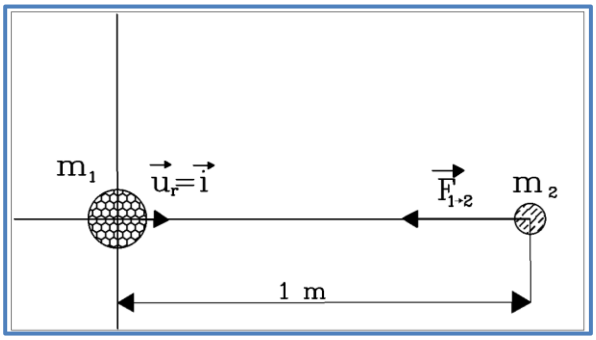
Calculo de forzas,campos,potenciais e enerxía en distribucións de masas

Exercicios da primeira folla de atividades de Gravitación

7.-Duas masas de 1 000 e de 10 kg, estan separados 1 m en liña reta. Calcula a forza de atración entre elas, usando calquera dos eixes de coordenadas



Vou usar como referencia o eixe X e polo tanto:
$\vec{u}_r = \vec{\imath}$

Polo tanto a ecuación de Newton pode ser escrita como:

$$\vec{F}_{1\to2} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \cdot \vec{\imath}$$

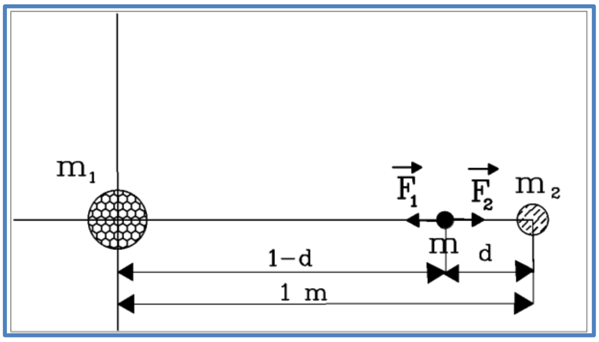
Como $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$ podemos sustituír polos valores dados:

$$\vec{F}_{1\to2} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \cdot \vec{\imath} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \frac{1000\ kg \cdot 10\ kg}{(1\ m)^2} \cdot \vec{\imath}$$

Agora calculadora. Observa que a unidade resultante é N (Newton).

$$\boxed{\vec{F}_{1\to2} = - \qquad\qquad\qquad \vec{\imath}\ (N)}$$

8.- En que ponto da reta que une ás duas masas do exercicio anterior, a forza sobre unha terceira masa, m, é nula?



Sobre o corpo **m** atúan duas forzas:

$\vec{F}_1 = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m}{(1-d)^2} \vec{\imath}$ que é a que exerce m_1

$\vec{F}_2 = +G \cdot \frac{m_2 \cdot m}{d^2} \vec{\imath}$ que é a que exerce m_2

Para que permaneza en equilibrio os módulos deben ser iguais:

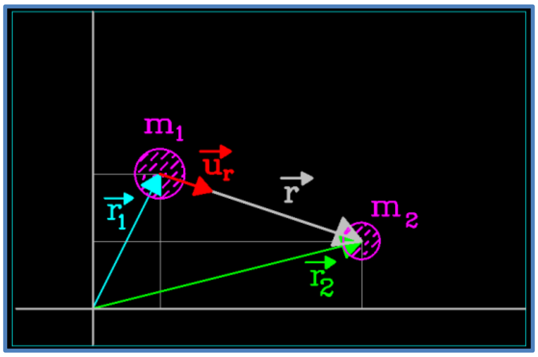
$$F_1 = F_2 \ \ \rightarrow\ G \cdot \frac{m_1 \cdot m}{(1-d)^2} = G \cdot \frac{m_2 \cdot m}{d^2}$$

E agora se simplificamos fica unha expresión como: $\frac{m_1}{(1-d)^2} = \frac{m_2}{d^2}$

E reordenando: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{(1-d)^2}{d^2} \ \rightarrow 100 = \frac{(1-d)^2}{d^2} \ \rightarrow 10 = \frac{1-d}{d} \ \rightarrow$

$$\boxed{d = \qquad\qquad}$$

9.-Agora a masa de 1 000 kg está situada no ponto (1, 2) e a masa de 10 kg no ponto (4, 1). Calcula a forza que a primeira masa exerce sobre a menor se a escala está en metros.



