundo se forme, respectivamente, pola converxencia dos raios refractados ou pola súa prolongación.

· Dereita ou invertida con respecto ó obxecto.

· De igual, maior ou menor tamaño que o obxecto.

Empezamos facendo o estudo analítico destas características da imaxe:

Para estudar se a imaxe producida por unha lente converxente é real ou virtual, imos escribir a ecuación fundamental dunha lente delgada, situada no aire, en función da distancia focal *f'* e das distancias obxecto, *s,* e imaxe, *s'*:

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'} \rightarrow s'=\frac{s\cdot f'}{f'+s}$$

Cos correspondentes signos para *f'* e *s*, segundo as normas DIN, resulta: $s'=\frac{-|s|\cdot|f'|}{|f'|-|s|}$.

Como para o caso dunha lente, a imaxe dun obxecto é real ou virtual segundo sexa, respectivamente, a distancia imaxe *s'* maior ou menor que cero, resulta que se o obxecto está situado entre o foco e a lente, a imaxe é virtual: $|s| < |f'| = |f| \Rightarrow s'<0$ e **a imaxe é virtual**.

Como *s* e *s'* son números negativos, a súa relación é positiva e a orientación da imaxe coincide coa do obxecto, tratándose dunha **imaxe dereita**: $\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s}=\frac{-|s'|}{-|s|}>0$.

Para saber cal é a relación entre o tamaño do obxecto e o tamaño da imaxe, imos relacionar, coa fórmula do aumento lateral, estas magnitudes:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{y'}{y}=\dfrac{s'}{s}\\ s'=\dfrac{-|s|\cdot|f'|}{|f'|-|s|}\\ s=-|s|\end{array}\right\} \rightarrow \frac{y'}{y}=\frac{\dfrac{-|s|\cdot|f'|}{|f'|-|s|}}{-|s|} \rightarrow \left.\begin{array}{l}\dfrac{y'}{y}=\dfrac{|f'|}{|f'|-|s|}\\ |f|>|s|\end{array}\right\} \rightarrow \frac{y'}{y}>1$$

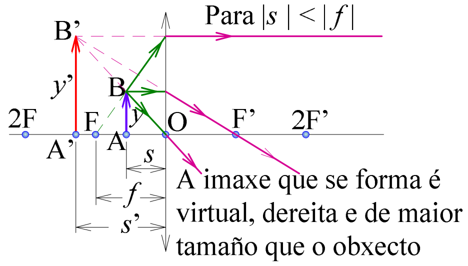
Polo tanto, **cando o obxecto estea situado entre o foco e a lente converxente, a imaxe é virtual, dereita e de maior tamaño que o obxecto**.

A construción gráfica da imaxe realízase buscando a intersección de alomenos dous raios de traxectoria coñecida, despois de que se refracten na lente. Con este fin recordamos que:

· Todo raio que chega paralelamente ó eixe óptico da lente converxente, despois de refractarse, pasa polo foco imaxe, F'.

· Todo raio que pasa polo foco obxecto, F, ó refractarse na lente converxente, emerxe paralelo ó eixe óptico.

· Todo raio que pase polo centro óptico da lente non sofre desviación.



17.- Nun espello esférico convexo a imaxe que se forma dun obxecto é: a) real, invertida e de maior tamaño que o obxecto; b) virtual, dereita e de menor tamaño que o obxecto; c) virtual, dereita e de maior tamaño que o obxecto. Razoa as respostas. (*Set. 02*).

Solución:

A **imaxe** dun obxecto dise **real** cando os raios de luz converxe cara a ela e dise **virtual** cando a luz diverxe a partir dela. Para o caso da imaxe formada por un espello, a imaxe é real ou virtual segundo sexa, respectivamente, a distancia imaxe *s*' menor ou maior que cero.

Para estudar se a imaxe producida por un espello convexo é real ou virtual, imos escribir a ecuación fundamental dos espellos en función do seu raio de curvatura *r* e das distancias obxecto, *s,* e imaxe, *s*': $\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{2}{r} \rightarrow s'=\frac{s\cdot r}{2s-r}$

Cos correspondentes signos para *r* e *s*, segundo as normas DIN, resulta:

$$s'=\frac{(+|r|)\cdot(-|s|)}{(-2|s|)-(+|r|)} = \frac{|r|\cdot|s|}{2|s|+|r|}>0$$

Como *s*' é sempre positivo, **a imaxe** dun obxecto producida por un espello convexo **é** sempre **virtual**.

A expresión do aumento lateral para os espellos esféricos é: $\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s}$. Como *s*<0 e *s*'>0, resulta: $\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s}=-\frac{|s'|}{-|s|}>0$. Este resultado indícanos que a orientación da imaxe coincide coa do obxecto, tratándose dunha **imaxe dereita**.

Para ver cal é a relación entre o tamaño do obxecto e o da imaxe, imos relacionar, coa fórmula do aumento lateral, estas magnitudes:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s}\\ s'=\frac{|r|\cdot|s|}{2|s|+|r|}\\ s=-|s|\end{array}\right\} \rightarrow \frac{y'}{y}=\frac{\frac{|r|\cdot|s|}{2|s|+|r|}}{-|s|} \rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{y'}{y}=\frac{|r|}{2|s|+|r|}\\ |r|<2|s|+|r|\end{array}\right\} \rightarrow \frac{y'}{y}<1$$

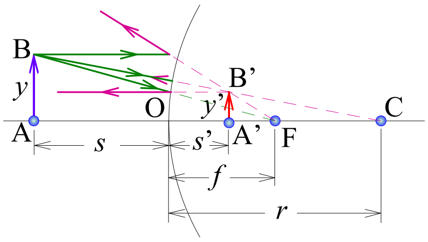
Polo tanto, **a imaxe dun obxecto formada por un espello convexo é sempre virtual, dereita e de menor tamaño que o obxecto**.

A construción gráfica da imaxe realízase buscando a intersección de alomenos dous raios de traxectoria coñecida, despois de que se reflicten no espello. Con este fin recordamos que:

· Todo raio, que chega paralelamente ó eixe óptico, despois de reflectirse no espello convexo, a prolongación do raio reflectido en sentido contrario ó da súa propagación pasa polo foco F.

· Todo raio que leva a dirección do foco do espello convexo, F, ó reflectirse no espello emerxe paralelamente ó eixe óptico.

· Todo raio que pase polo centro de curvatura do espello, C, non sofre desviación.



A imaxe que se forma e, para calquera posición do obxecto, virtual, dereita e de menor tamaño que o obxecto

18.- Na práctica da lente converxente debuxa a marcha dos raios e a imaxe formada dun obxecto cando: a) se sitúa entre o foco e o centro óptico; b) se sitúa no foco. (*Xuño 02*).

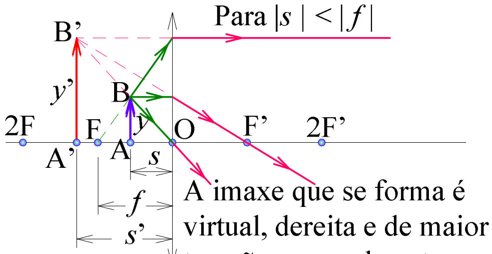
Solución:

A construción gráfica da imaxe formada por unha lente realízase buscando a intersección de alomenos dous raios de traxectoria coñecida, despois de que se refracten na lente. Con este fin recordamos que:

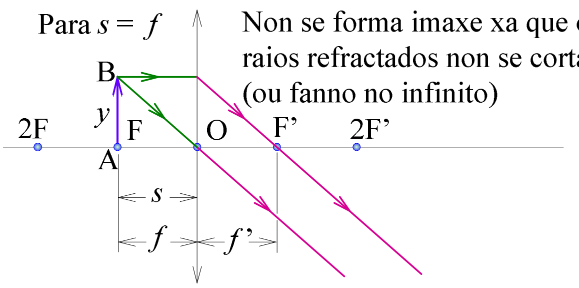
· Todo raio, que chega paralelamente ó eixe óptico dunha lente converxente, despois de refractarse na lente, pasa polo foco imaxe, F'.

· Todo raio que pasa polo foco obxecto, F, dunha lente converxente, ó refractarse na lente, emerxe paralelamente ó eixe óptico.

· Todo raio que pase polo centro óptico da lente non sofre desviación.



A imaxe que se forma é virtual, dereita e de maior tamaño que o obxecto



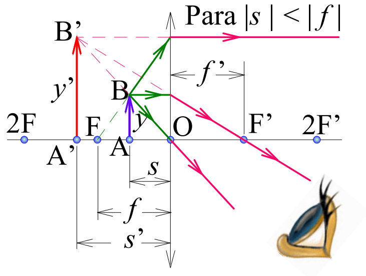
Non se forma imaxe xa que os raios refractados non se cortan (ou fanno no infinito)

19.- Fai un pequeno gráfico explicando como podes usar unha lente converxente como lupa de aumento. (*Set. 01*).

Solución:

A lupa, tamén chamada **microscopio simple**, utilízase para observar obxectos pequenos, dos que forma unha imaxe virtual, dereita e ampliada.

Consiste nunha lente converxente de pequena distancia focal e interponse entre o ollo e o obxecto que se desexa observar, acercándoa a este ata unha distancia inferior á súa distancia focal, para así formar unha imaxe dereita e de maior tamaño que o obxecto.



20.- Cunha lente converxente debuxa a marcha dos raios e o tipo de imaxe formada en cada un destes dous casos: a) se a distancia obxecto, *s*, é igual ó dobre da focal, 2*f*; b) se a distancia obxecto é igual á focal, *f*. (*Xuño 01*).

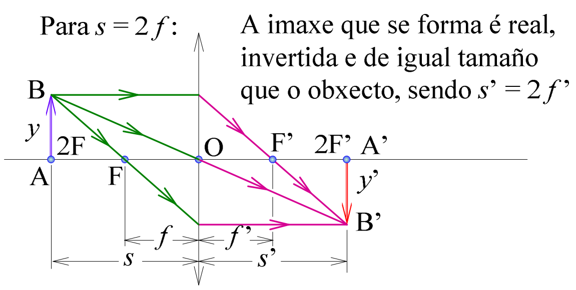
Solución:

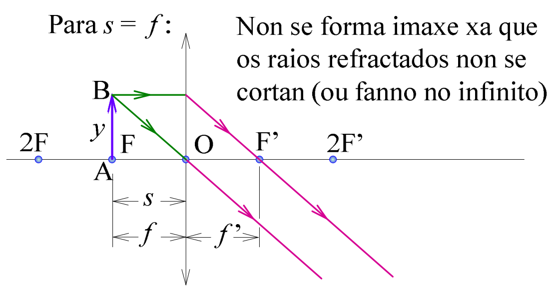
A construción gráfica da imaxe formada por unha lente realízase buscando a intersección de alomenos dous raios de traxectoria coñecida, despois de que se refracten na lente. Con este fin recordamos que:

· Todo raio, que chega paralelamente ó eixe óptico dunha lente converxente, despois de refractarse na lente, pasa polo foco imaxe, F'.

· Todo raio que pasa polo foco obxecto, F, ó refractarse na lente converxente, emerxe paralelo ó eixe óptico.

· Todo raio que pase polo centro óptico da lente non sofre desviación.





21.- Cunha lente converxente deséxase formar unha imaxe virtual, dereita e aumentada. Onde debe colocarse o obxecto? Fai un esquema da práctica. (*Set. 00*).

Solución:

A **imaxe** dun obxecto dise **real** cando a luz converxe cara a ela e **virtual** cando a luz diverxe a partir dela. Para o caso da imaxe formada por unha lente, a imaxe é real ou virtual segundo sexa, respectivamente, a distancia imaxe *s*' maior ou menor que cero.

Para estudar se a imaxe producida por unha lente converxente é real ou virtual, imos escribir a ecuación fundamental dunha lente delgada, situada no aire, en función da distancia focal *f*' e das distancias obxecto, *s*, e imaxe, *s*':

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow s' = \frac{s \cdot f'}{f' + s}$$

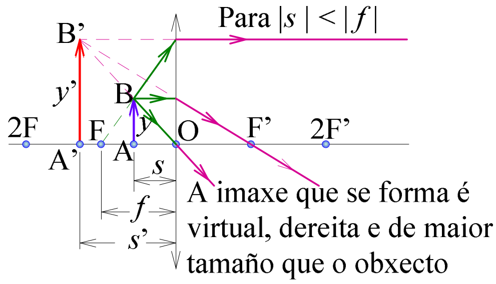
Cos correspondentes signos para *f*' e *s*, segundo as normas DIN, resulta: $s' = \frac{-|s| \cdot |f'|}{|f'| - |s|}$.

En consecuencia, se:

· $|s| > |f'| = |f|$; $s' > 0$ e a imaxe é real.

· $|s| < |f'| = |f|$; $s' < 0$ e a imaxe é virtual.

· $|s| = |f'|$; non se forma imaxe ou esta está no infinito.



Polo tanto, só **cando o obxecto está entre o foco obxecto, F, e o vértice da lente, O, se forman imaxes virtuais**.

Como *s* e *s*' son números negativos, a súa relación é positiva e a orientación da imaxe coincide coa do obxecto, tratándose dunha **imaxe dereita**: $\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = \frac{-|s'|}{-|s|} > 0$.

Imos agora relacionar, coa fórmula do aumento lateral, o tamaño do obxecto co da imaxe para ver cal é a relación destas magnitudes:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y'}{y} = \dfrac{s'}{s} \\ s' = \dfrac{-|s| \cdot |f'|}{|f'| - |s|} \\ s = -|s| \end{array}\right\} \rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{\dfrac{-|s| \cdot |f'|}{|f'| - |s|}}{-|s|} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{y'}{y} = \dfrac{|f'|}{|f'| - |s|} \\ |f| > |s| \end{array}\right\} \rightarrow \frac{y'}{y} > 1$$

Polo tanto, **a imaxe dunha lente converxente será virtual, dereita e aumentada cando o obxecto estea situado entre o foco F e o centro da lente**.

A montaxe e realización da práctica consiste en:

Á distancia do foco obxecto dunha lente converxente L_1 colócase o foco luminoso. Esta lente ten por obxectivo favorecer que os raios luminosos que inciden sobre o obxecto sexan paralelos ó seu eixe óptico.

A continuación móntase, de forma aliñada co foco luminoso e coa lente anterior, un obxecto e unha segunda lente converxente, L_2, da cal queremos estudar a súa distancia focal, *f*'.

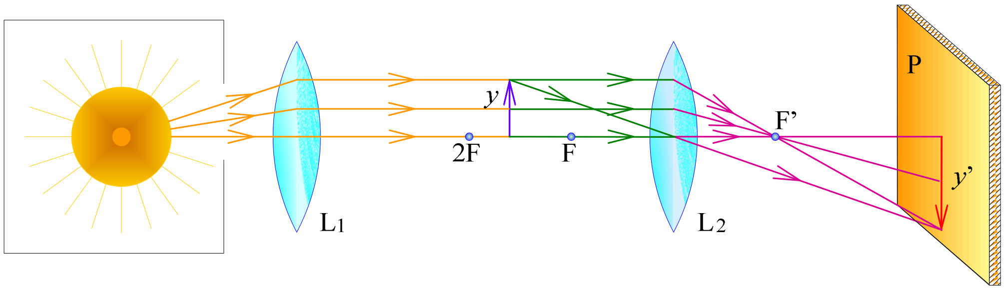
Por último, colocamos normalmente ó eixe óptico unha pantalla, na cal queremos obter a imaxe do obxecto.

Desprazando, ó longo do eixe óptico, a segunda lente, L_2, e a pantalla, P, observamos as distintas posibilidades de formación de imaxes nítidas sobre a pantalla.

Mídese, para as distintas posicións relativas de obxecto, lente e imaxe, a distancia obxecto, *s*, e a distancia imaxe, *s*', tabulando os datos obtidos.

Aplícase a ecuación fundamental das lentes en función da distancia focal f', $\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'}$, calculando o seu valor para cada medida. Por último faise a media dos valores calculados.

Un esquema gráfico da práctica pode ser o que se indica a continuación:



22.- Que clase de imaxes se forman nunha lente converxente se o obxecto se encontra a unha distancia inferior á focal? E se se encontra na focal? Debuxa a marcha dos raios. (*Xuño 00*).

Solución:

Para coñecer as características da imaxe dun obxecto formada por unha lente converxente temos que estudar se é:

· Real ou virtual, segundo se forme, respectivamente, pola converxencia dos raios refractados ou pola súa prolongación en sentido contrario ó de propagación.

· Dereita ou invertida con respecto ó obxecto.

· De igual, maior ou menor tamaño que o obxecto.

Empezamos facendo o estudo analítico destas características da imaxe:

Para estudar se a imaxe producida por unha lente converxente é real ou virtual, imos escribir a ecuación fundamental dunha lente delgada, situada no aire, en función da distancia focal *f'* e das distancias obxecto, *s,* e imaxe, *s'*:

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'} \rightarrow s'=\frac{s\cdot f'}{f'+s}$$

Cos correspondentes signos para *f'* e *s*, segundo as normas DIN, resulta: $s'=\frac{-|s|\cdot|f'|}{|f'|-|s|}$.

Como para o caso dunha lente, a imaxe dun obxecto é real ou virtual segundo sexa, respectivamente, a distancia imaxe *s'* maior ou menor que cero, resulta que **se o obxecto está comprendido entre o foco e a lente**, a imaxe é virtual: $|s<|f'|=|f|$ ⇒ $s'<0$ e **a imaxe é virtual**.

Como *s* e *s'* son números negativos, a súa relación é positiva e a orientación da imaxe coincide coa do obxecto, tratándose dunha **imaxe dereita**: $\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s}=\frac{-|s'|}{-|s|}>0$.

Para ver cal é a relación entre o tamaño do obxecto e o tamaño da imaxe, imos relacionar, coa fórmula do aumento lateral, estas magnitudes:

Polo tanto, **a imaxe dunha lente converxente, cando o obxecto está situado a unha distancia inferior á focal, é virtual, dereita é de maior tamaño que o obxecto**.

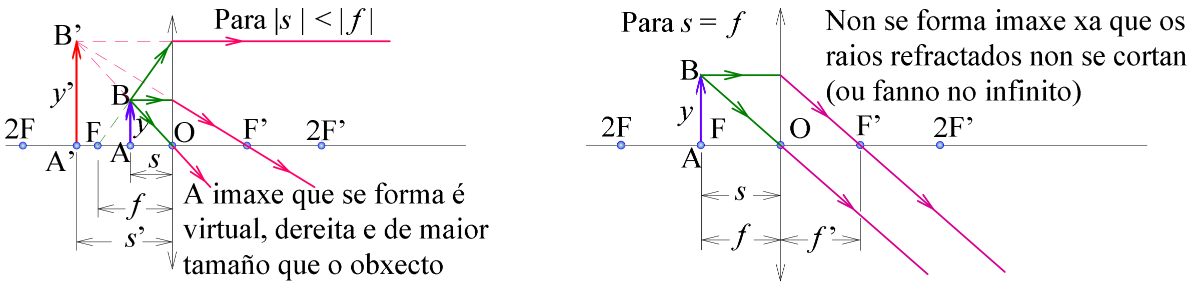
Cando o obxecto está no foco F, $|s|$ coincide con $|f'|$ e $s' = \infty$, **non formándose imaxe** (ou esta está no infinito).

