<u>Movemento ondulatorio II</u>

<u>Exercicios da folla de atividades</u>

Exercicio 8

8.- (Seletividade xuño 2016) Una onda cuxa amplitude é 0,3 m recorre 300 m en 20 s. Calcula:

a) a máxima velocidade dun punto que vibra coa onda se a frecuencia é 2 Hz; (Solución:±3,8 m/s)

b) a lonxitude de onda; (Solución: 7,5 m)

c) constrúe a ecuación de onda, tendo en conta que o seu avance é no sentido negativo do eixe x. (Solución: $y_{(x,t)} = 0{,}3 \cdot sen\ (4\pi t + \frac{4\pi}{15}x)$

a) Recopilemos datos:

A=0,3 m

Como percorre 300 m en 2 s a velocidade da onda é:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{300\ m}{20\ s} = \mathbf{15}\ \boldsymbol{m \cdot s^{-1}}$$

<u>Observa que no apartado a) ofrecen o dato de que a frecuencia de vibración é 2 Hz</u>

Podemos calcular a pulsación:

$$\boldsymbol{\omega} = 2 \cdot \pi \cdot f = \boldsymbol{4\pi\ \ rad.s^{-1}}$$

E ademais o período será o inverso da frecuencia, $\boldsymbol{T = 0,5\ s}$

Podemos calcular a velocidade máxima de vibración, facendo uso da ecuación do MHS, pois qualquer ponto vai executar un MHS coa mesma frecuencia, pulsación e amplitude:

$$v_{max} = \pm A \cdot \omega = \pm \frac{6}{5} \cdot \pi\ \ m \cdot s^{-1} = \pm \boldsymbol{3,8\ m \cdot s^{-1}}$$

b) A lonxitude de onda só precisa da ecuación de definición da velocidade da onda:

$$v = \frac{\lambda}{T} \rightarrow\ \lambda = v \cdot T = \boldsymbol{7,5\ m}$$

c) Imos a pola ecuación do M.O.

Partindo da ecuación xeral:

$$\boldsymbol{y_{(x,t)} = A\ sen\ (\omega t \pm kx + \theta_0)}$$

Para o noso caso imos considerar:

1. Que a fase inicial é 0 $(\theta_0 = 0)$
2. Que a onda trasláda-se de dereita a esquerda (**o signo +**)
3. Que a amplitude é 0,3 m
4. Que como : $K = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \boldsymbol{K} = \frac{2\pi}{7{,}5} = \boldsymbol{\frac{4\pi}{15}\ m^{-1}}$
5. Que $\boldsymbol{\omega} = 2 \cdot \pi \cdot f = \boldsymbol{4\pi\ rad.s^{-1}}$

Así que a ecuación será:

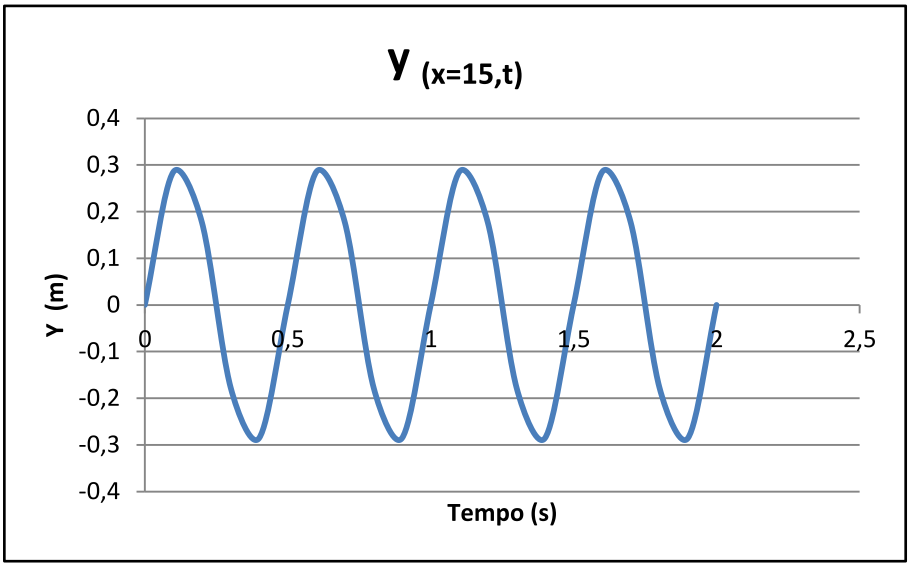
$$\boldsymbol{y_{(x,t)} = 0,3 \cdot sen\ (4\pi t + \frac{4\pi}{15} x)}$$