$m_1 = 1000\ kg\ ,\ \vec{r}_1 = (+1,+2) = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}\ \ (m)$

$m_2 = 10\ kg\ ,\ \vec{r}_2 = (+4,+1) = 4\vec{\imath} + \vec{\jmath}\ \ (m)$

Calculemos o vetor $\vec{r}$:

$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (+4,+1) - (+1,+2) = (+3,-1)$

Ou sexa que : $\vec{r} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath}\ \ (m)$

Calculemos o seu módulo: $[\vec{r}] = r = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}\ \ (m) = d$

E agora calculamos o vetor unitario: $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{(+3,-1)}{\sqrt{10}} = \frac{+3\vec{\imath}-\vec{\jmath}}{\sqrt{10}}$

Calculemos agora a forza gravitatoria coa ecuación de Newton:

$$\vec{F}_{1\to 2} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \cdot \overrightarrow{u_r}$$

$$\vec{F}_{1\to 2} = -6{,}67.10^{-11} \cdot \frac{1000 \cdot 10}{\left(\sqrt{10}\right)^2} \cdot \frac{(+3\vec{\imath} - \vec{\jmath})}{\sqrt{10}}\ \ (N)$$

$$\vec{F}_{1\to 2} = -2{,}11.10^{-8} \cdot\ (+3\vec{\imath} - \vec{\jmath})\ (N)$$

$$\boxed{\vec{F}_{1\to 2} = -6{,}33 \cdot 10^{-8}\ \vec{\imath} + 2{,}11.10^{-8}\vec{\jmath}\ (N)}$$

Observa que podíamos ter usado a ecuación de Newton deste outro xeito:

$$\vec{F}_{1\to 2} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \cdot \overrightarrow{u_r}$$

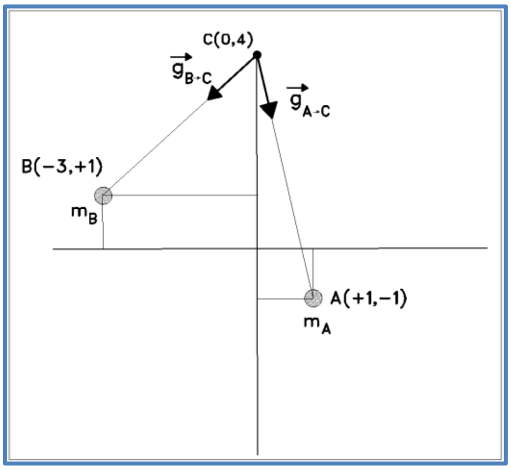
E como $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ ou tamén $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{d}$ pois $r = d$:

$\vec{F}_{1\to 2} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^3} \cdot \vec{r} = -6{,}67.10^{-11} \cdot \frac{1000 \cdot 10}{\left(\sqrt{10}\right)^3} \cdot (+3\vec{\imath} - \vec{\jmath}) =$

Remata.

13.-Duas masas de 1 000 kg estan situadas nos pontos A(1, -1) e B(-3, 1) coa escala en metros. Calcula o campo gravitatorio no ponto C(0, 4).

Comecemos por facer un debuxo que sexa claro e permita o calculo vetorial.



Para calcular o campo gravitatorio en C teremos que sumar os campos que crean A e B alí, é dicer:

$$\vec{g}_C = \vec{g}_{B\to C} + \vec{g}_{A\to C} \quad (1)$$

Imos calcular en primeiro lugar o campo que crea A en C:

$$\vec{g}_{A\to C} = -\frac{G\cdot m_A}{d_{A\to C}^2}\vec{u}_{A\to C}$$

Ou mellor:

$$\vec{g}_{A\to C} = -\frac{G\cdot m_A}{d_{A\to C}^3}\,\vec{r}_{A\to C} \;\; (2)$$

Calculamos o vetor $\vec{r}_{A\to C} = (0,+4) - (+1,-1) = (-1,+5) = -\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}\;\; (m)$

E imos calcular o seu módulo que é a distancia $d_{A\to C}$:

$$d_{A\to C} = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{26}\;\; (m)$$

Agora xa podemos calcular de acordo coa ecuación (2):

$$\vec{g}_{A\to C} = -\frac{G\cdot m_A}{d_{A\to C}^3}\,\vec{r}_{A\to C} = -\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1000}{\left(\sqrt{26}\,\right)^3}\cdot(-\vec{\imath} + 5\vec{\jmath})\;\;(\frac{N}{kg})$$

$$\vec{\mathbf{g}}_{\mathbf{A\to C}} = \mathbf{+5{,}03\cdot 10^{-10}\vec{\imath} - 2{,}52\cdot 10^{-9}\vec{\jmath}} \quad \left(\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{kg}}\right)\;\; (\mathbf{3})$$

Agora temos que calcular o campo gravitatorio que crea B en C.

$$\boldsymbol{\vec{g}_{B\to C} = -\frac{G\cdot m_B}{d_{B\to C}^3}\,\vec{r}_{B\to C}\;\; (4)}$$

Calculamos o vetor $\vec{r}_{B\to C} = (0,+4) - (-3,+1) = (+3,+3) = +3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}\;\; (m)$

E calculamos o seu módulo que é a distancia $d_{B\to C}$:

$$d_{B\to C} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\;\; (m)$$

E agora xa podemos calcular coa ecuación (4):

$$\vec{g}_{B\to C} = -\frac{G\cdot m_B}{d^3_{B\to C}}\,\vec{r}_{B\to C} == -\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1000}{\left(3\sqrt{2}\,\right)^3}\cdot(+3\vec{\imath}+3\vec{\jmath})\ \left(\frac{N}{kg}\right)$$

$$\mathbf{\vec{g}_{B\to C} = -2,62\cdot 10^{-9}\,\vec{\imath} - 2,62\cdot 10^{-9}\,\vec{\jmath}\quad \left(\frac{N}{kg}\right)\ (5)}$$

