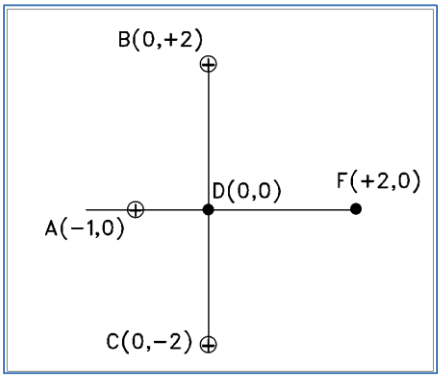
Exercicios resoltos da folla de campo elétrico 2

Calculo de forzas e campos

Esta folla de exercicios está adicada á resolución de problemas que teñen caído nos exames de seletividade (chamados agora ABAU)

(Xuño 2010) Tres cargas eléctricas de +1 μC, están nos puntos A(-1,0), B(0,2) e C(0,-2) (metros): calcula en D(0,0) e en F(2,0);
a) o campo eléctrico;
b) o potencial eléctrico;
c) se en D(0,0) se coloca una carga q´ de +1 μC e de 10 g de masa, sometida só á ación electrostática das outras tres, calcula a velocidade coa que chega ó punto F(2,0).
(K = $9 \cdot 10^9$ Nm^2 C^{-2} ; 1 μC = 10^{-6} C)

Fagamos un esquema do exercicio. Son tres cargas e as tres son positivas.



Podes debuxar os vetores de posición e campo no debuxo que para iso está.

Imos calcular o campo elétrico creado polas cargas no ponto D (0,0):

$$\vec{E}_{(0,0)} = \vec{E}_{A\to D} + \vec{E}_{B\to D} + \vec{E}_{C\to D}$$

Para calcular $\vec{E}_{A\to D}$ precisamos o vetor de posición: $\vec{r}_{A\to D} = (0,0) - (-1,0) = (+1,0) \to \vec{E}_{A\to D} = +\vec{\imath}$ que ten de módulo a unidade.

Polo tanto:

$$\vec{E}_{A\to D} = \frac{K \cdot q}{r_{A\to D}^3}\vec{r}_{A\to D} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6}}{1^3}\vec{\imath} = 9000\,\vec{\imath} \quad (\frac{N}{C})$$

Resulta evidente que os vetores campo elétrico producidos polas cargas situadas en B e C teñen os mesmos módulos, a mesma direción (o eixe Y) e sentidos contrarios pois o de B estará dirixido en sentido $+\vec{\jmath}$ e o de C en sentido $-\vec{\jmath}$ e polo tanto anulan-se entre si.

Polo tanto: $\vec{\mathbf{E}}_{(\mathbf{0,0})} = \mathbf{9000\,\vec{i}} \quad (\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{C}})$

Agora calculemos o campo elétrico no ponto F (+2,0):

$$\vec{E}_{(+2,0)} = \vec{E}_{A\to F} + \vec{E}_{B\to F} + \vec{E}_{C\to F}$$

Para calcular Para calcular $\vec{E}_{A\to F}$ precisamos o vetor de posición:

$\vec{r}_{A\to F} = (+2{,}0) - (-1{,}0) = (+3{,}0) \to \vec{r}_{A\to F} = +3\vec{\imath}$ de módulo 3 m.

$$\vec{E}_{A\to F} = \frac{K \cdot q}{r^3_{A\to F}} \vec{r}_{A\to F} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6}}{3^3} \cdot 3\vec{\imath} = 1000\,\vec{\imath} \;\; (\frac{N}{C})$$

Para calcular $\vec{E}_{B\to F}$ precisamos do vetor de posición:

$$\vec{r}_{B\to F} = (+2{,}0) - (0,+2) = (+2,-2) = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$$

O módulo do vetor será: $r_{B\to F} = \sqrt{+2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \;\; (m)$

Calculamos o campo:

$$\vec{E}_{B\to F} = \frac{K \cdot q}{r^3_{B\to F}} \vec{r}_{B\to F} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6}}{(\sqrt{8})^3} \cdot (2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}) = \mathbf{795{,}5\,\vec{i} - 795{,}5\,\vec{j}} \;\; (\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{C}})$$