Imos estudar o movemento de vibración para un ponto qualquer. Eu vou escoller o ponto no que **x=15 m**. Para ese ponto a ecuación é:

$$\boldsymbol{y_{(x=15,t)} = 0,3 \cdot sen\ (4\pi t + 4\pi)}$$

Imos representar esta ecuación por medio dunha folla de calculo.

t (s)	y (m)
0	-1,47018E-16
0,1	0,285316955
0,2	0,176335576
0,3	-0,176335576
0,4	-0,285316955
0,5	-2,20527E-16
0,6	0,285316955
0,7	0,176335576
0,8	-0,176335576
0,9	-0,285316955
1	-2,94036E-16
1,1	0,285316955
1,2	0,176335576
1,3	-0,176335576
1,4	-0,285316955
1,5	-3,67545E-16
1,6	0,285316955
1,7	0,176335576
1,8	-0,176335576
1,9	-0,285316955
2	-4,41053E-16



Agora imos buscar a ecuación da velocidade. Para elo derivamos a ecuación anterior:

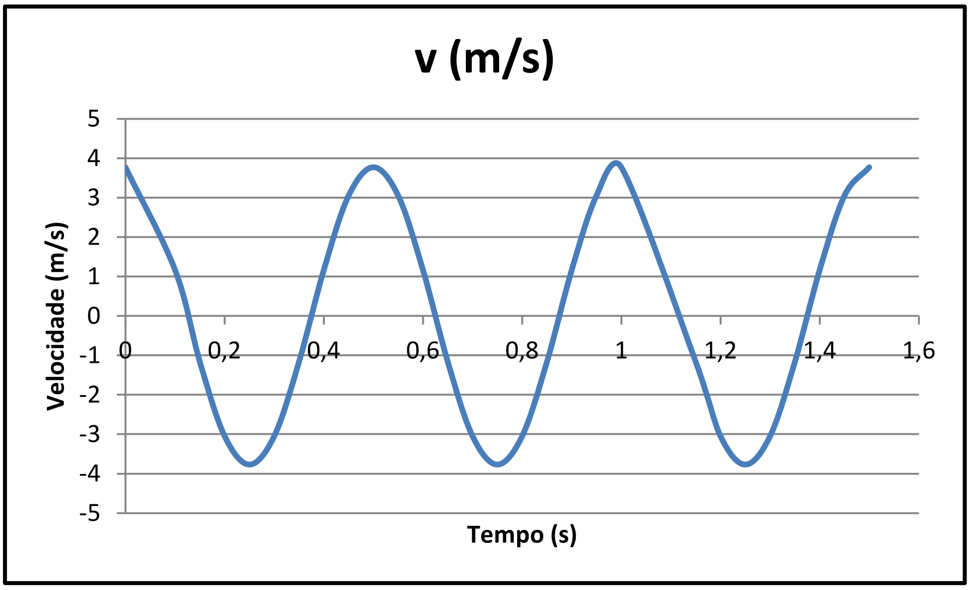
$$v_{(x=15,t)} = \frac{dy_{(x=15,t)}}{dt} = 0{,}3 \cdot 4\pi \cdot cos(4\pi t + 4\pi)$$

$$v_{(x=15,t)} = 1{,}2 \cdot \pi \cdot cos(4\pi t + 4\pi)$$

$$\boldsymbol{v_{(x=15,t)} = \frac{6}{5} \cdot \pi \cdot cos(4\pi t + 4\pi)}$$

Imos representar a función da velocidade por medio dunha folla de calculo.

