Cinemática II

1.-Aceleración e aceleración media

2.-Aceleración tanxencial e normal.

3.- Movemento retilíneo uniformemente acelerado (M.R.U.A):

a) Gráficas velocidade-tempo.

b) Gráficas posición-tempo.

4.-Movemento circular uniforme (M.C.U)

a) O M.C.U como movemento periódico.

b) Magnitudes lineais.

c) Magnitudes angulares.

Aceleración e aceleración media

- Na maior parte dos movementos, a velocidade non permanece constante senon que cambia de módulo, direción e/ou sentido.
- A aceleración mide a variación da velocidade co tempo.
- Definimos aceleración media dun móvel nun intervalo como a variación da velocidade por unidade de tempo:

$$\boxed{\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}}$$

- A aceleración é unha magnitude vetorial.
- A súa ecuación de dimensións será:

$$[a] = \frac{[v]}{T} = \frac{L \cdot T^{-1}}{T} = L \cdot T^{-2}$$

Polo tanto as súas unidades no Sistema Internacional son m/s^2 ou $m.s^{-2}$

Aceleración tanxencial e normal

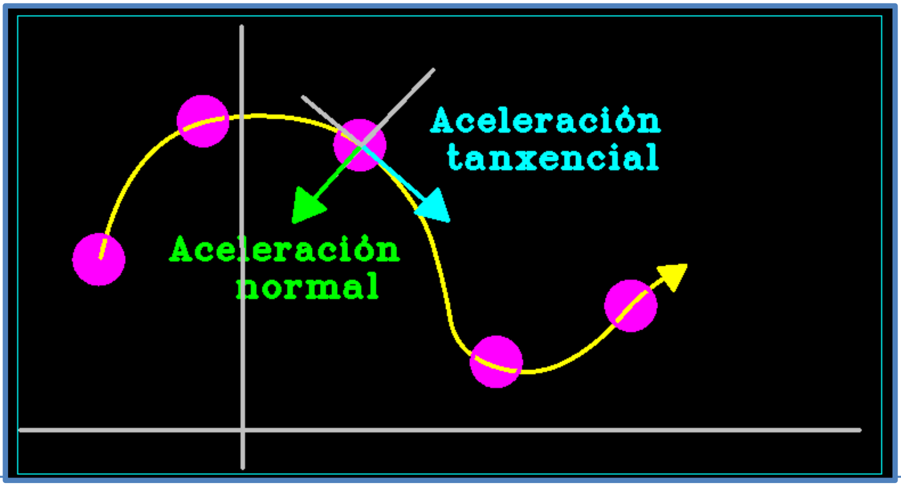
- Aceleración tanxencial (a_t) mide a variación do módulo da velocidade. É un vetor que ten a mesma direción que a velocidade (tanxente á traxetoria)

$$a_t = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

- Aceleración normal ou centrípeta (a_n) mide a variación da direción da velocidade por unidade de tempo. É un vetor dirixido hacia o centro da curva e perpendicular á aceleración tanxencial.

  Calcula-se:

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$



Movemento retilíneo uniformemente acelerado M.R.U.A

As súas carateristicas son:

1)A traxetoria é retilínea seguindo un dos eixes de coordenadas. Polo tanto, se o movemento se produce seguindo o eixe horizontal acontece que

$$\Delta x = \Delta s$$

2)A velocidade manten constante a direción e o sentido e polo tanto $a_n = 0$.

3)O módulo da velocidade cambia de forma constante, e polo tanto hai aceleración de tipo tanxencial que ven dada por: $a = \frac{v - v_0}{t - t_0}$

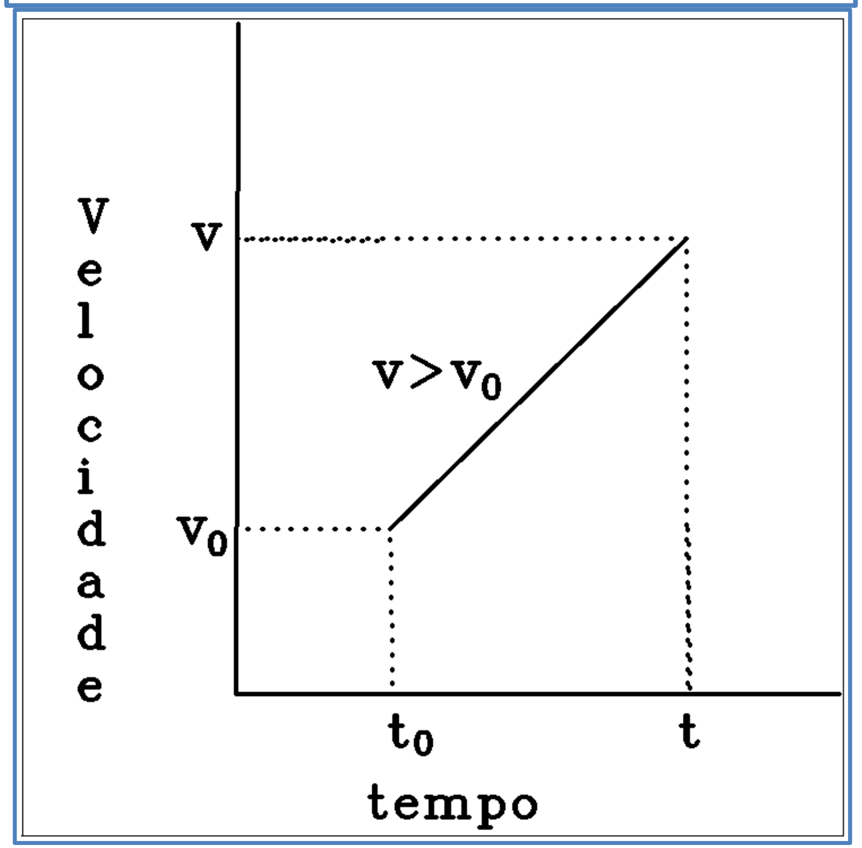
Nesta expresión acontece que:

- O denominador é sempre positivo pois sempre $t > t_0$
- O numerador pode ser positivo ou negativo. É positivo se $v > v_0$ e será negativo se $v < v_0$. No primeiro caso aumenta a velocidade (movemento acelerado) con $a = +$, no segundo caso a velocidade diminúe (movemento decelerado) con $a = -$
- Podemos escreber esta relación como: $v - v_0 = a \cdot (t - t_0)$ e tamén:

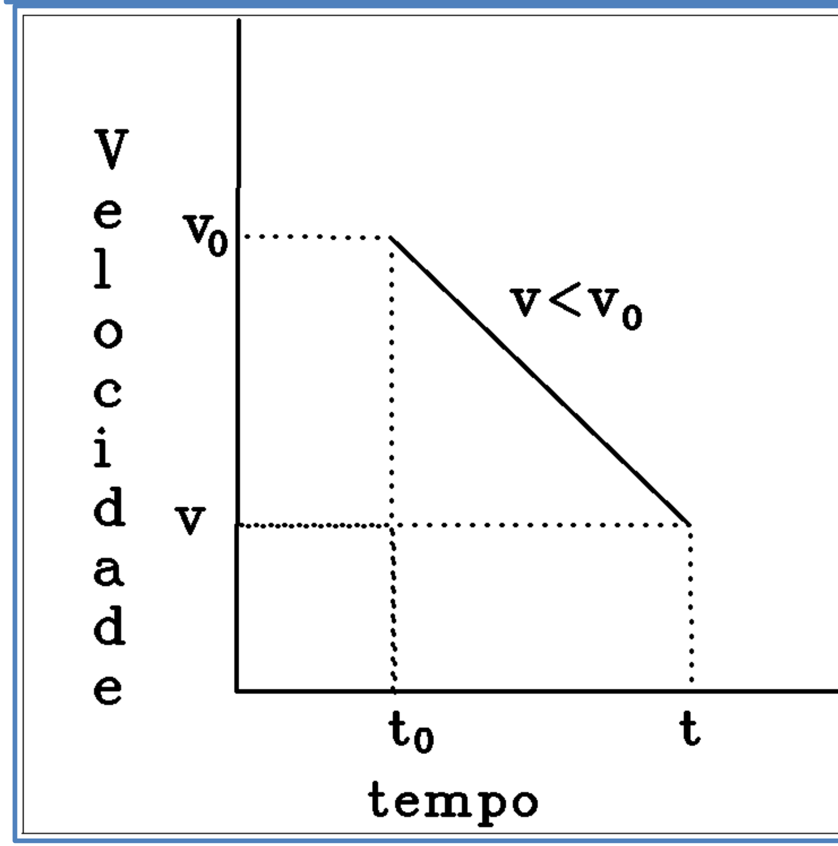
$$v = v_0 + a \cdot (t - t_0)$$

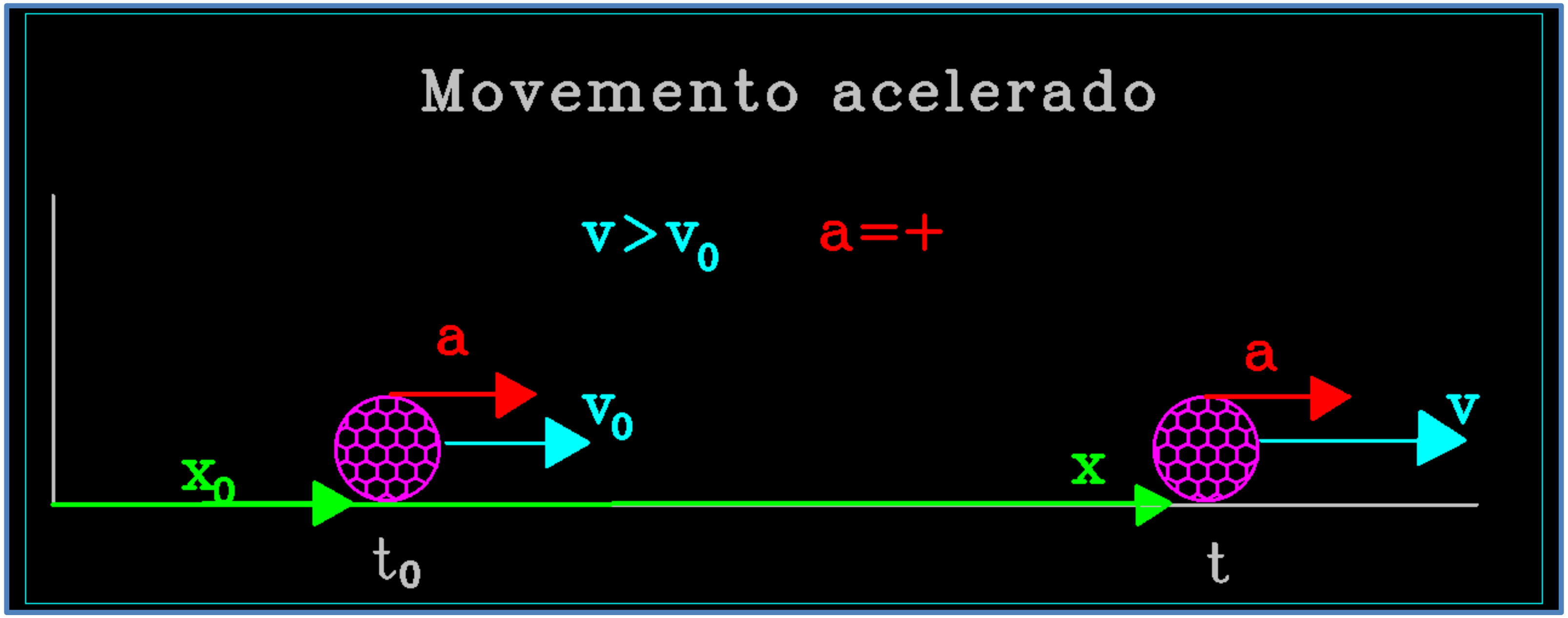
Como a relación $v = v_0 + a \cdot (t - t_0)$ é de proporcionalidade direta, cando representamos a velocidade fronte ao tempo obteremos como gráfica unha liña reta de pendente a.