Para calcular $\vec{E}_{C\to F}$ precisamos do vetor de posición:

$$\vec{r}_{C\to F} = (+2{,}0) - (0,-2) = (+2,+2) = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$$

O módulo do vetor será: $r_{C\to F} = \sqrt{+2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \;\; (m)$

Calculamos o campo:

$$\vec{E}_{C\to F} = \frac{K \cdot q}{r^3_{C\to F}} \vec{r}_{C\to F} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6}}{(\sqrt{8})^3} \cdot (2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}) = \mathbf{795{,}5\,\vec{i} + 795{,}5\,\vec{j}} \;\; (\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{C}})$$

Resultado que podíamos ter anticipado sen máis que ter estudado a xeometría do problema.

Agora sumamos as contribucións e o resultado vai ser: $\vec{\mathbf{E}}_{(+2,0)} = \mathbf{+2591\,\vec{i}}\,(\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{C}})$

b)Imos agora a calcular os potenciais nos pontos D e F.

O potencial no ponto D será a suma dos potenciais das tres cargas:

$V_D = V_{A\to D} + V_{B\to D} + V_{C\to D} = \frac{9\cdot 10^9\cdot 10^{-6}}{1} + \frac{9\cdot 10^9\cdot 10^{-6}}{2} + \frac{9\cdot 10^9\cdot 10^{-6}}{2}$=18000 V

E agora o potencial no ponto F:

$V_F = V_{A\to F} + V_{B\to F} + V_{C\to F} = \frac{9\cdot 10^9\cdot 10^{-6}}{3} + \frac{9\cdot 10^9\cdot 10^{-6}}{\sqrt{8}} + \frac{9\cdot 10^9\cdot 10^{-6}}{\sqrt{8}} = 9363\,V$

c)Se situamos unha de +1 µC no ponto D sofrirá a forza repulsiva das outras tres cargas e movera-se espontaneamente hacia F.

Fagamos un balance de enerxías por canto:

$$E_{mecánica\ en\ D} = E_{mecánica\ en\ F}$$

$$Ep_D + Ec_D = Ep_F + Ec_F$$

Aceitamos que iniciamente estaba quieta en D, ou sexa que a súa enerxía cinética era cero 0:

$$Ep_D = Ep_F + Ec_F$$

E agora sustiuímos :

$$q \cdot V_D = q \cdot V_F + Ec_F$$

$$10^{-6} \cdot 18000 = 10^{-6} \cdot 9363 + Ec_F$$

Epolo tanto a enerxía cinética da partícula en F será **0,008636 J**

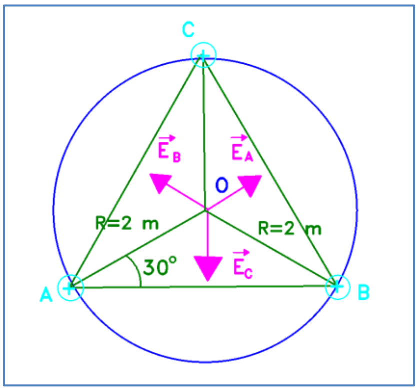
Para calcular a velocidade:

$$E_C = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

E como a masa é de 10 g=0,01 kg podes calcular a velocidade que da **1,314 m/s**

(Xuño 2012) Tres cargas de +3 µC están situadas equidistantes entre si sobre unha circunferencia de raio 2 m. Calcula:
a) o potencial eléctrico no centro da circunferencia;
b) o vector campo eléctrico no mesmo punto;
c) o traballo para traer unha carga q´= 1 µC dende o infinito ao centro da circunferencia.
Datos: K= 9.109 N.m^2/C^2

Tres cargas situadas equidistantes sobre unha circunferencia estan ocupando os vértices dun triángulo equilátero.



Comecemos por debuxar o problema:

Como podes ver o centro da circunferencia é tamén o centro dun triángulo equilátero, e ese centro está a 2 m de cada vértice.