A construción gráfica da imaxe formada por unha lente realízase buscando a intersección de alomenos dous raios de traxectoria coñecida, despois de que se refracten na lente. Con este fin recordamos que:

· Todo raio que chega paralelamente ó eixe óptico, despois de refractarse na lente converxente, pasa polo foco imaxe, F'.

· Todo raio que pasa polo foco obxecto, F, ó refractarse na lente converxente, emerxe paralelo ó eixe óptico.

· Todo raio que pasa polo centro óptico da lente non sofre desviación.



23.- Cando se observa en dirección case perpendicular un obxecto no fondo dun río a profundidade aparente observada é: a) maior ca real; b) menor ca real; c) igual á real. (*Set. 99*).

Solución:

Ver a resposta da décimo terceira destas cuestións.

24.- Se nunha lente converxente un obxecto situado no eixe óptico e a 20 cm non forma imaxe, cal é a potencia e a focal da lente? Debuxa a marcha dos raios. Como sería a imaxe se *s* = 10 cm? (*Set. 99*).

Solución:

Se nunha lente converxente non se obtén a imaxe dun obxecto é porque os raios refractados non se cortan (son paralelos e non converxen nun punto ou fanno no infinito). Esta situación ten lugar cando o obxecto está no propio foco obxecto, F, e, polo tanto, a distancia focal obxecto, f, vale: $f = -20$ cm. Facilmente se obtén este resultado recordando a ecuación fundamental das lentes delgadas, que para o caso de que estean no aire é:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow s' = \frac{s \cdot f'}{f' + s},$$

sendo s a distancia obxecto e s' a distancia imaxe. Cos correspondentes signos para f' e s, segundo as normas DIN, resulta:

$$s' = \frac{-|s|\cdot|f'|}{|f'|-|s|} = \frac{|s|\cdot|f'|}{-|f'|+|s|}$$

E $s' = \infty$ cando $|s| = |f| = |f'| = 20$ cm.

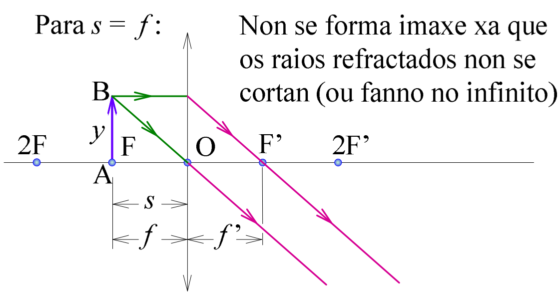
Recordando que a potencia, P, dunha lente é a inversa da distancia focal imaxe, f': $P = \frac{1}{f'}$, resulta: $P = \frac{1}{0{,}20} = 5\ \text{m}^{-1} = 5\ \text{dioptrías}$.

A construción gráfica da imaxe formada por unha lente realízase buscando a intersección de alomenos dous raios de traxectoria coñecida, despois de que se refracten na lente. Con este fin recordamos que:

· Todo raio que chega paralelamente ó eixe óptico, despois de refractarse na lente converxente, pasa polo foco imaxe, F'.

· Todo raio que pasa polo foco obxecto, F, ó refractarse na lente converxente, emerxe paralelo ó eixe óptico.

· Todo raio que pase polo centro óptico da lente non sofre desviación.

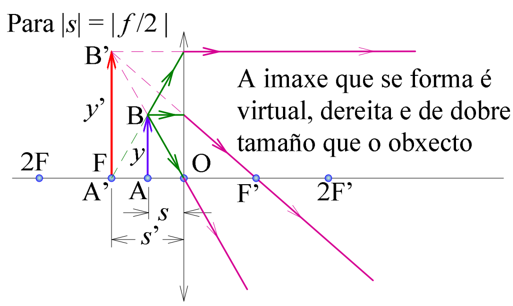


Para o caso de que $s = 10$ cm, a posición da imaxe é:

$$s' = \frac{-10\cdot 20}{20-10} \rightarrow s' = -20\ \text{cm}$$

O seu tamaño obtémolo coa expresión do aumento lateral:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow y' = y\cdot\frac{-20}{-10} = 2\,y$$



Resulta que a imaxe é virtual, dereita e de dobre tamaño que o obxecto. Igual resultado se obtén graficamente.

25.- Nunha lente converxente, un obxecto atópase a unha distancia *s* maior que o dobre da focal (2*f*). Fai un esquema da marcha dos raios e explica que clase de imaxe se forma (real ou virtual, dereita ou invertida) e que ocorre co aumento. (*Xuño 99*).

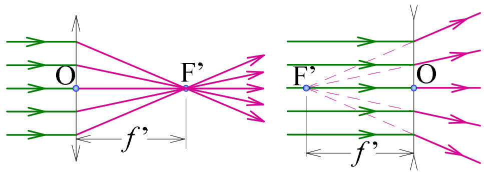
Solución:

Ver a resposta da décimo catorce destas cuestións.

26.- Ó atravesar unha lente delgada, un raio paralelo o eixe óptico: a) non se desvía, b) desvíase sempre, c) desvíase ou non dependendo do tipo de lente. (*Set. 98*).

Solución:

Cando un raio de luz se propaga paralelamente ó eixe óptico dunha lente, ó atravesala desvíase pasando o raio refractado (caso das lentes converxentes) ou a súa prolongación (caso das lentes diverxentes) polo foco imaxe, F', da lente. Polo tanto, o ítem correcto é o b).



27.- Na práctica de óptica, púidose e como determinar a distancia focal da lente? (*Set. 98*).

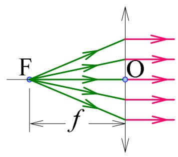
Solución:

Ver a resposta da sétima destas cuestións.

28.- Nunha lente converxente, os raios saen do foco obxecto, a) converxen no foco imaxe, b) emerxen paralelos, c) non se desvían. (*Set. 97*).

Solución:

Sabemos que o foco obxecto, F, dunha lente converxente é o punto do eixe de onde deben saír os raios para que unha vez que atravesen a lente emerxan paralelos ó eixe óptico. Polo tanto, o ítem correcto é o b).



Facilmente se obtén este resultado recordando a ecuación fundamental das lentes delgadas que, para o caso de que estean no aire, é:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow s' = \frac{s \cdot f'}{f' + s},$$

sendo s a distancia obxecto e s' a distancia imaxe. Cos correspondentes signos para f' e s, segundo as normas DIN, temos: $s' = \dfrac{-|s| \cdot |f'|}{|f'| - |s|}$.

E para o caso de que $|s| = |f| = |f'|$ resulta que: $s' = \infty$.

29.- Fai un esquema da práctica de óptica, situando o obxecto, a lente e a imaxe debuxando a marcha dos raios. *(Xuño 97).*

Solución:

A montaxe e realización da práctica consiste en:

Á distancia do foco obxecto dunha lente converxente, L_1, colócase o foco luminoso. Os raios que emerxen desta lente son paralelos ó seu eixe óptico.

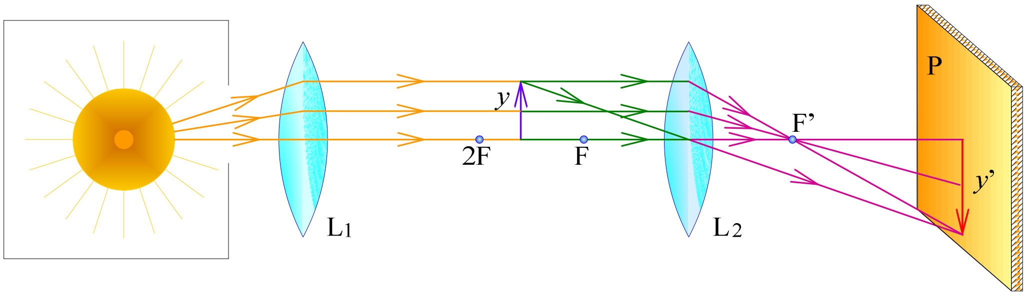
A continuación móntase, de forma aliñada co foco luminoso e a lente anterior, un obxecto e unha segunda lente converxente, L_2, da cal queremos estudar a súa distancia focal, f'.

Por último, colocamos normalmente ó eixe óptico unha pantalla, na cal queremos obter a imaxe do obxecto.

Desprazando ó longo do eixe óptico a segunda lente e a pantalla, observamos as distintas posibilidades de formación de imaxes nítidas sobre a pantalla.

Mídese, para as distintas posicións relativas de obxecto, lente e imaxe, a distancia obxecto, s, e a distancia imaxe, s', tabulando os datos obtidos.

Un esquema gráfico da práctica pode ser o que se indica a continuación:



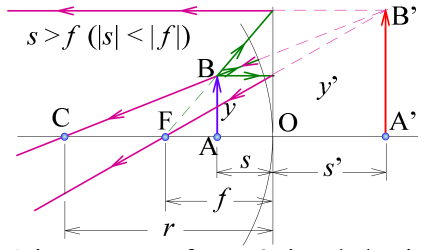
EXERCICIOS DE SELECTIVIDADE (Problemas)

1.- Un obxecto de 3 cm está situado a 8 cm dun espello esférico cóncavo e produce unha imaxe a 10 cm á dereita do espello: a) calcula a distancia focal; b) debuxa a marcha dos raios e obtén o tamaño da imaxe; c) en que posición do eixe hai que colocar o obxecto para que non se forme imaxe? *(Xuño 08).*

Solución:

a) O cálculo analítico da distancia focal f facémolo a partir da distancia obxecto, s, e da distancia imaxe, s', utilizando a ecuación fundamental dos espellos:

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{10}+\frac{1}{-8}=\frac{1}{f} \rightarrow \boxed{f=-40 \text{ cm}}$$

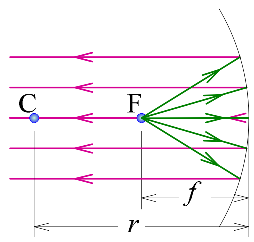


A imaxe que se forma é virtual, dereita e de maior tamano que o obxecto

b) O cálculo analítico do tamaño da imaxe y' facémolo a partir do tamaño do obxecto, y, e das distancias obxecto, s, e imaxe, s', a partir da expresión do aumento lateral, A_L, dos espellos:

$$A_L=\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s} \rightarrow \frac{y'}{3}=-\frac{10}{-8} \rightarrow \boxed{y'=3{,}75 \text{ cm}}$$

c) Non se forma a imaxe dun obxecto cando os raios luminosos, unha vez reflectidos no espello cóncavo, emerxen paralelos ó eixe óptico: $s'=-\infty$. Para que isto ocorra, o punto do eixe óptico de onde deben partir os raios é o foco obxecto, F:



$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{2}{r}=\frac{1}{f} \rightarrow s'=\frac{-|s|\cdot(-|f|)}{-|s|-(-|f|)}=-\frac{|s|\cdot|f|}{|s|-|f|}$$

E para o caso de que $|s|=|f|$ resulta que $s'=-\infty$.

2.- Un obxecto de 3 cm de altura sitúase a 75 cm dunha lente delgada converxente e produce unha imaxe a 37,5 cm á dereita da lente: a) calcula a distancia focal; b) debuxa a marcha dos raios e obtén o tamaño da imaxe; c) en que posición do eixe hai que colocar o obxecto para que non se forme imaxe? *(Xuño 08).*

Solución:

a) O cálculo analítico da distancia focal, f', facémolo a partir da distancia obxecto, s, e da distancia imaxe, s', utilizando a ecuación fundamental das lentes delgadas:

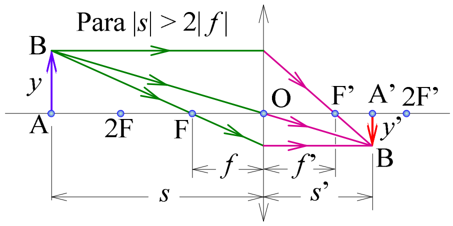
$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'}=-\frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{37{,}5}-\frac{1}{-75}=\frac{1}{f'} \rightarrow \boxed{f'=25 \text{ cm}}$$

b) O cálculo analítico do tamaño da imaxe, y', facémolo a partir do tamaño do obxecto, y, e das distancias obxecto, s, e imaxe, s', a partir da expresión do aumento lateral, A_L, das lentes delgadas:

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow y' = \frac{s'}{s} \cdot y$$

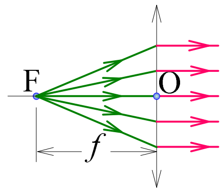
$$y' = \frac{37{,}5}{-75} \cdot 3 \rightarrow \boxed{y' = -1{,}5 \text{ cm}}$$

O signo menos, −, que aparece en y' indícanos que a **imaxe** é **invertida** respecto ó obxecto.



A imaxe que se forma e real, invertida e de menor tamaño que o obxecto, sendo $f' < s' < 2f'$

c) A posición do eixe óptico na que hai que colocar o obxecto para que, unha vez que atravesen a lente, non se forme imaxe é no **foco obxecto**, F. Situado o obxecto nesta posición, os raios que saen del, unha vez refractados na lente, emerxen paralelos ó eixe óptico e non se cortan, polo que non se forma imaxe.



Facilmente se obtén este resultado recordando a ecuación fundamental das lentes delgadas que, para o caso de que estean no aire, é: $\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$, sendo s a distancia obxecto e s' a distancia imaxe. Cos correspondentes signos para f' e s, segundo as normas DIN, temos:

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{s} \rightarrow s' = \frac{f' \cdot s}{s + f'} \rightarrow s' = \frac{|f'| \cdot (-|s|)}{-|s| + |f'|}$$

E para o caso de que $|s| = |f| = |f'|$ resulta que: $s' = \infty$.

3.- Un obxecto de 3 cm de altura colócase a 20 cm dunha lente delgada de 15 cm de focal. Calcula, analítica e graficamente, a posición e o tamaño da imaxe: a) se a lente é converxente; b) se a lente é diverxente. (*Set. 06*).

Solución:

a) O cálculo analítico da distancia imaxe, s', facémolo a partir da distancia obxecto, s, e da distancia focal imaxe, f', utilizando a ecuación fundamental das lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{s'} - \frac{1}{-20} = \frac{1}{15} \rightarrow \boxed{s' = 60 \text{ cm}}$$

O cálculo analítico do tamaño da imaxe, y', facémolo a partir do tamaño do obxecto, y, e das distancias obxecto, s, e imaxe, s', utilizando a expresión do aumento lateral, A_L, das lentes delgadas:

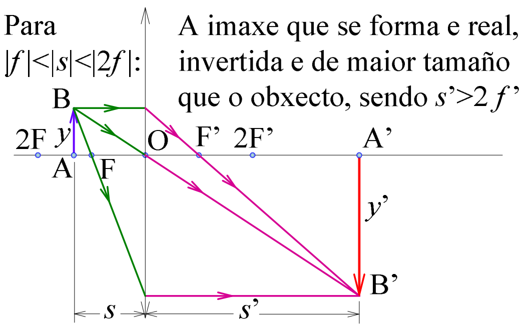
$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow y' = \frac{s'}{s} \cdot y \rightarrow y' = \frac{60}{-20} \cdot 3 \rightarrow \boxed{y' = -9 \text{ cm}}$$

A construción gráfica da imaxe formada por unha lente delgada realízase buscando a intersección de alomenos dous raios de traxectoria coñecida, despois de que se refracten na lente. Con este fin recordamos que:

· Todo raio que chega paralelamente ó eixe óptico, despois de refractarse na lente, pasa polo foco imaxe, F'.

· Todo raio que pasa polo foco obxecto, F, ó refractarse na lente, emerxe paralelo ó eixe óptico.

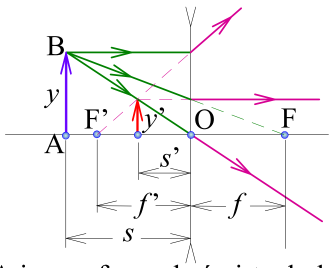
· Todo raio que pasa polo centro óptico da lente non sofre desviación.



b)

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{s'}-\frac{1}{-20}=\frac{1}{-15} \rightarrow \boxed{s' = -\ 8{,}6\ \text{cm}}$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s} \rightarrow y'=\frac{s'}{s}\cdot y \rightarrow y'=\frac{-8{,}6}{-20}\cdot 3 \rightarrow \boxed{y' = 1{,}29\ \text{cm}}$$



A imaxe formada é virtual, dereita e de menor tamaño que o obxecto

4.- Dado un espello esférico de 50 cm de raio e un obxecto de 5 cm de altura situado sobre o eixe óptico a unha distancia de 30 cm do espello, calcula analítica e graficamente a posición e o tamaño da imaxe: a) se o espello é cóncavo; b) se o espello é convexo. (*Xuño 06*).

Solución:

a) O cálculo analítico da distancia imaxe, *s*', facémolo a partir da distancia obxecto, *s*, e do raio de curvatura, *r*, utilizando a ecuación fundamental dos espellos:

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{2}{r} \rightarrow \frac{1}{s'}+\frac{1}{-30}=\frac{2}{-50} \rightarrow \boxed{s' = -150\ \text{cm}}$$

O cálculo analítico do tamaño da imaxe, *y*', facémolo a partir do tamaño do obxecto, *y*, e das distancias obxecto, *s*, e imaxe, *s*', a partir da expresión do aumento lateral, A_L, dos espellos:

$$A_L=\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s} \rightarrow \frac{y'}{5}=-\frac{-150}{-30} \rightarrow \boxed{y' = -25\ \text{cm}}$$

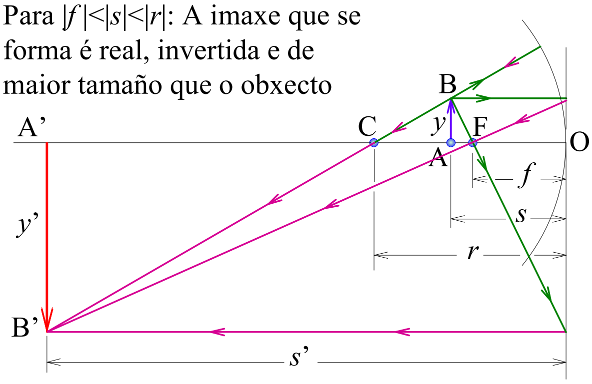
A construción gráfica da imaxe realízase buscando a intersección de alomenos dous raios de traxectoria coñecida, despois de que se reflicten no espello. Con este fin recordamos que:

· Todo raio que chega paralelamente ó eixe óptico, despois de reflectirse no espello cóncavo, pasa polo foco F.