E agora para calcular o campo total en C só temos que introducir os valores calculados na expresión (1) e sumar componentes:

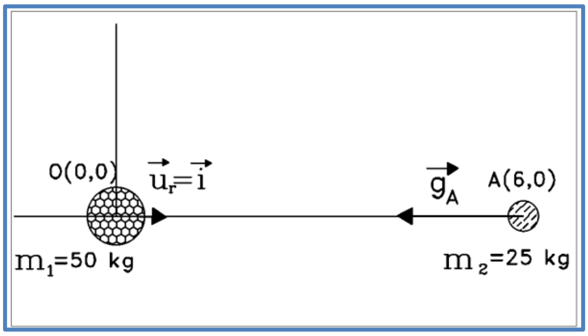
$$\vec{g}_C = \vec{g}_{A\to C} + \vec{g}_{B\to C} = \left(+5{,}03\cdot 10^{-10}\vec{\imath} - 2{,}52\cdot 10^{-9}\vec{\jmath}\right) + \left(-2{,}62\cdot 10^{-9}\,\vec{\imath} - 2{,}62\cdot 10^{-9}\,\vec{\jmath}\right)$$

$$\mathbf{\vec{g}_C = -2,21\cdot 10^{-9}\vec{\imath} - 5,14\cdot 10^{-9}\,\vec{\jmath}\ \left(\frac{N}{kg}\right)}$$

Comproba todos os resultados. Se algo non cadra avisa e revisamolo na clase.
Tes máis exercicios do mesmo tipo na folla número 1.

14.- Duas masas de 50 e 25 kg situadas respetivamente en (0, 0) e (6, 0) coa escala en metros. Calcula:
a) O campo gravitatorio que a primeira masa crea en (6, 0).
b) A forza que masa de 50 kg exerce sobre a menor.
c) A enerxía potencial do sistema cando as masas estan en ditas posicións.
d) A enerxía potencial do sistema cando trasladamos a segunda mas ao ponto (12, 0). Cal é o traballo realizado? Realiza ese traballo o campo ou é unha forza exterior?

a) Para calcular o campo gravitatorio que crea a masa de 50 kg no ponto A(6,0)



teremos que aplicar a ecuación que define o campo gravitatorio creado por unha masa:

$$\vec{g} = -\frac{G\cdot M}{d^2}\vec{u}_r$$

No noso caso temos que ter en conta que o eixe de referencia é X e o sentido será negativo como indica a figura:

$$\vec{g}_A = -\frac{G\cdot m_1}{d^2}\vec{\imath}$$

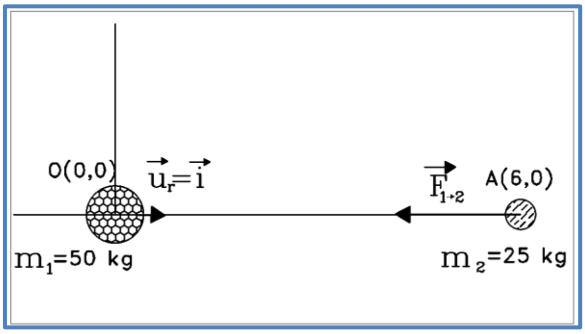
$$\vec{g}_A = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 50}{6^2}\vec{\imath} \left(\frac{N}{kg}\right) = \mathbf{-9{,}26 \cdot 10^{-11}\vec{\imath}} \left(\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{kg}}\right)$$

b)Para calcular a forza que a masa maior exerce sobre a menor poderíamos recorrer á ecuación de Newton:

$$\vec{F}_{1\to 2} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \cdot \overrightarrow{u_r}$$

Mais non é preciso por canto nos xa coñecemos o valor do campo gravitatorio, é dicer:

$$\vec{F}_{1\to 2} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \cdot \overrightarrow{u_r}$$



En suma, nos xa coñecemos o resultado dos termos escritos en vermello. Enfin, como xa vimos na teoría:

$$\vec{F}_{1\to 2} = m_2 \cdot \vec{g}_A = 25kg \cdot \left(-9{,}26 \cdot 10^{-11}\vec{\imath} \left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}\right)\right) = \mathbf{-2{,}315 \cdot 10^{-9}\vec{\imath}} \ \ (\mathbf{N})$$

c)Para calcular a enerxía potencial do sistema cando a primeira masa está en O(0,0) e a segunda está en A(6,0) pois aplicamos a ecuación de definición da enerxía potencial:

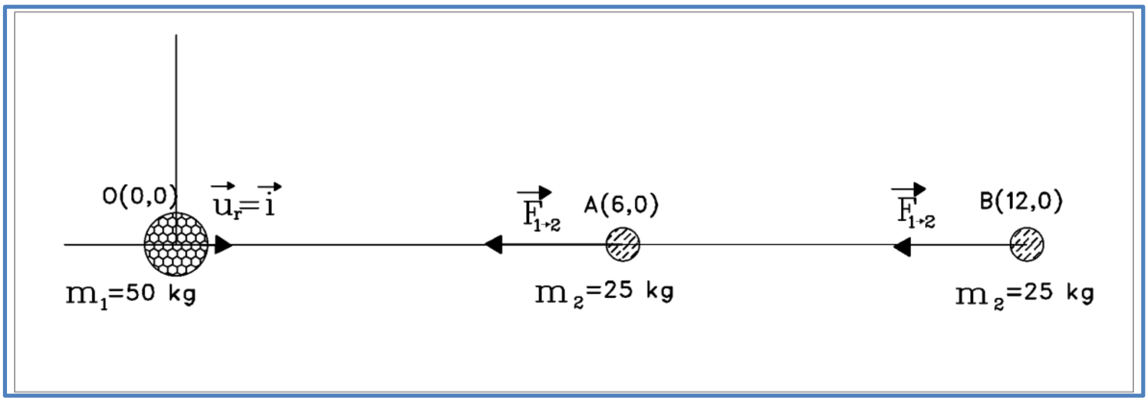
$$Ep = -\frac{G \cdot M \cdot m}{d}$$

No noso caso:

$$Ep_A = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{d} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot 50kg \cdot 25kg}{6\ m} = \mathbf{-1{,}39 \cdot 10^{-8} J}$$

d)Se a masa menor se despraza ao ponto B(12,0) calcular a enerxía potencial é o mesmo mais coa diferenza de que agora a distancia será 12 m:

$$Ep_B = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{d} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2} \cdot 50kg \cdot 25kg}{12\ m} = \mathbf{-6{,}95 \cdot 10^{-9} J}$$



Que aconteceu coa enerxía potencial?

Pois calculemos avariación da enerxía potencial:

$$\Delta Ep_A^B = Ep_B - Ep_A = -6{,}95 \cdot 10^{-9}\text{J} - (-1{,}39 \cdot 10^{-8}\text{J}) = +\boldsymbol{6,95 \cdot 10^{-9} J}$$

Ou sexa que a enerxía potencial aumenta.

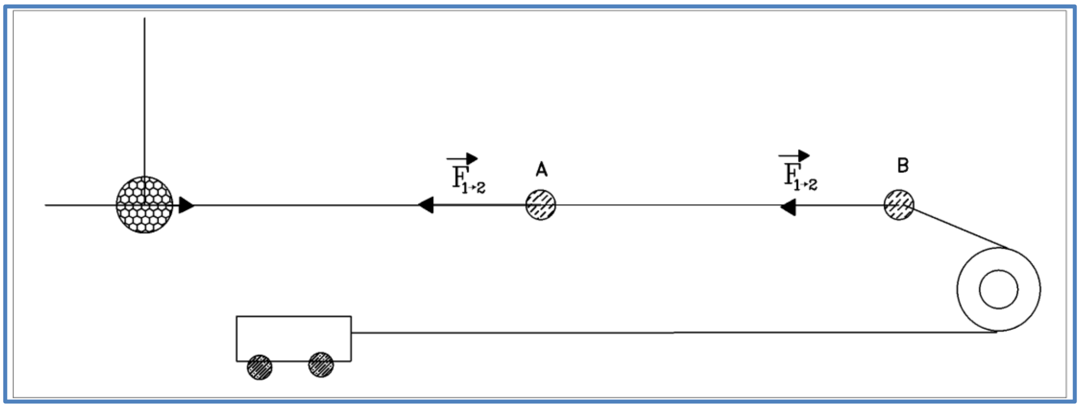
E que acontece co traballo?

$$W_A^B = -\Delta Ep_A^B = \boldsymbol{-6,95 \cdot 10^{-9} J}$$

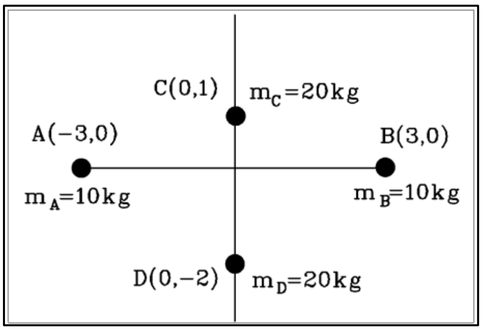
O traballo é negativo. **Observa que compre realizar traballo pois o desprazamento realizou-se contra as forzas do campo**. Observa a figura con atención e verás que para trasladar a masa menor de A ate B temos que vencer as forzas de atración do campo gravitatorio.

Resulta evidente, máis podes comroba-lo, que cando o proceso sexa contrario, é dicer, cando traslademos a masa menor dende B ate A, a variación de enerxía potencial será negativa (perdemos enerxía potencial) e o traballo é positivo (realiza o traballo a forza atrativa do campo gravitatorio)

Agora podes xogar un pouquiño con aquel carro cargado de alunado de 1º de ESO ao que divertíamos grazas a unha polea e unha masa. Recordas?



16.- Determina o campo e o potencial gravitatorios, na orixe de coordenadas do sistema de masas da figura.



