Campo gravitacional

1.-Leis de Kepler

2.-Forza gravitatoria

3.-Campo gravitatorio

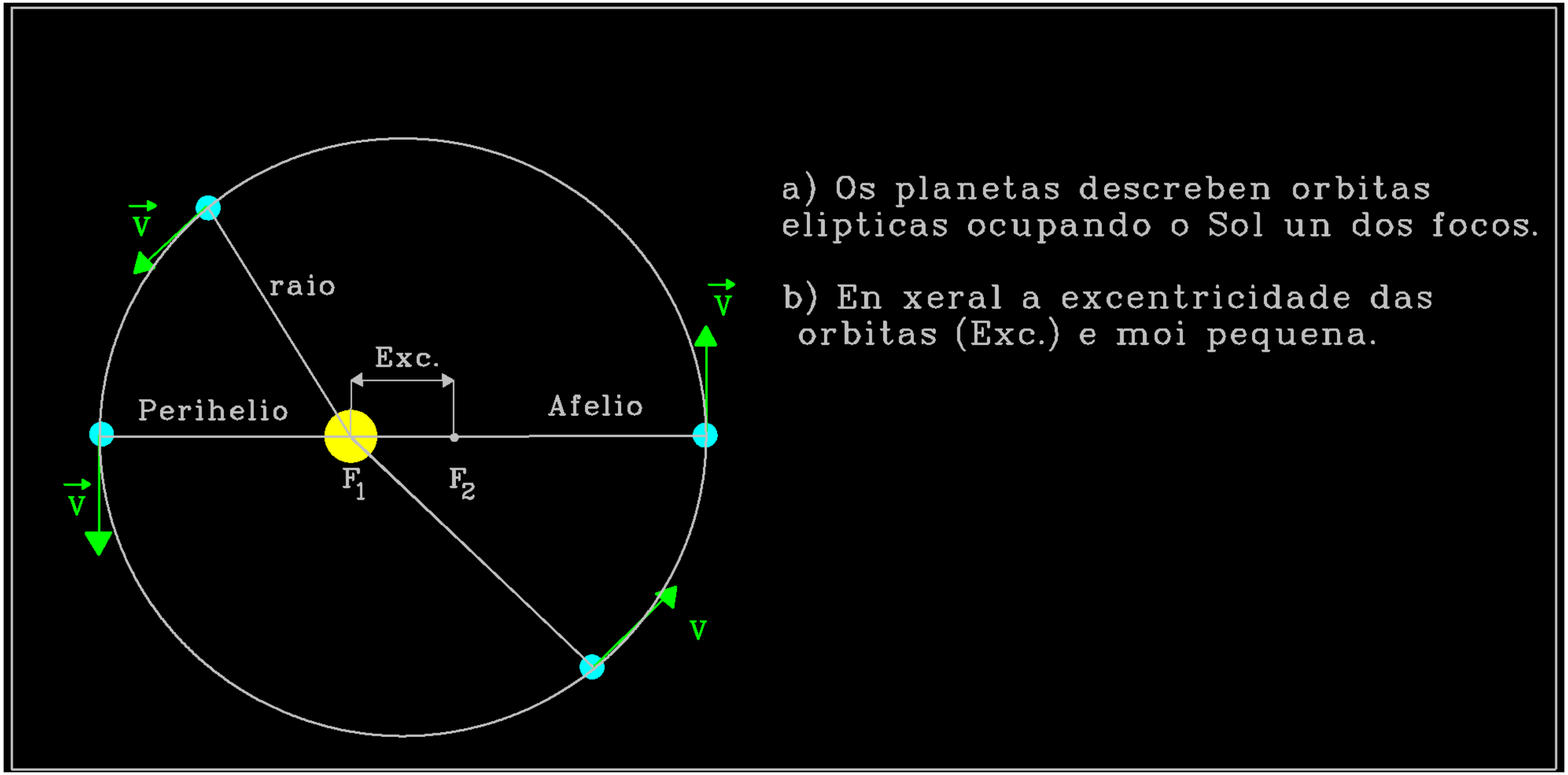
4.-Enerxía no campo gravitacional: enerxía potencial gravitacional