· Todo raio que pasa polo foco do espello, F, ó reflectirse no espello emerxe paralelamente ó eixe óptico.

· Todo raio que pasa polo centro de curvatura do espello, C, non sofre desviación.

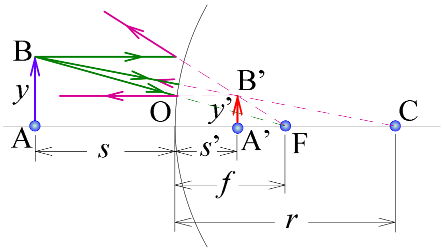
Para $|f|<|s|<|r|$: A imaxe que se forma é real, invertida e de maior tamaño que o obxecto



b)

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{2}{r} \rightarrow \frac{1}{s'}+\frac{1}{-30}=\frac{2}{50} \rightarrow \boxed{s' = 13{,}6 \text{ cm}}$$

$$\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s} \rightarrow \frac{y'}{5}=-\frac{-13{,}6}{-30} \rightarrow \boxed{y' = 2{,}3 \text{ cm}}$$



A imaxe que se forma e, para calquera posición do obxecto, virtual, dereita e de menor tamaño que o obxecto

5.- Un espello esférico cóncavo ten un raio de curvatura de 0,5 m. Determina analítica e graficamente a posición e o aumento da imaxe dun obxecto de 5 cm de altura situado en dúas posicións diferentes: a) a 1 m do espello; b) a 0,30 m do espello. (*Set. 05*).

Solución:

a) O cálculo analítico da distancia imaxe, s', facémolo a partir da distancia obxecto, s, e do raio de curvatura, r, utilizando a ecuación fundamental dos espellos:

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{2}{r} \rightarrow \frac{1}{s'}+\frac{1}{-1}=\frac{2}{-0{,}5} \rightarrow \boxed{s' = -\frac{1}{3} \text{ m}}$$

O aumento lateral, A_L, que relaciona o tamaño da imaxe, y', co tamaño do obxecto, y, facémolo relacionando a distancia imaxe, s', coa distancia obxecto, s, utilizando a expresión do aumento lateral dos espellos:

$$A=\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s} \rightarrow A=-\frac{-1/3}{-1} \rightarrow \boxed{A = -\frac{1}{3} \text{ cm}}$$

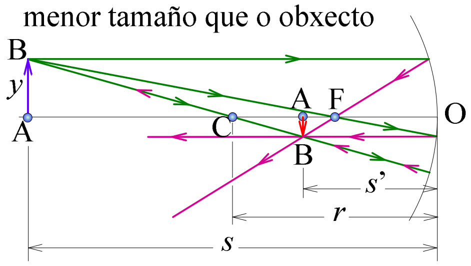
b)

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{2}{r} \rightarrow \frac{1}{s'}+\frac{1}{-0{,}30}=\frac{2}{-0{,}5} \rightarrow \boxed{s' = -1{,}5 \text{ m}}$$

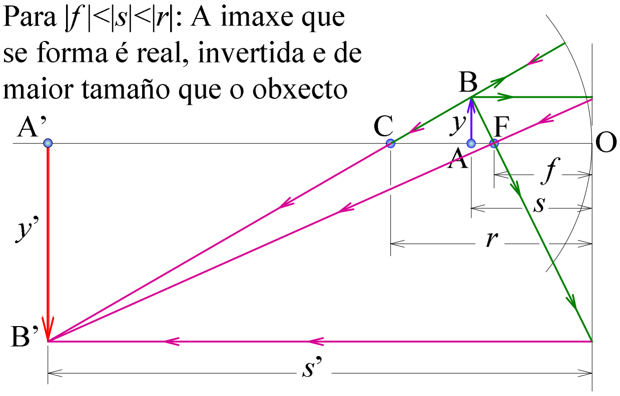
$$A=\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s} \rightarrow A=-\frac{-1{,}5}{-0{,}3} \rightarrow \boxed{A = -5{,}0 \text{ cm}}$$

Graficamente:

a) Para $|s|>|r|$: A imaxe que se forma é real, invertida e de menor tamaño que o obxecto



b) Para $|f|<|s|<|r|$: A imaxe que se forma é real, invertida e de maior tamaño que o obxecto



6.- Un obxecto de 5 cm de altura está situado a unha distancia *x* do vértice dun espello esférico cóncavo de 1 m de raio de curvatura; calcula a posición e o tamaño da imaxe: a) se *x* = 75 cm; b) se *x* = 25 cm. (Nos dous casos debuxa a marcha dos raios). (*Set. 04*).

Solución:

a) O cálculo analítico da distancia imaxe, s', facémolo a partir da distancia obxecto, s, e do raio de curvatura, r, utilizando a ecuación fundamental dos espellos:

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{2}{r} \rightarrow \frac{1}{s'}+\frac{1}{-0,75}=\frac{2}{-1} \rightarrow \boxed{s' = -150 \text{ cm}}$$

O cálculo analítico do tamaño da imaxe, y', facémolo a partir do tamaño do obxecto, y, e das distancias obxecto, s, e imaxe, s', a partir da expresión do aumento lateral, A_L, dos espellos:

$$A_L=\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s} \rightarrow \frac{y'}{5}=-\frac{-150}{-75} \rightarrow \boxed{y' = -10 \text{ cm}}$$

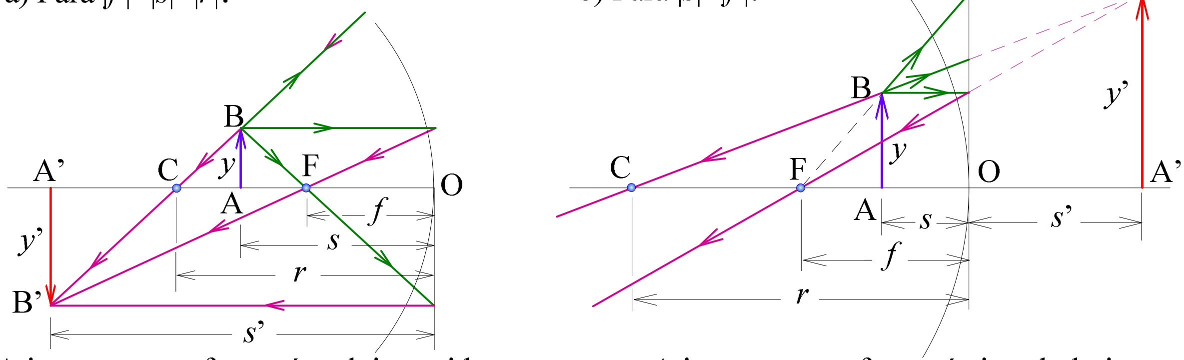
b)

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{2}{r} \rightarrow \frac{1}{s'}+\frac{1}{-0,25}=\frac{2}{-1} \rightarrow \boxed{s' = 50 \text{ cm}}$$

$$\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s} \rightarrow \frac{y'}{5}=-\frac{0,5}{-0,25} \rightarrow \boxed{y' = 10 \text{ cm}}$$

Graficamente:

a) Para $|f|<|s|<|r|$: b) Para $|s|<|f|$:



A imaxe que se forma é real, invertida e de maior tamaño que o obxecto

A imaxe que se forma é virtual, derita e de maior tamaño que o obxecto

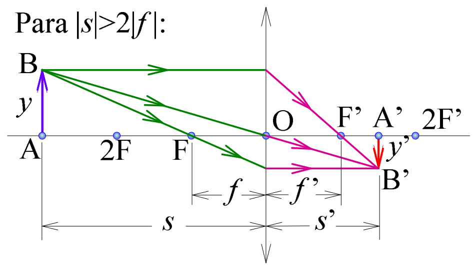
7.- Un obxecto de 3 cm de altura sitúase a 75 cm e verticalmente sobre o eixe dunha lente delgada converxente de 25 cm de distancia focal. Calcula: a) a posición da imaxe; b) o tamaño da imaxe. (Fai un debuxo do problema). (*Xuño 03*).

Solución:

a) O cálculo analítico da distancia imaxe, s', facémolo a partir da distancia obxecto, s, e da distancia focal imaxe, f', utilizando a ecuación fundamental das lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{s'}-\frac{1}{-75}=\frac{1}{25} \rightarrow \boxed{s'=37{,}5\ \text{cm}}$$

Para $|s|>2|f|$:



A imaxe que se forma é real, invertida e de menor tamano que o obxecto

b) O cálculo analítico do tamaño da imaxe, y', facémolo a partir do tamaño do obxecto, y, e das distancias obxecto, s, e imaxe, s', utilizando a expresión do aumento lateral, A_L, das lentes delgadas:

$$A_L=\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s} \rightarrow \frac{y'}{3}=\frac{37{,}5}{-75} \rightarrow \boxed{y'=-1{,}5\ \text{cm}}$$

8.- Un espello esférico forma unha imaxe virtual, dereita e de tamaño dobre que o obxecto cando este está situado verticalmente sobre o eixe óptico e a 10 cm do espello. Calcula: a) a posición da imaxe; b) o raio de curvatura do espello. (Debuxa a marcha dos raios). (*Xuño 02*).

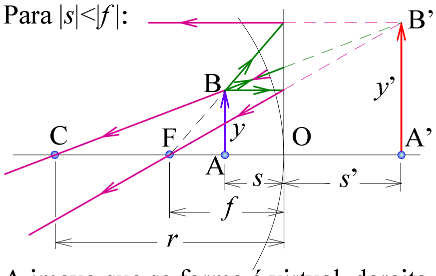
Solución:

a) A relación entre o tamaño da imaxe, y', e o tamaño do obxecto, y, vén dada pola expresión: $\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s}$, sendo s a distancia obxecto e s' a distancia imaxe. Como $y'=2y$ resulta que: $\frac{2y}{y}=-\frac{s'}{s} \rightarrow s'=2s$. E substituíndo datos temos: $s'=-2\cdot\left(-10\cdot10^{-2}\right) \rightarrow \boxed{s'=0{,}20\ \text{m}}$.

b) Para obter o raio de curvatura do espello esférico, r, escribimos a súa ecuación fundamental, que relaciona a distancia obxecto, s, e imaxe, s', co raio de curvatura, r: $\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{2}{r}$. Substituíndo nesta expresión resulta:

$$\frac{1}{20\cdot 10^{-2}}+\frac{1}{-10\cdot 10^{-2}}=\frac{2}{r} \rightarrow \boxed{r = -0{,}40 \text{ m}}$$

Para $|s|<|f|$:



A imaxe que se forma é virtual, dereita e de maior tamaño que o obxecto

Tema 10. FÍSICA RELATIVISTA

EXERCICIOS (Cuestións)

1.- Mapa conceptual dos contidos do tema.

Solución:

Ver páxina 352 do texto "Física" de 2º de Bacharelato, Ed. Baía.

2.- Razoa se dous sucesos que ocorren no mesmo instante en dous lugares diferentes son simultáneos para:

a) Un observador fixo, situado no punto medio dos dous sucesos.

b) Un observador que se move cunha velocidade $\vec{v}$ cara a un dos sucesos, estando, no instante en que se producen, no punto medio dos dous sucesos.

Solución:

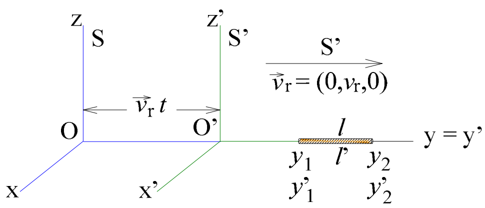
a) Un suceso que ten lugar nun punto P_1 é simultáneo con outro suceso que ocorre no punto P_2 se un observador fixo situado no punto medio entre P_1 e P_2 os percibe ó mesmo tempo. Polo tanto, **os dous sucesos** que ocorren no mesmo instante en dous lugares diferentes **si son simultáneos para o observador fixo, situado no punto medio dos dous sucesos.**

b) Cando o observador se despraza cunha velocidade $\vec{v}$ cara a un dos sucesos, verá o suceso que ten lugar no punto cara ó que se acerca antes que o suceso que se produce no punto do cal se separa. Polo tanto, para este observador, **os dous sucesos non son simultáneos**.

3.- Unha barra de 1 m de longa móvese paralelamente á súa lonxitude cunha velocidade $\vec{v}$, respecto a un observador en repouso. Comenta como será, (maior, menor ou igual) a lonxitude da barra para este observador.

Solución:

A relación que hai entre a lonxitude da barra l' medida por un observador que se encontra en repouso con respecto á barra (lonxitude propia) e a lonxitude l medida por outro observador que se move con respecto á barra cunha velocidade $\vec{v}$ constante (lonxitude en movemento) vén dada pola expresión: $l' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot l$, sendo c a velocidade da luz no baleiro.



Como $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} > 1$, ocorre que $l' > l$. Isto é: A lonxitude da barra l medida por un observador pertencente a un sistema de referencia que se encontra en movemento cunha velocidade $\vec{v}$ con respecto ó obxecto a medir ($l_{movemento}$) é menor que a lonxitude l' da barra medida por un observador pertencente a un sistema de referencia no cal a barra se encontra en repouso (l_{propia}). Este efecto é o que se chama contracción da lonxitude.

4.- Un astronauta de 30 anos fai unha viaxe interplanetaria á velocidade de $2 \cdot 10^8$ m/s. Cando retorna á Terra observa que o tempo que aquí transcorreu foi de 25 anos. Razoa cal das seguintes idades será a do astronauta: a) maior a 55 anos, b) igual a 55 anos e c) menor de 55 anos.

Solución:

A relación entre o tempo t' medido polo astronauta na súa nave, tempo propio, que se move coa velocidade v con respecto á Terra e o tempo t medido por outro observador situado na Terra, vén dada pola expresión: $t = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \cdot t'$, sendo c a velocidade da luz no baleiro.

Como $\dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > 1$, ocorre que $t > t'$. Isto é: O intervalo de tempo entre dous sucesos é menor para o observador que está en repouso relativo con respecto ós sucesos que para o observador que está en movemento relativo con respecto ós sucesos.

Como t = 25 anos e t'< 25 anos resulta que **a idade do astronauta é menor de 55 anos**, como corresponde ó ítem c) da cuestión.

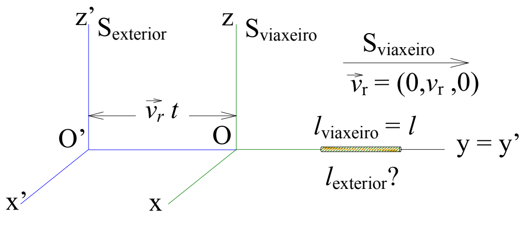
5.- Que demostra a experiencia de Michelson-Morley?

Solución:

As experiencias realizadas en 1887 por Michelson e Morley demostraron que **a velocidade con que se propaga a luz no baleiro é constante** en todas as direccións e independente do sistema de referencia inercial elixido: é unha invariante.

6.- Un viaxeiro dunha nave espacial, que leva a velocidade de $0{,}8 \cdot c$, sendo c a velocidade da luz, mide a lonxitude do lateral da nave obtendo un valor de l m. A lonxitude que medirá un observador exterior (en repouso) é: a) 0,6 l m; b) l/0,6 m; c) 0,8 l; d) l m. Elixe a opción que consideres correcta.

Solución:



A relación que hai entre a lonxitude do lateral na nave espacial medida polo viaxeiro, $l_{viaxeiro}$, (este observador encóntrase en repouso con respecto á nave espacial e, polo tanto, mide a lonxitude propia) e a lonxitude medida polo observador exterior, $l_{exterior}$, (este observador móvese con respecto á nave cunha velocidade $v = 0{,}8 \cdot c$ e mide $l_{movemento}$) vén dada pola expresión:

$l_{\text{viaxeiro}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \cdot l_{\text{exterior}}$. Facendo a substitución dos valores correspondentes resulta:

$l_{\text{viaxeiro}} = l = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{(0{,}8\,c)^2}{c^2}}} \cdot l_{\text{exterior}} \rightarrow \boldsymbol{l_{\text{exterior}} = 0{,}6\ l}$ **m**. Ítem a)

7.- O viaxeiro da nave anterior mide o tempo necesario para percorrer unha distancia *l*, obtendo un valor de *t'* segundos. O tempo que medirá o observador exterior será: a) *t* = 1,67 *t'* s: b) *t* = 0,6 *t'* s; c) *t* = *t'* s. Elixe a opción que consideres correcta.

Solución:

A relación que hai entre o tempo *t'* medido polo viaxeiro da nave espacial, para o cal o suceso ten lugar no mesmo punto (t_{propio}) e se move coa velocidade $v = 0{,}8 \cdot c$ con respecto ó observador exterior, e o tempo *t* medido polo observador exterior, que está en movemento con respecto ó suceso ($t_{\text{movemento}}$), vén dada pola expresión: $t = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \cdot t'$. Substituíndo resulta: $t = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{(0{,}8\,c)^2}{c^2}}} \cdot t'$ → ***t* = 1,67 *t'* s**. Ítem a).

8.- Un reloxo nun sistema de referencia S', para o cal o suceso ten lugar no mesmo punto e se move cunha velocidade constante $\vec{v}$ respecto a outro sistema de referencia S que está en repouso, vai: a) máis rápido que no sistema de referencia en repouso; b) máis lento que no sistema de referencia en repouso; c) á mesma velocidade que no sistema de referencia en repouso. Elixe a opción que consideres correcta.

Solución:

A relación entre o tempo *t'* medido por un reloxo pertencente a un sistema de referencia S', para o cal o suceso ten lugar nun mesmo punto, t_{propio}, e se move coa velocidade *v* respecto a outro reloxo que está en movemento con repouso ó suceso e mide o tempo *t*, $t_{\text{movemento}}$, vén dada pola expresión: $t = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \cdot t'$, sendo *c* a velocidade da luz no baleiro.

Como $\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} > 1$, ocorre que $t>t'$. Isto é: **O reloxo en movemento con respecto ó suceso vai máis rápido (adianta) que o reloxo en repouso con respecto ó suceso (vai máis lento: atrasa)**. Ítem b).

9.- Se medimos o noso pulso na Terra (en repouso) e despois mentres viaxamos cunha velocidade $\vec{v}$, de acordo coa teoría especial da relatividade, notaremos que a súa cadencia é: a) igual; b) diminúe; c) aumenta. Elixe a opción que consideres correcta.

