Exercicios de satélites

Exercicio nº21 da folla de atividades 1

21.- A estación espacial internacional (ISS) describe unha órbita arredor da Terra a unha altura de 390 km sobre a superficie. A súa masa é de 415 000 kg. Calcula:

a) A velocidade na órbita e o período de rotación.

b) A enerxía total na órbita.

c) O peso dun astronauta de 75 kg de masa dentro da ISS. Porque está sometido a ingravidez?

d) A enerxía que foi precisa para levar a ISS dende a superficie da Terra ate a súa órbita.

e) A enerxía necesaria se queremos trasladar a ISS a outra órbita que estivera a unha altura dupla da atual. Cal sería o período de rotación nesa nova órbita?

(Datos: G=6,67.10^{-11}N.m^2.kg^{-2}, Masa da Terra: 5,98.10^{24} kg, Raio da Terra: 6 370 km)

a) Pois imos aló.

Como xa sabes, podemos igualar: $F_c = F_G \rightarrow m_s \cdot \frac{v_0^2}{r_o} = G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{r_0^2}$

E se simplificas e tal pois sae que: $v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r_o}}$

$$r_o = (6370 + 390)km = 6760\ km = 6{,}76 \cdot 10^6 m$$

E resulta que a velocidade orbital é 7681 m/s

b) A enerxía total na órbita é a enerxía mecánica (suma da potencial e da cinética) a mitade da enerxía potencial: $E_M = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_{Terra} \cdot m_s}{r_o} = -1{,}22.\, 10^{13} J$

c)O peso do astronauta non é máis que o resultado da expresión de Newton aplicada á Terra e ao astronauta. Vou calcular o valor da gravedade e logo multiplico pola masa do astronauta, que é o mesmo:

$$Peso\ do\ astronauta = G \cdot \frac{M_T}{r_0^2} \cdot m_{astronauta} = 8{,}73\ \left({}^{N}/_{kg}\right) \cdot 75kg \cong 655\ N$$

E como ves, a intensidade do campo gravitatorio a esa altitude é $\mathbf{8{,}73}\ \left({}^{\boldsymbol{N}}/_{\boldsymbol{kg}}\right)$

Este valor vai coincidir co valor da aceleración centrípeta, como xa discutimos na aula. Precisamente por iso viven na ingravidez. Comprobemos:

$$a_c = \frac{v_o^2}{r_o} = \frac{7681^2}{6{,}76 \cdot 10^6} \left({}^{m}/_{s^2}\right) \cong \mathbf{8{,}73}\ \left({}^{\boldsymbol{N}}/_{\boldsymbol{kg}}\right)$$

d) Fagamos un balance de enerxías.

Na superficie da Terra e antes do lanzamento, toda a enerxía era potencial:

$$Ep_{Terra} = -\frac{G \cdot M_{Terra} \cdot m_{satélite}}{R_{Terra}} = -2{,}598 \cdot 10^{13} J$$

Pois ben, antes calculamos a enerxía mecánica na órbita.

A enerxía necesaria será a enerxía final (na órbita) menos a enerxía inicial (a enerxía potencial na superficie da Terra):

$$\boldsymbol{Enerxía\ necesaria = W_{exterior} = E_{\ M.orbita} - E_{\ P.na\ Terra}} =$$

$$= -1{,}22 \cdot 10^{13} J - (-2{,}598 \cdot 10^{13} J) = +\mathbf{1{,}378 \cdot 10^{13} J}$$

Poderías calcular a velocidade de lanzamento?