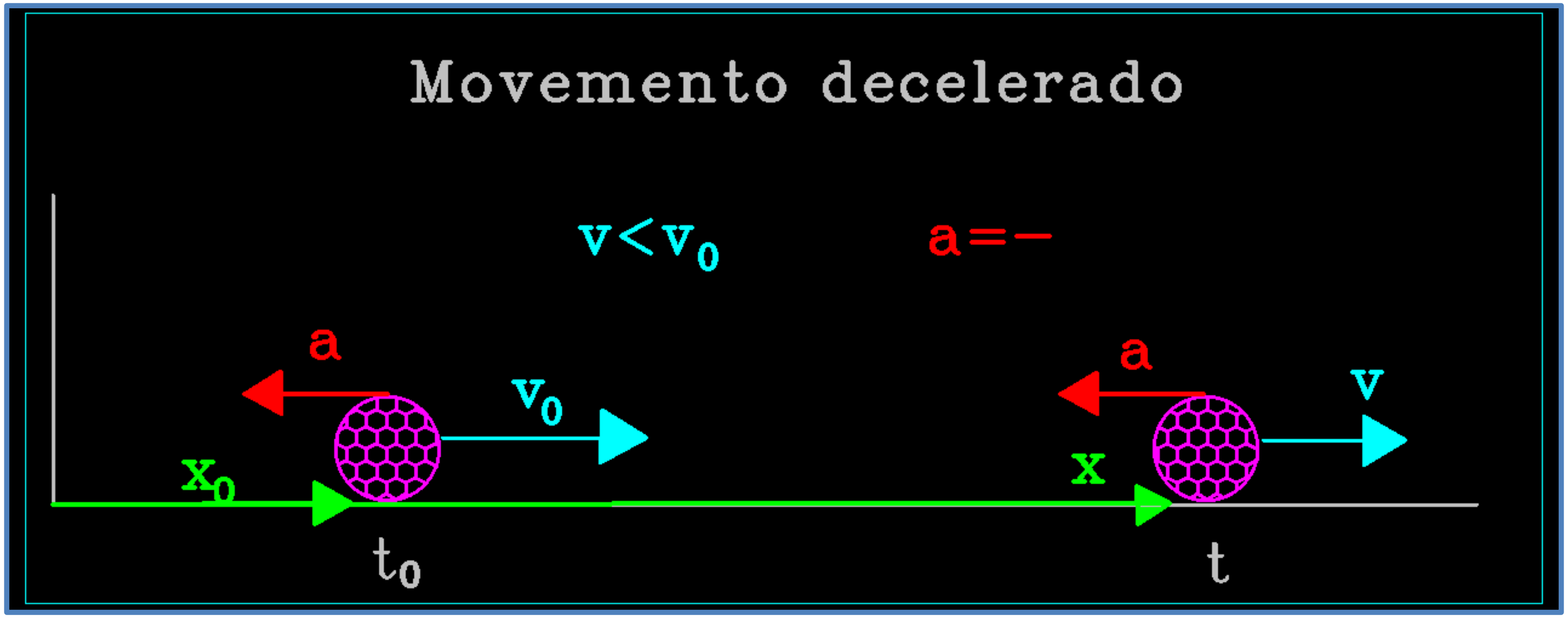
Con aceleración positiva a gráfica é crecente:



Con aceleración negativa a gráfica é decrecente:




Movemento acelerado
v>v0
a=+
a
v0
x0
t0
a
v
x
t


Movemento decelerado
v<v0
a=−
a
v0
x0
t0
a
v
x
t

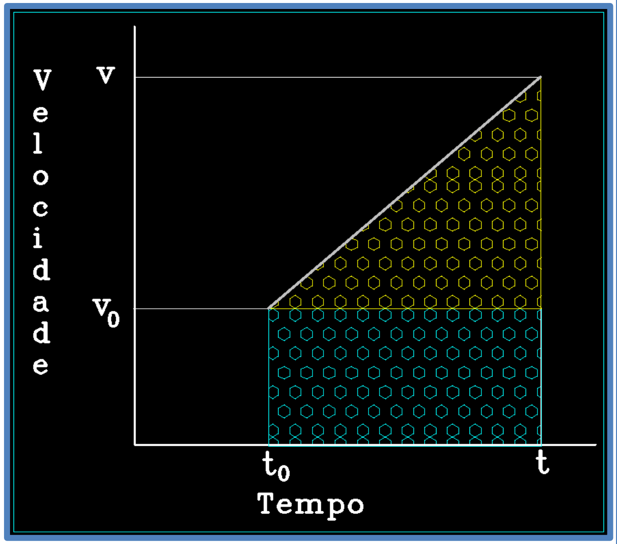
Como calcular a distancia percorrida ?