Solución:

A cadencia (o intervalo de tempo) coa que se produce a repetición regular dos sons que se perciben ó apertar certas arterias do corpo, que se corresponden cos latexos do corazón, **é a mesma** calquera que sexa a velocidade do sistema de referencia inercial desde o cal se faga a medida. Fixémonos que se trata da medición da duración dun suceso que ten lugar no mesmo sistema de referencia desde o cal se fai a súa medida: Cando a medida do pulso se fai na Terra e se fai viaxando cunha velocidade $\vec{v}$, o observador está nos dous casos xunto ó "reloxo" que utiliza para facer a medida e como se trata dun mesmo suceso medirá sempre o mesmo tempo (ítem a).

10.- Cando nos acercamos a unha fonte de luz cunha velocidade constante $\vec{v}$, a velocidade da fonte de luz é: a) menor; b) maior; c) a mesma. Elixe a opción que consideres correcta.

Solución:

Segundo un dos postulados da teoría da relatividade especial de Einstein, **a velocidade da luz** no baleiro **é a mesma** en todos os sistemas de referencia inerciais, calquera que sexa a velocidade da fonte e a do observador, tendo o valor de $3 \cdot 10^8$ m s^{-1} (ítem c).

11.- Se unha luz intermitente se move uniformemente cara a nós, observaremos que os intervalos de luz, a medida que están máis cerca de nós, a) diminúen de frecuencia; b) aumentan de frecuencia; c) teñen igual frecuencia. Elixe a opción que consideres correcta.

Solución:

Segundo un dos postulados da teoría da relatividade especial de Einstein, **a velocidade da luz** no baleiro **é a mesma** en todos os sistemas de referencia inerciais, calquera que sexa a velocidade da fonte e a do observador, tendo o valor de $3 \cdot 10^8$ m s^{-1}. Polo tanto, os intervalos de luz **teñen igual frecuencia** (ítem c).

12.- Unha nave espacial pasa por diante da Lúa, que consideramos en repouso. Un observador situado na Lúa encontra que a masa da nave é maior que cando esta estaba en repouso. En consecuencia, un astronauta da nave espacial encontra que a masa da Lúa é: a) a mesma que a medida polo observador da Lúa; b) menor que a medida polo observador da Lúa; c) maior que a medida polo observador da Lúa. Elixe a opción que consideres correcta.

Solución:

O valor da masa dunha partícula é distinta, segundo sexa medida por un observador en repouso ou en movemento, de acordo á ecuación: $m = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c^2}}} \cdot m_0$, sendo m_0 a masa da partícula en repouso, tamén chamada masa propia, e m a masa cando se move coa velocidade v_r con respecto ó observador.

Como $\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > 1$, resulta que $m > m_0$. Como para o astronauta, a nave espacial está en repouso e a Lúa é a que se move, obtén para a Lúa unha **masa maior que a que mide o observador situado na Lúa** (ítem c).

13.- Se a enerxía dunha partícula en repouso é de 800 MeV e nun determinado instante a súa enerxía é de 1050 MeV; a enerxía cinética da partícula é: a) 250 MeV; b) 800 MeV; c) 1050 MeV; d) 1850 MeV. Elixe a opción que consideres correcta.

Solución:

O valor da masa dunha partícula é distinta, segundo sexa medida por un observador en repouso ou en movemento, de acordo á ecuación: $m = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_r^2}{c^2}}} \cdot m_0$, sendo m_0 a masa da partícula en repouso, tamén chamada masa propia, e m a masa cando se move coa velocidade v_r con respecto ó observador.

A relación entre a enerxía relativista total dunha partícula, $m \cdot c^2$, a súa enerxía relativista en repouso, $m_0 \cdot c^2$, e a enerxía cinética, E_k, vén dada pola expresión: $m \cdot c^2 = m_0 \cdot c^2 + E_k$. Substituíndo nesta expresión os datos da cuestión resulta: 1050 = 800 + E_k → $\boldsymbol{E_k}$ **= 250 MeV** (ítem a).

14.- Un sistema de referencia S' móvese cunha velocidade $\vec{v}_r$ constante con respecto a un sistema de referencia inercial S. Un observador pertencente ó sistema S mide a duración dun suceso que ten lugar nun mesmo punto con respecto ó sistema S. O tempo medido polo observador pertencente o sistema S', con respecto ó tempo medido polo observador S, é: a) maior, b) menor, c) igual, d) non se teñen datos suficientes para coñecer a relación de ambos tempos.

Solución:

Para o observador pertencente ó sistema S', o suceso (inicio e final) ten lugar en dous sitios distintos e o tempo que mide, $t' = t_{movemento}$, relaciónase co tempo do observador S, $t = t_{repouso} = t_{propio}$, segundo a expresión: $t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_r^2}{c^2}}} \cdot t = \gamma \cdot t$, sendo c a velocidade da luz no baleiro.

Como $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v_r^2/c^2}} > 1$, ocorre que $t' > t$. Isto é: A duración dun suceso é menor para o observador que está en repouso relativo con respecto ó suceso que para o observador que está en movemento relativo con respecto ó suceso (ítem a).

15.- Un sistema de referencia S' móvese cunha velocidade $\vec{v}_r$ constante con respecto a un sistema de referencia inercial S. Un observador pertencente o sistema S mide a lonxitude dunha barra, que pertence a este sistema, na dirección do movemento do sistema S'. A lonxitude medida polo observador pertencente o sistema S', con respecto á lonxitude medida polo observador S, é: a) maior, b) menor, c) igual, d) non se teñen datos suficientes para coñecer a relación de ambas lonxitudes.

Solución:

A lonxitude dun obxecto depende do sistema de referencia inercial desde o que se fai a medida.

A lonxitude propia, l_{propia}, (que é a medida feita desde un sistema de referencia S, que está en repouso relativo con respecto á barra) e a lonxitude en movemento, $l_{\text{movemento}}$, (medida feita desde un sistema de referencia S', que se move coa velocidade constante $\vec{v}_{\text{r}}$ con respecto á barra) gardan a relación: $l_{\text{propia}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v_{\text{r}}^2}{c^2}}} \cdot l_{\text{movemento}} = \gamma \cdot l_{\text{movemento}}$, sendo c a velocidade da luz no baleiro.

Como $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-v_{\text{r}}^2/c^2}} > 1$, ocorre que $l_{\text{propia}} > l_{\text{movemento}}$. Isto é: A lonxitude da barra medida na dirección do movemento é maior para o observador inercial S, que está en repouso relativo con respecto á barra, que para o observador S', que está en movemento relativo con respecto á barra. (Ítem b).

16.- Un home (observador 1), pertencente a un sistema de referencia inercial, móvese cunha velocidade $\vec{v}_{\text{r}}$ constante con respecto a outro home (observador 2), e leva na súa man unha barra, e cando mide a súa dimensión horizontal, que coincide coa dirección do movemento, obtén un valor de 3 m. Máis tarde deixa caer, verticalmente ó chan e desde unha altura de 2 m, a barra e mide o seu tempo de caída, sendo de 0,64 s. Comenta como será (maior, menor ou igual) a lonxitude da barra, a altura desde a que cae e o tempo de caída para o observador (2).

Solución:

Con respecto á barra, o observador 1 está en repouso mentres que o observador 2 está en movemento na dirección horizontal da barra. Segundo o comentado na cuestión anterior resulta que: $l_{\text{propia}} = l_1 > l_2 = l_{\text{movemento}}$: $l_2 < 3$ m.

Na dirección vertical os dous observadores están en repouso relativo e a medida da altura desde a que cae a barra é a mesma para ambos: $h_2 = h_1 = 2$ m.

Para o observador 2, que está en movemento relativo con respecto á barra, o suceso (inicio e final) ten lugar en dous sitios distintos e o tempo que mide, $t_2 = t_{\text{movemento}}$, relaciónase co tempo do observador 1, $t_1 = t_{\text{repouso}} = t_{\text{propio}}$, segundo a expresión: $t_2 = \gamma \cdot t_1$, sendo $\gamma > 1$. Polo tanto, $t_2 > t_1$ e $t_2 > 0{,}64$ s.

17.- Un home (observador 1), móvese cunha velocidade $\vec{v}_{\text{r}}$ constante con respecto a outro home (observador 2), que está en repouso. Este segundo observador ten na súa man unha barra e cando mide a súa dimensión horizontal, que coincide coa dirección de $\vec{v}_{\text{r}}$, obtén un valor de 3 m. Máis tarde deixa caer, verticalmente ó chan e desde unha altura de 2 m, a barra e mide o tempo de caída, sendo de 0,64 s. Comenta como será (maior, menor ou igual) a lonxitude da barra, a altura desde a que cae e o tempo de caída para o observador (1).

Solución:

A diferenza da cuestión anterior, agora, con respecto á barra, o observador 1 é o que está en movemento (na dirección horizontal da barra) mentres que o observador 2 está en repouso. Polo tanto, agora temos: $l_{\text{propia}} = l_2 > l_1 = l_{\text{movemento}}$: $l_1 < 3$ m.

Na dirección vertical os dous observadores están en repouso relativo e a medida da altura desde a que cae a barra é a mesma para ambos: $h_2 = h_1 = 2$ m.

Para o observador 1, que está en movemento relativo con respecto á barra, o suceso (inicio e final) ten lugar en dous sitios distintos e o tempo que mide, $t_1 = t_{\text{movemento}}$, relaciónase co tempo do observador 2, $t_1 = t_{\text{repouso}} = t_{\text{propio}}$, segundo a expresión: $t_1 = \gamma \cdot t_2$, sendo $\gamma > 1$. Polo tanto, $t_1 > t_2$ e $t_1 > 0{,}64$ s.

18.- Desde a plataforma dun aeroporto medimos a lonxitude dun avión, sendo de l m. Este avión ponse en voo e pasa por diante nosa a gran velocidade. Se agora nosoutros e un viaxeiro do avión medimos a súa lonxitude, esta será: a) maior para nosoutros, $l_{\text{nós}} > l$, e igual para o viaxeiro, $l_{\text{viaxeiro}} = l$; b) maior, tanto para nosoutros, $l_{\text{nós}} > l$, como para o viaxeiro, $l_{\text{viaxeiro}} > l$; c) menor, tanto para nosoutros, $l_{\text{nós}} < l$, como para o viaxeiro, $l_{\text{viaxeiro}} < l$; d) menor para nosoutros, $l_{\text{nós}} < l$, e igual par o viaxeiro, $l_{\text{viaxeiro}} = l$; e) ningunha das opcións anteriores.

Solución:

Cando medimos a lonxitude do avión desde a plataforma do aeroporto, o obxecto (avión) está en repouso relativo con respecto ó observador e a medida obtida é a chamada lonxitude propia: l_{propia}. Unha vez que o avión está voando, o viaxeiro segue estando en repouso relativo con respecto ó avión e a medida que fai coincide coa obtida no aeroporto. Pola contra, para o observador que segue en terra, o avión está en movemento, $\vec{v}_{\text{r}}$, e a medida que del fai, $l_{\text{movemento}}$, relaciónase coa l_{propia} coa expresión:

$$l_{\text{propia}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{r}}^2}{c^2}}} \cdot l_{\text{movemento}} \ \rightarrow \ l_{\text{propia}} > l_{\text{movemento}} .$$

Estes resultados son os que corresponden ó ítem d) da cuestión.

19.- Unha nave espacial pasa a gran velocidade por diante da Terra, que consideramos en repouso. Para un observador situado na Terra e para un astronauta da nave resulta que: a) a masa da nave para o terrícola é menor que para o astronauta; b) a masa da nave para o terrícola é maior que para o astronauta; c) a masa da Terra para o astronauta é menor que para o terrícola; d) a masa da Terra para o astronauta é maior que para o terrícola; e) a masa da nave é a mesma, tanto para o terrícola como para o astronauta; f) a masa da Terra é a mesma, tanto para o terrícola como para o astronauta. Elixe de forma razoada a/s opción/s que consideres correcta/s.

Solución:

A masa dun corpo depende do sistema de referencia inercial desde a que se mide.

Xa antes da teoría da relatividade de 1905, algúns resultados experimentais facían pensar que a masa dunha partícula era distinta segundo fose medida por un observador en repouso ou en movemento. Segundo Einstein a relación entre a masa m da partícula cando se move, con respecto ó observador, coa velocidade $\vec{v}_{\text{r}}$ e a masa m_0 en repouso relativo, tamén chamada masa propia, é:

$$m = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\text{r}}^2 / c^2}} \cdot m_0 = \gamma \cdot m_0 .$$

Para o astronauta, a nave espacial está en repouso relativo con respecto á el e a Terra está en movemento. Pola contra, para o terrícola, a nave está en movemento e a Terra en repouso.

A masa da nave espacial, para o terrícola, $m_{\text{terrícola}}$, e o astronauta, $m_{\text{astronauta}}$, garda a relación: $m_{\text{terrícola}} = \gamma \ m_{\text{astronauta}}$, e como $\gamma > 1$ resulta que a masa da nave espacial é maior para o terrícola que para o astronauta: $m_{\text{terrícola}} > m_{\text{astronauta}}$, cumpríndose o ítem b).

A masa da Terra, para o terrícola, $m_{\text{terrícola}}$, e o astronauta, $m_{\text{astronauta}}$, garda a relación: $m_{\text{astronauta}} = \gamma\, m_{\text{terrícola}}$, e como $\gamma>1$ resulta que a masa da Terra é maior para o astronauta que para o terrícola: $m_{\text{astronauta}} > m_{\text{terrícola}}$, cumpríndose o ítem d).

20.- Unha nave espacial, nave 1, móvese coa velocidade constante $\vec{v}_1$ e unha segunda nave, nave 2, cunha velocidade $\vec{v}_2$, tamén constante. A medida da lonxitude dun obxecto, pertencente á nave 1, na dirección do movemento é: a) maior para un observador pertencente á nave 1; b) maior para un observador pertencente á nave 2; c) iguais para ambos observadores; d) non se pode saber para cal dos dous observadores será maior xa que non se sabe cal das dúas velocidades é maior; e) non se pode establecer ningunha relación porque ningún dos observadores está en repouso. Elixe razoadamente a/s opcións/s que consideres correcta/s.

Solución:

Tanto o observador da nave 1 como o da nave 2 son inerciais, xa que se moven con velocidade constante (movemento rectilíneo e uniforme).

Sabemos que o obxecto pertence á nave 1 e con respecto a un sistema de referencia ligado a esta nave está en repouso. En consecuencia, con respecto á nave 2, o obxecto está en movemento, cunha $\vec{v}_{\text{r}}$ constante.

Polo tanto, a medida feita polo observador 1 é a lonxitude propia, $l_1 = l_{\text{propia}}$, e a que fai o observador 2 é $l_2 = l_{\text{movemento}}$. Recordando que $l_{\text{propia}} = \gamma\, l_{\text{movemento}}$ e $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v_{\text{r}}^2 / c^2}} > 1$ temos que $l_1 > l_2$, solución que corresponde ó ítem a).

EXERCICIOS DE SELECTIVIDADE (Cuestións)

Razoa as respostas as seguintes cuestións:

1.- Un vehículo espacial afástase da Terra cunha velocidade de 0,5*c*. Desde a Terra envíase un sinal luminoso, cuxa velocidade é medida pola tripulación, obtendo un valor de: a) 1,5*c*; b) *c*; c) 0,5*c*. *(Set. 07).*

Solución:

Michelson e Morley encontraron experimentalmente que a velocidade da luz con respecto á Terra é a mesma en todas as direccións. Este resultado non é compatible coa transformación de Galileo da velocidade (a velocidade é distinta para dous observadores en movemento relativo uniforme). Varias teorías intentaron facer compatible o resultado da experiencia de Michelson-Morley coa relatividade da velocidade. Neste sentido, Fitzgerald, en 1889, e Lorentz, en 1892, supoñen que os corpos que se moven a través do éter se contraen na dirección do movemento, sen que sufran modificación ás súas dimensións transversais.

Pero Einstein abandona a idea do éter e, en consecuencia, non hai un sistema de referencia absoluto que permita definir o movemento absoluto, aparecendo a teoría da relatividade. Esta teoría referida ó movemento en sistemas inerciais coñécese como relatividade especial ou restrinxida e un dos postulados nos que se basea di: "A velocidade da luz no baleiro é a mesma en todos os sistemas de referencia inerciais, calquera que sexa a velocidade da fonte e a do observador". Polo tanto, a velocidade medida polos tripulantes do vehículo espacial é *c* (Ítem b).

2.- A ecuación de Einstein $E = m \cdot c^2$ implica que: a) a unha determinada masa *m* necesita unha enerxía *E* para poñerse en movemento; b) a enerxía *E* é a que ten unha masa *m* que se move á velocidade da luz; c) *E* é a enerxía equivalente a unha determinada masa. *(Set. 05)*.

Solución:

Na ecuación de Einstein $E = m \cdot c^2$, *E* é a enerxía equivalente a unha determinada masa *m*. Esta ecuación relaciona a cantidade de enerxía en que é capaz de transformarse unha masa *m* ou, viceversa, a masa que se obtén a partir dunha determinada cantidade de enerxía. Así, se un sistema intercambia unha enerxía *E* cos seus arredores, a súa masa debe cambiar na cantidade equivalente E/c^2.

3.- Un vehículo espacial afástase da Terra cunha velocidade de 0,5*c* (*c* = velocidade da luz). Desde a Terra mándase un sinal luminoso e a tripulación mide a velocidade do sinal obtendo o valor: a) 0,5*c*; b) *c*; c) 1,5*c*. *(Xuño 04)*.

Solución:

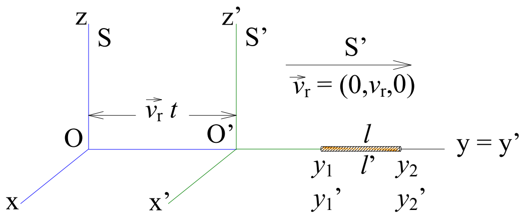
Un dos postulados da teoría especial da relatividade de Einstein di que a velocidade da luz no baleiro é a mesma en todos os sistemas de referencia inerciais, calquera que sexa a velocidade da fonte e a do observador. Polo tanto, a velocidade medida polos tripulantes do vehículo espacial é *c* (Ítem b).

4.- Segundo a teoría da relatividade dous observadores en sistemas de referencia inerciais

miden: a) a mesma velocidade da luz; b) o mesmo espazo; c) o mesmo tempo. *(Xuño 01)*.

Solución:

Segundo a teoría da relatividade, dous observadores pertencentes a dous sistemas de referencia inerciais distintos **miden a mesma velocidade da luz**: esta é unha invariante.



A relación que hai entre a lonxitude l' medida por un observador que se encontra en repouso con respecto ó obxecto a medir e a lonxitude l medida por observador que se move con respecto ó obxecto cunha velocidade $\vec{v}$ constante vén dada pola expresión: $l' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot l$, sendo c a velocidade da luz no baleiro.

