Principios de relatividade especial

1.-O conflito entre Maxwell e Newton.

2.-Antecedentes: a relatividade de Galileo e Newton.

- Transformacións galileanas : posición e tempo.
- Transformación galileana : distancia percorrida.
- Transformación galileana :velocidade e aceleración.
- O problema da luz.

3.-O experimento de Michelson e Morley. A contración de Lorentz e Fitzgerald.

4.-Postulados da Relatividade especial de Einstein. Transformacións de Lorentz..

5.-Consecuencias dos postulados de Einstein:

- Simultaneidade
- Contración da lonxitude
- Dilatación dos intervalos de tempo.

6.-Masa, cantidade de movemento e enerxía relativista.

7.-Diagramas de Minkowski

O conflito entre a eletrodinámica e a mecánica de Newton

No tema referido á natureza da luz e ás ondas eletromagnéticas, estudamos as ecuacións de Maxwell. Maxwell consideraba á luz como unha onda que se desprazaba por un medio que el denominaba **eter luminífero** . A sua 4ª ecuación decía:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \cdot I + \boldsymbol{\mu_0} \cdot \boldsymbol{\varepsilon_0} \frac{d \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}}{dt}$$

O produto dado polas duas constantes $\boldsymbol{\mu_0} \cdot \boldsymbol{\varepsilon_0}$ correspondentes ao campo elétrico e ao magnético traía o resultado:

$$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 10^9} A^2 \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot m^{-3}$$

$$\mu_0 \cdot \varepsilon_0 = \frac{1}{9 \cdot 10^{16}} m^{-2} \cdot s^2 = \frac{1}{9 \cdot 10^{16} m^2 \cdot s^{-2}} = \frac{1}{c^2}$$

A velocidade da luz era unha constante dada por: $\boldsymbol{c} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{\mu_0} \cdot \boldsymbol{\varepsilon_0}}}$

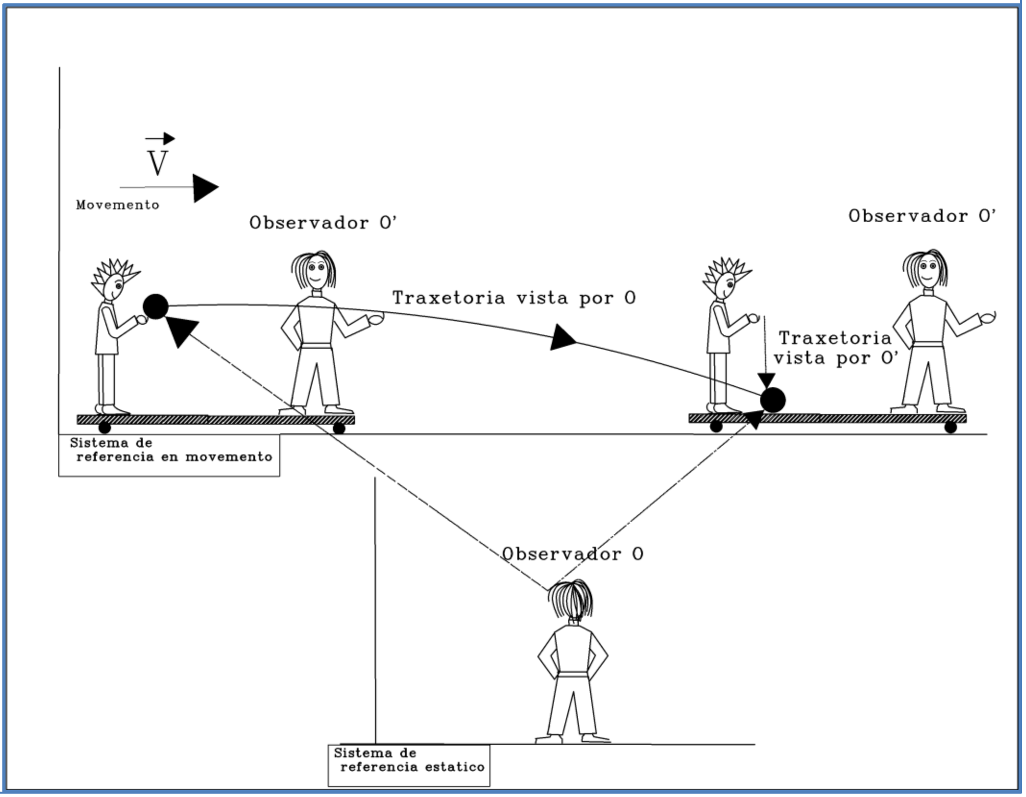
O conflito entre a eletrodinámica e a mecánica de Newton

Se a velocidade da luz era constante , enton non sería aplicabel o principio de relatividade galileano (composición de velocidades) un feito que estaba máis que comprobado.

Podes repasar o video:https://www.youtube.com/watch?v=G9bNP1aOvQk

Observa que O e O' non ven a mesma traxetoria para a pelota. O' ve que a pelota cae en liña reta.

O observador O, ten que sumar a velocidade do monopatín e a velocidade da caída livre.



A relatividade de Galileo e Newton: **posición e tempo**

Supoñamos dous sistemas S en repouso e S’que se move con M.RU (con velocidade $\vec{v}$)con respeito do primeiro. No momento inicial t=0 os observadores O e O’ocupan a mesma posición.

Nun tempo t=t’ (pois o tempo é un absoluto) os dous observadores estaran separados pola distancia:

$$\overrightarrow{OO'} = \vec{v} \cdot t \;\; \rightarrow \vec{r} = \overrightarrow{r'} + \vec{v} \cdot t$$

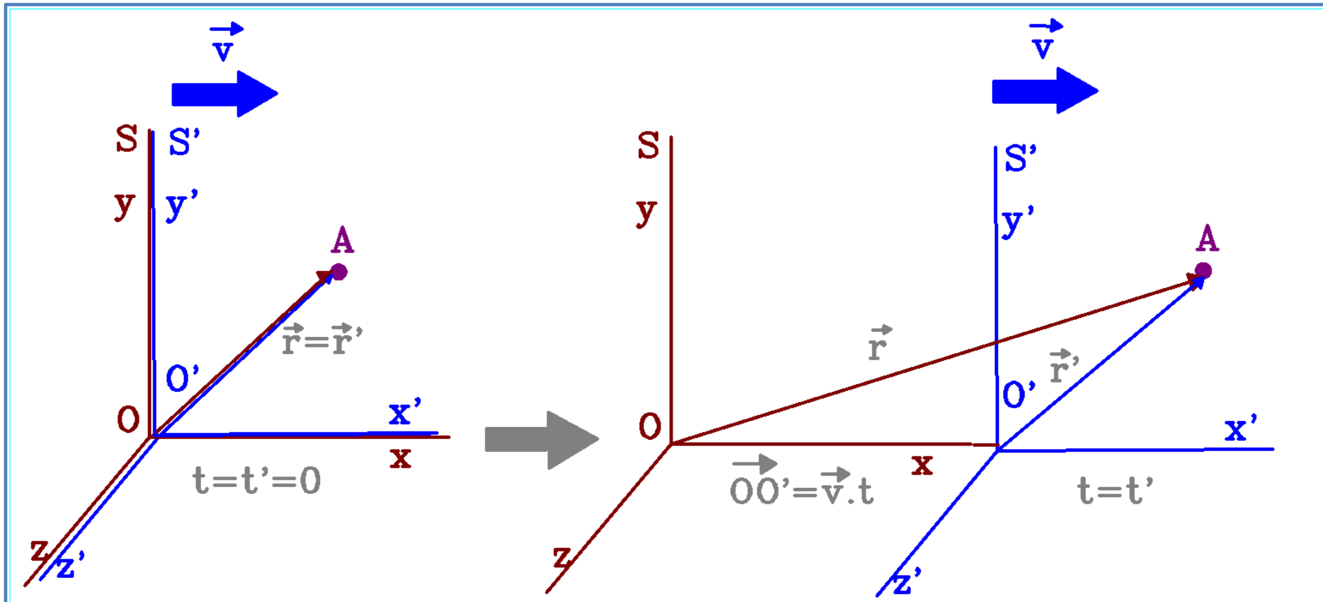
Se consideramos as coordenadas, a transformación de S a S’ vira´dada por:

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$x' = x - v \cdot t$$

$$t' = t$$

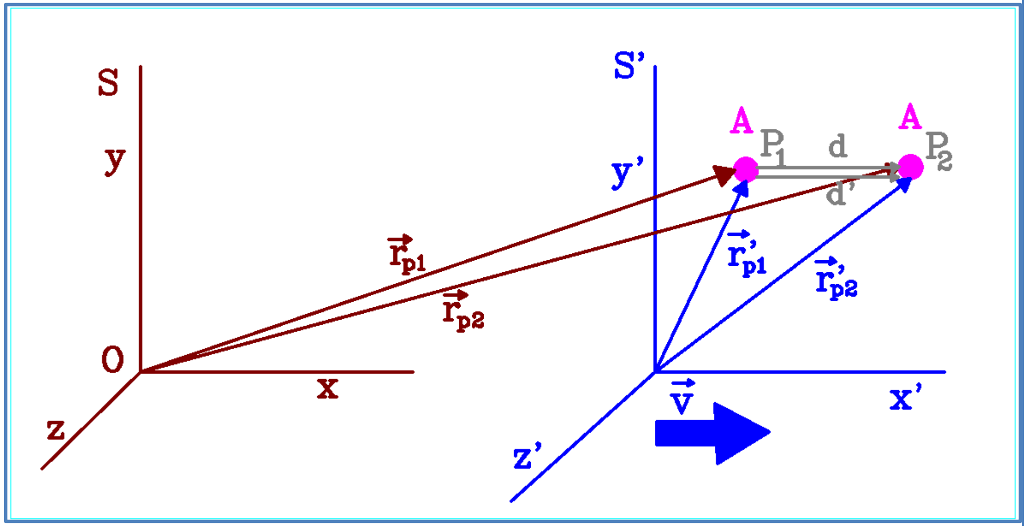


A relatividade de Galileo e Newton: **distancia percorrida**

Polo tanto, na concepción clásica do tempo, este transcorre por igual en todos os sistemas de referencias: **o tempo é absoluto e universal**.

Analisemos agora que acontece coa distancia percorrida.

Para elo estudemos o caso no que o obxecto A



móve-se dende a posición P_1 ate a posición P_2 na direción de X.

Para o observador O : $d = x_{P2} - x_{P1}$

Para o observador O':

$$d' = x'_{P2} - x'_{P1} = (x_{P2} - v \cdot t) - (x_{P1} - v \cdot t) = x_{P2} - x_{P1}$$

Polo tanto a distancia percorrida é invariabel.

A relatividade de Galileo e Newton: **velocidade e aceleración**

1) Para estudar a velocidade derivaremos simplesmente as ecuacións da posición tendo en conta que o tempo é absoluto.

$$Como\ y' = y \ \rightarrow \frac{dy\prime}{dt} = \frac{dy}{dt} \rightarrow v'_y = v_y$$

$$Como\ z' = z \ \rightarrow \frac{dz\prime}{dt} = \frac{dz}{dt} \rightarrow v'_z = v_z$$

$$Como\ x' = x - v \cdot t \ \rightarrow \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v \rightarrow v'_x = v_x - v$$

Polo tanto a velocidade non é invariabel .

2) Para estudar a aceleración, derivamos as expresións da velocidade. Resulta evidente que :

$\frac{dv\prime_x}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \rightarrow a'_x = a_x$ e por suposto: $a'_y = a_y$ e $a'_z = a_z$

Como as aceleracións son invariabeis, pois tamén o seran as forzas e polo tanto as leis físicas son iguais e independentes do sistema de referencia inercial que adoitemos.

Este resultado é definitivo.

Exercicio: A posición dunha partícula segundo o sistema O é:

$$\vec{r} = (4t^2 - 2t)\vec{i} - t^3\vec{j} + 2\vec{k}$$

Mentres que con respeito ao sistema O’ é:

$$\overrightarrow{r'} = (4t^2 + 3t)\vec{i} - t^3\vec{j} - 4\vec{k}$$

Calcula a velocidade relativa entre os dous sistemas.

Para calcular a velocidade de cada sistema, derivamos as duas ecuacións:

$$\vec{v}_o = \frac{d\vec{r}}{dt} = (8t - 2)\vec{i} - 3t^2\vec{j} \quad m \cdot s^{-1}$$

$$\vec{v}_{o'} = \frac{d\overrightarrow{r'}}{dt} = (8t + 3)\vec{i} - 3t^2\vec{j} \quad m \cdot s^{-1}$$

Como $\vec{v} = \vec{v}_o - \vec{v}_{o'} \rightarrow \vec{v} = -5\vec{i} \;\; m \cdot s^{-1}$

E cumpren-se as leis físicas por igual?

Se derivas as ecuacións das velocidades obtes a mesma expresión para as aceleracións $(\vec{a} = 8\vec{i} - 6t\vec{j}\ )$e polo tanto a resposta é si.

O problema da luz

As transformacións galileanas ven-se cumpridas deseguido de xeito cotian.

Mais como xa vimos, existía un problema por resolver en canto as ecuacións de Maxwell predecían unha velocidade para a luz de carater constante e de valor máximo $\boldsymbol{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}}}$

Agora ben, sería a mesma velocidade da luz para un observador que estivera en repouso que para outro que se movera con velocidade v? Se así fora violaría-se o principio da relatividade galileana que afirma que é variabel. E se foran distintas, o resultado poría en entredito as ecuacións de Maxwell.

En qualquer caso o resultado traería consigo unha transformación da ciencia física que ou ben afetaría á mecánica de Newton ou ás ecuacións da eletrodinámica de Maxwell.

O problema do eter

Existía tamén o problema do eter.

Por aquel enton aceitaba-se a existencia dun medio que inundaba o espazo e envolvía os corpos coñecido co nome de **éter luminífero** ou simplesmente **éter** que permitía, segundo Maxwell, o traslado das ondas eletromagnéticas. Dito medio, dada a velocidade da luz, debería ter propiedades sorprendentes: grande elasticidade e rixidez e ao mesmo tempo mínima densidade. Ademais a sua existencia era recoñecida dende moito tempo atrás tanto na filosofía europeia como na filosofía oriental, no mundo do budismo e do hinduísmo.

O éter ademais era un sistema en repouso absoluto.

Filosofía aristotélica	Filosofía hindú
Terra	Bhum
Auga	Apu
Lume	Agni
Ar	Vayu
Éter	Akasa

O experimento de Michelson-Morley

ver: https://www.youtube.com/watch?v=d41m_ofxuFY

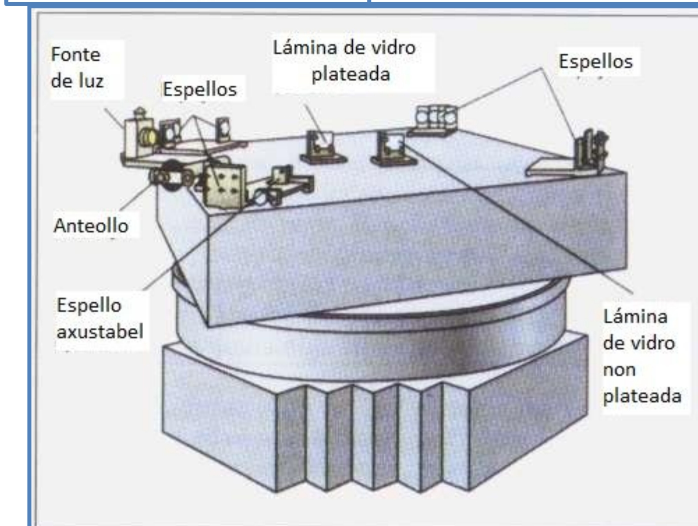
No 1881 A.A. Michelson confronta o seu primeiro experimento admitindo a existencia do éter como un sistema privilexiado en repouso absoluto.