t (s)	v (m/s)
0	3,769911184
0,1	1,164966623
0,15	-1,164966623
0,2	-3,049922215
0,25	-3,769911184
0,3	-3,049922215
0,35	-1,164966623
0,4	1,164966623
0,45	3,049922215
0,5	3,769911184
0,55	3,049922215
0,6	1,164966623
0,65	-1,164966623
0,7	-3,049922215
0,75	-3,769911184
0,8	-3,049922215
0,85	-1,164966623
0,9	1,164966623
0,95	3,049922215
1	3,769911184
1,15	-1,164966623
1,2	-3,049922215
1,25	-3,769911184
1,3	-3,049922215
1,35	-1,164966623
1,4	1,164966623
1,45	3,049922215
1,5	3,769911184



Se comparas esta gráfica coa da posición, verás que esta acada un valor máximo (+ ou -) cando na outra o valor é mínimo (+ ou -) e moi próximo ao valor cero.

Ademais verás que os valores máximos da velocidade igualan ao valor calculado con anterioridade ±3,8 m/s.

Nesta ecuación podes ver que a velocidade máxima de vibración acadara-se cando o coseno sexa igual a ±1 , ou sexa que:

$$v_{MAX(x=15,t)} = \pm\frac{6}{5}\cdot\pi \;\; (m\cdot s^{-1})$$

Valor que xa coñecemos pois calculamolo no apartado a).

E cando se acada ese valor? Pois cando o valor da fase acade o valor de 0, π, 2π,3π,….

Ousexa, cando :

$$(4\pi t + 4\pi) = n\cdot\pi \qquad expresión\ na\ que\ n\epsilon Z$$

Busquemos os valores do tempo:

$$4\pi t + 4\pi = n\cdot\pi$$

E eliminando **π**:

$$4t + 4 = n \;\rightarrow \boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{n-4}}{\boldsymbol{4}}$$

Comprobemos. Se das a **n** o valor **n=5** enton o valor de tempo é 0,25, e se vas á taboa verás que nese intre a velocidade é -3,77, aproximadamente -3,8 m/s.

Imos buscar agora a ecuación da aceleración, e para iso imos ter que derivar a ecuación da velocidade:

$$a_{(x=15,t)} = \frac{d\, v_{(x=15,t)}}{dt} = \frac{d(\frac{6}{5}\cdot\pi\cdot cos(4\pi t + 4\pi)}{dt} = -\frac{24}{5}\cdot\pi^2\cdot sen(4\pi t + 4\pi)$$

$$a_{(x=15,t)} = -\frac{24}{5}\cdot\pi^2\cdot sen(4\pi t + 4\pi)$$

E polo tanto a aceleración máxima acadará-se cando $sen(4\pi t + 4\pi) = \pm 1$

E a aceleración máxima será:

$$a_{Max(x=15,t)} = \pm\frac{24}{5}\cdot\pi^2 \quad (m\cdot s^{-2})$$

Se repasas o correspondente ao MHS verás que podemos calcular a aceleración coa expresión:

$$a = -\omega^2\cdot y$$

E a aceleración máxima acadará-se cando $y = A$

Así que: $a_{Max} = \pm\omega^2\cdot y = \pm\omega^2\cdot A = \pm 0,3\cdot(4\pi)^2 == \pm\frac{24}{5}\cdot\pi^2 \quad (m\cdot s^{-2})$

O valor que xa obtivemos antes.
Es quén de obter a gráfica correspondente á función da aceleración de vibración? Veña!!!!

<u>Exercicio 1</u>

1.- (Seletividade xuño 2015) Unha onda harmónica transversal propágase na dirección do eixe x e vén dada pola seguinte expresión (en unidades do sistema internacional): y(x,t) = 0,45 cos (2x - 3t).
Determinar:
a) a velocidade de propagación; (Solución: 1,5 m/s)
b) a velocidade e aceleración máximas de vibración das partículas; (Solucións :±1,35 m/s, ±4,05 m/s2)
c) a diferenza de fase entre dous estados de vibración da mesma partícula cando o intervalo de tempo transcorrido é de 2 s.(Solución: 6 rad)

a) Sempre compre comezar por examinar a ecuación da onda, as súas componentes, e identificar as variabeis. Para elo conven lembrar a ecuación xenérica de ondas:

$$\boldsymbol{y_{(x,t)} = A\ sen\ (\omega t \pm kx + \theta_0)}$$

Neste caso a ecuación é:

$$\boldsymbol{y_{(x,t)} = 0,45\ cos\ (2x - 3t)}$$

Podemos deducir:

1. Que a fase inicial é 0 ($\theta_0 = 0$)
2. Que a onda trasláda-se de esquerda a dereita (o signo -)
3. Que a amplitude é 0,45 m
4. Que k=2 m^{-1} (o termo que acompaña a x)
5. Que ω=3 rad/s (o termo que acompaña a t)

a) Para determinar a velocidade de propagación, precisamos a lonxitude de onda e o período (ou a frecuencia) pois:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f \quad (1)$$

Por outra banda $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ e resulta enton evidente que $\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{3}\ s}$

Ademais $k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \boldsymbol{\lambda = \pi\ \ m}$

Logo coa definición dada por (1) podes comprobar que a velocidade de propagación da onda é **1,5 m/s**.

b) Para calcular a velocidade de vibración máxima e a aceleración de vibración, tamén máximas, precisamos as ecuacións correspondentes que teremos que obter por derivación.

Para derivar a ecuación da onda precisamos que x=constante. Eu fixarei o valor de x en x=1 m, e enton a ecuación da onda transforma-se na ecuación do MHS que executa o ponto situado a 1m da orixe:

$$\boldsymbol{y_{(x=1,t)} = 0,45\, cos\,(2-3t)}$$

<u>Para a velocidade</u> :

$$\boldsymbol{v_{(x=1,t)} = 0,45 \cdot (-3) \cdot\ [-sen\,(2-3t)] = 1,35\, sen\,(2-3t)}$$

O valor máximo da velocidade acadará-se cando $\boldsymbol{sen\,(2-3t) = \pm 1}$ **e polo tanto a velocidade máxima será** $\boldsymbol{\pm 1,35\, m/s}$

Tamén podíamos ter feito este apartado recorrendo ás ecuacións do MHS, pois ao cabo iso estamos a analisar. Daquela podemos recordar que a velocidade dun ponto que executa un MHS ven dada por:

$$\boldsymbol{v = \pm\omega \cdot \sqrt{A^2 - y^2}}$$

Nesta expresión resulta evidente que a velocidade máxima acada-se cando y=0 e nese intre a velocidade será:

$$\boldsymbol{v = \pm\omega \cdot A = \pm 1,35\, m/s}$$

<u>Para a aceleración</u>:

Como xa vimos:

$$\boldsymbol{v_{(x=1,t)} = 1,35\, sen\,(2-3t)}$$

Agora derivamos :

$$\boldsymbol{a_{(x=1,t)} = 1,35 \cdot (-3) cos\,(2-3t) = -4,05\, cos\,(2-3t)}$$

O valor máximo da aceleración acada-se cando $\boldsymbol{cos\,(2-3t) \pm 1}$ **e resulta que ese valor será** $\boldsymbol{\pm 4,05\ \ m/s^2}$

Como antes, podíamos considerar o MHS do ponto situado en x= 1m e, como sabemos, no MHS a aceleración ven dada por:

$$\boldsymbol{a = -y \cdot \omega^2}$$

Nesta expresión o valor máximo acada-se cando $y = \pm A$ e polo tanto resulta:

$$a = \pm A \cdot \omega^2 = \pm 4{,}05\ m/s^2$$

c) Consideremos qualquer partícula do medio en concreto a partícula situada en x=1m.

Consideremos a ecuación de vibración dese ponto nun tempo t_1 :

$$\boldsymbol{y_{(x=1,t_1)} = 0{,}45\ cos\ (2 - 3t_1)}$$

E agora no tempo t_2 :

$$\boldsymbol{y_{(x=1,t_2)} = 0{,}45\ cos\ (2 - 3t_2)}$$

A diferenza de fase será:

$$\boldsymbol{(2 - 3t_2) - (2 - 3t_1) = \Delta\theta\ \ (diferenza\ de\ fase)}$$

$$\Delta\theta = 2 - 3t_2 - 2 + 3t_1 = 3 \cdot (t_1 - t_2)$$

E como a diferenza de tempos é de **2 s**, daquela a diferenza de fase é de **6 radians**.