Como $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} > 1$, ocorre que $l' > l$. Isto é: A lonxitude l medida por un observador pertencente a un sistema de referencia que se encontra en movemento cunha velocidade v con respecto ó obxecto a medir é menor que a lonxitude l' medida por un observador pertencente a un sistema de referencia no cal o obxecto se encontra en repouso relativo. Este efecto é o que se chama contracción da lonxitude.

A relación entre o tempo t' medido por un observador que pertence ó sistema de referencia no que ten lugar o suceso e o tempo t medido por observador que se move con respecto ó suceso cunha velocidade v, vén dada pola expresión: $t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot t'$, sendo c a velocidade da luz no baleiro.

Como $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} > 1$, ocorre que $t > t'$. Isto é: O intervalo de tempo entre dous sucesos é menor para o observador que está en repouso relativo con respecto ó suceso que para o observador que está en movemento relativo con respecto ó suceso.

5.- Segundo Einstein, a velocidade da luz no baleiro: a) é constante para sistemas de referencia en repouso, b) é constante independentemente do sistema de referencia inercial escollido, c) depende da velocidade do foco emisor. (*Xuño 98*).

Solución:

Segundo a argumentación feita na segunda destas cuestións, a resposta correcta corresponde á opción b). Respecto á opción a) diremos que se cumpre, sendo un caso particular do b) e, en relación ó ítem c) diremos que queda totalmente rexeitado no enunciado do postulado de Einstein.

Tema 11. FÍSICA NUCLEAR E PARTÍCULAS ATÓMICAS

EXERCICIOS (Cuestións)

1.- Mapa conceptual dos contidos do tema.

Solución:

Ver páxina 375 do texto "Física" de 2º de Bacharelato, Ed. Baía.

2.- Os raios γ rompen o núcleo de $^{9}_{4}\text{Be}$ para formar $^{8}_{3}\text{Li}$. Que outra partícula se obtén e por que? (*Selectividade COU*; *set. 94*).

Solución:

Como nas reaccións nucleares se conserva a carga e o número total de nucleóns; o que significa, respectivamente, que o número atómico e o número másico a ambos lados da ecuación, que representa a reacción nuclear, son os mesmos; a partícula que se obtén é un protón, $^{1}_{1}p$:

$$^{9}_{4}\text{Be} + \gamma \rightarrow {}^{8}_{3}\text{Li} + {}^{A}_{Z}\text{partícula}$$

Pola lei de conservación dos números de masa: $9 = 8 + A$, polo que $A = 1$

Pola lei de conservación da carga eléctrica: $4 = 3 + Z$, polo que $Z = 1$

E a partícula de $A = 1$ e $Z = 1$ é o **protón**: $^{1}_{1}p$.

3.- A masa dos núcleos dos átomos non coincide exactamente coa masa dos nucleóns constituíntes. Por que? (*Selectividade COU*; *xuño 93*).

Solución:

A forza de repulsión electrostática entre os protóns do núcleo dun átomo é moito maior que a forza gravitatoria de atracción entre os protóns e neutróns que o constitúen e, en consecuencia, o núcleo non sería estable. Hai que pensar que entre os nucleóns existen outras forzas de intensidade superior ás mencionadas: son as chamadas forzas nucleares de interacción forte e débense á conversión de masa en enerxía, segundo a fórmula de Einstein: $E = m \cdot c^2$, sendo c a velocidade da luz no baleiro e m o defecto de masa nuclear, que é a diferenza entre a masa dos nucleóns que constitúen o núcleo e a masa do núcleo do átomo.

A enerxía correspondente ó defecto de masa nuclear, denominada enerxía de enlace, é liberada na formación do núcleo a partir dos seus constituíntes e representa a enerxía mínima que hai que subministrar ó núcleo para descompoñelo nos seus nucleóns.

4.- Analoxías e diferenzas entre fisión e fusión nuclear. (*Selectividade COU*; *xuño 93*).

Solucións:

Tanto a fusión como a fisión nuclear son reaccións nucleares nas que se libera unha gran cantidade de enerxía, E, por conversión de masa en enerxía segundo a ecuación de Einstein: $E = m \cdot c^2$, sendo m a diferenza entre a masa dos reactivos e a dos produtos e c a velocidade da luz no baleiro.

Sen embargo, mentres que a reacción de fisión consiste na división dun núcleo pesado, fragmentándose en núcleos de masa intermedia; na reacción de fusión o que ten lugar é a unión de dous núcleos lixeiros para dar outro máis pesado.

As reaccións de fisión nuclear pódense utilizar tanto con fins pacíficos como destructivos, mentres que as de fusión, ata a data, soamente se poden utilizar con fins destructivos.

Nas reaccións de fisión aparecen residuos radioactivos, que non existen nas de fusión nuclear.

5.- É o mesmo a vida media dunha substancia radioactiva que o período de semidesintegración? Que relación gardan?

Solución:

Vida media, τ, dunha substancia radioactiva **é o tempo de vida medio** de todos os átomos presentes. Obtense sumando a vida de todos os átomos e dividindo polo seu número. Relaciónase coa constante de desintegración radioactiva, λ, coa expresión: $\tau = \frac{1}{\lambda}$.

Período de semidesintegración, $T_{1/2}$, **é o tempo necesario para que unha substancia radioactiva se reduza á metade**. A súa relación coa constante de desintegración é: $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Polo tanto, período de semidesintegración e vida media dunha substancia radioactiva son conceptos distintos e relaciónanse segundo a expresión: $\boldsymbol{T_{1/2} = \ln 2 \cdot \tau}$.

6.- A distancia á que están os protóns no núcleo atómico é moi pequena e, en consecuencia, a repulsión coulombiana é moi grande; como se xustifica a estabilidade nuclear?

Solución:

Se a forza que houbese entre os nucleóns dun átomo fose soamente a forza eléctrica repulsiva entre os protóns, o núcleo sería inestable. Hai que pensar que entre os nucleóns ten que haber outras forzas atractivas de intensidade superior á mencionada; son as **forzas nucleares de interacción forte**, que teñen lugar entre protón-protón, neutrón-neutrón e protón-neutrón, como consecuencia de conversión de masa en enerxía, E, segundo a ecuación de Einstein: $E = m \cdot c^2$, sendo m o defecto de masa nuclear e c a velocidade da luz no baleiro.

7.- Que tipo de forzas manteñen unidas as partículas do núcleo dun átomo?

Solución:

As forzas que manteñen unidas as partículas do núcleo dun átomo son a forza gravitatoria de interacción entre os nucleóns e, sobre todo, as **forzas nucleares de interacción forte**, que teñen lugar entre os nucleóns por conversión de masa en enerxía, segundo a ecuación de Einstein: $E = m \cdot c^2$, sendo m o defecto de masa nuclear e c a velocidade da luz no baleiro.

8.- Os procesos de fusión e fisión nuclear van acompañados de grandes cantidades de enerxía. De onde procede esta enerxía? Por outro lado, cando se queima unha determinada cantidade de butano, tamén se desprende enerxía. A que se debe esta enerxía?

Solución:

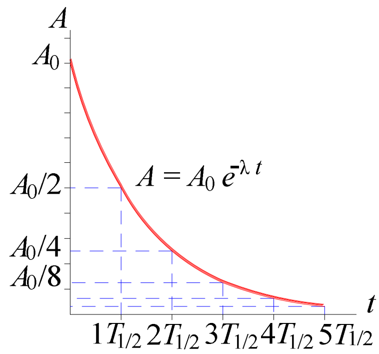
A enerxía que se produce **nas reaccións nucleares** de fusión e fisión **procede da conversión de masa en enerxía**, segundo a ecuación de Einstein: $E = m \cdot c^2$, sendo m a diferenza entre a masa dos reactivos e a dos produtos e c a velocidade da luz no baleiro.

Cando se queima butano aparecen unhas novas substancias (dióxido de carbono e auga), tendo lugar unha reacción química, que vai acompañada dun desprendemento de enerxía que se manifesta en forma de calor. Nas reaccións químicas ten lugar a ruptura duns enlaces (nos reactivos) e a formación doutros novos (nos produtos). Como cada enlace ten un contido enerxético, **a diferenza entre a enerxía que lle corresponde ós enlaces dos produtos e a dos reactivos é a enerxía que se pon en xogo na reacción**.

9.- Fai unha representación gráfica da actividade dunha substancia radioactiva en función do tempo?

Solución:

A actividade A dunha substancia radioactiva de constante de desintegración λ, nun instante determinado, relaciónase coa actividade inicial, A_0, e tempo transcorrido t, segundo a expresión: $A = A_0 \cdot e^{-\lambda t}$. A representación desta ecuación é a da exponencial que se indica na gráfica adxunta.



10.- Se coñeces o número de desintegracións dunha substancia radioactiva que se producen nun tempo *t*, para un tempo dobre (2*t*), ¿poderemos obter o número de desintegracións multiplicando por 2 o número de desintegracións que teñen lugar no tempo *t*?

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} -\Delta N_1 = N_0 - N_{f\,1} = N_0\left(1 - e^{-\lambda \cdot t}\right) \\ \\ -\Delta N_2 = N_0 - N_{f\,2} = N_0\left(1 - e^{-\lambda \cdot 2t}\right) \end{array}\right\} \rightarrow \frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \frac{1 - e^{-\lambda \cdot t}}{1 - e^{-\lambda \cdot 2 \cdot t}}$$

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2}=\frac{1-e^{-\lambda t}}{\left(1+e^{-\lambda t}\right)\cdot\left(1-e^{-\lambda t}\right)} \rightarrow \frac{\Delta N_1}{\Delta N_2}=\frac{1}{1+e^{-\lambda t}} \rightarrow \Delta N_2=\Delta N_1\cdot\left(1+e^{-\lambda t}\right)$$

O número de desintegracións producidas nun tempo $2t$, ΔN_2, en relación ó número de desintegracións producidas nun tempo t, ΔN_1, obtense multiplicando o número destas desintegracións por $\left(1+e^{-\lambda t}\right)$, sendo negativa a resposta á pregunta da cuestión.

11.- Como se interpreta o feito de que un núcleo atómico emita partículas beta $\left({}_{-1}^{0}e\right)$ se no núcleo só existen protóns e neutróns?

Solución:

Como no núcleo dun átomo non hai electróns, a emisión de partículas β^- por parte dun núcleo radioactivo interprétase supoñendo que todo sucede como se un neutrón se desintegrase en: un protón, un electrón (que é a partícula β^- emitida) e un antineutrino, $\bar{\nu}$ (esta partícula, de masa en repouso nula e sen carga, xustifícase pola necesidade de que se conserve a cantidade de movemento e a enerxía):

$${}_{0}^{1}n \rightarrow {}_{1}^{1}p^{+} + {}_{-1}^{0}e^{-} + {}_{0}^{0}\bar{\nu}$$

12.- Indica o número de protóns e de neutróns que compoñen os seguintes núcleos: ${}^{35}_{17}\mathrm{Cl}$, ${}^{37}_{17}\mathrm{Cl}$, ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$, ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$, ${}^{20}_{10}\mathrm{Ne}$. Algúns destes átomos son isótopos?

Solución:

Como o número que aparece na parte inferior esquerda do símbolo dun elemento indica o número atómico (número de protóns) e o número que está na parte superior esquerda fai referencia o número másico (suma do número de protóns e de neutróns) resulta:

${}^{35}_{17}\mathrm{Cl}$: 17 protóns e 18 neutróns.

${}^{37}_{17}\mathrm{Cl}$: 17 protóns e 20 neutróns.

${}^{238}_{92}\mathrm{U}$: 92 protóns e 146 neutróns.

${}^{235}_{92}\mathrm{U}$: 92 protóns e 143 neutróns.

${}^{20}_{10}\mathrm{Ne}$: 10 protóns e 10 neutróns.

Son isótopos os átomos que tendo igual número atómico (número de protóns) teñen diferente número másico (diferente número de neutróns). O cloro-37 e o cloro-35 son átomos isótopos e igual ocorre co uranio-238 e o uranio-235.

13.- Transcorrido un tempo igual ó da vida media, a actividade dunha substancia radioactiva redúcese nunha porcentaxe. De entre as seguintes opcións elixe a que consideres

correcta: a) 50,0 %, b) 36,8 %, c) non se pode saber sen coñecer a cantidade de substancia radioactiva.

Solución:

A actividade, A, dunha substancia radioactiva de constante de desintegración λ, en función do tempo t, vén dada pola expresión: $A = A_0 \cdot e^{-\lambda t}$, sendo A_0 a actividade no instante inicial. Substituíndo t polo tempo de vida media, τ: $\tau = \frac{1}{\lambda}$, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} A = A_0 \cdot e^{-\lambda t} \\ t = \tau = \dfrac{1}{\lambda} \end{array}\right\} \rightarrow A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}} \rightarrow A = A_0 \cdot e^{-1} \rightarrow \frac{A}{A_0} = 0{,}368 \rightarrow 36{,}8\ \%$$

A opción correcta é a b).

14.- Responde á cuestión anterior para un tempo igual ó do período de semidesintegración.

Solución:

A actividade, A, dunha substancia radioactiva de constante de desintegración λ, en función do tempo t, vén dada pola expresión: $A = A_0 \cdot e^{-\lambda t}$, sendo A_0 a actividade no instante inicial. Substituíndo t polo tempo do período de semidesintegración, $T_{1/2}$: $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} A = A_0 \cdot e^{-\lambda t} \\ t = T_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda} \end{array}\right\} \rightarrow A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \frac{\ln 2}{\lambda}} \rightarrow A = A_0 \cdot e^{-\ln 2} \rightarrow \frac{A}{A_0} = 0{,}50 \rightarrow 50\ \%$$

Este resultado correspóndese co da opción a).

15.- Dunha mostra orixinal de N_0 kg dunha substancia radioactiva, transcorrido un tempo dobre ó do seu período de semidesintegración, quedan sen desintegrar: a) ¾ N_0 kg; b) ⅔ N_0 kg; c) ½ N_0 kg; d) ¼ N_0 kg. Elixe a opción que consideres correcta.

Solución:

O número de átomos N, dunha substancia radioactiva de constante de desintegración λ, presentes nun instante vén dado pola expresión: $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$, sendo N_0 o número de átomos iniciais e t o tempo transcorrido.

$$\left.\begin{array}{l} N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \\ t = 2 \cdot T_{1/2} = 2 \cdot \dfrac{\ln 2}{\lambda} \end{array}\right\} \rightarrow N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \frac{2 \cdot \ln 2}{\lambda}}$$

$$N = N_0 \cdot e^{-2 \cdot \ln 2} \rightarrow N = 0{,}25 \cdot N_0 \rightarrow N = \frac{1}{4} N_0$$

O resultado obtido indícanos que a opción correcta é a d).

16.- Se o período de semidesintegración do radio é de 1590 anos, a súa vida media é: a) $\tau = 2293{,}9$ anos; b) $\tau = 795{,}0$ anos; c) $\tau = 4{,}36 \cdot 10^{-4}$ anos^{-1}; d) $\tau = 2293{,}9$ anos^{-1}. Elixe a solución que consideres correcta.

Solución:

A relación entre o período de semidesintegración, $T_{1/2}$, e a vida media, τ, dunha substancia radioactiva de constante de desintegración λ é:

$$\left.\begin{array}{l} T_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda} \\ \tau = \dfrac{1}{\lambda} \end{array}\right\} \rightarrow \tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2}$$

Substituíndo na igualdade anterior os datos da cuestións resulta:

$$\tau = \frac{1590}{\ln 2} \rightarrow \tau = 2293{,}9 \text{ anos}$$

Este resultado coincide co da opción a) da cuestión.

17.- Ó bombardear núcleos de ${}^{9}_{4}\mathrm{Be}$ con partículas α obtense ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$. Escribe a reacción nuclear correspondente.

Solución:

Nas reaccións nucleares consérvase a carga e o número total de nucleóns; o que significa, respectivamente, que o número atómico e o número másico a ambos lados da ecuación que representa a reacción nuclear son os mesmos:

$${}^{9}_{4}\mathrm{Be} + \alpha \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{A}_{Z}\text{partícula}$$

Pola lei de conservación dos números de masa: $9 + 4 = 12 + A$, polo que $A = 1$

Pola lei de conservación da carga eléctrica: $4 + 2 = 6 + Z$, polo que $Z = 0$

E a partícula de $A = 1$ e $Z = 0$ é o **neutrón**: ${}^{1}_{0}n$.

18.- Unha substancia radioactiva desintégrase segundo a expresión: $N = N_0\, e^{-(7{,}913 \cdot 10^{-4} \cdot t)}$, en unidades do SI. Calcula o seu período de semidesintegración.

Solución:

O período de semidesintegración, $T_{1/2}$, dunha substancia radioactiva de constante de desintegración λ vén dada pola expresión: $T_{1/2} = \dfrac{\ln\ 2}{\lambda}$.

Para obter o valor de λ comparamos a expresión que relaciona o decaemento exponencial dunha substancia radioactiva de constante de desintegración λ, $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$, coa ecuación de desintegración da substancia que corresponde á mostra do problema:

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l} N = N_0\ e^{-\lambda t} \\ N = N_0\ e^{-\left(7{,}913 \cdot 10^{-4}\ t\right)} \end{array}\right\} \rightarrow \lambda = 7{,}913 \cdot 10^{-4}\ \text{s}^{-1} \\ T_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda} \end{array}\right\} \rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 2}{7{,}913 \cdot 10^{-4}} \rightarrow T_{1/2} = 876{,}0\ \text{s}$$

19.- A actividade dunha substancia radioactiva pasa a valer nun tempo *t* o valor de 1/16 do seu valor inicial: $A = A_0/16$. Se a súa vida media é de 199,1 s, di cal das seguintes opcións che parece a correcta para o valor de *t*: a) 138 días^{-1}; b) $5{,}02 \cdot 10^{-3}$ días; c) 552 s; d) 3185,6 días.

Solución:

A actividade *A* dunha substancia radioactiva de constante de desintegración λ, en función do tempo *t*, vén dada pola expresión: $A = A_0 \cdot e^{-\lambda t}$, sendo A_0 a actividade cando se empeza a contar o tempo. Utilizando o valor da relación de actividades, $\dfrac{A}{A_0} = \dfrac{1}{16}$, resulta: $\dfrac{1}{16} = e^{-\lambda t}$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{16} = e^{-\lambda t} \\ \tau = \dfrac{1}{\lambda} = 199{,}1\ \text{s} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{16} = e^{-\frac{1}{199{,}1} t} \rightarrow -\ln 16 = -\frac{1}{199{,}1} \cdot t \rightarrow t = 552\ \text{s}$$

Este resultado obtido corresponde ó ítem c) da cuestión.