Este experimento vai-se repetir en moitas ocasións mais o resultado vai ser sempre o mesmo.

O experimento tiña como elemento central un aparato (o interferómetro) deseñado para permeter medir unha interferencia entre dous raios de luz. Estaba montado sobre un bloco de pedra aboiando sobre mercurio para evitar vibracións.

Albert Abraham Michelson
(1852-1931)

Edward Williams Morley
(1838-1923)

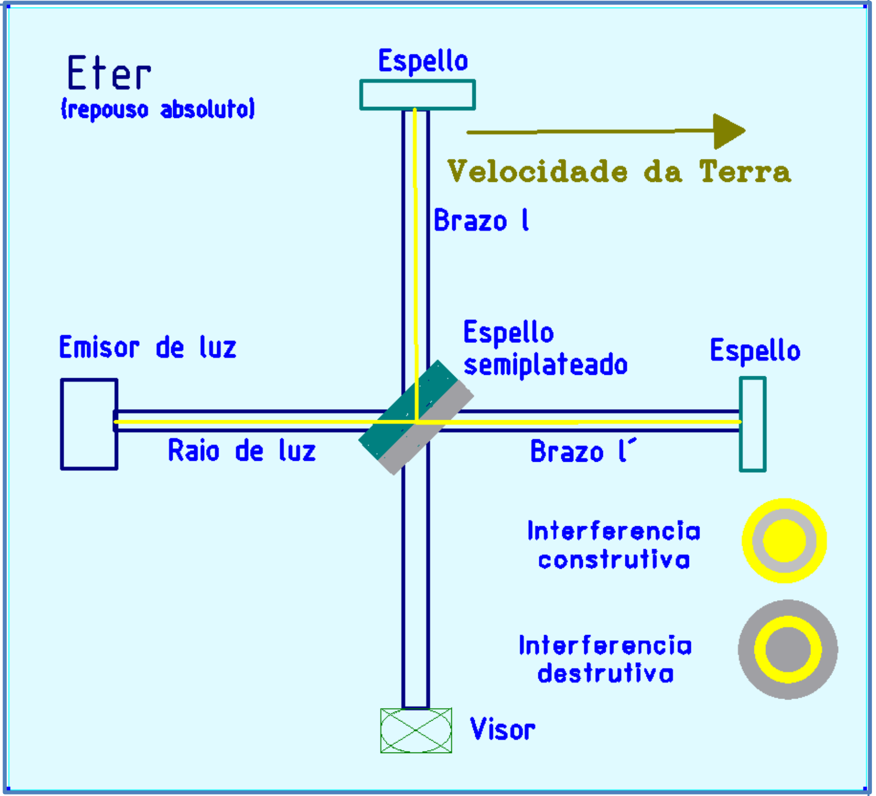


O experimento de Michelson-Morley

O procedemento era emitir un raio de luz dirixido ao espello semiplateado no que o raio dividía-se en 2 dirixidos hacia dous espellos situados nos dous extremos dos dous brazos.

Ademais L=L'.

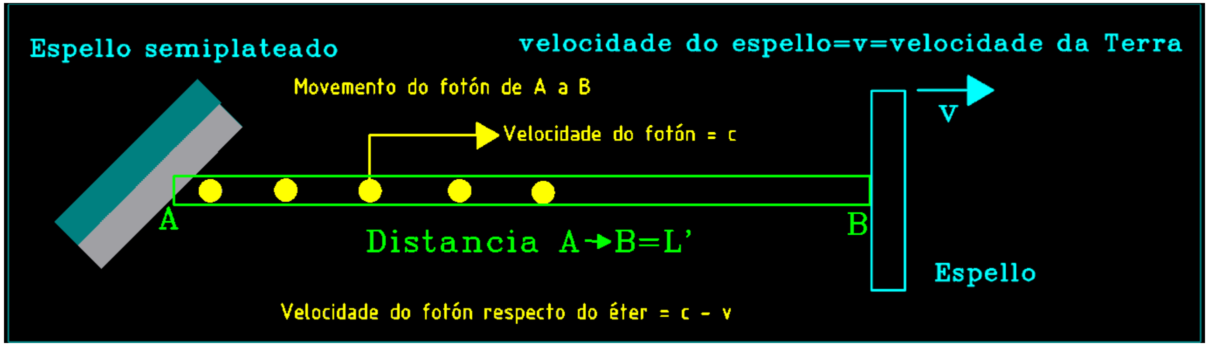
Alí refletían-se e regresaban ao espello semiplateado no que producirían unha interferencia que podía ser construtiva ou destrutiva.



Un dos raios movería-se seguindo o movemento da Terra no éter e o outro tomaría unha direción perpendicular ao movemento do planeta. Michelson e Morley agardaban unha interferencia destrutiva. Por qué?

Teremos que seguir a marcha dos dous raios.

1.-Por unha banda está o raio que segue o percorrido do <u>brazo L’</u> de A a B primeiro e logo de B a A:



- O fotón percorre a distancia A-B nun tempo que chamaremos t_{A-B}. Resulta evidente que podemos calcular o tempo:

$$t_{A-B} = \frac{L'}{c-v}$$

- O fotón reflétese no espello e regresa reproducindo o mesmo camiño agora de B a A. Mais agora agora a súa velocidade absoluta será c + v . Polo tanto o tempo que tarda en realizar o traxecto de B ata A será:

$$t_{B-A} = \frac{L'}{c+v}$$

E o tempo total será a suma dos tempos , tempo ao que chamaremos t´ que terá como valor a suma dos tempos calculados:

$$t´ = \frac{L´}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2 \cdot L´ \cdot c}{c^2-v^2}$$

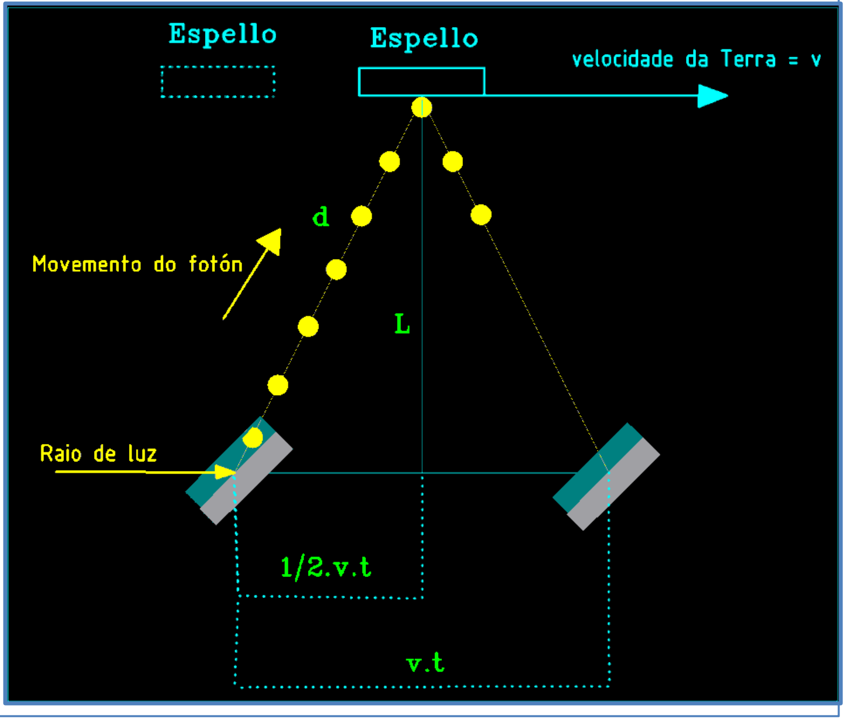
Da expresión anterior, podemos obter:

$$\boldsymbol{t´ = \frac{2.L´}{c.\left(1 - {v^2}/{c^2}\right)} (1)}$$

2.-Percorrido dun fotón do brazo L en movemento de ida e volta.