Exercicio 4

4.- (Seletividade xuño 2017) A propagación na dirección *x* da onda dunha explosión nun certo medio pode describirse pola onda harmónica *y* (*x*, *t*)=5 sen (12*x* ± 7680*t*), onde as lonxitudes se expresan en metros e o tempo en segundos. Ao cabo dun segundo de producirse a explosión, o seu son alcanza unha distancia de: a) 640 m; b) 1536 m; c) 38 km. (Solución: 640 m)

A ecuación é $y_{(x,t)} = 5\ sen\ (12x \pm 7680t)$ e polo tanto resulta que **k=12 m^{-1}** e **ω=7680 rad/s**, podemos enton calcular a velocidade coa que se propaga a onda.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}\ \rightarrow \boldsymbol{\lambda = 0{,}5236\ \ m}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\ \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \boldsymbol{8{,}18 \cdot 10^{-4}\ \ s}$$

E enton a velocidade resulta: $v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0{,}5236\ m}{8{,}18 \cdot 10^{-4}\ \ s} = \boldsymbol{640\ m \cdot s^{-1}}$

Exercicio 5

5.- (Seletividade setembro 2017) A ecuación dunha onda transversal que se propaga nunha corda é *y(x, t)* = 10 sen π(*x*-0,2*t*), onde as lonxitudes se expresan en metros e o tempo en segundos. Calcula:
a) a amplitude, lonxitude de onda e frecuencia da onda;(Solución: 10 m, 0,1 Hz, 2 m)
b) a velocidade de propagación da onda e indica en que sentido se propaga; (Solución: 0,2 m/s)
c) os valores máximos da velocidade e aceleración das partículas da corda.(±2π m/s, ±0,4.π^2 m/s^2)

a) Ollo con este exercicio que ten o seu aquel. Lé a modo a ecuación. Si? Pois verás. Para ser máis claro e non caer en trampas, pequenas cambadelas dun "ocurrente" profesor, vou modificar a ecuación introducindo o termo π no parentese da función trigonométrica:

$$\boldsymbol{y_{(x,t)} = 10\ sen\ (\pi x - 0,2\pi t)}$$

Agora resulta que a amplitude é **A=10 m**.

Por outra banda agora, coa modificación que fixemos resulta que:

1) **k=π m^{-1}**
2) **ω=0,2π rad/s**

podemos calcular a frecuencia e a lonxitude de onda.

$$\omega = 2\pi f \ \rightarrow f = \frac{0,2\pi}{2\pi} = \mathbf{0,1\ Hz}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \ \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\pi} = \mathbf{2\ m}$$

b) A velocidade de propagación da onda será:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = 0,2\ m/s$$

E o sentido será de esquerda a dereita.

c) Para calcular os valores máximos de velocidade e aceleración do movemento de vibración dun ponto qualquer da corda pois:

$$v_{máxima} = \pm A \cdot \omega = \pm\boldsymbol{2\pi\ \ m/s}$$

$$a_{máxima} = \pm A \cdot \omega^2 = \pm 10 \cdot (0,2 \cdot \pi)^2 = \boldsymbol{0,4 \cdot \pi^2\ \ m/s^2}$$

Exercicio 14

14.- O oído humano capta sons de frecuencias comprendidas entre os 20 Hz e os 20 kHz. Se a velocidade do son no ar é 340 m/s, qué lonxitudes de onda percebe o oido humano no ar? (Solución: 17 e 0,017 m)

Comecemos polo principio: a velocidade do son no ar é 340 m/s e non cambiando de meio pois manterá-se constante dentro de certos límites.

A velocidade de propagación dunha onda resulta de :

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$$

Mantendo a velocidade constante, a relación entre lonxitude de onda e frecuencia está definida:

$$\lambda = \frac{340\ m/s}{f}$$

Polo tanto si $f = 20\ Hz$ enton $\lambda = 17\ m$, e si $f = 20000\ Hz$ enton $\boldsymbol{\lambda = 0,017\ m}$.

Exercicios que non estan na folla de atividades

ABAU xuño 2021

Unha onda transversal propága-se no sentido positivo do eixe x cunha velocidade de 300 m·s^{-1}, sendo o período de oscilación de 2×10^{-2} s. Dous pontos que se encontran, respetivamente, a distancias de 20 m e 38 m do centro de vibración estarán: a) en fase; b) en oposición de fase; c) nunha situación distinta das anteriores.