- Calcularemos a distancia percorrida por medio da superficie baixo da gráfica velocidade-tempo.
- A superficie baixo da gráfica, está formada por un retángulo e un triángulo:

$$\Delta x = x - x_0 = S_{retángulo} + S_{triángulo} \quad (1)$$

$$S_{retángulo} = v_0 \cdot (t - t_0)$$

$$S_{triángulo} = \frac{1}{2} \cdot (v - v_0) \cdot (t - t_0)$$



podemos sutituír nesta expresión tendo en conta que: $v - v_0 = a \cdot (t - t_0)$

e obtemos que:

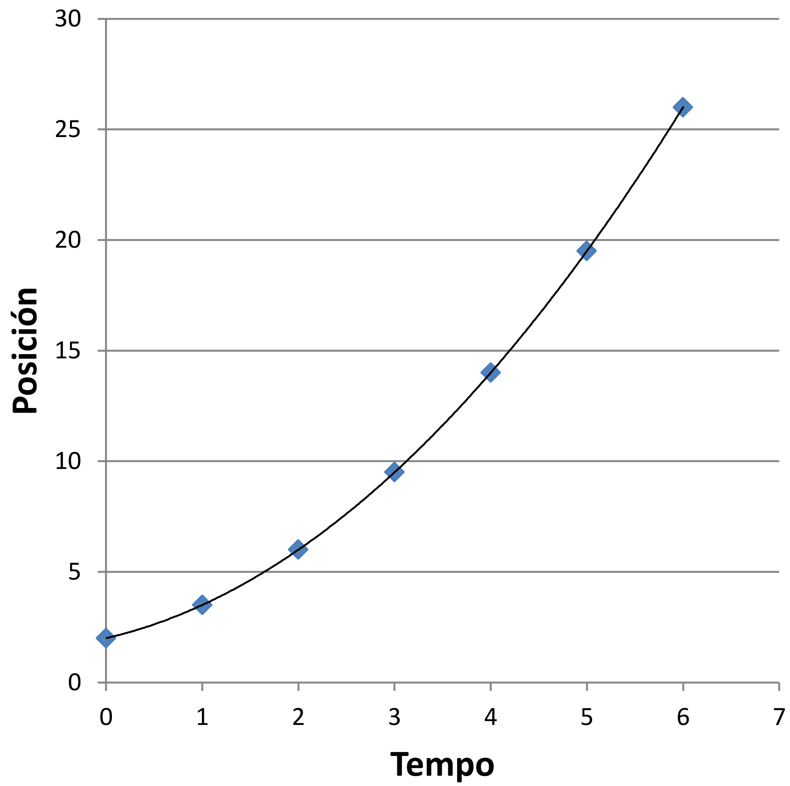
$$S_{triángulo} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0) \cdot (t - t_0) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0)^2$$

E agora xa sustituíndo en (1) obtemos a expresión definitiva:

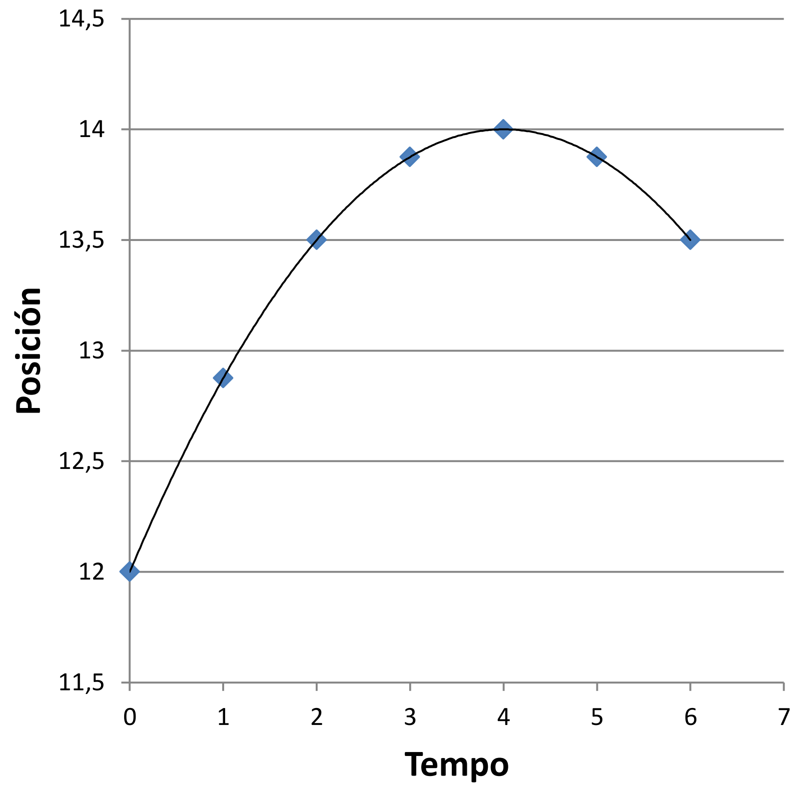
$$\boldsymbol{\Delta x = x - x_0 = v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0)^2}$$

A gráfica posición-tempo do M.R.U.A é a correspondente a unha relación cuadrática .

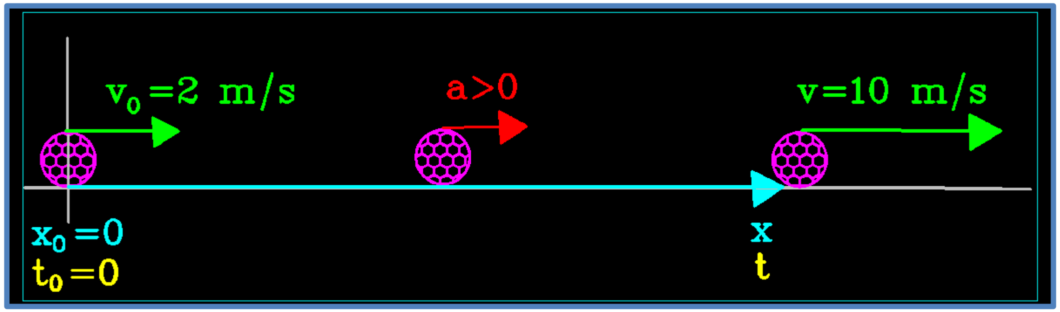
Cando a aceleración é positiva:



Cando a aceleración é negativa:



- Exercicio: observamos unha partícula que no instante inicial pasa pola orixe móvendose en liña reta con velocidade 2 m/s e que 10 s máis tarde continúa co seu movemento retilíneo mais agora movendose con velocidade de 10 m/s.