Polo tanto calcular o potencial no centro da circunferencia vai ser moito doado pois as tres cargas de +3µC estan a 2 m do ponto O.

$$V_O = V_{A\to O} + V_{B\to O} + V_{C\to O}$$

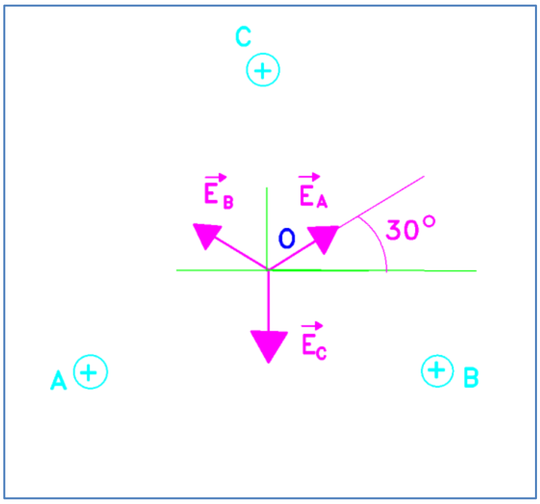
E como as cargas son iguais e as distancias tamé, podemos escreber:

$$V_O = 3\cdot\frac{9\cdot10^9\cdot3\cdot10^{-6}}{2}\ V = \mathbf{40500\ V}$$

E xa está resolto o apartado a)

Como xa temos o potencial, o sensato é calcular o traballo para trasladar unha carga dende o infinito ate o centro da circunferencia:

$$W_\infty^O = -q'\cdot\Delta V_\infty^O = -10^{-6}\cdot(V_O - V_\infty) = -10^{-6}(40500-0) = \mathbf{-0.0405\ J}$$



Imos logo a calcular o campo elétrico.

Aproveitaremos a xeometría do problema.

Observemos.

1.-Os tres vetores que temos que compoñer teñen o mesmo módulo pois as distancias e as cargas son iguais entre si.

2.-O campo creado por C está dirixido en sentido negativo do eixe Y. Calculemos:

$\vec{E}_C = -\frac{K\cdot q}{d^2}\,\vec{j} = -6750\,\vec{j}\ \left(\frac{N}{C}\right)$

3.-Os campos de A e B forman un ángulo de 30° coa horizontal e podemos descompór eses vetores nunha componente en X e outra en Y. Resulta claro que as componentes en X anulan-se entre si .

Imos comprobar co calculo.

Para calcular o campo creado por A temos:

a)O módulo: $E_A = \frac{9\cdot10^9\cdot3\cdot10^{-6}}{2^2} = 6750\ \ N/C$

b)Para calcular as duas componentes usamos o coseno de 30° para a de X e seno de 30° para o de Y:

$$\vec{E}_A = +6750\cdot cos30^0\vec{\imath} + 6750\cdot sen30^0\,\vec{j}\quad \left(\frac{N}{C}\right)$$

E para o calculo do campo creado por B o asunto será igual máis acontece que agora a componente en X será negativo:

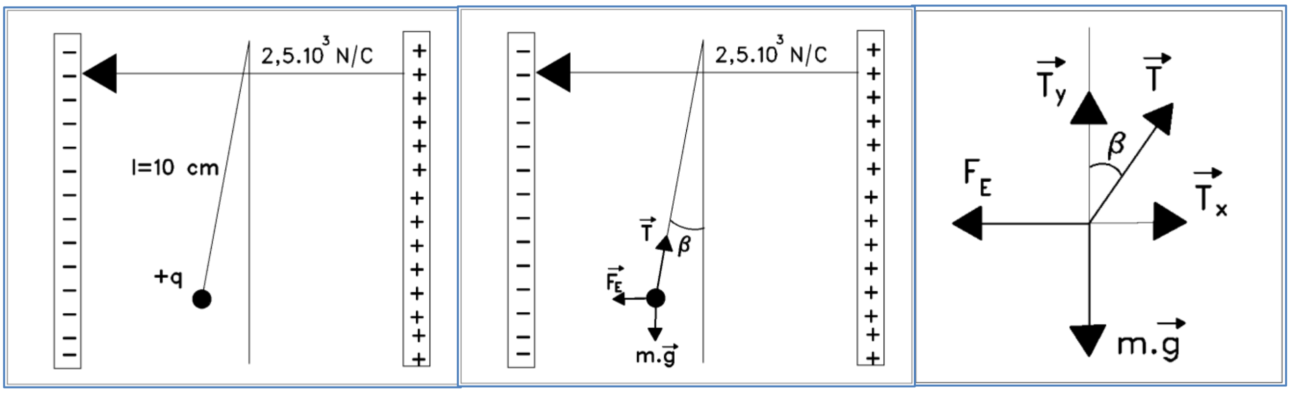
$$\vec{E}_B = -6750 \cdot cos30^0 \vec{\imath} + 6750 \cdot sen30^0 \,\vec{\jmath} \quad (\frac{N}{C})$$