Para que dous pontos vibren ao unísono, compre que a distancia entre eles sexa a lonxitude de onda ou un número enteiro de veces a lonxitude de onda.

Calculemos a lonxitude de onda sabendo que:

$$v = \frac{\lambda}{T} \rightarrow \lambda = v \cdot T = 6\ m$$

Os dous pontos estan separados 18 m, unha distancia que conten 3 lonxitudes de onda, polo tanto estan en fase.

ABAU xullo 2022

Un altofalante emite ondas sonoras esféricas cunha potencia de 200 W. Determine:
a) a enerxía emitida en media hora;
b) o nivel de intensidade sonora, en dB, a 4 m do altofalante.
Dato: I0= 10^{-12} W·m^{-2}.

a) Como $P = \frac{W}{t} \rightarrow W = enerxía = P \cdot t = 360000\, J = 3{,}6 \cdot 10^5\, J$

b) $P = I \cdot S = I \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 \rightarrow I = \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = 0{,}9947\, W \cdot m^{-2}$

Para expresar en dB:

$$\beta = 10 \cdot log_{10} \frac{I}{I_0} = 120\, dB$$

ABAU xuño 2019

Cal debería ser a distancia entre dous puntos dun medio polo que se propaga unha onda harmónica, con velocidade de fase de 100 m/s e 200 Hz de frecuencia, para que estean no mesmo estado de vibración?:
a) 2·n; b) 0,5·n; c) n, sendo n = 0, 1, 2, 3… e medido no SI.

Outra volta temos que saber que para que o estado de vibración sexa o mesmo, a distancia entre os dous pontos debe ser un mulyiplo enteiro da lonxitude de onda.

Como $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f \rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = 0{,}5\, m$

Pois xa está claro que a resposta correta é a b)

ABAU xullo 2019

Nunha corda propága-se unha onda dada pola ecuación:
y (x, t) = 0,04 sen 2π (2x − 4t),
onde as lonxitudes se expresan en metros e o tempo en segundos. Calcula:
a) a frecuencia, o número de onda, a lonxitude de onda e a velocidade de propagación da onda;
b) a diferenza de fase, nun instante determinado, entre dous puntos da corda separados 1 m e comproba se os ditos puntos están en fase ou en oposición;
c) os módulos da velocidade e aceleración máximas de vibración dos puntos da corda.

Pois antes de comezar vou a escreber a ecuación introducindo o **2π** no parentese:

$$\boldsymbol{y_{(x,t)} = 0,04\ sen\ (4\pi x - 8\pi t)}$$

Agora sabemos que:

- **A=0,04 (m)**
- **K=4π (m^{-1})**
- **ω=8π ($rad.s^{-1}$)**

a) Pois enton a frecuencia será: $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \ \rightarrow \boldsymbol{f = 4\ Hz} \ \ e\ polo\ tanto\ \boldsymbol{T = 0,25\ s}$

O número de onda **K** xa o coñecemos. Podemos calcular a lonxitude de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \ \rightarrow \ \lambda = \frac{2\pi}{4\pi\ (m^{-1})} = \boldsymbol{0,5\ \ m}$$

Polo tanto a velocidade da onda será:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0{,}5\ \ m}{0{,}25\ \ s} = \boldsymbol{2\ m/s}$$

b) Está claro que estan en fase, poren vouno resolver de forma analítica e gráfica.

O primeiro ponto **x_1** terá a ecuación:

$$\boldsymbol{y_{(x_1,t)} = 0,04\ sen\ (4\pi x_1 - 8\pi t)}$$

E no tempo t=1 s (di “nun instante” e polo tanto podo escoller o t=1):

$$\boldsymbol{y_{(x_1,t=1)} = 0,04\ sen\ (4\pi x_1 - 8\pi)}$$

O segundo ponto, x_2, terá a ecuación no mesmo instante:

$$\boldsymbol{y_{(x_2,t=1)} = 0,04\ sen\ (4\pi x_2 - 8\pi)}$$

E a diferenza de fase será:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = (4\pi x_2 - 8\pi) - (4\pi x_1 - 8\pi) = 4\pi(x_2 - x_1) = \boldsymbol{4\pi \ \ rad}$$