Trata-se dun M.R.U.A con aceleración positiva pois a velocidade aumenta.

a)Calcula a aceleración.

$$a = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{(10 - 2)m/s}{(10 - 0)\ s} = 0{,}8\ m/s^2$$

b)Encontra a ecuación que proporciona a velocidade en calquera instante e representa a gráfica velocidade-tempo.

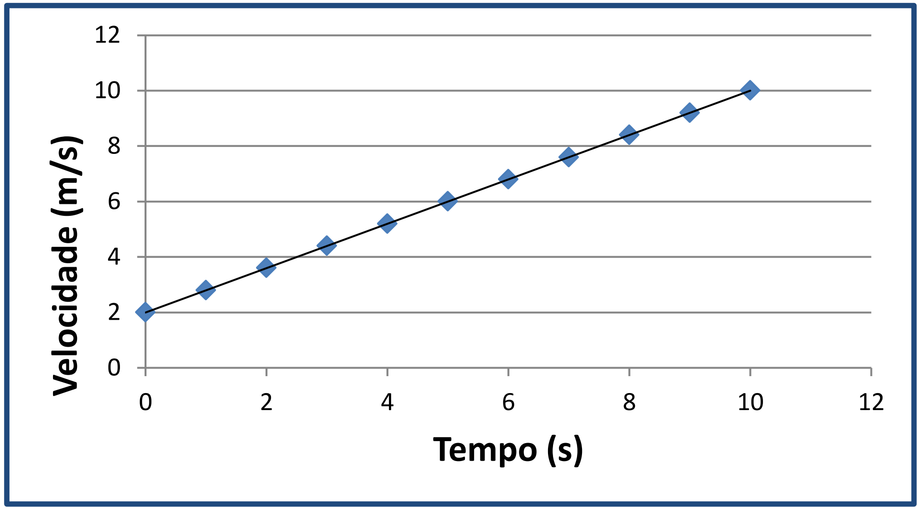
Para elo sustituimos os valores que xa coñecemos na ecuación da velocidade.

$$v - v_0 = a \cdot (t - t_0) \rightarrow v = v_0 + a \cdot (t - t_0)$$

$$\boldsymbol{v = 2 + 0,8 \cdot t \quad (1)}$$

Agora representamos a gráfica velocidade-tempo dando valores en (1):

Tempo (s)	Velocidade (m/s)
0	2
1	2,8
2	3,6
3	4,4
4	5,2
5	6
6	6,8
7	7,6
8	8,4
9	9,2
10	10



c)Encontra a ecuación que proporciona a posición en qualquer instante e calcula a distancia percorrida nos 10 segundos.

A ecuación resulta de sustituír en:

$$x - x_0 = v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0)^{\,2} \rightarrow$$

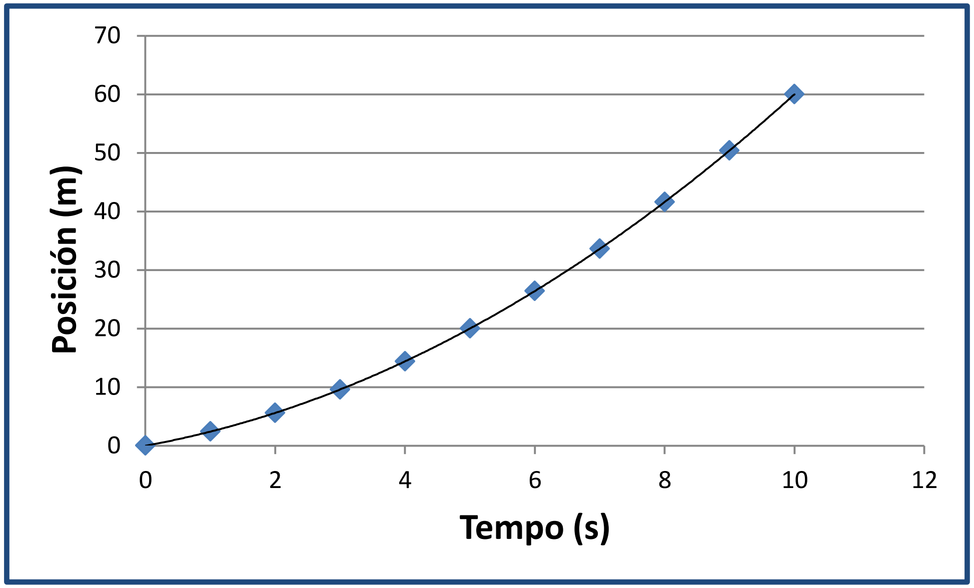
$$x - 0 = 2 \cdot (t - 0) + \frac{1}{2} \cdot 0{,}8 \cdot (t - 0)^2 \rightarrow$$

$$\boldsymbol{x = 2 \cdot t + 0,4 \cdot t^2} \ \ \mathbf{(2)}$$

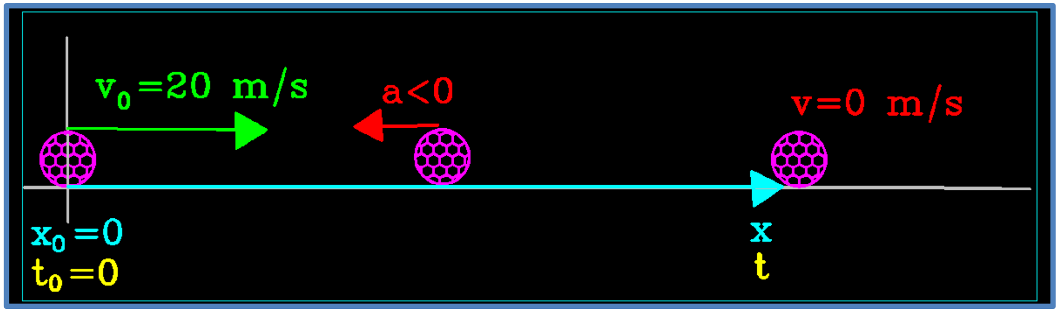
Podemos calcular a posición final sen máis que introducir t=10 s e obtemos como resultado x=60 m

Para a gráfica de posición-tempo só temos que dar valores na ecuación (2).

tempo (s)	Posición (m)
0	0
1	2,4
2	5,6
3	9,6
4	14,4
5	20
6	26,4
7	33,6
8	41,6
9	50,4
10	60



- Exercicio: unha partícula móve-se en liña reta e pasa pola orixe de cando o cronometro marca o valor 0 s con velocidade 20 m/s. Por ación do rozamento deten-se por completo cando o cronómetro marca 40 s.