Vou comezar polo máis fácil: calcular o valor do potencial gravitatorio no centro de coordenadas, é dicer no ponto (0,0):

$$V_{(0,0)} = V_A + V_B + V_C + V_D \quad (1)$$

Para clcular o potencial gravitatorio preciso aplicar a ecuación de definición:

$$V = -\frac{G \cdot m}{d}$$

As unidades van ser J/kg.

$$V_A = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{3} \left(\frac{J}{kg}\right) = -2{,}22 \cdot 10^{-10} \ (\frac{J}{kg})$$

$$V_B = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{3} \left(\frac{J}{kg}\right) = -2{,}22 \cdot 10^{-10} \ (\frac{J}{kg})$$

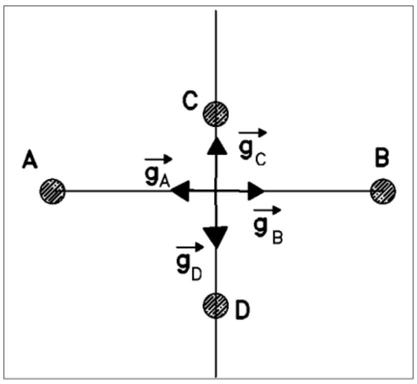
$$V_C = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 20}{1} \left(\frac{J}{kg}\right) = -1{,}33 \cdot 10^{-9} \ (\frac{J}{kg})$$

$$V_D = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 20}{2} \left(\frac{J}{kg}\right) = -6{,}67 \cdot 10^{-10} \ (\frac{J}{kg})$$

Agora para calcular o potencial tota só compre sumar:

$$V_{(0,0)} =$$

Imos calcular o campo gravitatorio. Para elo preciso un debuxo un pouco máis claro.



Temos que calcular o campo gravitatorio no ponto (0,0):

$$\vec{g}_{(0,0)} = \vec{g}_A + \vec{g}_B + \vec{g}_C + \vec{g}_D$$

Observa que as masas en A e B son iguais e estan á mesma distancia, polo tanto $\vec{g}_A + \vec{g}_B = 0$

Así que o calculo fica reducido á suma vetorial dos campos gravitatorios provocados polas masas C e D.
Así que a calcular:

$$\vec{g} = -\frac{G \cdot m}{d^2}\,\vec{u}_r$$

Aplicado a C:

$$\vec{g}_C = +\frac{G \cdot m_C}{d^2}\,\vec{j} = +\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 20}{1^2}\,\vec{j}\;\;\left(\frac{N}{kg}\right) = +1{,}334 \cdot 10^{-9}\,\vec{j}\;\;(\frac{N}{kg})$$

Aplicado a D:

$$\vec{g}_D = -\frac{G \cdot m_D}{d^2}\,\vec{j} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 20}{2^2}\,\vec{j}\;\;\left(\frac{N}{kg}\right) = -3{,}335 \cdot 10^{-10}\,\vec{j}\;\;(\frac{N}{kg})$$

E polo tanto o campo:

$$\vec{g}_{(0,0)} = +1{,}334 \cdot 10^{-9}\,\vec{j}\;\; - 3{,}335 \cdot 10^{-10}\,\vec{j} = \boldsymbol{+1{,}005 \cdot 10^{-9}\,\vec{j}}\;\;(\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{kg}})$$

16.- Calcula a forza que atúa sobre unha masa de 5 kg situada na orixe de coordenadas do sistema, e a súa enerxía potencial.
Calcula o traballo preciso para trasladar a masa de 5 kg dende o ponto (0, 0) ata o infinito.

Para calcular a forza:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g}_{(0,0} = 5\,kg \cdot 1{,}005 \cdot 10^{-9}\,\vec{j}\;\;\left(\frac{N}{kg}\right) = \boldsymbol{5{,}0025 \cdot 10^{-9}\,\vec{j}\,(N)}$$

Para a enerxía potencial:

$$Ep = m \cdot V_{(0,0)} =$$

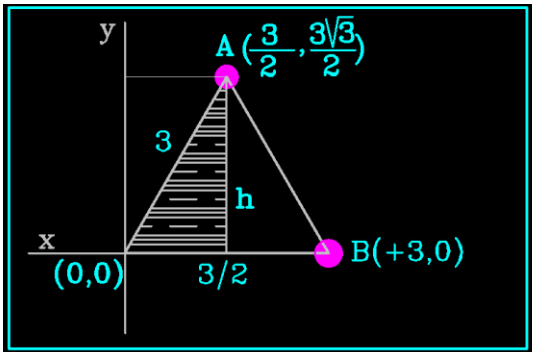
Para o traballo para trasladar a masa dende (0,0) ate o infinito:

$$W_{(0,0)}^{\infty} = -\Delta Ep_{(0,0)}^{\infty} = -\left(Ep_{\infty} - Ep_{(0,0)}\right) = -\left(0 - Ep_{(0,0)}\right) =$$

O traballo ten que ser negativo pois realíza-se contra as forzas do campo.