20.- A actividade dun elemento radioactivo pasa a valer 1/64 do seu valor inicial despois de transcorrer 48 s. En consecuencia, o seu período de semidesintegración é: a) 48 s; b) 8 s; c) 0,087 s. Elixe de forma razoada a opción que consideres correcta.

Solución:

O período de semidesintegración $T_{1/2}$ dunha substancia radioactiva de constante de desintegración λ vén dado pola expresión: $T_{1/2} = \dfrac{\ln\ 2}{\lambda}$.

O valor de λ obtémolo substituíndo na ecuación do decaemento exponencial da actividade da substancia radioactiva, $A = A_0 \cdot e^{-\lambda t}$, a relación da súa actividade no instante *t*, *A*, e no instante inicial, A_0:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{A}{A_0}=\dfrac{1}{64}\\[2mm] \dfrac{A}{A_0}=e^{-\lambda\, t}\\[2mm] t=48\ \text{s}\end{array}\right\}\rightarrow\ \dfrac{1}{64}=e^{-\lambda\cdot 48}\ \rightarrow\ \lambda=0,087\ \text{s}^{-1}$$

$T_{1/2}=\dfrac{\ln 2}{0,087}\ \rightarrow\ T_{1/2}=8,0\ \text{s}$, resultado que corresponde ó ítem b) da cuestión.

21.- Contesta razoadamente se a relación entre a actividade dunha substancia radioactiva no instante *t* e *t*' coincide coa relación do número de átomos de dita substancia neses mesmos instantes (*t* e *t*').

Solución:

Se no instante inicial t a substancia radioactiva de constante de desintegración λ posúe a actividade A e o seu número de átomos é N; no instante t' (transcorrido o tempo $t'-t$) a nova actividade da substancia radioactiva será A' e o número de átomos sen desintegrar será N'.

A expresión do decaemento exponencial da actividade co tempo vén dada pola expresión: $A'=A\cdot e^{-\lambda\,(t'-t)}$. E a expresión do decaemento exponencial do número de átomos é: $N'=N\cdot e^{-\lambda\,(t'-t)}$. Destas expresións resulta:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{A'}{A}=e^{-\lambda\,(t'-t)}\\[2mm] \dfrac{N'}{N}=e^{-\lambda\,(t'-t)}\end{array}\right\}\rightarrow\ \dfrac{A'}{A}=\dfrac{N'}{N},$$

coincidindo a relación de actividades nos instantes t' e t coa relación do número de átomos correspondentes a estes instantes.

EXERCICIOS (Problemas)

1.- Calcula a variación de enerxía correspondente á reacción seguinte: $^{6}_{3}\text{Li} + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{3}_{1}\text{H} + ^{4}_{2}\text{He}$, sabendo que a masa dos átomos ^{6}Li, ^{3}H e ^{4}He, respectivamente, é: 6,01513; 3,01700 e 4,00388. Datos: m_n = 1,008665 u, 1 u = 1,66 · 10^{-27} kg.

Solución:

Xa que o número de electróns e o mesmo á esquerda e á dereita da reacción, non descontaremos a masa dos electróns á masa dos átomos.

A masa da primeira parte da ecuación é: 6,01513 + 1,008665 = 7,023795 u

A masa da segunda parte da ecuación é: 3,01700 + 4,00388 = 7,02088 u

Por tanto, hai unha "desaparición" de masa de valor:

7,023795 − 7,02088 = 0,002915 u por átomo de Li.

A esta cantidade de masa, segundo a ecuación de Einstein de conversión masa-enerxía, correspóndelle a enerxía E, de valor:

$$E = m \cdot c^2 = 0{,}002915 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \cdot 3^2 \cdot 10^{8 \cdot 2} \rightarrow \boxed{E = 4{,}355 \cdot 10^{-13}\ \text{J/átomo de } ^{7}\text{Li}}$$

2.- Calcula a enerxía que se libera na reacción nuclear seguinte:

$$^{27}_{13}\text{Al} + \alpha \rightarrow ^{30}_{14}\text{Si} + ^{1}_{0}n + ^{0}_{1}e\ (\text{positrón})$$

Datos: Masas atómicas: ^{27}Al = 27,0114; ^{4}He = 4,003880; ^{30}Si = 30,00134; m_e = 0,0005486 u; m_n = 1,008665 u; 1 u = 1,66 · 10^{-27} kg.

Solución:

A diferenza do exercicio anterior, neste caso non se pode facer unha diferenza de masas de átomos completos, xa que non hai unha igualación de electróns á esquerda e a dereita da ecuación. No primeiro membro hai 15 electróns (13 do Al e 2 do He) mentres que no segundo hai 14 (os do Si). Representando por A as masas atómicas e por m_e e m_n, respectivamente, as masas do electrón e do neutrón, temos que a variación de masa, Δm, que ten lugar por átomo de litio bombardeado, segundo a reacción anterior, é:

$$\Delta m = \left[\left(A_{^{27}\text{Al}} - 13\, m_{e^-}\right) + \left(A_{^{4}\text{He}} - 2\, m_{e^-}\right)\right] - \left[\left(A_{^{30}\text{Si}} - 14\, m_{e^-}\right) + m_n + m_{e^-}\right]$$

$$\Delta m = A_{^{27}\text{Al}} + A_{^{4}\text{He}} - A_{^{30}\text{Si}} - 2\, m_{e^-} - m_n$$

$$\Delta m = 27{,}0114 + 4{,}003880 - 30{,}00134 - 2 \cdot 0{,}0005486 - 1{,}008665$$

$$\Delta m = 0{,}004178 \text{ u/átomo de Li}$$

Esta cantidade de masa cando se converte en enerxía equivale a:

$E = m \cdot c^2 = 0{,}004178 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \rightarrow \boxed{E = 6{,}242 \cdot 10^{-13} \text{ J/átomo de } ^{27}\text{Al}}$

3.- Calcula a enerxía liberada por mol de litio na reacción nuclear seguinte:

$$^{7}\text{Li} + {}^{1}\text{H} \rightarrow 2\ {}^{4}\text{He}$$

Datos: masa atómica relativa ^{7}Li = 7,01596; ^{4}He = 4,00386; ^{1}H = 1,00783.

Solución:

A cantidade de masa convertida en enerxía obtense restándolle á masa dos núcleos reaccionantes a masa dos núcleos dos produtos:

$$\Delta m = \left[\left(A_{^7\text{Li}} - 3\, m_{e^-}\right) + \left(A_{^1\text{H}} - 1\, m_{e^-}\right)\right] - \left[2\left(A_{^4\text{He}} - 2\, m_{e^-}\right)\right] = A_{^7\text{Li}} + A_{^1\text{H}} - 2\, A_{^4\text{He}}$$

$\Delta m = 7{,}01596 + 1{,}00783 - 2 \cdot 4{,}00386 = 0{,}01607$ u por átomo de Li $= 0{,}01607$ g por mol de Li.

A cantidade de enerxía E equivalente a este valor de masa, Δm, calculámola coa fórmula de Einstein de conversión masa-enerxía: $E = \Delta m \cdot c^2$, sendo c a velocidade da luz no baleiro.

$E = m \cdot c^2 = 0{,}01607 \cdot 10^{-3} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \rightarrow \boxed{E = 1{,}4463 \cdot 10^{12} \text{ J}}$

4.- Ó bombardear o $^{24}_{12}$Mg con partículas alfa obtense $^{27}_{13}$Al e 1 protón. Calcula a enerxía da reacción cando se consumen 2 moles de magnesio. Datos: masa atómica relativa $^{24}_{12}$Mg = 23,9924; $^{27}_{13}$Al = 26,9899; $^{4}_{2}$He = 4,0039; $^{1}_{1}$H = 1,00783; $m_e = 5{,}486 \cdot 10^{-4}$ u; $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}; 1 u = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg; $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ partículas/mol; 1 u = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg; N_A = $6{,}022 \cdot 10^{23}$ partículas/mol.

Solución:

A enerxía E que aparece nunha reacción nuclear procede da interconversión de masa, Δm, e enerxía, E, segundo a fórmula de Einstein: $E = \Delta m \cdot c^2$, sendo c a velocidade da luz no baleiro.

Δm obtense restándolle á suma das masas dos núcleos dos átomos reaccionantes (magnesio e helio) a masa dos núcleos da especie química que aparece na reacción (aluminio) e a masa dos protóns que tamén se obteñen: $^{24}_{12}\text{Mg} + {}^{4}_{2}\text{He} \rightarrow {}^{27}_{13}\text{Al} + {}^{1}_{1}p$.

$$\Delta m = \left[\left(A_{^{24}\text{Mg}} - 12\, m_{e^-}\right) + \left(A_{^4\text{He}} - 2\, m_{e^-}\right)\right] - \left[\left(A_{^{27}\text{Al}} - 13\, m_{e^-}\right) + \left(m_{^1\text{H}} - m_{e^-}\right)\right]$$

$$\Delta m = A_{^{24}\text{Mg}} + A_{^4\text{He}} - A_{^{27}\text{Al}} - m_{^1\text{H}}$$

$\Delta m = 23{,}9924 + 4{,}0039 - 26{,}9899 - 1{,}00783 = -0{,}00143$ u/átomo de ^{24}Mg.

$\Delta m = -0{,}00143 \text{ u} \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg/u $= -2{,}3738 \cdot 10^{-30}$ kg/átomo de ^{24}Mg.

A variación de masa para o caso de 2 moles de ^{27}Mg é:

$$\Delta m = -2{,}3738 \cdot 10^{-30} \ \frac{\text{kg}}{\text{átomo de } ^{24}\text{Mg}} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \ \frac{\text{átomos}}{\text{mol}} \cdot 2 \text{ mol} = -2{,}8590 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$$

A cantidade de enerxía E equivalente a este valor de masa, Δm, calculámola coa fórmula de Einstein: $E = \Delta m \cdot c^2$, sendo c a velocidade da luz no baleiro.

$$E = -2{,}8590 \cdot 10^{-6} \cdot \left(3 \cdot 10^{8}\right)^{2} \ \rightarrow \ \boxed{E = -2{,}573 \cdot 10^{11} \text{ J}}$$

Ó ser unha reacción endoenerxética, as partículas deben ter alomenos a enerxía de $2{,}573 \cdot 10^{11}$ J para que se consuman dous moles de magnesio segundo a reacción indicada. O exceso de enerxía sobre este valor limiar aparece como enerxía cinética das partículas produto da reacción.

5.- O $^{222}_{86}$Rn ten un período de semidesintegración de 3,82 días. Canto tempo tarda unha mostra de 20 g deste elemento en reducirse a 4 g?

Solución:

A ecuación que nos relaciona, en función do tempo t, o número de átomos finais, N, e iniciais, N_0, dunha substancia radioactiva de constante de desintegración λ, é: $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$.

Fáltanos coñecer λ, que calculamos coa expresión: $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}}$.

$$\lambda = \frac{0{,}693}{3{,}82 \text{ días}} = 0{,}1814 \text{ días}^{-1}$$

Substituíndo na ecuación do decaemento exponencial resulta:

$$\frac{4 \cdot N_{\text{Avogadro}}}{M \ ^{222}\text{Rn}} = \frac{20 \cdot N_{\text{Avogadro}}}{M \ ^{222}\text{Rn}} \cdot e^{-0{,}1814\, t} \ \rightarrow \ \boxed{t = 8{,}87 \text{ días}}$$

6.- O $^{222}_{86}$Rn ten unha constante radioactiva λ = 2,1 · 10^{-6} s^{-1}. Se dispoñemos de 2 mg desta substancia, cantos átomos se desintegran durante o sétimo día? Datos: N_A = 6,022 · 10^{23} partículas/mol.

Solución:

O número de átomos desintegrados dunha substancia radioactiva de constante de desintegración λ, no sétimo día, N_{7^o}, obtémolo por diferenza entre o número de átomos presentes ó finalizar e iniciar este día.

O número de átomos, N, presentes nun instante dado depende do número de átomos iniciais, N_0, e do tempo transcorrido, t, segundo a expresión: $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$.

$$N_{7^o} = -(N_7 - N_6) = -\left(N_0 \cdot e^{-\lambda t_7} - N_0 \cdot e^{-\lambda t_6}\right) = -N_0 \cdot \left(e^{-\lambda t_7} - e^{-\lambda t_6}\right)$$

$$N_{7^o} = -\frac{2 \cdot 10^{-3}}{222} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \cdot \left(e^{-2{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot 7 \cdot 24 \cdot 3600} - e^{-2{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot 6 \cdot 24 \cdot 3600}\right)$$

$$\boxed{N_{7^o} = 3{,}031 \cdot 10^{17} \text{ átomos desintegrados}}$$

7.- Sabendo que o período de semidesintegración do $^{90}_{38}Sr$ é de 28 anos, calcula: a) a actividade de 200 g desta substancia e b) o tempo necesario para que se desintegre o 87,5% da mostra orixinal. Dato: $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ partículas/mol.

Solución:

a) A actividade, A, dunha substancia radioactiva de constante de desintegración λ depende do número de átomos presentes, N, segundo a expresión: $A = \lambda \cdot N$.

Recordando a relación de λ co período de semidesintegración, $T_{1/2}$, $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}}$, resulta:

$$\left.\begin{aligned} A &= \lambda \cdot N \\ \lambda &= \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \end{aligned}\right\} \rightarrow A = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot N$$

$$A = \frac{\ln 2}{28 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600} \cdot \frac{200}{90} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \rightarrow \boxed{A = 1{,}051 \cdot 10^{15} \text{ Bq}}$$

b) O número de átomos N que quedan dunha substancia radioactiva, de constante de desintegración λ, transcorrido un tempo t, relaciónase co número de átomos iniciais, N_0, coa lei de desintegración radioactiva: $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$.

Se se desintegra o 87,5 %, a porcentaxe que queda sen desintegrar é o 12,5 %.

$$\left.\begin{aligned} N &= N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \\ \lambda &= \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t} \rightarrow \frac{12{,}5}{100} = e^{-\frac{\ln 2}{28} \cdot t} \rightarrow \boxed{t = 84 \text{ anos}}$$

8.- Calcula a actividade de 5 mg de $^{212}_{83}Bi$ sabendo que o período de semidesintegración é de 60,5 minutos. Cantos átomos se desintegran no primeiro segundo? Dato: N_A = $6{,}022 \cdot 10^{23}$ partículas/mol.

Solución:

A actividade, A, dunha substancia radioactiva de constante de desintegración λ depende do número de átomos presentes, N, segundo a expresión: $A = \lambda \cdot N$.

Recordando a relación de λ co período de semidesintegración, $T_{1/2}$, $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} A = \lambda \cdot N \\ \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \end{array}\right\} \rightarrow A = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot N$$

$$A = \frac{\ln 2}{60{,}5 \cdot 60} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-3}}{212} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \rightarrow \boxed{A = 2{,}7120 \cdot 10^{15}\ \mathrm{Bq}}$$

O número de átomos que se desintegran no primeiro segundo obtémolo restándolle ó número de átomos iniciais, N_0, os átomos que quedan sen desintegrar no instante $t = 1$ s:

$$N_{1^{\circ}\,\text{segundo}} = \left(N_0 - N_1\right) = \left(N_0 - N_0 \cdot e^{-\lambda t}\right) = N_0 \cdot \left(1 - e^{-\lambda t}\right)$$

$$N_{1^{\circ}\,\text{segundo}} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{212} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{60{,}5 \cdot 60} \cdot 1}\right)$$

$$\boxed{N_{1^{\circ}\,\text{segundo}} = 2{,}7118 \cdot 10^{15}\ \text{átomos desintegrados}}$$

9.- No momento da súa preparación, unha mostra de material contén 500 millóns de núcleos radioactivos, dos que a vida media é de 30 s. a) Que é o período de semidesintegración, $T_{1/2}$, e canto vale para a mostra. b) Determina o número de núcleos radioactivos na mostra despois de 15 s. (*Selectividade COU*; *set. 02*).

Solución:

Período de semidesintegración, $T_{1/2}$, dunha substancia radioactiva de constante de desintegración λ **é o tempo necesario para que a substancia radioactiva se reduza á metade**. A súa relación coa constate de desintegración é: $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Vida media, τ, dunha substancia radioactiva **é o tempo de vida medio** de todos os átomos presentes. Obtense sumando a vida de todos os átomos e dividindo polo seu número. Relaciónase coa constante de desintegración radioactiva λ mediante a expresión: $\tau = \frac{1}{\lambda}$.

Polo tanto, período de semidesintegración e vida media dunha substancia radioactiva son conceptos distintos e relaciónanse segundo a igualdade: $\boldsymbol{T_{1/2} = \ln 2 \cdot \tau}$. Substituíndo valores resulta:

$$T_{1/2} = \ln 2 \cdot 30 \rightarrow \boxed{T_{1/2} = 20{,}8\ \mathrm{s}}$$

b) O número de átomos N que quedan dunha substancia radioactiva, de constante de desintegración λ, transcorrido un tempo t, relaciónase co número de átomos iniciais, N_0, coa lei de desintegración radioactiva: $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$. Substituíndo os datos do enunciado temos:

$$\left.\begin{array}{l} N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \\ N_0 = 500 \cdot 10^6 \text{ núcleos} \\ t = 15\text{ s} \\ \lambda = \dfrac{1}{\tau} \\ \tau = 30\text{ s} \end{array}\right\} \rightarrow N = 500 \cdot 10^6 \cdot e^{-\frac{1}{30}\cdot 15} \rightarrow \boxed{\boxed{N = 303 \cdot 10^6 \text{ núcleos}}}$$

10.- O período de semidesintegración do polonio-210 é de 138 días. a) Canto vale a constante radioactiva do polonio? b) Cantos días tardará en desintegrarse o noventa por cento da mostra inicial? (*Selectividade COU*; *xuño 00*).

Solución:

a) A relación da constante radioactiva λ co período de semidesintegración $T_{1/2}$ dunha substancia radioactiva é: $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}}$. Substituíndo resulta:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{138} \rightarrow \boxed{\boxed{\lambda = 5{,}023 \cdot 10^{-3} \text{ días}^{-1}}}$$

b) O número de átomos N que quedan dunha substancia radioactiva, de constante de desintegración λ, transcorrido un tempo t, relaciónase co número de átomos iniciais, N_0, coa expresión: $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$.

Se se desintegra o 90 %, a porcentaxe que queda sen desintegrar é o 10 % e o valor de N en función de N_0 é: $N = \dfrac{10}{100} \cdot N_0$.

$$\left.\begin{array}{l} N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \\ \lambda = 5{,}023 \cdot 10^{-3} \text{ días}^{-1} \\ N = \dfrac{10}{100} N_0 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{10}{100} N_0 = N_0 \cdot e^{-5{,}023 \cdot 10^{-3} \cdot t} \rightarrow \boxed{\boxed{t = 458{,}41 \text{ días}}}$$

11.- Disponse de 1 mol de ^{32}P radioactivo de período de semidesintegración de 14,6 días. a) Cantas desintegracións por segundo se producen? b) Cantos días tardará en desintegrarse o 90 % do material? (*Selectividade COU*; *xuño 99*).