Si. Supoñamos que o lanzamento é vertical. Pois está claro:

$$E_{cinética} = \frac{1}{2} \cdot m_{satétile} \cdot v_{lanzamento}^2$$

E podes obter sen dificultade que a velocidade de lanzamento debe ser aproximadamente **8150 m/s** (se non me trabuquei no calculo)

e) Imos lanzar a ISS a outra órbita na que a altura será dupla: $390\ km \cdot 2 = 780\ km$

Polo tanto a nova órbita ten un raio de : $r_o = (6370 + 780) km = 7150\ km = 7{,}15 \cdot 10^6 m$

Agora calculamos a enerxía mecánica nesa nova órbita:

$$E_{M = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{r_o} = -1{,}16 \cdot 10^{13}\ J}$$

A enerxía necesaria será a enerxía final, a da segunda órbita, menos a enerxía inicial, a da primeira órbita:

$$\boldsymbol{Enerxía\ necesaria = W_{exterior} = E_{\ M.orbita\ 2} - E_{\ M.orbita\ 1}} =$$

$$= -1{,}16 \cdot 10^{13} J - (-1{,}22 \cdot 10^{13} J) = +\mathbf{6{,}245 \cdot 10^{11} J}$$

Non o dí o exercicio mais como antes podemos calcular a velocidade necesaria para lanzar á nova órbita a ISS. Xa sabedes, coa ecuación da enerxía cinética:

$$E_{cinética} = \frac{1}{2} \cdot m_{satétile} \cdot v_{lanzamento}^2$$

E resulta que a velocidade necesaria será: **1735 m/s**

Exercicio setembro 2015 da folla de atividades 2

Un satélite artificial de 500 kg de masa xira nunha órbita circular a 5000 km de altura sobre a superficie da Terra. Calcula:
a) a súa velocidade orbital;
b) a súa enerxía mecánica na órbita;
c) a enerxía que hai que comunicarlle para que, partindo da órbita, chegue ó infinito.
(Datos: RTerra = 6370 km; g_0 = 9,8 m·s^{-2})

Comezamos deducindo a ecuación da velocidade orbital que sae de:

$$F_c = F_G \rightarrow\ m_s \cdot \frac{v_0^2}{r_o} = G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{r_0^2}$$

De onde: $v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r_o}}\ \ (1)$

Comecemos polo raio da órbita:

$$r_o = (6370 + 5000)\text{km} = 11370\ \text{km} = 11{,}37 \cdot 10^6\text{m}$$

Temos que ter en conta que non contamos cos datos que precisa a expresión: non temos nin a masa da Terra nin o valor da constante G. Agora ben, temos o valor da gravedade na superficie da Terra e o raio da Terra e polo tanto:

$$g_{Terra} = \frac{G \cdot M_{Terra}}{R_{Terra}^2} \rightarrow\ G \cdot M_{Terra} = g_{Terra} \cdot R_{Terra}^2\ \ (2)$$

Agora podemos sustituír na ecuación (1) e :

$$v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r_o}} = \sqrt{\frac{g_{Terra} \cdot R_{Terra}^2}{r_o}} = 5{,}91.\,10^3\text{m/s}$$

Podemos calcular o período orbita (xa sei que non o pregunta pero xa postos…..):

$$v_o = \frac{2\pi r_o}{T_o}\ \rightarrow T_o = \frac{2\pi r_o}{v_o} =$$

b) Para calcular a enerxía mecánica na órbita teremos que calcular a enerxía mecánica que xa sabemos que é a metade da enerxía potencial:

$$E_{M=-\frac{1}{2}\cdot\frac{G \cdot M_T \cdot m_S}{r_O}}$$

Nesa expresión teremos que voltar a completar a mesma sustitución da expresión (2):

$$\mathrm{E}_{\mathrm{M.órbita}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{G} \cdot \mathrm{M}_{\mathrm{Terra}} \cdot \mathrm{m_s}}{\mathrm{r_o}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{g}_{\mathrm{Terra}} \cdot \mathrm{R}^2_{\mathrm{Terra}} \mathrm{m_s}}{\mathrm{r_o}} = -8{,}74 \cdot 10^9 \mathrm{J}$$

c) Imos agora a calcular a enerxía precisa para enviar o satélite "ao infinito". Aló, nese "lugar" a enerxìa potencial gravitatoria é cero (0) e aceitamos que vai chegar con velocidade cero (0) e polo tanto a súa enerxía mecánica no "infinito" será cero (0).