O fotón parte do espello semiplateado tomando unha direción que é perpendicular ao movemento da Terra e polo tanto ao movemento do interferómetro. En suma, irá hacia o espello superior segundo o debuxo inicial. Logo refletirá-se nese espello voltando hacia o espello semiplateado .

Visto dende o éter, en absoluto repouso, o fotón move-se de acordo co indicado polo debuxo.



A distancia total percorrida polo fotón será **2.d** con velocidade **c**.

O tempo que dura o percorrido será **t** que podemos calcular.

Por unha banda o tempo **t**:

$$t = \frac{2.d}{c}$$

Ademais como se apreza no debuxo:

$$d^2 = L^2 + (\frac{1}{2} \cdot v.t)^2 \rightarrow d = \sqrt{L^2 + (1/2 \cdot v \cdot t)^2}$$

Elevamos ao cadrado a ecuación do tempo:

$$t^2 = \frac{2 \cdot d^2}{c^2}$$

E combinando coa anterior:

$$t^2 = \frac{4 \cdot L^2 + v^2 \cdot t^2}{c^2} \rightarrow t^2 \cdot c^2 = 4 \cdot L^2 + v^2 \cdot t^2 \rightarrow t^2(c^2 - v^2) = 4 \cdot L^2$$

E desta expresión por último despexando **t**:

$$t = \frac{2 \cdot L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

Da que podemos obter:

$$\boldsymbol{t = \frac{2 \cdot L}{c \cdot \sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}} \quad \mathbf{(2)}$$

Así que os resultados vaticinaban que a interferencia sería destrutiva pois os tempos t e t’ eran distintos.

$$t' = \frac{2.L'}{c\cdot\left(1-{v^2}/{c^2}\right)} \quad (1) \qquad\qquad t = \frac{2\cdot L}{c\cdot\sqrt{1-{v^2}/{c^2}}} \quad (2)$$

Poren o resultado obtido era unha interferencia construtiva e enton tiña que acontecer que $t' = t$

Admitir que os tempos eran iguais significaba admitir:

1.- O éter luminifero non existía: non existe ningún “sistema privilexiado” en absoluto repouso.

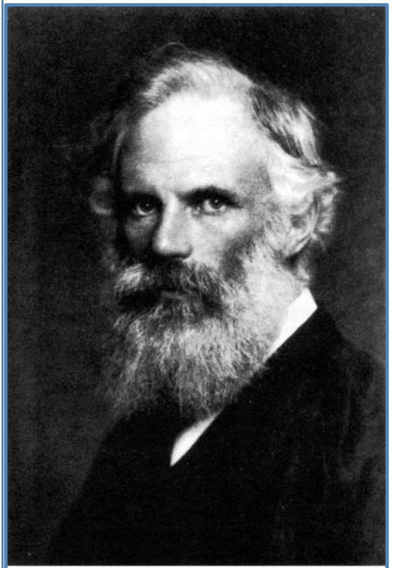
2.-A luz non da comprimento ás transformacións de Galileo .

3.-Logo de acordo con Maxwell a velocidade da luz é unha constante e é a velocidade máxima ou límite.

Proposta de Lorentz e Fitzgerald

Como a interferencia era construtiva, resultaba que $\boldsymbol{t'} = \boldsymbol{t}$ en contra do que predecía a aplicación das transformacións de Galileo.

Agora ben, se son iguais, podemos igualar as expresións dadas por (1) e (2) :

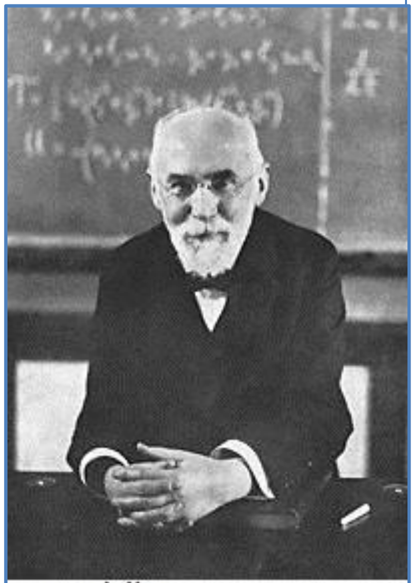


Gorge Francis FitzGerald (1851-1901)

$$\frac{2. L'}{c\left(1 - {v^2}/{c^2}\right)} = \frac{2 \cdot L}{c\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}$$

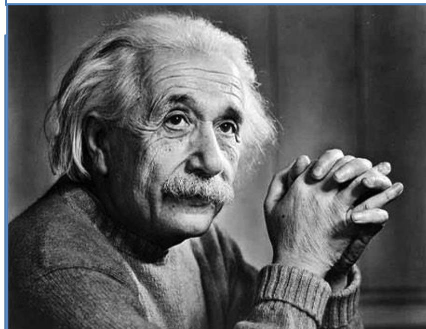
$$\boldsymbol{L' = L \cdot \sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}$$

O brazo do interferómetro na direción da velocidade da Terra, sofre unha contración .
(contración de FitzGerald-Lorentz)



Hendrik Anton Lorentz (1853-1928)

Postulados da Relatividade especial de Einstein


Albert Einstein (1879-1955)

Podemos esquematizar a Teoría da Relatividade Especial de Einsten en aplicación de dous critérios:

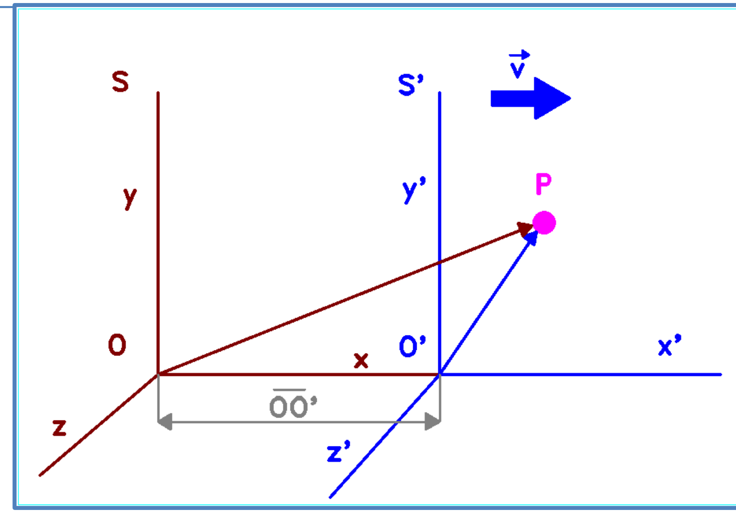
1º.-Posto que todos os intentos para encontrar sistemas de referencia privilexiados (en repouso absoluto) teñen fracasado compre considerar que tal sistema non existe e polo tanto son sistemas inerciais aqueles que se moven con respeito os demais con velocidade relativa constante.O éter non existe.