Solución:

a) A actividade A dunha substancia radioactiva de constante de desintegración λ depende do número de átomos presentes, N, segundo a expresión: $A = \lambda \cdot N$.

Recordando a relación de λ co período de semidesintegración, $T_{1/2}$, $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}}$, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} A = \lambda \cdot N \\ \lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}} \end{array}\right\} \rightarrow A = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot N$$

$$A=\frac{\ln 2}{14{,}6\cdot 24\cdot 3600}\cdot 6{,}022\cdot 10^{23}\ \rightarrow\ \boxed{A=3{,}309\cdot 10^{17}\ \text{Bq}}$$

b) O número de átomos N que quedan dunha substancia radioactiva, de constante de desintegración λ, transcorrido un tempo t, relaciónase co número de átomos iniciais, N_0, coa expresión: $N=N_0\cdot e^{-\lambda t}$. Se se desintegra o 90 %, a porcentaxe que queda sen desintegrar é o 10 % e o valor de N en función de N_0 é: $N=\frac{10}{100}\cdot N_0$.

$$\left.\begin{array}{l} N=N_0\cdot e^{-\lambda t} \\ N=\dfrac{10}{100}\cdot N_0 \\ \lambda=\dfrac{\ln 2}{T_{1/2}} \\ T_{1/2}=14{,}6\ \text{días}\end{array}\right\}\rightarrow\ \frac{10}{100}\cdot N_0=N_0\cdot e^{-\frac{\ln 2}{14{,}6}\cdot t}\ \rightarrow\ t=48{,}5\ \text{días}$$

12.- Sitúase un detector de radioactividade fronte a unha mostra radioactiva que posúe un período de semidesintegración de 60 s. No instante *t* = 0 o detector marca unha velocidade de desintegración de 2000 contas/s. Calcula a) a constante de desintegración ou radioactiva λ e b) a velocidade de desintegración ó cabo de 1 minuto. (*Selectividade COU*; *xuño 98*).

Solución:

a) Substituíndo os datos do problema na expresión que relaciona a constante de desintegración λ dunha substancia radioactiva co seu período de semidesintegración, $T_{1/2}$, resulta:

$$\lambda=\frac{\ln 2}{T_{1/2}}\ \rightarrow\ \lambda=\frac{\ln 2}{60}\ \rightarrow\ \boxed{\lambda=1{,}2\cdot 10^{-2}\ \text{s}^{-1}}$$

b) A velocidade de desintegración, A, da substancia radioactiva depende da súa constante de desintegración, λ, e do número de átomos presentes, N, segundo a expresión: $A=\lambda\cdot N$.

$$\left.\begin{array}{l} A_0=\lambda\cdot N_0 \\ \\ \left.\begin{array}{l} A=\lambda\cdot N \\ N=N_0\cdot e^{-\lambda\cdot t}\end{array}\right\}\rightarrow\ A=\lambda\cdot N_0\cdot e^{-\lambda\cdot t}\end{array}\right\}\rightarrow\ \frac{A_0}{A}=\frac{\lambda\cdot N_0}{\lambda\cdot N_0\cdot e^{-\lambda\cdot t}}$$

$$\frac{2000}{A}=\frac{1}{e^{-1{,}2\cdot 10^{-2}\cdot 60}}\ \rightarrow\ \boxed{A=973{,}5\ \text{contas/s}}$$

13.- Un miligramo de $^{60}_{27}Co$ desintégrase de acordo coa reacción:

$$^{60}_{27}\text{Co}\rightarrow\ ^{60}_{28}\text{Ni}+\,^{0}_{-1}e+\,^{0}_{0}\bar{\nu}\,,$$

sendo o período de semidesintegración igual a 3,5 anos. Acha: a) a enerxía desprendida e b) o

número de desintegracións por segundo no momento inicial. Datos: m_{Co} = 59,919010, m_{Ni} = 59,915439 e m_e = 5,486 · 10^{-4} u, sendo u = 1,66 · 10^{-27} kg. Velocidade da luz no baleiro, c = 3,00 · 10^8 m s^{-1}. (*Selectividade COU*; *set. 96*).

Solución:

a) A enerxía liberada, E, nunha reacción nuclear procede da conversión de masa, Δm, en enerxía, segundo a fórmula de Einstein: $E = \Delta m \cdot c^2$, sendo c a velocidade da luz no baleiro.

Δm obtense restándolle á masa dos núcleos de ^{60}Co que se desintegran a masa dos núcleos de ^{60}Ni que se forman e a masa dos electróns que aparecen na reacción.

$$\Delta m = \left(m_{^{60}\mathrm{Co}} - 27 \cdot\ m_{e^-}\right) - \left(m_{^{60}\mathrm{Ni}} - 28\, m_{e^-} + m_{e^-}\right)$$

$$\Delta m = \left(59{,}919010 - 27 \cdot 5{,}486 \cdot 10^{-4}\right) - \left(59{,}915439 - 28 \cdot 5{,}486 \cdot 10^{-4} + 5{,}486 \cdot 10^{-4}\right)$$

$$\Delta m = 0{,}003571 \text{ u/átomo de } {}^{60}\mathrm{Co}$$

$$\Delta m = 0{,}003571 \text{ u/átomo de } {}^{60}\mathrm{Co} \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg/u} = 5{,}9279 \cdot 10^{-30} \text{ kg/átomo de } {}^{60}\mathrm{Co}$$

$$E = 5{,}92786 \cdot 10^{-30} \cdot \left(3{,}00 \cdot 10^8\right)^2 \rightarrow E = 5{,}3351 \cdot 10^{-13} \text{ J/átomo de } {}^{60}\mathrm{Co}$$

Como xa sabemos a enerxía que se libera na desintegración de 1 átomo de ^{60}Co; para saber a enerxía liberada na desintegración de 1 mg desta substancia, calculamos primeiramente o número de átomos que hai nesta cantidade de substancia. Dado que a masa de 1 átomo de ^{60}Co é 59,919010 u, que na unidade de quilogramo lle corresponde o valor de 59,919010 · 1,66 · 10^{-27} kg, resulta que o número de átomos que hai en 10^{-6} kg de ^{60}Co é:

$$\text{número de átomos de } {}^{60}\mathrm{Co} = \frac{10^{-6}\,\mathrm{kg}}{59{,}919010 \dfrac{\mathrm{u}}{\text{átomo}} \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{u}}}$$

$$E_{1\,\mathrm{mg}\ {}^{60}\mathrm{Co}} = 5{,}3351 \cdot 10^{-13} \frac{\mathrm{J}}{\text{átomo}} \cdot \frac{10^{-6}\,\mathrm{kg}}{59{,}919010 \dfrac{\mathrm{u}}{\text{átomo}} \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{u}}}$$

$$\boxed{E_{1\,\mathrm{mg}\ {}^{60}\mathrm{Co}} = 5{,}3637 \cdot 10^{6}\ \mathrm{J}}$$

b) O número de desintegracións por segundo, A, dunha substancia radioactiva depende da súa constante de desintegración, λ, e do número de átomos presentes, N, segundo a expresión: $A = \lambda \cdot N$.

$$\left.\begin{aligned} A &= \lambda \cdot N \\ \lambda &= \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \end{aligned}\right\} \rightarrow A = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot N$$

N obtense relacionando a masa de 1 átomo de ^{60}Co coa masa que desta substancia se ten. O seu valor é:

$$N = \frac{10^{-6}\ \text{kg}}{59{,}919010\ \frac{\text{u}}{\text{átomo}} \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \frac{\text{kg}}{\text{u}}} \rightarrow N = 1{,}0054 \cdot 10^{19}\ \text{átomos}$$

$$A = \frac{\ln 2}{3{,}5 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600} \cdot 1{,}0054 \cdot 10^{19} \rightarrow \boxed{A = 6{,}3138 \cdot 10^{10}\ \text{Bq}}$$

14.- Unha mostra de material radioactivo contén 500 millóns de núcleos radioactivos. A vida media é de 30 s. Determina: a) o número de núcleos radioactivos que existen na mostra despois de 15 s e b) a constante λ de decaemento exponencial, ou constante radioactiva, do núcleo. (*Selectividade COU*; *xuño 92*).

Solución:

a) Transcorrido un tempo *t*, o número de núcleos, *N*, que dunha substancia radioactiva de constante de desintegración λ se teñen, relaciónase co número de núcleos iniciais, N_0, segundo a lei de desintegración radioactiva: $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$.

$$N = 500 \cdot 10^6 \cdot e^{-\lambda \cdot 15}$$

A constante λ obtense a partir da vida media, τ, da substancia radioactiva coa expresión: λ = 1/τ → $\lambda = \frac{1}{30}\ \text{s}^{-1}$.

$$N = 500 \cdot 10^6 \cdot e^{-\frac{1}{30} \cdot 15} \rightarrow \boxed{N = 3{,}03 \cdot 10^8\ \text{núcleos}}$$

b)

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{30}\ \text{s}^{-1}}$$

EXERCICIOS DE SELECTIVIDADE (Cuestións)

1.- O $^{237}_{94}Pu$ desintégrase, emitindo partículas alfa, cun período de semidesintegración de 45,7 días. Os días que deben transcorrer para que a mostra inicial se reduza á oitava parte son: a) 365,6; b) 91,4; c) 137,1. ***(Set. 08).***

Solución:

Período de semidesintegración, $T_{1/2}$, dunha substancia radioactiva é o tempo que hai de transcorrer para que a mostra radioactiva se reduza á metade. É dicir, se N_0 é o número de átomos iniciais, transcorrido un tempo $t = T_{1/2}$, o número de átomos N que quedan sen desintegrar é $N_0/2$. En consecuencia:

$$N_0 \xrightarrow[(45{,}7\text{ días})]{\text{para } t = T_{1/2}} \frac{N_0}{2} \xrightarrow[(45{,}7\text{ días})]{\text{para } t = T_{1/2}} \frac{N_0/2}{2} = \frac{N_0}{4} \xrightarrow[(45{,}7\text{ días})]{\text{para } t = T_{1/2}} \frac{N_0/4}{2} = \frac{N_0}{8}$$

Vemos que, para que a mostra inicial se reduza á súa oitava parte, o tempo t que hai de transcorrer é o de tres veces o período de semidesintegración, $T_{1/2}$: $t = 3 \cdot 45{,}7 = 137{,}1$ días.

A igual resultado chegamos se relacionamos o número de átomos finais, N, e iniciais, N_0, da substancia radioactiva de constante de desintegración λ co tempo t mediante a ecuación de decaemento exponencial: $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$.

Fáltanos coñecer λ, que obtemos ó relacionala co período de semidesintegración $T_{1/2}$ segundo a expresión:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{45{,}7}\ \text{días}^{-1}$$

Substituíndo na ecuación do decaemento exponencial resulta:

$$\frac{N_0}{8} = N_0 \cdot e^{-\frac{0{,}693}{45{,}7} \cdot t} \;\rightarrow\; t = 137{,}1\ \text{días}$$

2.- Un isótopo radioactivo ten un período de semidesintegración de 10 días. Se se parte de 200 g do isótopo, teranse 25 g deste ao cabo de: a) 10 días; b) 30 días) c) 80 días. ***(Xuño 08).***

Solución:

Período de semidesintegración, $T_{1/2}$, dunha substancia radioactiva é o tempo que hai de transcorrer para que a mostra radioactiva se reduza á metade. É dicir, se N_0 é o número de átomos iniciais, transcorrido un tempo $t = T_{1/2}$, o número de átomos N que quedan sen desintegrar é $N_0/2$. En consecuencia:

$$N_0 = 200\text{ g} \xrightarrow[(10\text{ días})]{\text{para } t = T_{1/2}} \frac{N_0}{2} = 100\text{ g} \xrightarrow[(10\text{ días})]{\text{para } t = T_{1/2}} \frac{N_0/2}{2} = \frac{N_0}{4} = 50\text{ g} \xrightarrow[(10\text{ días})]{\text{para } t = T_{1/2}} \frac{N_0/4}{2} = \frac{N_0}{8} = 25\text{ g}$$

Vemos que, para que a mostra inicial de 200 g se reduza a 25 g, o tempo t que hai de transcorrer é o de tres veces o período de semidesintegración, $T_{1/2}$: $t = 3 \cdot 10 = 30$ días.

A igual resultado chegamos se relacionamos o número de átomos finais, N, e iniciais, N_0, da substancia radioactiva de constante de desintegración λ co tempo t mediante a ecuación de decaemento exponencial: $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$.

Fáltanos coñecer λ, que obtemos a partir do período de semidesintegración $T_{1/2}$ coa expresión:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{10} \text{ días}^{-1}$$

Substituíndo na ecuación do decaemento exponencial resulta:

$$25 = 200 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{10} \cdot t} \rightarrow t = 30 \text{ días}$$

3.- Cal destas reacción nucleares é posible?: a) $^{2}_{1}\text{H} + ^{3}_{1}\text{H} \rightarrow ^{4}_{2}\text{He}$; b) $^{14}_{7}\text{N} + ^{4}_{2}\text{He} \rightarrow ^{17}_{8}\text{O} + ^{1}_{1}\text{H}$; c) $^{235}_{92}\text{U} + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{141}_{56}\text{Ba} + ^{92}_{36}\text{Kr} + 2\ ^{1}_{0}n$. *(Xuño 07).*

Solución:

Nas reaccións nucleares consérvase a carga e o número total de nucleóns; o que significa, respectivamente, que o número atómico e o número másico a ambos lados da ecuación, que representa a reacción nuclear, son os mesmos. En consecuencia, a ecuación que cumpre estas condicións é a do ítem b):

Reacción	Número de nucleóns	Carga
$^{2}_{1}\text{H} + ^{3}_{1}\text{H} \rightarrow ^{4}_{2}\text{He}$	$2+3 \neq 4$	$1+1=2$
$^{14}_{7}\text{N} + ^{4}_{2}\text{He} \rightarrow ^{17}_{8}\text{O} + ^{1}_{1}\text{H}$	$14+4=17+1$	$7+2=8+1$
$^{235}_{92}\text{U} + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{141}_{56}\text{Ba} + ^{92}_{36}\text{Kr} + 2\ ^{1}_{0}n$	$235+1 \neq 141+92+2 \cdot 1$	$92+0=56+36+2 \cdot 0$

4.- Se un núcleo atómico emite unha partícula α e dúas partículas β, o seu número atómico: a) diminúe en dúas unidades; b) aumenta en dúas unidades, c) non varía. *(Xuño 07).*

Solución:

Segundo as leis do desprazamento radioactivo ou leis de Soddy sucede que:

· Cando un núcleo radioactivo emite unha partícula α (que é un núcleo de He-4, $\alpha = ^{4}_{2}\text{He}$) aparece un novo núcleo de dúas unidades menos de número atómica, *Z*, e catro menos de número másico, *A*.

· Cando o núcleo dun átomo emite unha partícula β^- (que é un electrón, $\beta^- = ^{0}_{-1}e$) aparece un novo núcleo de unha unidade máis de número atómico, *Z*, e de igual número másico, *A*.

· Cando o núcleo dun átomo emite un raio γ (que é radiación electromagnética de alta enerxía) diminúe o seu contido enerxético pero non varía o seu número atómico nin másico.

De acordo a estas regras, os novos núclidos obtidos son:

$$^{A}_{Z}\mathrm{X} \;\rightarrow\; ^{A-4}_{Z-2}\mathrm{X}' + \alpha$$

$$^{A-4}_{Z-2}\mathrm{X}' \;\rightarrow\; ^{A-4}_{Z-2+1}\mathrm{X}'' + \beta$$

$$^{A-4}_{Z-2+1}\mathrm{X}'' \;\rightarrow\; ^{A-4}_{Z-2+1+1}\mathrm{X}''' + \beta$$

Despois das desintegracións indicadas, o novo núcleo obtido diminúe en catro unidades o seu número másico e **non varía o seu número atómico** (ítem c).

5.- Cal das seguintes reaccións nucleares representa o resultado da fisión do $^{235}_{92}\mathrm{U}$ cando absorbe un neutrón?: a) $^{209}_{82}\mathrm{Pb} + 5\,\alpha + 3\,p + 4\,n$; b) $^{90}_{38}\mathrm{Sr} + {}^{140}_{54}\mathrm{Xe} + 6\,n + \beta$; c) $^{141}_{56}\mathrm{Ba} + {}^{92}_{36}\mathrm{Kr} + 3\,n$. (*Set. 06*).

Solución:

Certos núcleos moi pesados, caso do uranio, cando se bombardean cunha partícula pequena (en xeral, un neutrón), poden fisionarse en dous fragmentos (núcleos) de masa intermedia, aparecendo, á súa vez, varios neutróns.

Nas reaccións nucleares consérvase a carga e o número total de nucleóns. Isto significa, respectivamente, que o número atómico e o número másico a ambos lados da ecuación que representa a reacción nuclear son os mesmos.

Cando un núcleo de $^{335}_{92}\mathrm{U}$ capta un neutrón, o número másico e o número atómico que resulta, respectivamente, son: 236 (235 + 1) e 92. Para os produtos de reacción, estes valores de número másico e atómico corresponden ó ítem c) da cuestión.

6.- Cando se bombardea nitróxeno $^{14}_{7}\mathrm{N}$ con partículas alfa xérase o isótopo $^{17}_{8}\mathrm{O}$ e outras partículas. A reacción é: a) $^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\alpha \rightarrow {}^{17}_{8}\mathrm{O} + p$; b) $^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\alpha \rightarrow {}^{17}_{8}\mathrm{O} + n + \beta$; c) $^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\alpha \rightarrow {}^{17}_{8}\mathrm{O} + p + n + \gamma$. (*Xuño 06*).

Solución:

Nas reaccións nucleares consérvase a carga e o número total de nucleóns. Isto significa, respectivamente, que o número atómico e o número másico a ambos lados da ecuación que representa a reacción nuclear son os mesmos.

Cando un núcleo de $^{14}_{7}\mathrm{N}$ se bombardea cunha partícula alfa, o número másico e o número atómico que resulta, respectivamente, son: 18 (14+4) e 9 (7+2). Para os produtos de reacción, estes valores de número másico e número atómico corresponden ó ítem a) da cuestión.

7.- Na desintegración β^{-}: a) o número atómico aumenta unha unidade; b) o número másico aumenta unha unidade c) ambos permanecen constantes. (*Xuño 05*).

Solución:

Na desintegración β^-, o núcleo dun átomo X, de número atómico Z e de número másico A, emite un electrón e^- (e un antineutrino, $\bar{\nu}$), aparecendo un novo núcleo.