$$E_{mecánica\ final} = 0\ J$$

A enerxía mecánica no momento do lanzamento será a enerxía mecánica na órbita ao que debemos sumar o traballo exterior:

$$E_{mecánica\ inicial} = E_{mecánica\ na\ órbita} + W_{Exterior}$$

E como:

$$E_{mecánica\ final} = E_{mecánica\ inicial}$$

Enton:

$$0\ J = E_{mecánica\ na\ órbita} + W_{Exterior}$$

E polo tanto:

$$W_{Exterior} = -E_{mecánica\ na\ órbita} = +8{,}74 \cdot 10^9 \mathrm{J}$$

Exercicio setembro 2013 da folla de atividades 2.

Deséxa-se poñer un satélite de masa 10^3 kg en órbita arredor da Terra e a unha altura dúas veces o raio terrestre. Calcular:
a) a enerxía que hai que comunicarlle desde a superficie da Terra;
b) a forza centrípeta necesaria para que describa a órbita;
c) o período do satélite en dita órbita.
(Datos R_{Terra} = 6370 km; g_0 = 9,8 m·s^{-2})

a) Queremos que se sitúe nunha órbita a unha altura (h) dupla do raio terrestre. Calculemos xa o raio da órbita:

$$r_{órbita} = R_{Terra} + h = R_{Terra} + 2 \cdot R_{Terra} = 3 \cdot R_{Terra} = 19{,}2 \cdot 10^6\ (m)$$

Calculemos agora a enerxía na órbita:

$$E_{órbita} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m_S}{r_{órbita}}$$

Debemos ter en conta que non contamos nin coa masa da Terra nin coa constante de gravitación universal, mais temos o valor da gravidade na superficie do planeta e polo tanto:

$$g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} \rightarrow g_0 \cdot R_T^2 = G \cdot M_T$$

E podemos enton sustituír na anterior obtendo:

$$E_{órbita} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m_s}{r_{órbita}}$$

E como o raio da órbita é tres veces o raio terrestre:

$$E_{órbita} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m_s}{3 \cdot R_T} = -\frac{g_0 \cdot R_T \cdot m_s}{6} = -1{,}04.\,10^{10}\, J$$

A enerxía no momento do lanzamento será a suma da enerxía potencial na superficie da Terra e o traballo exterior (enerxía cinética). Ou sexa:

$$E_{Terra} = Ep_{Terra} + W_{Exterior} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_T} + W_{Exterior}$$

E igualando:

$$E_{órbita} = E_{Terra}$$

$$-1{,}04.\,10^{10}\, J = -\frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_T} + W_{Exterior}$$

$$-1{,}04.\,10^{10}\, J = -6{,}26 \cdot 10^{10}\, J + W_{Exterior}$$

$$\mathbf{W_{Exterior} = +5{,}22 \cdot 10^{10}\ J}$$

b)Para calcular a forza centrípeta debemos ter en conta que na órbita:

$$\vec{F}_g = \vec{F}_c$$

Polo tanto podemos calcular a forza centrípeta:

- Coa ecuación de definición: $F_c = \frac{m_s \cdot v_0^2}{r_0}$
- Coa ecuación de Newton: $F_g = \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{r_o^2}$

Como non coñecemos a velocidade orbital, resultaría máis fácil seguir a segunda vía. Agora ben, á vista do apartado c) imos ter que calcular en todo caso a velocidade orbital.

Usando a ecuación de Newton:

$$F_g = \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{r_o^2} = 1092\ N$$

c) Vale, agora non hai saída compre calcular a velocidade orbital e logo calcular o período.

Faino:

Eu vou facer uso da 3ª Lei de Kepler que a estas alturas seguro sabes deducir. Polo tanto vou calcular o período sen calcular a velocidade orbital.

$$\frac{r_{órbita}^3}{T_{órbita}^2} = \frac{G \cdot M_{Terra}}{4 \cdot \pi^2}$$

Teño que repetir a sustitución

$$g_0 = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} \rightarrow g_0 \cdot R_T^2 = G \cdot M_T$$

E polo tanto obtemos

$$\frac{r_{órbita}^3}{T_{órbita}^2} = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{4 \cdot \pi^2}$$

E o valor do período resulta $2{,}6 \cdot 10^4\ s = 7\ h\ 13 \min 20\ s$

Repasa as operacións.