Trata-se dun M.R.U.A con aceleración negativa pois a velocidade diminúe.

a)Calcula a aceleración.

$$a = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{(0 - 20)m/s}{(40 - 0)\ s} = -0{,}5\ m/s^2$$

b)Encontra a ecuación que proporciona a velocidade en calquera instante e representa a gráfica velocidade-tempo.

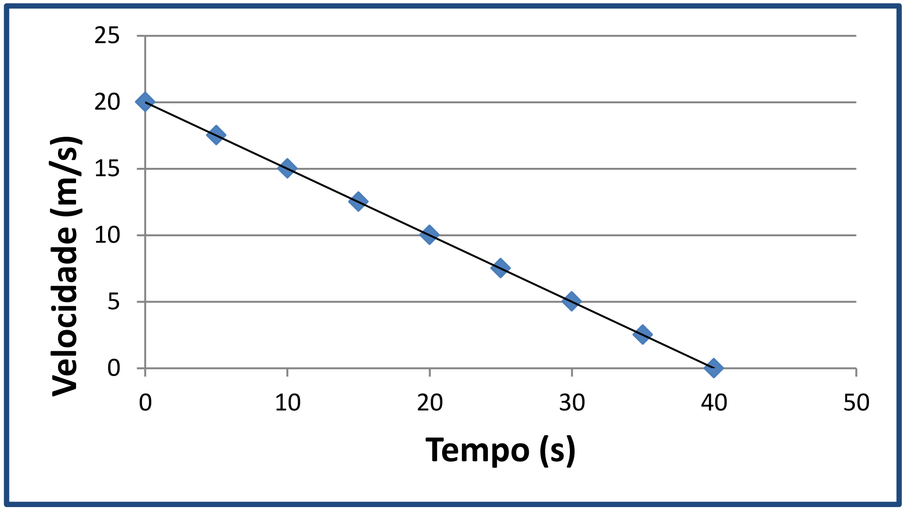
Para elo sustituimos os valores que xa coñecemos na ecuación da velocidade.

$$v - v_0 = a \cdot (t - t_0) \rightarrow v = v_0 + a \cdot (t - t_0)$$

$$\boldsymbol{v = 20 - 0,5 \cdot t \quad (1)}$$

Agora representamos a gráfica velocidade-tempo dando valores en (1):

Tempo (s)	Velocidade (m/s)
0	20
5	17,5
10	15
15	12,5
20	10
25	7,5
30	5
35	2,5
40	0



c)Encontra a ecuación que proporciona a posición en qualquer instante e calcula a distancia percorrida nos 10 segundos.

A ecuación resulta de sustituír en:

$$x - x_0 = v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0)^{\ 2} \rightarrow$$

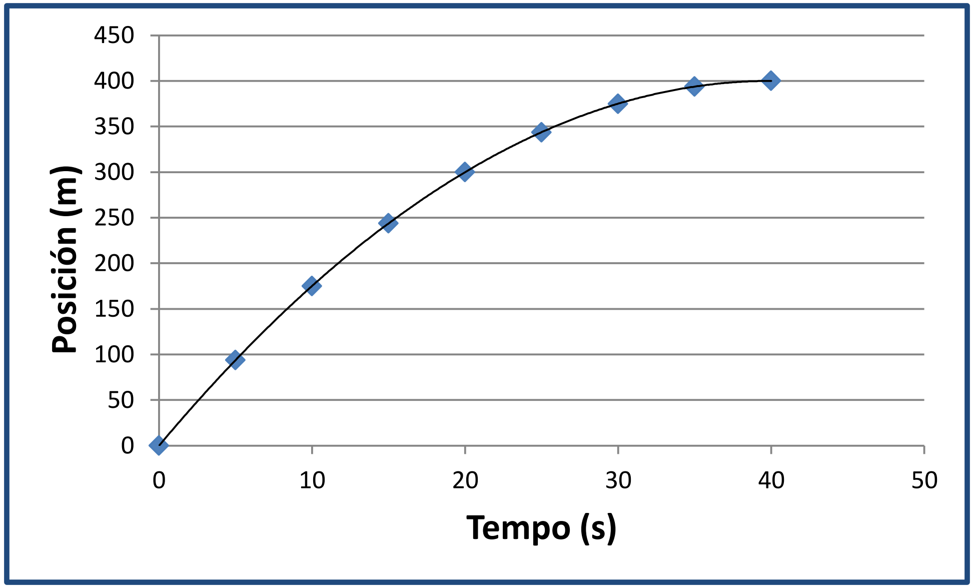
$$x - 0 = 20 \cdot (t - 0) + \frac{1}{2} \cdot (-0{,}5) \cdot (t - 0)^2 \rightarrow$$