Pois agora para calcular o campo total só fica sumar os resultados:

$$\vec{E}_O = -6750\,\vec{\jmath}\ \left(\frac{N}{C}\right) + 6750 \cdot sen30^0 \,\vec{\jmath} \quad \left(\frac{N}{C}\right) + 6750 \cdot sen30^0 \,\vec{\jmath}\ \left(\frac{N}{C}\right) = 0\ N/c$$

O campo elétrico no centro é nulo.

(Xuño 2014) Unha esfera metálica de masa m = 8 g e carga q = 7 µC, colga dun fío de 10 cm de lonxitude situado entre dúas láminas metálicas paralelas de cargas iguais e de signo contrario. Calcular:
a) o ángulo que forma o fío coa vertical se entre as láminas existe un campo electrostático uniforme de 2,5 10^3 N/C;
b) A tensión do fío nese momento;
c) se as láminas se descargan, ¿cal será a velocidade da esfera ó pasar pola vertical?
(Datos: K= 9.10^9 N.m^2/C^2 , g = 9,8 m/s^2)



Nos tres debuxos podes ver representada a situación, as forzas que atúan e a descomposición de forzas.

a)A esfera cargada está en equilibrio e polo tanto en función do principio de inercia:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \;\; \rightarrow \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{E}} + \mathbf{m} \cdot \vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{T}} = \mathbf{0}$$

E en función de componentes (debuxo da dereita):

$$En\ X\colon T_X = F_E \;\; \rightarrow \mathbf{T} \cdot \mathbf{sen} \cdot \boldsymbol{\beta} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{E}\ \ (1)$$

$$En\ Y\colon T_Y = m \cdot g \;\; \rightarrow \mathbf{T} \cdot \mathbf{cos\beta} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{g}\ \ (2)$$

Agora se dividimos membro a membro as ecuacións (1) e (2):

$$\frac{\mathbf{T \cdot sen \cdot \beta}}{\mathbf{T \cdot cos\beta}} = \frac{\mathbf{q \cdot E}}{\mathbf{m \cdot g}} \quad (3)$$

E agora simplificando:

$$tg\beta = \frac{q{\cdot}E}{m{\cdot}g} \quad (4)$$

Podes calcular o ángulo pois coñeces todos os datos da ecuación (4).

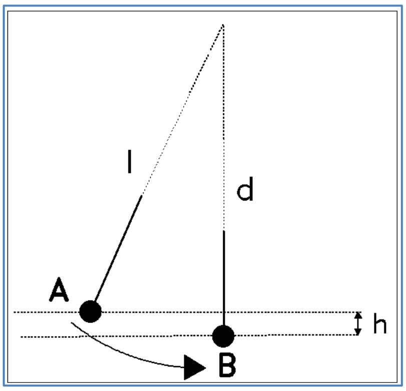
Ollo con expresar as variabeis no Sistema Internacional¡¡¡¡¡¡¡

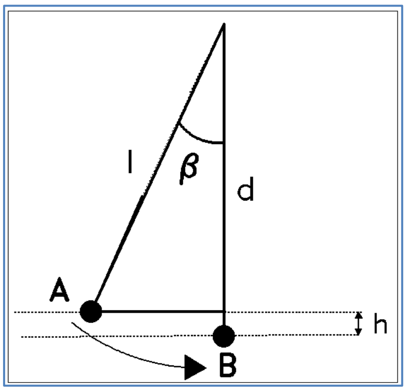
O resultado é 12,6º.

b)Podes calcular o valor da tensión coas ecuacións (1) ou (2)

O resultado é 8,03.10^{-2} N.

c)Para debater o derradeiro apartado vou facer un novo debuxo que vai estar un pouco deformado para que se aprece ben o problema.