2º.- O primeiro postulado da Teoría de Einstein aponta que todas as leis físicas cumpren-se por igual en todos os sistemas de referencia inerciais.

O segundo postulado expresa que a velocidade da luz no vacío é a mesma en todos os sistemas inerciais independentemente do movemento da fonte emisora e/ou do observador/a.

As transformacións de Lorentz

Supoñamos un sistema S en repouso relativo en relación con outro S’ que se move seguindo X con velocidade constante. Se aplicamos as transformacións de Galileo topamos que:



$$y = y',\ \ z = z',\ \ t = t'\ ,\ \ x = x' + v \cdot t$$

Mais xa comprobamos que esta transformación conduce a resultados erroneos cando tratamos coa velocidade da luz. Precisamos dunha transformación que teña en conta que no sentido do movemento de S’ hai unha contración que obriga a sustituír $\boldsymbol{x'}$ por $\boldsymbol{x'} \cdot \sqrt{\mathbf{1} - {v^2}/{c^2}}$

Así que a expresión de $x = x' + v \cdot t$ fica como:

$$x = x' \cdot \sqrt{1 - {v^2}/{c^2}} + v \cdot t \quad (1)$$

Da expresión anterior podemos obter:

$$\boldsymbol{x' = \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}} \quad (2)$$

Por outra banda, se tomamos a perspetiva de S', enton existirá un tempo t' tal que $t' \neq t$ e podemos escreber a expresión (1) como:

$$\boldsymbol{x' = x \cdot \sqrt{1 - {v^2}/{c^2}} - v \cdot t' \ (3)}$$

E agora podemos igualar as expresións (2) e (3)

Igualamos (2) e (3) pois e obtemos:

$$x \cdot \sqrt{1 - {v^2}/{c^2}} - v \cdot t' = \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}$$

E podemos obter:

$$\boldsymbol{t' = \frac{t - v \cdot {x}/{c^2}}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}}$$

Así que as novas transformacións seran:

$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$x' = \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}$$
$$t' = \frac{t - v \cdot {x}/{c^2}}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}$$

ou tamén

$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$x = \frac{x' + v \cdot t'}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}$$
$$t = \frac{t' + v \cdot {x'}/{c^2}}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}$$

Simultaneidade

De forma común decimos que dous acontecementos ou sucesos son simultaneos cando acontecen no mesmo intre.

Supoñamos un sistema S e que nese sistema producen-se dous acontecementos nos pontos x_1 e x_2 nos tempos t_1 e t_2 . Para un observador en repouso O os dous sucesos son simultaneos cando $t_1 = t_2$.

Supoñamos agora un observador O' nun sistema S'que se move con respeito a S con velocidade constante v. Seran os dous acontecementos simultaneos?

$$t'_1 = \frac{t_1 - v \cdot {}^{x_1}/_{c^2}}{\sqrt{1 - {}^{v^2}/_{c^2}}} \quad e \quad t'_2 = \frac{t_2 - v \cdot {}^{x_2}/_{c^2}}{\sqrt{1 - {}^{v^2}/_{c^2}}}$$

E resulta evidente que son simultaneos ($\boldsymbol{t'_1 = t'_2}$) só se $\boldsymbol{x_1 = x_2}$ pois observa que se facemos:

$$t'_2 - t'_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - {}^{v^2}/_{c^2}}} \cdot \left[t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2} \cdot (x_2 - x_1)\right]$$

Contración de lonxitudes

Supoñamos unha barra en repouso no eixe $\boldsymbol{O'X'}$ dun sistema $\boldsymbol{S'}$ en movemento retilíneo con velocidade $\boldsymbol{v}$ constante.

A sua lonxitude para o observador $\boldsymbol{O'}$ será:

$$\boldsymbol{l' = x'_2 - x'_1}$$

Esta será a **lonxitude propria** da barra, a que mide o observador **O**'.

Poren para o observador $\boldsymbol{O}$ será: $l = x_2 - x_1$ medidas en $t_1 = t_2 = t$

Teríamos pois que:

$$l' = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - v \cdot t}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}} - \frac{x_1 - v \cdot t}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}$$

E polo tanto resulta que:

$$\boldsymbol{l = l' \cdot \sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}$$

Para un observador en repouso en relación co movemento da barra, a barra acurta-se. Isto é a contración de FitzGerald-Lorentz que xa vimos con ocasión do experimento de Michelson e Morley.

Exercicio: unha barra de 1 m de lonxitude, móve-se con respeito ao noso sistema de referencia con velocidade $0{,}7 \cdot c$.Qué lonxitude mediríamos nos?

A qué velocidade se tería que mover para que medíramos unha lonxitude de 0,5 m?

A barra móve-se respeito do observador **O** máis respeito de **O'** está quieta.

O observador O' medirá como lonxitude: $\boldsymbol{l' = 1\ m}$ que será a lonxitude propria da barra.

O observador O medirá a barra que con respeito a el está en movemento e obterá o resultado l.

$$l = l' \cdot \sqrt{1 - {v^2}/{c^2}} = 1m \cdot \sqrt{1 - \frac{(0{,}7 \cdot c)^2}{c^2}} = 0{,}714\ m$$

Vaiamos á segunda parte. Agora resulta que o observador O mide unha lonxitude de 0,5 m. A expresión anterior toma a forma:

$$l = l' \cdot \sqrt{1 - {v^2}/{c^2}} \rightarrow 0{,}5 = 1 \cdot \sqrt{1 - {v^2}/{c^2}} \rightarrow 0{,}25 = 1 - \frac{f^2 \cdot c^2}{c^2} \rightarrow f = 0{,}867$$

Polo tanto a barra móve-se con velocidade $v = 0{,}867 \cdot c$

Nota: en moitos textos adoita-se denominar ao termo:

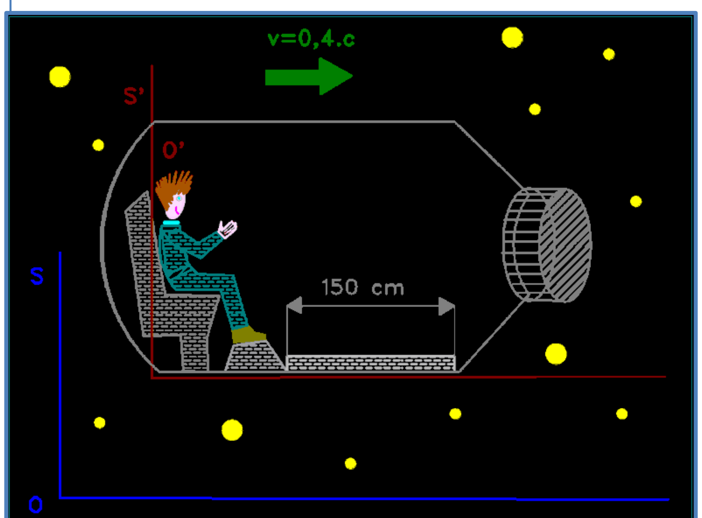
$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \ \ (ou\ K)$$

Enton a relación anterior pode ser escrita como:

$$l = l' \cdot \sqrt{1 - {v^2}/{c^2}} \rightarrow \frac{l}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}} = l' \rightarrow \boldsymbol{l' = l \cdot \gamma}$$

O importante é saber cal é a lonxitude propria (as veces sinala-se como l_0) e cal é a lonxitude que percebe o observador en repouso)

Exercicio: O noso astronauta na nave da figura, mide a lonxitude indicada.