__Exercicios da segunda folla de atividades de Gravitación__

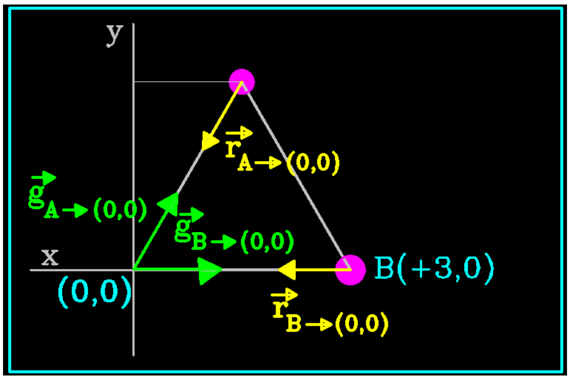
Xuño 2004.-En dous dos tres vertices dun triángulo equilátero de 3 m de lado , estan situadas duas masa de 50 g . Calcula:
a) a intensidade do campo gravitatório no outro vertice.
b) o potencial gravitatório no outro vertice , e o traballo necesario para trasladar unha terceira masa de 25 g dende o infinito ata ese punto. O traballo é a favor ou contra das forzas do campo?(Datos: G = 6,67.10^{-11} N.m^2/Kg^2)



Vou situar o ponto (0,0) no vertice que fica livre de masas.
Agora determino as coordenadas dos outro pontos.
É ben fácil para B, máis non o é tanto para o ponto A. Observade que para este ponto a coordenada en X é 1,5 m ou 3/2. Para calcular a coordenada en Y compre resolver o triángulo que está raiado e que ten como hipotenusa 3 m e como cateto menor 3/2 m. Compre calcular o outro cateto, o que denominei **h**:

$$h^2 = 3^2 - \left({}^{3}\!/_{2}\right)^2 = 9 - \frac{9}{4} = \frac{27}{4} \quad \rightarrow h = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (m)$$

E xa temos as coordenadas de cada ponto.



Agora imos a polo apartado a) que di que temos que calcular o <u>campo gravitatorio</u> no terceiro vértice , que é o ponto (0,0). O campo gravitatorio será a suma vetorial dos campos creados por A e B.

$$\vec{g}_{(0,0)} = \vec{g}_{(A\rightarrow(0,0))} + \vec{g}_{(B\rightarrow(0,0))}$$

Calculamos o campo que crea B en (0,0) que é máis fácil.

$$\vec{g}_{(B\rightarrow(0,0))} = -G \cdot \frac{m_B}{r^3_{(B\rightarrow(0,0))}} \cdot \vec{r}_{(B\rightarrow(0,0))}$$

Calculemos o vetor : $\vec{r}_{(B\rightarrow(0,0))} = (0,0) - (3,0) = -3\vec{\imath}$ e polo tanto o seu módulo é $r_{(B\rightarrow(0,0)} = 3\ m$

E agora imos ao calculo do campo creado por B.

Olloiii Non esquezas que a masa é de 50 g e temo-la que expresar en unidades do S.Iiiii

$\boxed{m_B = 0{,}05\ kg}$

Agora imos ao calculo. Programo a miña calculadora para que traballe en notación científica e con dous decimais:

$$\vec{g}_{(B\rightarrow(0,0))} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{0{,}05}{3^3} \cdot (-3\vec{\imath}) \ \left({}^{N}/_{kg}\right) = \mathbf{+3,71 \cdot 10^{-13} \cdot \vec{\imath}\ ({}^{N}/_{kg})}$$

*Calculamos o campo que crea A en (0,0):

$$\vec{g}_{(A\rightarrow(0,0))} = -G \cdot \frac{m_A}{r^3_{(A\rightarrow(0,0))}} \cdot \vec{r}_{(A\rightarrow(0,0))}$$

Calculemos o vetor : $\vec{r}_{(A\rightarrow(0,0))} = (0,0) - \left({}^{3}/_{2}, {}^{3\sqrt{3}}/_{2}\right) = -\frac{3}{2}\vec{\imath} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}$

O seu módulo será $r_{(B\rightarrow(0,0)} = 3\ m$

Seguimos tendo en conta que $\boxed{m_A = 0{,}05\ kg}$

$$\vec{g}_{(A\rightarrow(0,0))} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{0{,}05}{3^3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\vec{\imath} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}\right) \ \left({}^{N}/_{kg}\right)$$

$$\vec{\boldsymbol{g}}_{(\boldsymbol{A}\rightarrow(\mathbf{0,0}))} = \mathbf{1,85 \cdot 10^{-13} \cdot \vec{\imath} + 3,21 \cdot 10^{-13} \cdot \vec{\jmath}} \quad \left({}^{N}/_{kg}\right)$$

E agora podemos calcular o campo gravitatorio total sumando os dous resultados:

$$\boxed{\vec{g}_{(0,0)} = 5{,}56 \cdot 10^{-13}\vec{\imath} + 3{,}21 \cdot 10^{-13}\vec{\jmath} \quad ({}^{N}/_{kg})}$$

Comproba o calculo (se cadra equivoqueime)

b) Imos calcular o potencial gravitatorio no vértice que está livre.