Se desconetamos o campo elétrico, a forza elétrica deixará de atuar e o resultado será que a esfera oscilará movéndo-se dende o ponto A hacia o ponto B, que é o ponto que ocupa "ao pasar pola vertical".

En A a enerxía era toda potencial gravitatoria, pois estaba en repouso:

$$E_{mecánica\ en\ A} = Ep_A = m \cdot g \cdot h$$

En B a enerxía mecánica será toda enerxía cinética:

$$E_{mecánica\ en\ B} = Ec_B = \frac{m \cdot v_B^2}{2}$$

E igualando, podes obter: $\mathbf{v_B = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}}$

<u>Un problema: non coñecemos h</u>.

Máis este é un pequeno problema.

Se ves o segundo debuxo con atención descobrirás un triángulo retángulo que ten de hipotenusa a lonxitude do fío, e ten de cateto contiguo ao ángulo β a lonxitude que chamei d.

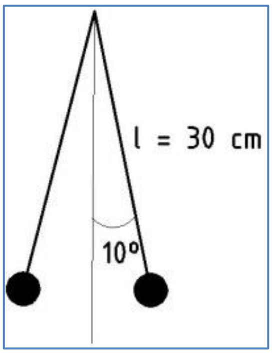
Podemos calcular esta lonxitude co coseno de β :

$$cos\beta = \frac{d}{l} \ \rightarrow d = l \cdot cos\beta = 9{,}76\ cm$$

E agora podes calcular **h**, pois: $h = l - d = 0{,}24\ cm = 0{,}0024m$

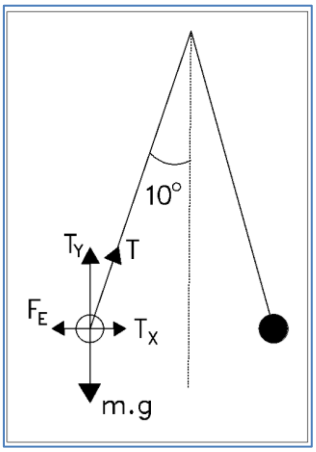
E como xa sabemos o valor da "altura que cae" podemos calcular a velocidade ao pasar polo ponto B e obtemo que é **0,217 m/s**.

Ben, como estamos co asunto de esferas cargadas, propoño vos facer a que nesta folla de atividades chamo "cuestión 3"



3.- Dúas esferas iguais de 10 g de masa e coa mesma carga electrica,estan penduradas de sendos fíos de 30 cm de lonxitude cada un. Por acción da repulsión das súas cargas o ángulo que forma cada un dos fíos coa dirección vertical é de 10º (observa a figura)
A carga de cada unha é: a) 24 µC. b) 0,14 µC, c) -30 µC.

Vou descompór as forzas que atúan sobre unha das esferas:



Como antes:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \ \rightarrow \vec{\mathbf{F}}_\mathbf{E} + \mathbf{m} \cdot \vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{T}} = \mathbf{0}$$

E polo tanto:

$$En\ X: T_X = F_E \ \rightarrow \mathbf{T} \cdot \mathbf{sen} \cdot \boldsymbol{\beta} = \mathbf{F_E} \ \ (1)$$

$$En\ Y: T_Y = m \cdot g \ \rightarrow \mathbf{T} \cdot \mathbf{cos\beta} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{g} \ \ (2)$$

Observa que neste caso trata-se da forza elétrica entre duas cargas que deberían ser iguais se o material que forma as esferas é homoxéneo e isótropo.

Tamén como antes podemos obter:

$$\frac{\mathbf{T} \cdot \mathbf{sen} \cdot \boldsymbol{\beta}}{\mathbf{T} \cdot \mathbf{cos\beta}} = \frac{\mathbf{F_E}}{\mathbf{m} \cdot \mathbf{g}}$$

E tamén:

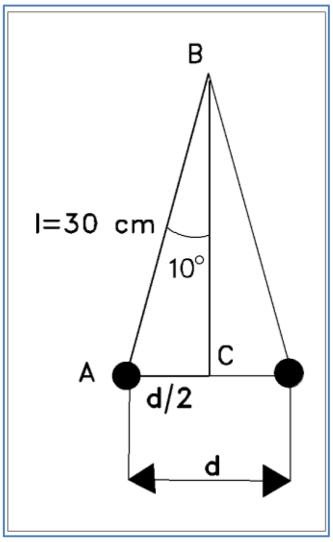
$$tg10^0 = \frac{F_E}{m \cdot g} \ \ (1)$$

Se queres xa podes calcular a forza elétrica.