A distancia entre os dous pontos é 1 m e como a lonxitude de onda é 0,5 m pois resulta que a distancia entre os dous pontos é un número de veces enteiro o valor de λ:

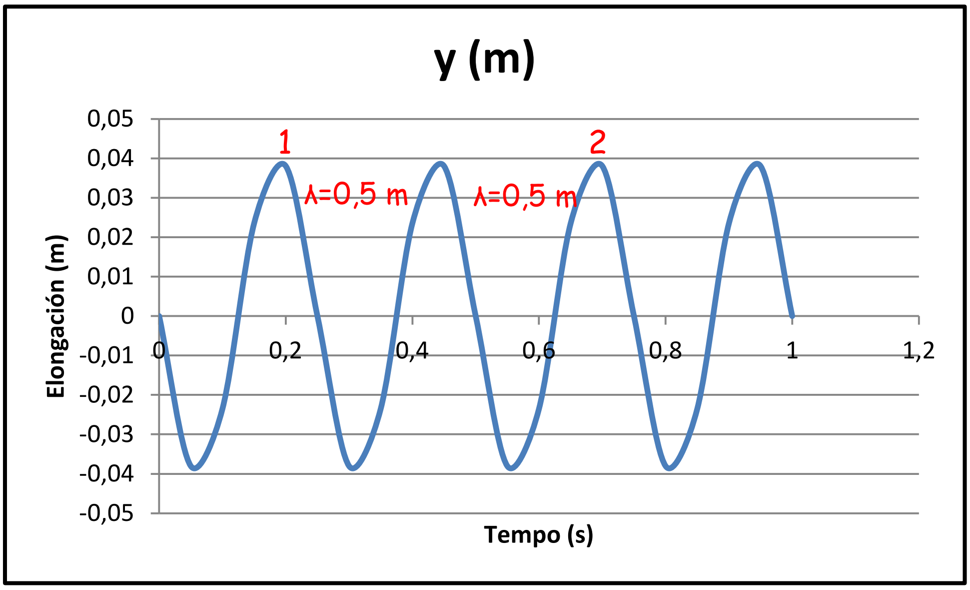
$$\Delta x = 1 = n \cdot \lambda = 2 \cdot 0{,}5\ (m) = 1\ m$$

Pois xa está.

Vou a representar a gráfica da ecuación para o ponto no que x=1 m

$$\boldsymbol{y_{(x=1,t)} = 0,04\ sen\ (4\pi - 8\pi t)}$$

t (s)	y (m)
0	-1,96024E-17
0,05	-0,038042261
0,1	-0,02351141
0,15	0,02351141
0,2	0,038042261
0,25	-9,80119E-18
0,3	-0,038042261
0,35	-0,02351141
0,4	0,02351141
0,45	0,038042261
0,5	0
0,55	-0,038042261
0,6	-0,02351141
0,65	0,02351141
0,7	0,038042261
0,75	9,80119E-18
0,8	-0,038042261
0,85	-0,02351141
0,9	0,02351141
0,95	0,038042261
1	1,96024E-17



Como ves na imaxe os pontos 1 e 2 estan separados 1 m que son duas lonxitudes de onda e estan en fase.

c) Toca buscar as ecuacións da velocidade e da aceleración e comprender os valores máximos.

Tomamos o ponto x= 1 que é o mesmo e o máis fácil. A ecuación xa a temos arriba:

$$\boldsymbol{y_{(x=1,t)} = 0,04\ sen\ (4\pi - 8\pi t)}$$

Para a velocidade derivamos:

$$v_{(x=1,t)} = -\frac{8}{25} \cdot \pi \cdot \cos(4\pi - 8\pi t)$$

E a velocidade máxima será: $\boldsymbol{v_{Max(x=1,t)} = \pm\frac{8}{25}\pi\ (m \cdot s^{-1})}$

E para a aceleración derivamos a anterior:

$$a_{(x=1,t)} = -\frac{64}{25} \cdot \pi^2 \cdot \cos(4\pi - 8\pi t)$$

E a aceleración máxima: $\boldsymbol{a_{(x=1,t)} = \pm\frac{64}{25} \cdot \pi^2\ (m \cdot s^{-1})}$