Observa que as duas masas son iguais (0,05 kg) e as distancias tamén (3 m)

$$V_{(0,0)} = V_{A\rightarrow(0,0)} + V_{B\rightarrow(0,0)} = -G\cdot\frac{m_A}{r_{A\rightarrow(0,0)}} - G\cdot\frac{m_B}{r_{B\rightarrow(0,0)}}$$

De acordo coa observación anterior, basta con calcular un dos valores e multiplicar por 2:

$$V_{(0,0)} = -2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{0{,}05}{3}\ \left({}^{J}\!/_{kg}\right) = \boldsymbol{-2{,}22\cdot 10^{-12}\ \left({}^{J}\!/_{kg}\right)}$$

Agora calculemos o traballo necesario para trasladar unha masa de 25 g, é dicer, 0,025 kg dende ese vértice ate o infinito.

$$W_{(0,0)}^{\infty} = -\Delta Ep_{(0,0)}^{\infty} = -m'\cdot\left(V_{\infty} - V_{(0,0)}\right) = -0{,}025\cdot(0-(-2{,}22\cdot 10^{-12})\ (J)$$

$$\boxed{W_{(0,0)}^{\infty} = -5{,}55\cdot 10^{-14}\ (J)}$$

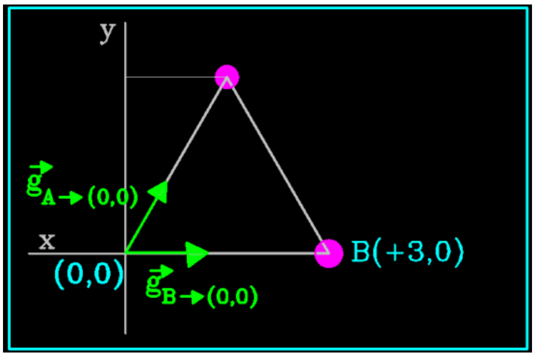
Observa que se trasladamos **dende o vértice ate o infinito o traballo resulta negativo** porque imos a aumentar a enerxía potencial. Neste caso o traballo será contra as forzas do campo.

Se trasladamos a masa **dende o infinito ate ese vértice, o traballo terá o mesmo valor máis agora será positivo** pois será realizado polas forzas do campo:

$$\boxed{\mathbf{W_{\infty}^{(0,0)} = +5{,}55\cdot 10^{-14}\ (J)}}$$

Como ves o máis complicado é o calculo da intensidade do campo gravitatorio.

Hai un xeito de calculo distinto que pode facilitar o traballo.



Observa o debuxo e verás os dous vetores correspondentes aos dous campos gravitatorios que tes que calcular.

O calculo de $\vec{g}_{(B\rightarrow(0,0))}$ non ten maior problema.

A súa direción e sentido veñen definidos, como se ve no debuxo, polo vetor unitario $\vec{\boldsymbol{\imath}}$. Polo tanto:

$$\vec{g}_{(B\to(0,0))} = +G \cdot \frac{m_B}{r^2_{(B\to(0,0))}} \cdot \vec{\imath}$$

Como ves escribo diretamente o unitario correspondente: $+\vec{\imath}$ na expresión está escrito con vermello.

O resto é introducir os datos e o calculo dará o resultado.

$$\vec{g}_{(B\to(0,0))} = +6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{0{,}05}{3^2} \cdot \vec{\imath} \ \left({}^{N}/_{kg}\right) = +3{,}71 \cdot 10^{-13}\vec{\imath} \ ({}^{N}/_{kg})$$

O calculo de $\vec{\boldsymbol{g}}_{(\boldsymbol{A}\to(\mathbf{0},\mathbf{0}))}$ é un pouco máis complicado. Observa que este vetor forma un ángulo de 60$^{\text{o}}$ co eixe das X (os ángulos dun triángulo equilatero son de 60$^{\text{o}}$)

Podemos calcular o seu módulo:

$$g_{(A\to(0,0))} = G \cdot \frac{m_A}{r^2_{A\to(0,0)}} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{0{,}05}{3^2} = 3{,}71 \cdot 10^{-13} \ ({}^{N}/_{kg})$$

Este vetor ten duas componentes.

1.-Componente en X: obten-se multiplicando o módulo anterior polo coseno de 60º e incorporando o unitario $+\vec{\imath}$

$$\vec{g}_x = +3{,}71 \cdot 10^{-13} \cdot \cos 60^0 \ \vec{\imath} = \mathbf{1{,}85 \cdot 10^{-13}} \cdot \vec{\boldsymbol{\imath}}$$

2.-Componente en Y: oten-se multiplicando o módulo calculado polo seno de 60º e incorporando o unitario $+\vec{\jmath}$

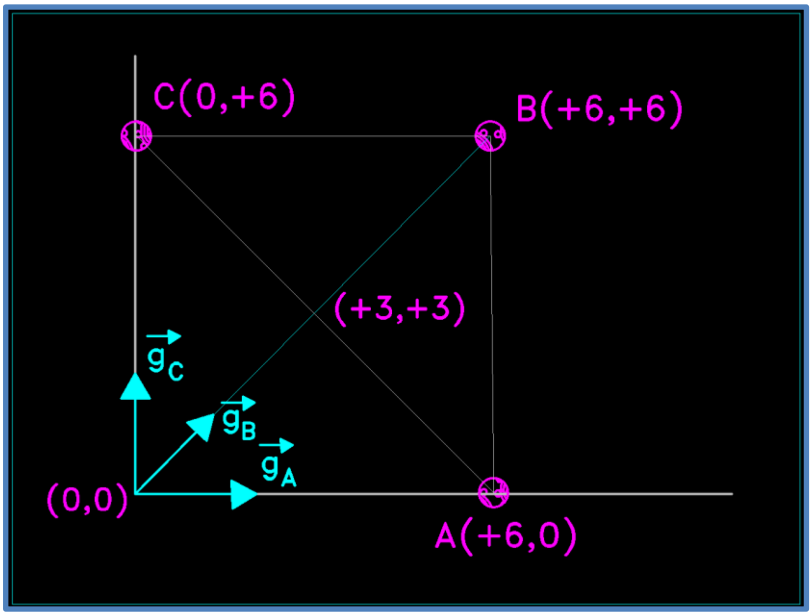
$$\vec{g}_y = +3{,}71 \cdot 10^{-13} \cdot \operatorname{sen} 60^0 \ \vec{\imath} = \mathbf{3{,}21 \cdot 10^{-13}} \cdot \vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