É a lonxitude propria? Qué lonxitude medirá o observador O? (Solución:137,48 cm)

Se mide que a lonxitude da sua nave é 5 m, qué lonxitude medirá O?(Solución:4,58 m)

Dilatación dos intervalos de tempo

Coma sempre supoñamos un sistema S' onde está o observador O' que se move con velocidade v constante respeito dun outro observador O nun sistema S.

O observador O'mide os tempos correspondentes a dous sucesos que acontecen no mesmo ponto e polo tanto $x'_1 = x'_2$.

Para O, en repouso, o caso do tempo entre os dous eventos será $\Delta t = t_2 - t_1$ e polo tanto:

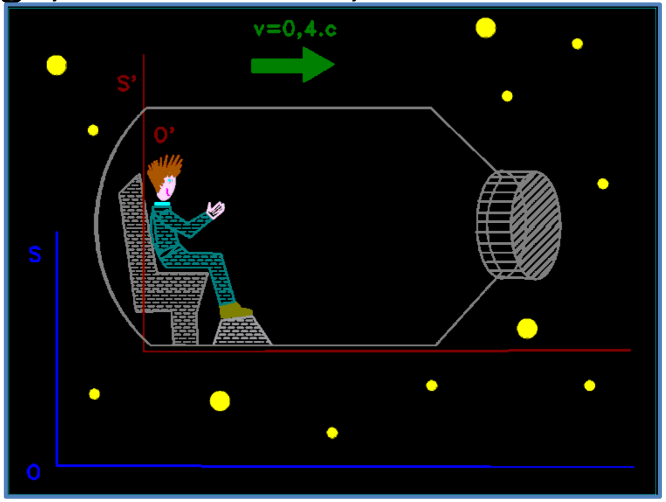
$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2} \cdot x'_2}{\sqrt{1 - v^2/_{c^2}}} - \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2} \cdot x'_1}{\sqrt{1 - v^2/_{c^2}}} = \frac{t'_2 - t'_1 + \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - v^2/_{c^2}}}$$

De onde:

$$\Delta t = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - v^2/_{c^2}}} \to \Delta t = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - v^2/_{c^2}}} \to \boldsymbol{\Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1 - V^2/_{c^2}}}$$

Observa que para O' , o observador en movemento, o tempo diláta-se.

Exercicio:O observador O que está na Terra observa no seu calendario que transcorreron 12 anos dende que o seu amigo, o astronauta, marchou. Canto tempo pasou para o noso astronauta?



O que imos calcular é o tempo proprio do noso amigo o astronauta ($\Delta t'$) e sabemos que na Terra pasaron 12 anos:

$$\Delta \boldsymbol{t}' = \Delta \boldsymbol{t} \cdot \sqrt{\mathbf{1} - \boldsymbol{V}^2/_{\boldsymbol{c}^2}}$$

$$\Delta t' = 12\ anos \cdot \sqrt{1 - \frac{(0{,}4 \cdot c)^2}{c^2}} = 10{,}998\ anos$$

Exercicio: seguro que tes ouvido falar do paradoxo dos xemelgos. Supon dous xemelgos, digamos Pedro e Marta, que teñen 25 anos cando Marta inicia unha viaxe de ida e volta á estrela Vega situada a 26 anos-luz nunha nave que ten unha $v = 0{,}98 \cdot c$.Cando Marta retorne á Terra, qual será a idade de cada un?

Pois está claro que para Pedro pasan $\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{52 \cdot c}{0{,}98 \cdot c} = 53{,}06\ anos$

Para Marta:

(Solución: 10,56 anos)

Exercicio: Os astronautas dunha nave interestelar que viaxa con $v = 0{,}99 \cdot c$ deciden empregar 1 hora do seu tempo para xantar. Canto duraría o xantar para os observadores do centro de control na Terra?

O tempo proprio dos astronautas é $\Delta t' = 1\ hora$

$$\Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1 - {V^2}/{c^2}} \rightarrow 1\ hora = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{(0{,}99 \cdot c)^2}{c^2}} \rightarrow \Delta t = 7{,}088\ horas$$

Exercicio: Unha persoa que vivira 90 anos, podería facer unha viaxe de ida e volta a un sistema estelar que se encontrara a 100 anos-luz?

Supoñamos que esa persoa despráza-se con $v = 0{,}99 \cdot c$

Visto dende a Terra o período de tempo necesario sería:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{100 \cdot c}{0{,}99 \cdot c} = 101\ anos$$

Dende a perspetiva do viaxeiro o intervalo de tempo sería:

$$\Delta t' = 101\ anos \cdot \sqrt{1 - \frac{(0{,}99 \cdot c)^2}{c^2}} = 14{,}25\ anos$$

Si.
Para os observadores da Terra pasarían 202 anos, mentres que para el pasarían 28,5 anos

Exercicio: Os muons son partículas que se xeran nas capas altas da atmosfera por ación dos raios cosmicos. A vida media en repouso destas partículas é de 2 µs e a sua velocidade é de $0{,}998 \cdot c$ e isto quere dicer que nunca chegaría á superficie da Terra por canto que só terían tempo de percorrer como 600 m.

Agora ben, por mor da sua velocidade vai-se dilatar a sua vida media. Canto?

Imos calcular o o tempo que duran dende a perspetiva do observador na Terra.

O seu tempo proprio é 2 µs: $\Delta t' = 2\ \mu s$

$$\Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1 - {V^2}/{c^2}} \rightarrow 2\mu s = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{(0{,}998 \cdot c)^2}{c^2}}$$

$$\Delta t = 31{,}64\ \mu s$$

Observa que a sua vida media aumenta ate o extremo de aque agora algúns muons teñen tempo de acadar a superficie da Terra.

Se queres saber máis sobre este fenómeno podes revisar a experiencia realizada e filmada por David Frisch e James Smith en 1963 para o M.I.T en:

https://www.youtube.com/watch?v=3I4Nh3ywsZE

Masa e cantidade de movemento relativista

A segunda Lei de Newton pode ser expresada como:

$$\vec{F} = \frac{\Delta(m \cdot \vec{v})}{\Delta t}$$

Sempre que consideremos a masa como constante.

Entre 1901 e 1915 os experimentos de Kaufmann-Bucherer-Neumann seguindo os traballos de Thomson para determinar a relación ${}^{q}/_{m}$ para eletróns a altas velocidades (entre $0{,}5 \cdot c$ e $0{,}7 \cdot c$) deron resultados que diferían dos que obtivera Thomson. Estes resultados e moitos que viñeron despois conducían a pensar que o valor da masa incrementába-se a medida que aumentaba a velocidade.

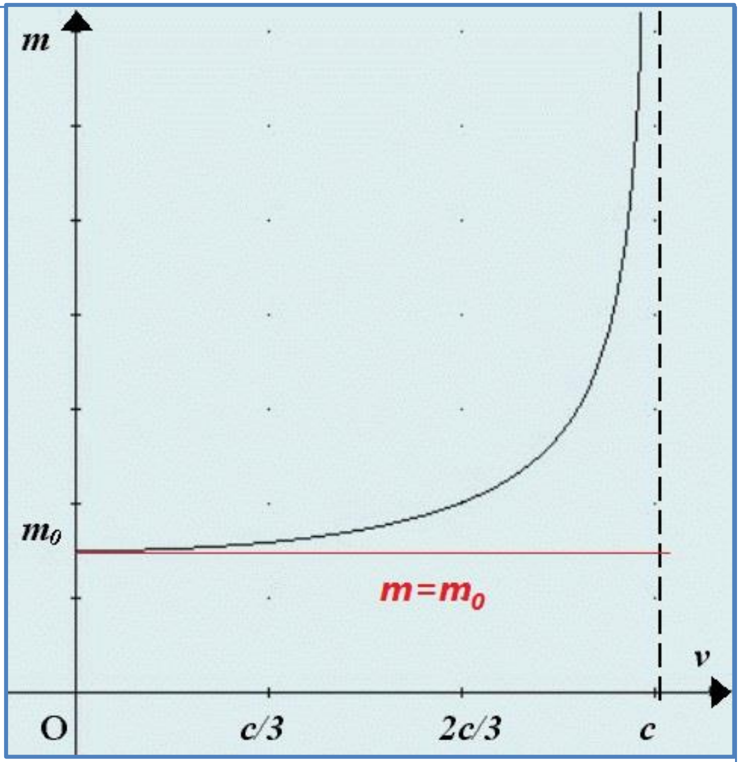
Coa teoría da relatividade especial, Einstein enfoca a cuestión da masa partindo de duas premisas:

- A masa relativista (m) debe acadar un valor infinito cando $v = c$. En suma, a partir de tal velocidade é imposibel producir ningunha aceleración.
- A masa relativista debe coincidir coa masa do corpo medida en repouso (m_0) , cando $v = 0$. De acordo con estas condicións:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Masa e cantidade de movemento relativista

Se representamos a masa relativista fronte á velocidade da partícula obtemos unha gráfica como a da figura.



Esta expresión da masa, obriga a modificar a expresión do calculo do momento linear que fica:

$$\vec{p} = \gamma \cdot m_0 \cdot \vec{v}$$

Exercicio: a que velocidade a masa dun corpo será o duplo da sua masa en repouso.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow 2 \cdot m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c$$

Masa e cantidade de movemento relativista

Tendo en conta a expresión da cantidade de movemento:

$$p = \gamma \cdot m_0 \cdot v \rightarrow p = \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Podemos obter: $p \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0 \cdot v \rightarrow p^2 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2 \cdot v^2$

$$p^2 - p^2 \cdot \frac{v^2}{c^2} = m_0^2 \cdot v^2 \rightarrow p^2 = v^2 \cdot \left[m_0^2 + \frac{p^2}{c^2}\right] \rightarrow m^2 \cdot v^2 = v^2 \cdot \left[m_0^2 + \frac{p^2}{c^2}\right]$$

$$m^2 = m_0^2 + \frac{p^2}{c^2} \rightarrow m^2 - m_0^2 = \frac{p^2}{c^2} \rightarrow p^2 = c^2 \cdot (m^2 - m_0^2)$$

$$\boldsymbol{p = c \cdot \sqrt{m^2 - m_0^2}}$$

Cantidade de movemento e enerxía relativista

Tendo en conta as expresións da cantidade de movemento e o traballo:

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ e $dE = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ podemos obter : $\boldsymbol{dE = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = v \cdot dp \ (1)}$

Agora imos ter en conta que: $p = c \cdot \sqrt{m^2 - m_0^2}$ calculemos a derivada da cantidade de movemento:

$$dp = c \cdot \frac{2 \cdot m \cdot dm}{2 \cdot \sqrt{m^2 - m_0^2}} = \frac{c^2 \cdot m \cdot dm}{c \cdot \sqrt{m^2 - m_0^2}} = \frac{c^2 \cdot m \cdot dm}{p} = \frac{c^2 \cdot m \cdot dm}{m \cdot v}$$

$$= \frac{c^2 \cdot dm}{v} \rightarrow \boldsymbol{dp = \frac{c^2 \cdot dm}{v}} \ (\mathbf{2})$$

E agora combinamos (1) e (2): $dE = v \cdot dp = v \cdot \frac{c^2 \cdot dm}{v} \rightarrow dE = c^2 \cdot dm$

Esta ecuación integrada trae como resultado:

$$\boldsymbol{E = m \cdot c^2}$$

Cantidade de movemento e enerxía relativista

A expresión anterior:

$$\boldsymbol{dE = c^2 \cdot dm}$$

Tamén pode ser integrada considerando que inicialmente a masa estaba en repouso e polo tanto:

$$\int_{v_0=0}^{v} dE = \int_{m_0}^{m} c^2 \cdot dm$$

Que integrada da como resultado:

$$\boldsymbol{E_{cinética} = m \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2}$$

E tamén:

$$\boldsymbol{E_{cinética} = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 \cdot c^2}$$

E tomando $\gamma = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \rightarrow \boldsymbol{E_{cinética} = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2}$

Exercicio: Un protón ten unha enerxía en repouso de 938 MeV. Calcula a velocidade e o momento linear cando a sua enerxía total é de 1450 MeV.

A enerxía total relativista do protón virá dada por:

$$E = m \cdot c^2 = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2 = \gamma \cdot E_0$$

Podemos calcular o valor $\gamma = \frac{E}{E_0} = \frac{1450\ MeV}{938\ MeV} = 1{,}546$

$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ e podemos obter: $\gamma^2 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2}$ (1)

Se tomamos $v = x \cdot c \rightarrow x = \frac{v}{c}$ e enton a expresión (1) toma a forma:

$$1 - x^2 = \frac{1}{\gamma^2} \rightarrow x = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0{,}76 \rightarrow \boldsymbol{v = 0{,}76 \cdot c}$$

Agora como: $p_{relativista} = m_{relativista} \cdot v = \gamma \cdot m_0 \cdot v$ se multiplicamos e dividimos por c podemos obter:

$$p_{relativista} = \gamma \cdot m_0 \cdot v \cdot \frac{c}{c} = \frac{\gamma \cdot \boldsymbol{m_0} \cdot 0{,}76 \cdot \boldsymbol{c^2}}{c} = \frac{\gamma \cdot 0{,}76 \cdot E_0}{c} = 1102{,}1\ MeV/c$$

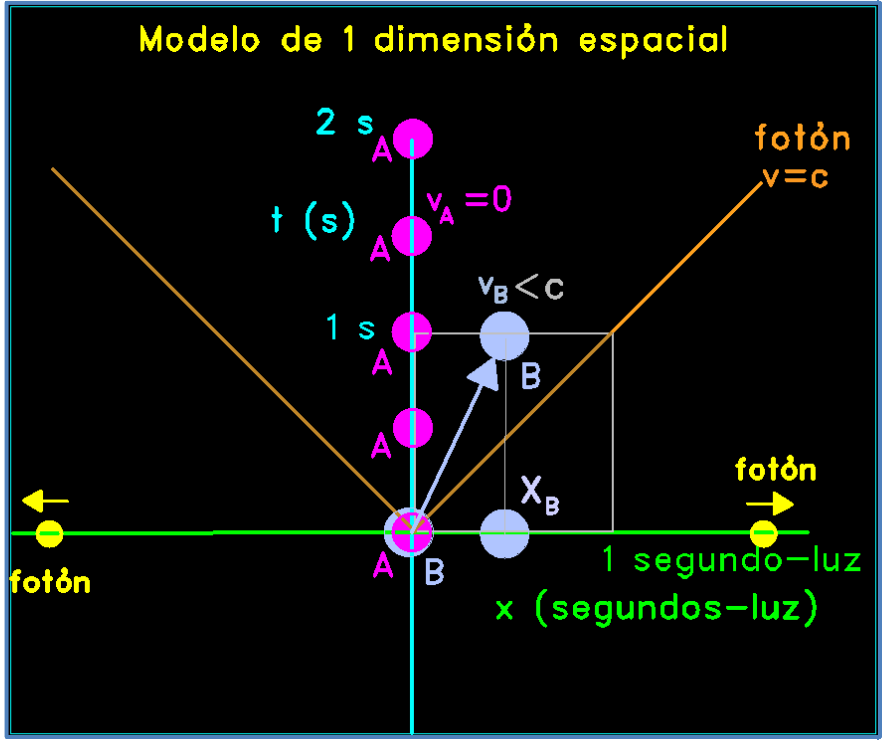
Estas unidades son as máis acaídas para expresar o resultado.