Para calcular as cargas tes que ter en conta que na posición das esferas:

$$F_E = \frac{K \cdot q \cdot q}{d^2} = \frac{k \cdot q^2}{d^2} \ (2)$$

Nesta expresión falta o valor da distancia entre as cargas que chamei **d** . Podemos calcular esa distancia recorrendo ao triángulo ABC da figura da dereita que indica que:



$$sen10^0 = \frac{d/2}{30\ cm}$$

De onde : **d=10,42 cm=0,1042 m**

Se queres agora podes ir á ecuación (2) e se tes a forza elétrica calculada, pois determinar o valor da carga.

Se o prefires, podes obter unha expresión de calculo direto combinando (1) e (2).

Vou preferir este camiño.

$$tg10^0 = \frac{F_E}{m \cdot g} = \frac{\frac{k \cdot q^2}{d^2}}{m \cdot g}$$

$$tg10^0 \cdot m \cdot g = \frac{k \cdot q^2}{d^2}$$

$$k \cdot q^2 = d^2 \cdot tg10^0 \cdot m \cdot g$$

$$q = \sqrt{\frac{d^2 \cdot tg10^0 \cdot m \cdot g}{K}} = 1{,}44 \cdot 10^{-7} C = 0{,}144\ \mu C$$

Vale. Xa está ben.
Para rematar vou resolver dous exercicios que aparecen cos números 1 e 2 e que son algo distintos.
Van deseguido.

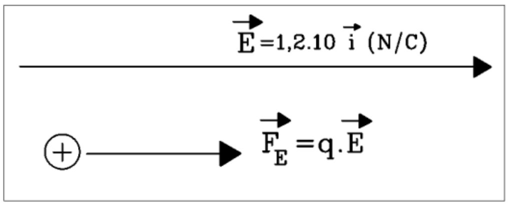
1.-Unha partícula alfa ceibase sen velocidade entre as placas dun condensador plano no que existe un campo eléctrico uniforme de $1{,}2\cdot10^4$ V·m^{-1}.
a) Que lonxitude debe percorrer o núcleo de helio para acadar unha velocidade de 6 km/s?
b) Cal será a diferenza de potencial entre os puntos inicial e final?
Datos: $q\alpha=2\cdot1{,}6\cdot10^{-19}$ C; $m\alpha=4\cdot1{,}6\cdot10^{-27}$ kg

Comecemos polas unidades de campo elétrico que son un tanto "especiais".

$$1{,}2\cdot 10^4\ V.m^{-1} = 1{,}2\cdot 10^4\ \frac{J}{C\cdot m} = 1{,}2\cdot 10^4 \frac{N\cdot m}{C\cdot m} = 1{,}2\cdot 10^4\ {}^{N}/_{C}$$

Así que como ves as unidades V.m^{-1} son equivalentes as que xa coñecemos N.C^{-1}.

Imos facer un debuxo orientativo:



A partícula α^{+2} é un núcleo de helio.
Recorda que ${}^4_2He$ ten Z=2 ou sexa que ten 2 protóns, e como A=4 (número másico) ten 2 neutróns e 2 eletróns.
Un núcleo de helio é un átomo de helio que "perdeu" os dous eletróns e polo tanto está cargada positivamente (con duas cargas positivas por iso escrebemos α^{+2})

Como está cargada positivamente, a forza elétrica que experimenta ten a direción e o sentido do campo elétrico.

$$\vec{F}_E = q\cdot\vec{E} = 2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-16}\ \mathrm{C}\ \cdot 1{,}2\cdot 10^4\ \vec{\imath}\ N\cdot C^{-1} = 3{,}84\cdot 10^{-15}\ \vec{\imath}\ N$$