E agora só tes que sumar as componentes para obter o resultado final.

Este que ven agora, é un exercicio do tipo dos que sempre estan non exames de campo gravitatorio.

Tres masas de 300 kg cada unha, estan situadas nos pontos A (6,0), B (6,6) e C (0,6) coa escala en metros.Calcula:
a) O campo gravitatorio no ponto (0,0).
b) O potencial gravitatorio nos pontos (0,0) e (3,3).
c) O traballo necesario para trasladar unha terceira masa de 3 kg dende o ponto (0,0) ate o ponto (3,3).
(Dato: G= 6,67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2})

Comecemos por facer un esquema da disposición das masas sobre un sistema de referencia:



$m_A = m_B = m_C = 300\ kg$

$A(+6{,}0)\ \ , B(+6,+6), C(0,+6)$
a) Imos calcular o campo gravitatorio no ponto (0,0)

$$\vec{g}_{(0,0)} = \vec{g}_A + \vec{g}_B + \vec{g}_C$$

Resulta evidente que os campos creados por A e C teñen o mesmo módulo (a mesma masa e a mesma distancia). Un está dirixido en sentido positivo do eixe X e o outro en sentido positivo do eixa Y. Polo tanto:

$$\vec{g}_A = +\frac{G \cdot m_A}{r_A^2} i = +5{,}56 \cdot 10^{-10} \vec{\imath}\ (\frac{N}{kg})$$

E para C:

$$\vec{g}_C = +\frac{G \cdot m_A}{r_A^2} i = +5{,}56 \cdot 10^{-10} \vec{j} \; (\frac{N}{kg})$$

E agora compre calcular o campo creado por B.
Calculamos primeiro o vetor:

$$\vec{r}_{B \to (0,0)} = (0,0) - (+6,+6) = (-6,-6)$$

E agora o seu módulo:

$$r_{B \to (0,0)} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \;\; m$$

$$\vec{g}_B = -\frac{G \cdot m_B}{r^3_{B \to (0,0)}} \cdot (-6\vec{\imath} - 6\vec{j}) = 1{,}96 \cdot 10^{-10} \vec{\imath} + 1{,}96 \cdot 10^{-10} \vec{j} \; (\frac{N}{kg})$$

E agora sumamos os resultados:

$$\vec{g}_{(0,0)} = 7{,}52 \cdot 10^{-10} \vec{\imath} + 7{,}52 \cdot 10^{-10} \vec{j} \quad (\frac{N}{kg})$$

b) Imos calcular o potencial no ponto (0,0):

$$V_{(0,0)} = V_A + V_B + V_C$$

$$V_{(0,0)} = -\frac{G \cdot m_A}{r_A} - \frac{G \cdot m_B}{r_B} - \frac{G \cdot m_C}{r_C}$$

$$V_{(0,0)} = \left(-\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 300}{6} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 300}{6\sqrt{2}} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 300}{6} \right) \quad J/k$$

$$V_{(0,0)} = -9{,}02 \cdot 10^{-9} \;\; J/kg$$

E agora calculamos o potencial no ponto (3,3).
Atentas¡¡¡¡ A distancia entre cada ponto A,B e C ate o ponto (3,3) é a mitade de $6\sqrt{2}$ ou sexa $3\sqrt{2}$.

$$V_{(3,3)} = V_A + V_B + V_C$$

Como a distancia é sempre a mesma e as masas son identicas podemos simplificar o calculo:

$$V_{(3,3)} = 3 \cdot \left(-\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 300}{3\sqrt{2}} \right) \quad J/kg$$

$$V_{(3,3)} = -1{,}41 \cdot 10^{-8} \quad J/kg$$

c) Imos calcular o traballo para levar unha masa de 3 kg dende (0,0) ate (3,3):

$$W_{(0,0)}^{(3,3)} = -\Delta Ep_{(0,0)}^{(3,3)} = -m' \cdot \Delta V_{(0,0)}^{(3,3)} = -3 \cdot [-1{,}41 \cdot 10^{-8} - (-9{,}08 \cdot 10^{-9})] \ J$$

$$W_{(0,0)}^{(3,3)} = +1{,}52 \cdot 10^{-8} \quad J$$

Que quere dicer que sexa positivo? Será a favor ou en contra das forzas do campo?