Representación do espazo-tempo: diagramas de Minkowski

Como representar graficamente a posición e o cambio de posición no espazo tempo?

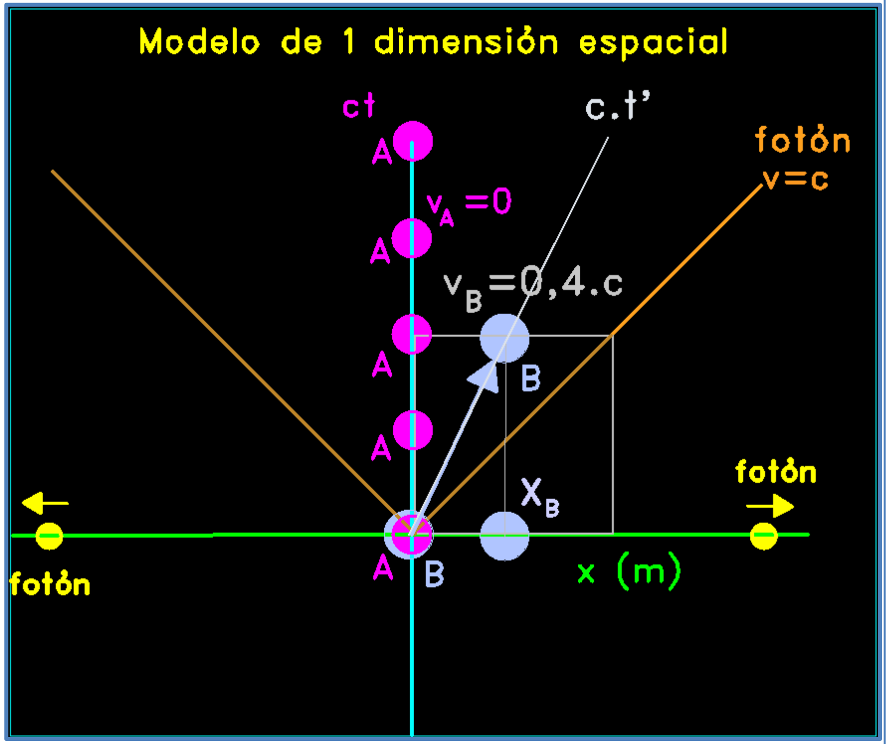
Supoñamos un observador inercial $\boldsymbol{O}$ e consideremos para comezar o movemento só ao longo do eixe $\boldsymbol{x}$.

O **eixe de posición** (x) está dividido en segundos-luz : a distancia que percorre a luz en 1 s.
O **eixe de tempos**, en segundos (s)
O **corpo A** está en repouso en O.
O **corpo B** está inicialmente en O, mais está en MRU ($v_B < c$)
Ao tempo dous fotóns móven-se seguindo o eixe X, un en sentido + e o outro en sentido -



Observa que a gráfica da velocidade do fotón forma un ángulo de 45º.

De xeito moi comun prefíre-se para representar o movemento unha escala distinta.



No **eixe X** a posición está escalada en metros (m).

No **eixe do tempo** usamos como escala o produto $\boldsymbol{c \cdot t}$ (observa que non cambea nada por canto a velocidade da luz é unha constante) Tomamos como unidade o metro-luz que ven sendo o tempo que tarda a luz en percorrer 1 m.

Con esta escala podemos representar a velocidade da partícula B como unha porcentaxe da velocidade da luz, por exempro neste caso 0,4.c

Por suposto a gráfica da velocidade do fotón, segue a formar un ángulo de 45º cos eixes da gráfica. Para o fotón acontece que $\boldsymbol{x_{fotón} = c \cdot t}$. No caso da partícula B acontece que $\boldsymbol{x_B = 0,4 \cdot c \cdot t'}$

<u>Nunha mesma liña vertical</u>, representan-se todos os pontos que ocupan a mesma posición. <u>Nunha mesma liña horizontal</u> os sucesos que acontece no mesmo instante.

Podemos agora representar as liñas que correspondan a distintas partículas ou sucesos no gráfico.

A liña de mundo amarela, a 4, é a que corresponde a un fotón. Máis aló non pode haber ningunha outra pois non pode haber ningunha velocidade superior á da luz.

A liña 1, a azul, corresponde a un obxecto que permanece en repouso na orixe.

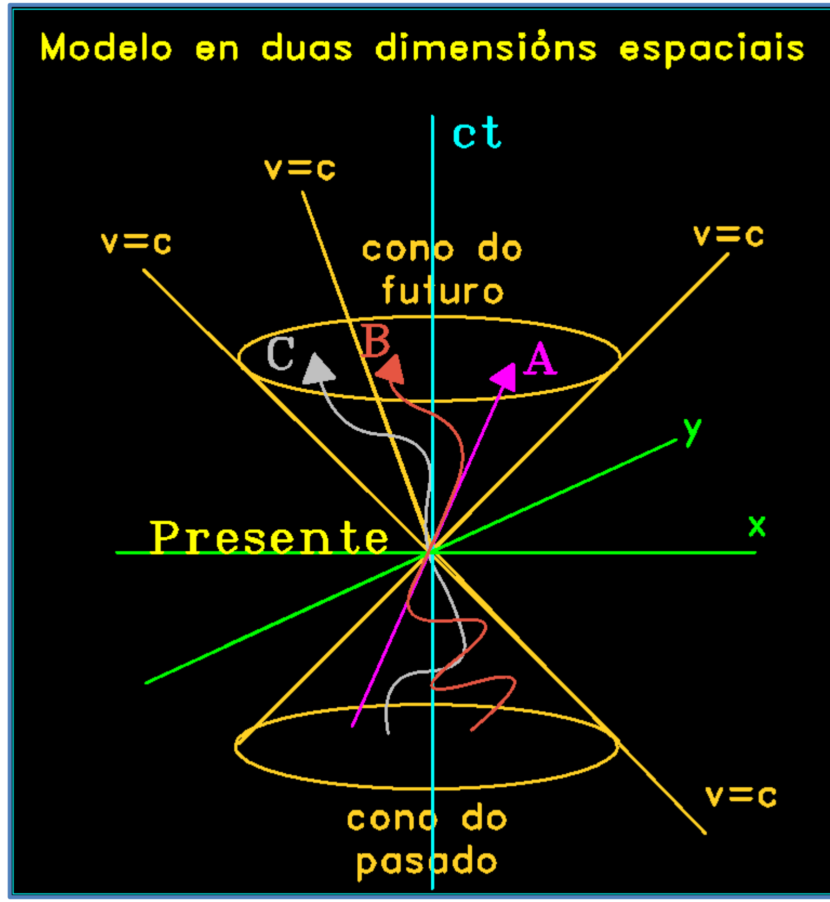
As liñas de mundo 2 e 3 corresponden a partículas que se moven con velocidade constante por suposto menor que c

A velocidade aumenta a medida que aumenta o ángulo que forma cada liña de mundo co eixe ct de acordo coa relación:

$$\alpha = tan^{-1}(\frac{v}{c})$$

Imos facer agora unha representación dun espazo formado por duas dimensións nos eixes x e y.

Agora as liñas de mundo dos fotóns debuxarán dous conos que definen o pasado e o futuro posibeis unidos no vértice do presente.
As liñas de mundo de tres sucesos A, B e C estan confinadas na área que define o pasado e os posibeis futuros.
Os sucesos contidos nesta área poden estar relacionados polo principio de causalidade: os que estan no pasado poden ser a causa dos acontecementos do futuro.



Os acontecementos situados fora da rexión delimitada non son acesibeis para os que estan no interior.