$$\boldsymbol{x = 20 \cdot t - 0,25 \cdot t^2 \ \ (2)}$$

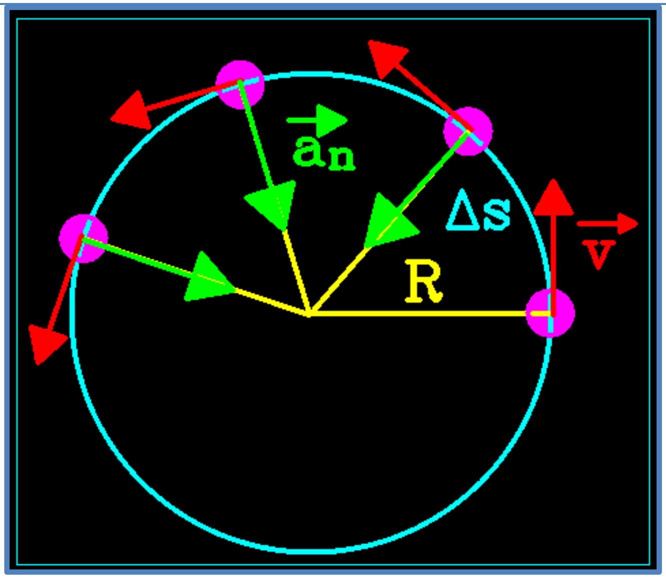
Podemos calcular a posición final sen máis que introducir t=40 s e obtemos como resultado x=400 m

Para a gráfica de posición-tempo só temos que dar valores na ecuación (2).

tempo (s)	Posición (m)
0	0
5	93,75
10	175
15	243,75
20	300
25	343,75
30	375
35	393,75
40	400



Movemento circular e uniforme



As súas carateristicas son:

1)A traxetoria é unha circunferencia de raio R. Polo tanto neste caso:

$$\Delta s > \Delta r$$

Ademais a distancia que percorre ao completar unha volta é a lonxitude da circunferencia:

$$\Delta s_{volta} = 2 \cdot \pi \cdot R$$

2)A velocidade manten constante o módulo máis cambia instantaneamente de direción. Polo tanto $\vec{v} \neq constante$ porén $[\vec{v}] = v = constante$.

3)O cambio de direción da velocidade ven dado pola aceleración normall que é un vetor dirixido hacia o centro da circunferencia e que se calcula coa expresión:

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

O movemento circular e uniforme como movemento periódico

- Cando nun movemento van-se repetindo as posicións que ocupa a partícula, falamos de movemento periódico.
- Denomina-se periódo (T) ao tempo que tarda a partícula en completar unha volta ou revolución.
- Denomína-se frecuencia (f) ao número de voltas que da a partícula por unidade de tempo.

- A frecuencia e o período estan relacionados:

$$\left.\begin{array}{l} 1\ volta \rightarrow T\ (segundos) \\ \\ f voltas \rightarrow 1\ s \end{array}\right\} \quad f \cdot T = 1 \rightarrow \boxed{f = \frac{1}{T}}$$

Cando a unidade de tempo usada é o segundo (s) enton a unidade de frecuencia é o s^{-1} que recibe nome de Herzio (Hz)

Calculo con magnitudes lineais

1)Para o calculo da velocidade.

Teremos en conta que o módulo da velocidade é constante e polo tanto:

$$v = \frac{distancia\ percorrida}{tempo} = \frac{\Delta s}{t}$$

2)Ademais no tempo de 1 período a partícula percorre a lonxitude da circunferencia. Polo tanto:

$$v = \frac{\Delta s}{t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T}$$

3)Por último podemos calcular a aceleración normal facendo uso da expresión:

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

- Exercicio: unha roda de 50 cm de raio xira completando 10 voltas en 2 s.

a)A súa frecuencia será?

A frecuencia non é máis que o número de voltas por segundo, neste caso o valor é 5 HZ ou 5 r.p.s (revolucións por segundo)

b)O seu período?

O período é o tempo que precisa para completar unha volta. Se completa 5 voltas por cada segundo pois enton precisa 0,2 s para completar unha volta.

c)Cal é a velocidade dun ponto do seu bordo?

Como o raio é 50 cm= 0,5 m enton: $v = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0{,}5\ m}{0{,}2\ s} = 5\pi\ m/s$

d)Cal é a aceleración normal do ponto?

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(5\pi)^2}{0{,}5} \cdot \frac{m}{s^2} = 493{,}5\ m/s^2$$

e)Qué distancia percorre a roda en 10 s?

$$v = \frac{\Delta s}{t} \rightarrow \Delta s = v \cdot t = 50\pi\ m$$

- Exercicio: A Lúa xira arredor da Terra a unha distancia de 384.000 km completando a súa órbita en 27 días aproximadamente.

Calcula a velocidade da Lúa na súa órbita.

$$v_{Lúa} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_{órbita}}{T_{órbita}}$$

Imos expresar as magnitudes en unidades do Sistema Internacional:

$$384\,000\ km \cdot \frac{1.000\ m}{1\ km} = 3{,}84 \cdot 10^8\ m$$

$$27\ días \cdot \frac{24\ h}{1\ día} \cdot \frac{3.600\ s}{1\ h} = 2.332.800\ \ s$$

Agora calculamos a velocidade:

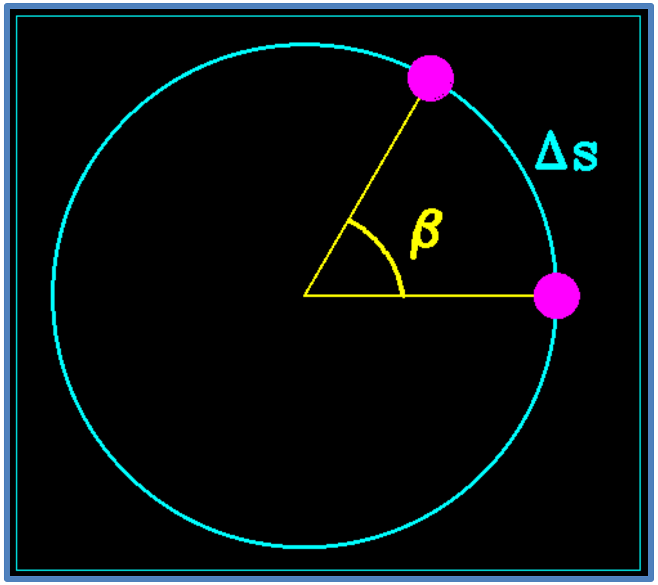
$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot 3{,}84 \cdot 10^8\ m}{2.332.800\ \ s} = 1.034\,\frac{m}{s}$$