Veña, un problemiña así como un presente, un agasallo:

Un satélite de 150 kg de masa, descrebe órbitas circulares arredor da Terra cun período de 120 minutos. Calcula:
a) A altura a que se topa sobre a superficie da Terra.
b) A súa enerxía mecánica.
c) A enerxía que foi precisa para enviar o satélite dende a superficie da Terra ate esa órbita.
(Datos: raio da Terra: 6.370 Km,gravedade na superficie da Terra: 9,8 N/kg)

Satélite de masa:150 kg e con período orbital de 120 min=7 200 s

$$F_c = F_g$$

$$m_s \cdot \frac{v_o^2}{r_o} = \frac{G \cdot M_{Terra} \cdot m_s}{r_o^2} \rightarrow v_o^2 = \frac{G \cdot M_{Terra}}{r_o} \quad (1)$$

Ademais:

$$v_o = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_o}{T_o} \rightarrow v_o^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_o^2}{T_o^2} \quad (2)$$

E igualando as expresións (1) e (2):

$$\frac{G \cdot M_{Terra}}{r_o} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_o^2}{T_o^2}$$

E obtemos a Terceira Lei de Kepler:

$$\frac{r_o^3}{T_o^2} = \frac{G \cdot M_{Terra}}{4 \cdot \pi^2} \quad (3)$$

Na expresión anterior poderíamos calcular o raio da órbita máis non temos os datos da masa da terra nin da constante de gravitación universal. Porén contamos co valor da gravedade na superficie da Terra e o raio do planeta e polo tanto podemos:

$$g_{Terra} = \frac{G \cdot M_{Terra}}{R_{Terra}^2} \rightarrow G \cdot M_{Terra} = g_{Terra} \cdot R_{Terra}^2 \quad (4)$$

E se agora sustituímos na ecuación (3) podemos obter unha expresión definitiva para o calculo do raio da órbita:

$$\frac{r_o^3}{T_o^2} = \frac{g_{Terra} \cdot R_{Terra}^2}{4 \cdot \pi^2}$$

E podes obter o raio orbital que da como resultado $8{,}05 \cdot 10^6 m$ e polo tanto

$$\mathrm{h} = 1{,}68 \cdot 10^6 \mathrm{m} = 1680 \mathrm{~km}$$

b) Calculemos a enerxía mecánica na órbita:

$$E_{M.órbita} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{G\cdot M_{Terra}\cdot m_s}{r_o} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{g_{Terra}\cdot R_{Terra}^2 m_s}{r_o} = -3{,}7\cdot 10^{-9}\mathrm{J}$$

c)Para lanzar o satélite á órbita dende a superficie da Terra, debemos realizar un traballo exterior que sumado á enerxía potencial gravitatoria na superficie da Terra debe ser quen de igualar á enerxía mecánica na órbita:

$$W_{exterior} + E_{P.Terra} = E_{M.órbita} \quad (5)$$

A enerxía potencial na superficie da Terra será:

$$E_{P.Terra} = -\frac{G\cdot M_{Terra}\cdot m_s}{R_{Terra}} = -\frac{g_{Terra}\cdot R_{Terra}^2\cdot m_s}{R_{Terra}} = -g_{Terra}\cdot R_{Terra}\cdot m_s = -9{,}36\cdot 10^9\mathrm{J}$$

E agora con (5) podes calcular o traballo exterior que debe dar positivo (é enerxía cinética) e obtés como resultado $+5{,}66\cdot 10^9 J$

Poderías calcular a velocidade de lanzamento pois tes a masa do satélite e:

$$W_{exterior} = E_{cinética} = \frac{1}{2}\cdot m_s\cdot v_{lanzamento}^2$$