Como no núcleo dos átomos non hai electróns, suponse que todo sucede como se un neutrón se desintegrase en: 1 protón, 1 electrón (que é a partícula β(−) emitida) e 1 antineutrino (en repouso, partícula de masa nula e sen carga, que é necesaria para que se conserve a cantidade de movemento e a enerxía).

O resultado é que aparece un protón máis no núcleo, aumentando en unha unidade o número atómico, sen variar o número de masa. Esta situación é a que se corresponde co ítem a) da cuestión.

8.- Na seguinte reacción nuclear $\gamma + {}^{9}_{4}\mathrm{Be} \rightarrow {}^{8}_{3}\mathrm{Li} + {}^{A}_{Z}\mathrm{X}$, a partícula ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$ é: a) un protón; b) un neutrón; c) un electrón. (*Set. 03*).

Solución:

Os raios gamma, γ, descubertos por Paul Villard no ano 1900, non son desviados polos campos eléctricos nin magnéticos e trátase de radiación electromagnética.

E como nas reaccións nucleares se conserva a carga e o número total de nucleóns; o que significa, respectivamente, que o número atómico e o número másico a ambos lados da ecuación que representa a reacción nuclear son os mesmos; os valores de A e Z serán:

$$\gamma + {}^{9}_{4}\mathrm{Be} \rightarrow {}^{8}_{3}\mathrm{Li} + {}^{A}_{Z}\mathrm{X}$$

Pola lei de conservación dos números de masa: $0+9=8+A$, polo que $A=1$

Pola lei de conservación da carga eléctrica: $0+4=3+Z$, polo que $Z=1$

E a partícula de $A=1$ e $Z=1$ é o **protón**.

9.- Na seguinte reacción nuclear: ${}^{32}_{15}\mathrm{P} \rightarrow {}^{A}_{Z}\mathrm{X} + {}^{0}_{-1}e$; cales son os valores de A e Z do núcleo X?: a) $A = 32, Z = 14$; b) $A = 31, Z = 16$; c) $A = 32, Z = 16$. *(Set. 02)*

Solución:

Como nas reaccións nucleares se conserva a carga e o número total de nucleóns; o que significa, respectivamente, que o número atómico e o número másico a ambos lados da ecuación que representa a reacción nuclear son os mesmos; os valores de A e Z serán:

$${}^{32}_{15}\mathrm{P} \rightarrow {}^{A}_{Z}\mathrm{X} + {}^{0}_{-1}e$$

Pola lei de conservación dos números de masa: $32=A+0$, polo que $A=32$

Pola lei de conservación da carga eléctrica: $15=Z+(-1)$, polo que $Z=16$

Estes valores de A e Z correspóndense cos do ítem c) da cuestión.

10.- Se un núcleo atómico emite unha partícula alfa, α, dúas partículas beta, β, e dúas partículas gamma, γ, o seu número atómico: a) diminúe en dúas unidades; b) aumenta en dúas unidades; c) non varía. ***(Xuño 02)***

Solución:

Segundo as leis do desprazamento radioactivo ou leis de Soddy sucede que:

· Cando un núcleo radioactivo emite unha partícula α (que é un núcleo de He-4, $\alpha = {}^{4}_{2}\text{He}$) aparece un novo átomo de dúas unidades menos de número atómica, *Z*, e catro menos de número másico, *A*.

· Cando o núcleo dun átomo emite unha partícula β^{-} (que é un electrón, $\beta^{-} = {}^{0}_{-1}e$) aparece un novo átomo de unha unidade máis de número atómico, *Z*, e de igual número másico, *A*.

· Cando o núcleo dun átomo emite un raio γ (que é radiación electromagnética de alta enerxía) diminúe o seu contido enerxético pero non varía o seu número atómico nin másico.

De acordo a estas regras, os novos núclidos obtidos son:

$$
\begin{aligned}
&{}^{A}_{Z}\text{X} \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\text{X}' + \alpha\\
&{}^{A-4}_{Z-2}\text{X}' \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2+1}\text{X}'' + \beta\\
&{}^{A-4}_{Z-2+1}\text{X}'' \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2+1+1}\text{X}''' + \beta\\
&{}^{A-4}_{Z-2+1+1}\text{X}''' \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2+1+1}\text{X}''' + \gamma\\
&{}^{A-4}_{Z-2+1+1}\text{X}''' \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2+1+1}\text{X}''' + \gamma
\end{aligned}
$$

Despois das desintegracións indicadas, o novo núcleo obtido **ten o mesmo número atómico** que o núcleo de partida (ítem c).

11.- Se o núcleo dun elemento químico ${}^{5}_{2}\text{X}$ ($A = 5$ e $Z = 2$) ten unha masa total de 5,0324 u, a enerxía de enlace por nucleón é: a) positiva; b) negativa; c) nula. Datos: 1 u = $1{,}49 \cdot 10^{-10}$ J; m_{p} = 1,0072 u; m_{n} = 1,0086 u. ***(Xuño 02).***

Solución:

A masa dos nucleóns que corresponden a un átomo do elemento químico ${}^{5}_{2}\text{X}$ obtense sumando a masa de dous protóns e de tres neutróns: $2 \cdot 1{,}0072 + 3 \cdot 1{,}0086$ = 5,0402 u.

Como a masa dun núcleo do citado elemento é de 5,0324 u, hai un defecto de masa nuclear de valor: 5,0402 – 5,0324 = 0,0078 u = Δm. A este defecto de masa correspóndelle a enerxía *E* que se obtén coa expresión: $E = \Delta m \cdot c^2$, sendo *c* a velocidade da luz no baleiro. Definida a enerxía de enlace como a enerxía necesaria para desintegrar un núcleo atómico nos seus constituíntes, trátase dunha **enerxía positiva**, sendo liberada na formación de un núcleo do elemento químico considerado a partir dos seus nucleóns constituíntes. Se dividimos este valor entre o número de nucleóns que posúe (cinco) obtense a **enerxía de enlace por nucleón** e representa a enerxía necesaria para extraer un nucleón do núcleo do átomo e canto maior sexa o seu valor más estable é o núcleo.

12.- Un elemento químico $^{214}_{83}\mathrm{X}$ que experimente sucesivamente unha emisión α, tres emisións β(−), e unha gamma γ, transformarase no elemento: a) $^{214}_{82}\mathrm{Y}$; b) $^{210}_{84}\mathrm{Y}$; c) $^{210}_{82}\mathrm{Y}$. (*Set. 00*).

Solución:

Segundo as leis do desprazamento radioactivo ou leis de Soddy sucede que:

· Cando un núcleo radioactivo emite unha partícula α (que é un núcleo de He-4, $\alpha = {}^4_2\mathrm{He}$) aparece un novo átomo de dúas unidades menos de número atómica, *Z*, e catro menos de número másico, *A*.

· Cando o núcleo dun átomo emite unha partícula β^- (que é un electrón, $\beta^- = {}^{0}_{-1}e$) aparece un novo átomo de unha unidade máis de número atómico, *Z*, e de igual número másico, *A*.

· Cando o núcleo dun átomo emite un raio γ (que é radiación electromagnética de alta enerxía) diminúe o seu contido enerxético pero non varía o seu número atómico nin másico.

De acordo a estas regras, os sucesivos núclidos obtidos son:

$$
\begin{aligned}
&^{214}_{83}\mathrm{X} \rightarrow {}^{210}_{81}\mathrm{X}' + \alpha \\
&^{210}_{81}\mathrm{X}' \rightarrow {}^{210}_{82}\mathrm{X}'' + \beta \\
&^{210}_{82}\mathrm{X}'' \rightarrow {}^{210}_{83}\mathrm{X}''' + \beta \\
&^{210}_{83}\mathrm{X}''' \rightarrow {}^{210}_{84}\mathrm{X}'''' + \beta \\
&^{210}_{84}\mathrm{X}'''' \rightarrow {}^{210}_{84}\mathrm{Y} + \gamma
\end{aligned}
$$

O elemento final obtido é o $^{210}_{84}\mathrm{Y}$, que corresponde ó ítem b) da cuestión.

13.- Na desintegración beta(−): a) emítese un electrón da parte externa do átomo; b) emítese un electrón dende o núcleo; c) emítese un neutrón. (*xuño 99*).

Solución:

Na desintegración radioactiva β(−) **emítese un electrón por parte do núcleo do átomo**, polo que a opción correcta é a b). Como no núcleo non hai electróns, suponse que todo sucede como se un neutrón se desintegrase en: un protón, un electrón (que é a partícula β(−) emitida) e un antineutrino (esta partícula, que en repouso é de masa nula e non posúe carga, é necesaria para que se conserve a cantidade de movemento e a enerxía).

EXERCICIOS DE SELECTIVIDADE (Problemas)

1.- O ^{210}Po ten unha vida media τ = 199,09 días. Calcula: a) o tempo necesario para que se desintegre o 70% dos átomos iniciais; b) os miligramos de ^{210}Po ó cabo de 2 anos se inicialmente había 100 mg. ($N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}). (*Set. 06*).

Solución:

a) O número de átomos *N* que quedan dunha substancia radioactiva, de constante de desintegración λ, transcorrido un tempo *t*, relaciónase co número de átomos iniciais, N_0, coa lei de desintegración radioactiva: $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$.

Se se desintegra o 70 %, a porcentaxe que queda sen desintegrar é o 30 % e o valor de *N* en función de N_0 é: $N = \frac{30}{100} \cdot N_0$.

$$\left.\begin{array}{l} N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \\ N = \dfrac{30}{100} N_0 \\ \left.\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{1}{\tau} \\ \tau = 199{,}09 \text{ días} \end{array}\right\} \rightarrow \lambda = 5{,}02 \cdot 10^{-3} \text{ días}^{-1} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{30}{100} N_0 = N_0 \cdot e^{-5{,}02 \cdot 10^{-3} \cdot t} \rightarrow \boxed{t = 239{,}84 \text{ días}}$$

b) Se na expresión: $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$, multiplicamos ambos membros da igualdade pola masa de un átomo, a expresión anterior relaciona a masa correspondente ó instante considerado, *m*, coa masa inicial, m_0: $m = m_0 \cdot e^{-\lambda t}$. Substituíndo resulta:

$$\left.\begin{array}{l} N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \rightarrow m = m_0 \cdot e^{-\lambda t} \\ m_0 = 100 \text{ mg} \\ \lambda = 5{,}02 \cdot 10^{-3} \text{ días}^{-1} \\ t = 2 \text{ anos} = 2 \cdot 365 \text{ días} \end{array}\right\} \rightarrow m = 100 \cdot e^{-5{,}02 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 365} \rightarrow \boxed{t = 2{,}56 \text{ mg}}$$

2.- Nunha mostra de $^{131}_{53}$I radioactivo cun período de semidesintegración de 8 días había inicialmente $1{,}2 \cdot 10^{21}$ átomos e actualmente só hai $0{,}2 \cdot 10^{20}$. Calcula: a) a antigüidade da mostra; b) a actividade da mostra transcorridos 50 días desde o instante inicial. (*Xuño 06*).

Solución:

a) O número de átomos *N* que quedan dunha substancia radioactiva, de constante de desintegración λ, transcorrido un tempo *t* (antigüidade da mostra), relaciónase co número de átomos iniciais, N_0, coa lei de desintegración radioactiva: $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$.

$$\left.\begin{array}{l} N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \\ N = 0{,}2 \cdot 10^{20} \text{ átomos} \\ N_0 = 1{,}2 \cdot 10^{21} \text{ átomos} \\ \lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}} \\ T_{1/2} = 8 \text{ días} \end{array}\right\} \rightarrow 0{,}2 \cdot 10^{20} = 1{,}2 \cdot 10^{21} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{8} \cdot t} \rightarrow \boxed{t = 47{,}3 \text{ días} = 4{,}1 \cdot 10^6 \text{ s}}$$

b) A actividade, A, dunha substancia radioactiva de constante de desintegración λ depende do número de átomos presentes, N, segundo a expresión: $A = \lambda \cdot N$.

$$\left.\begin{array}{l} A_{50} = \lambda \cdot N_{50} \\ N_{50} = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \\ N_0 = 1{,}2 \cdot 10^{21} \text{ átomos} \\ \lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}} \\ T_{1/2} = 8 \text{ días} = 6{,}912 \cdot 10^5 \text{ s} \\ t = 50 \text{ días} \end{array}\right\} \rightarrow A_{50} = \frac{\ln 2}{6{,}912 \cdot 10^5} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{21} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{8} \cdot 50} \rightarrow \boxed{A_{50} = 1{,}6 \cdot 10^{13} \text{ Bq}}$$

3.- O período $T_{1/2}$ do elemento radioactivo ${}^{60}_{27}\text{Co}$ é 5,3 anos e desintégrase emitindo partículas β. Calcula: a) o tempo que tarda a mostra en converterse no 70 % da orixinal; b) as partículas β que emite por segundo unha mostra de 10^{-6} gramos de ${}^{60}_{27}\text{Co}$. Dato: $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}. (*Set. 05*).

Solución:

a) O número de átomos N que quedan dunha substancia radioactiva, de constante de desintegración λ, transcorrido un tempo t, relaciónase co número de átomos iniciais, N_0, mediante lei de desintegración radioactiva: $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$.

$$\left.\begin{array}{l} N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \\ N = \dfrac{70}{100} N_0 \\ \left.\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}} \\ T_{1/2} = 5{,}3 \text{ anos} \end{array}\right\} \rightarrow \lambda = \dfrac{\ln 2}{5{,}3} \text{anos}^{-1} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{70}{100} \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{5{,}3} \cdot t} \rightarrow \boxed{t = 2{,}73 \text{ anos}}$$

b) A ecuación de desintegración do ${}^{60}_{27}\text{Co}$ é: ${}^{60}_{27}\text{Co} \rightarrow {}^{60}_{28}\text{Ni} + \beta^-$.

O número de partículas β^- $\left({}^{0}_{-1}e\right)$ emitidas por segundo é igual ó número de desintegracións por segundo, que obtemos calculando a actividade radioactiva, A: $A = \lambda N$.

$$\left.\begin{array}{l} A=\lambda \cdot N \\ N=m \cdot \dfrac{N_A}{\text{número másico}} \\ \lambda=\dfrac{\ln 2}{T_{1/2}} \\ T_{1/2}=5{,}3 \text{ anos}=1{,}67 \cdot 10^8 \text{ s} \end{array}\right\} \rightarrow A=\frac{\ln 2}{1{,}67 \cdot 10^8} \cdot 10^{-6} \cdot \frac{6{,}02 \cdot 10^{23}}{60} \rightarrow \boxed{A=4{,}16 \cdot 10^7 \text{ Bq}}$$

4.- O tritio $\left({}^3_1\text{H}\right)$ é un isótopo inestable do hidróxeno, cun período de semidesintegración $T_{1/2}$ de 12,5 anos e desintégrase emitindo unha partículas beta. Se a análise dunha mostra nunha botella de auga mostra que a actividade debida ó tritio é o 75 % da que presenta a auga no manancial de orixe, calcula: a) o tempo que leva embotellada a auga da mostra; b) a actividade dunha mostra que contén 10^{-6} g de ${}^3_1\text{H}$. Dato: N_A = 6,02 · 10^{23} partículas/mol. (*Set. 04*).

Solución:

A actividade, A, dunha substancia radioactiva de constante de desintegración λ, en función do tempo t, vén dada pola expresión: $A=A_0 \cdot e^{-\lambda t}$, sendo A_0 a actividade cando se empeza a contar o tempo. Utilizando o valor da relación de actividades, $\dfrac{A}{A_0}=\dfrac{\frac{75}{100}A_0}{A_0}=\dfrac{75}{100}$, resulta: $\dfrac{75}{100}=e^{-\lambda t}$.

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}75=e^{-\lambda t} \\ T_{1/2}=\dfrac{\ln 2}{\lambda} \\ T_{1/2}=12{,}5 \text{ anos} \end{array}\right\} \rightarrow 0{,}75=e^{-\frac{\ln 2}{12{,}5} \cdot t} \rightarrow \boxed{t=5{,}19 \text{ anos}}$$

b) A actividade, A, dunha substancia radioactiva de constante de desintegración λ depende do número de átomos presentes, N, segundo a expresión: $A=\lambda \cdot N$.

$$\left.\begin{array}{l} A=\lambda \cdot N \\ N=m \cdot \dfrac{N_A}{\text{número másico}} \\ \lambda=\dfrac{\ln 2}{T_{1/2}} \\ T_{1/2}=12{,}5 \text{ anos}=3{,}94 \cdot 10^8 \text{ s} \end{array}\right\} \rightarrow A=\frac{\ln 2}{3{,}94 \cdot 10^8} \cdot 10^{-6} \cdot \frac{6{,}02 \cdot 10^{23}}{3} \rightarrow \boxed{A=3{,}53 \cdot 10^8 \text{ Bq}}$$

5.- Unha mostra radioactiva diminúe desde 10^{15} ata 10^9 núcleos en 8 días. Calcula: a) a constante radioactiva λ e o período de semidesintegración $T_{1/2}$; b) a actividade da mostra unha vez transcorridos 20 días desde que tiña 10^{15} núcleos. (*Xuño 04*).

Solución:

a) O número de átomos N que quedan dunha substancia radioactiva, de constante de desintegración λ, transcorrido un tempo t, relaciónase co número de átomos iniciais, N_0, mediante lei de desintegración radioactiva: $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$.

$$\left.\begin{array}{l} N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \\ N = 10^9 \text{ núcleos} \\ N_0 = 10^{15} \text{ núcleos} \\ t = 8 \text{ días} \end{array}\right\} \rightarrow 10^9 = 10^{15} \cdot e^{-\lambda \cdot 8} \rightarrow \boxed{\lambda = 1{,}73 \text{ días}^{-1} = 2{,}0 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}}$$

Coñecida a constante de desintegración radioactiva, λ, o período de semidesintegración, $T_{1/2}$, calculámolo a partir de λ mediante a relación: $T_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$.

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{2{,}0 \cdot 10^{-5}} \rightarrow \boxed{T_{1/2} = 3{,}5 \cdot 10^4 \text{ s}}$$

b) A actividade, *A*, dunha substancia radioactiva de constante de desintegración λ, en función do tempo *t*, vén dada pola expresión: $A = A_0 \cdot e^{-\lambda t}$, sendo A_0 a actividade no instante inicial.

$$\left.\begin{array}{l} A = A_0 \cdot e^{-\lambda t} \\ A_0 = \lambda \cdot N_0 \end{array}\right\} \rightarrow A = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda t} \rightarrow A = 2{,}0 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{15} \cdot e^{-1{,}73 \cdot 20} \rightarrow \boxed{A = 1{,}88 \cdot 10^{-5} \text{ Bq}}$$