Imos calcular a aceleración normal da Lúa na súa órbita:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = 2{,}79 \cdot 10^{-3} m/s^2$$

Calculos con magnitudes angulares

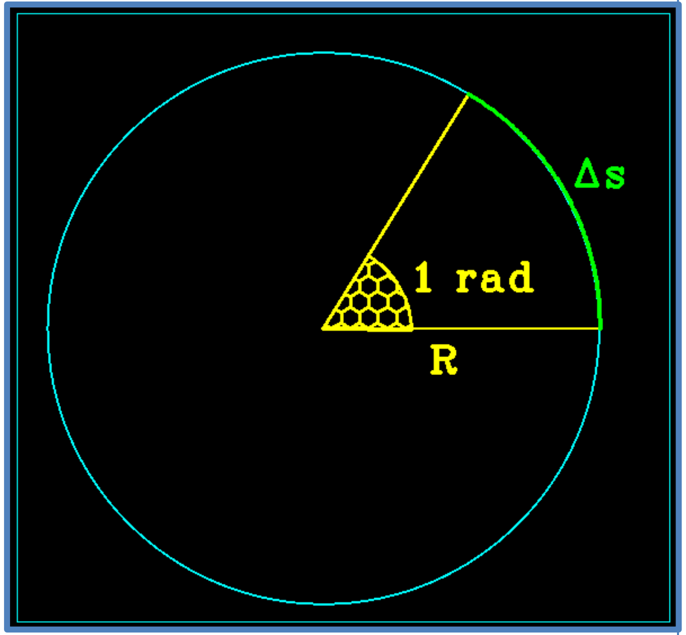
- Podemos descreber o M.C.U por medio dos ángulos que completa o raio, pois de cada ángulo descrito por este desprende-se un percorrido maior ou menor da partícula.
- Podes aprezar na figura que a medida que aumente a distancia percorrida pola partícula, Δs, aumenta o ángulo subtendido β que describe o raio da circunferencia.



- Só precisamos definir unha relación entre a distancia percorrida pola partícula e o ángulo descrito.

O radián

- Un radián é o ángulo subtendido baixo un arco que ten como lonxitude o raio da circunferencia.
- Na figura cúmple-se que $\Delta s = R$ e polo tanto o ángulo é de 1 rad.
- É moi doado calcular cantos radiáns ten unha circunferencia pois só temos que dividir a lonxitude da circunferencia por R:



$$\frac{L_{circunferencia}}{R_{circunferencia}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{R} = 2\pi\, rad$$

- Polo tanto : $1\, revolución = 1\, volta = 2\pi\, rad = 360^0$

Velocidade angular

- A velocidade angular (ω) é a magnitude que determina o ángulo descrito polo raio da circunferencia, por unidade de tempo.

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

- Nesta relación, o ángulo exprésa-se en radians e o tempo en segundos polo que a unidade de velocidade angular é rad/s.
- Ademais debemos ter en conta que nun periódo, o raio descrebe unha volta completa que son 2π radians e polo tanto:

$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$ e como $\frac{1}{T} = f$,pois tamén $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$

Relación entre as magnitudes angulares e as lineais

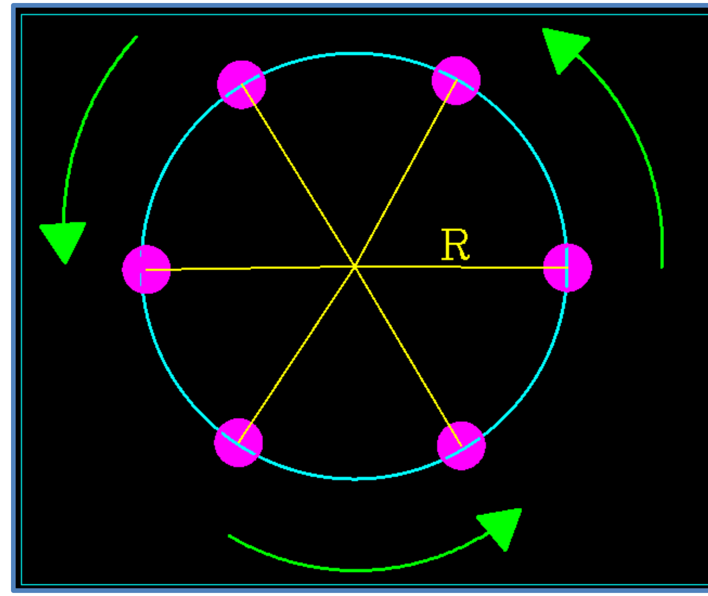
- Acabamos de ver que a velocidade angular ven dada por: $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$
- Pour outra banda vimos que no movemento circular e uniforme a velocidade lineal dun ponto da circunferencia viña expresada por:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T}$$

- Combinando as duas expresións encontramos unha relación entre a velocidade lineal e a angular:

$$v = R \cdot \omega$$

- Exercicio:unha esfera xira atada a unha corda de 30 cm de lonxitude completanto 10 voltas en 1 s. Calcula a súa frecuencia, o período, a velocidade angular, a velocidade lineal e a aceleración normal.



Como completa 10 voltas por cada segundo:
f= 10 Hz

E iso quere dicer que tarda 0,1 s en completar cada volta, polo tanto:
T= 0,1 s

A velocidade angular será:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 20\pi \; rad/s$$

A velocidade lineal é: $v = R \cdot \omega$ temos que expresar R en metros R=0,3 m

E enton resulta: $v = 6\pi \;\; m/s$

Agora podes calcular a aceleración normal: $a_n = \frac{v^2}{R} = 120 \cdot \pi^2 \;\; m/s^2$