Epolo tanto a aceleración:

$$\vec{F} = m\cdot\vec{a} \rightarrow \vec{a} = \frac{F}{m} = \frac{+3{,}84\cdot 10^{-15}\ \vec{\imath}\ (N)}{4\cdot 1{,}6\cdot 10^{-27}\ (kg)} = +6\cdot 10^{11}\ \vec{\imath}\ (m\cdot s^{-2})$$

Queremos que a velocidade final sexa 6 km/s=6 000 m/s. A partícula estará sometida a un MRUA con velocidade inicial cero:

$$v - v_0 = a\cdot(t-t_0) \rightarrow t = \frac{v}{a} = \frac{6000\ m\cdot s^{-1}}{6\cdot 10^{11}\ \ m\cdot s^{-2}} = 10^{-8}\ s$$

Ese é o tempo que tarda en adquirir a velocidade indicada. Calculemos a distancia que debe percorrer:

$$\Delta x = v_0\cdot(t-t_0) + \frac{1}{2}\cdot a\cdot(t-t_0)^2 = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 10^{11}\cdot(10^{-8})^2 = 5.10^{-6}\ m = 5\ \mu m$$

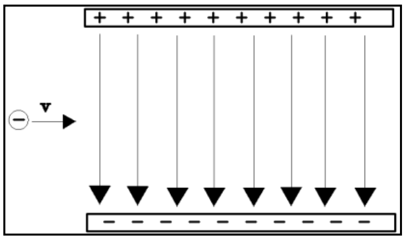
Esa é a distancia que ten que percorrer.

Para calcular a diferenza de potencial entre o ponto inicial e o final, tes que lembrar que:

$$V = d\cdot E = 5.10^{-6}\ m\cdot 1{,}2\cdot 10^4\ V.m^{-1} = 0{,}06\ V$$

Por certo, fixate que utilidade teñen esas unidades de intensidade de campo elétrico.

2.-No tubo dun osciloscopio, un feixe de partículas cargadas é desviado da súa traxetoria retilínea con velocidade constante por campos elétricos perpendiculares á traxetoria inicial, tal e como se indica no debuxo. Entre as dúas placas dun osciloscopio establéce-se un campo elétrico uniforme de 400 V·cm^{-1} de intensidade.



a) Cal é a forza elétrica exercida sobre un eletrón cando pasa entre as placas?

b) A que aceleración se ve sometido o electrón? Qué tipo de movemento descrebe? Como será a traxetoria?

c) Ten importancia o peso do eletrón no movemento que descrebe? Compara ambas as forzas e as aceleracións debidas á interación elétrica e á gravitatoria.

(Datos: qe=-1,6·10^{-19} C ; me=9,1·10^{-31} kg)

Antes de nada fíxate nas unidades de campo elétrico. Un par de apuntes:

1) $1\ V = \frac{1\ J}{1\ C} = \frac{1\ N{\cdot}m}{1\ C}$

2) Imos agora ao noso caso:

$$400\ V \cdot cm^{-1} = 400\ \frac{V}{cm} \cdot \frac{10^2 cm}{m} \cdot \frac{\frac{1\ N\cdot m}{C}}{1\ V} = 40\ 000\ {}^{N}/_{C}$$

Agora xa estamos no Sistema Internacional e temos as unidades regradas de campo elétrico.

Só queda a expresión do campo en forma vetorial (aínda que non a precisamos) que, de acordo co debuxo que acompaña ao texto será : $\vec{E} = -40\ 000\ \vec{\jmath}\ \left({}^{N}/_{C}\right)$

Polo tanto a forza sobre a carga será:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} = -1{,}6.10^{-19}\ C \cdot \left(-40\ 000\ \vec{\jmath}\ \ {}^{N}/_{C}\right) = +6{,}4 \cdot 10^{-12}\ \vec{\jmath}\ \ (N)$$

Ou sexa que a forza provocará unha aceleración “hacia arriba” pois:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \rightarrow \vec{a} = \frac{F}{m} = \frac{+6{,}4 \cdot 10^{-12}\ \vec{\jmath}\ \ (N)}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \ (kg)} = +7{,}03 \cdot 10^{18}\ \vec{\jmath}\ \ (m \cdot s^{-2})$$

Como ves a aceleración da gravedade dirixida “hacia abaixo” carece de toda influencia por razón de escala.