5.-Potencial gravitacional

6.-Movemento de satélites

Leis de Kepler

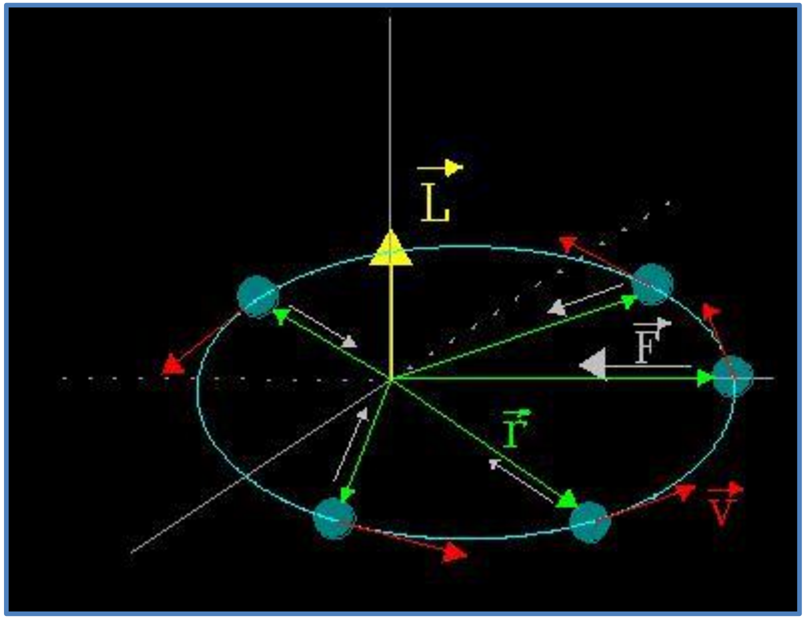
1ª Lei das órbitas elípticas:



Ver video: https://youtu.be/F0n1XEugw8A

Leis de Kepler

2ª Lei das áreas:o raio vetor que une ao planeta co Sol, varre áreas iguais en tempos iguais.



- A forza sobre o planeta é unha forza dirixida hacia o Sol (unha forza central ou radial)
- O momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ e como $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ enton podemos escreber:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

- Imos comprobar que o momento angular conservase.

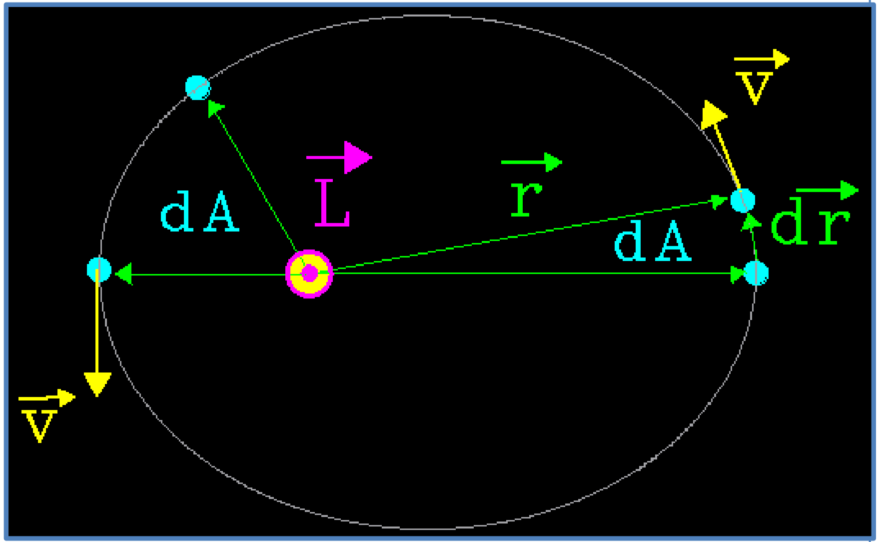
Para elo imos derivar con respeito do tempo a expresión do momento angular:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m \cdot \vec{v} + \vec{r} \times m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

- No primeiro termo como $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \rightarrow \vec{v} \times m \cdot \vec{v} = 0$
- No segundo termo $m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a} = \vec{F} \rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = 0$ polo tanto $\boldsymbol{\frac{d\vec{L}}{dt} = 0}$

Leis de Kepler

Se $\frac{\mathbf{d\vec{L}}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{0}$ enton $\vec{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{constante}$



1) Constante en direción, perpendicular ao plano da órbita e isto quere dicer que a órbita realíza-se nun plano.
2) Constante en sentido, o movemento é antihorario de forma contínua.
3) Constante en módulo, e isto quere dicer que:

$L = r \cdot m \cdot v = m \cdot r \cdot \frac{dr}{dt} \rightarrow \frac{L}{m} = \frac{r \cdot dr}{dt}$, observa que $dA = \frac{r \cdot dr}{2}$

E sustituíndo: $\frac{L}{m} = \frac{2 \cdot dA}{dt} \rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2 \cdot m} = constante$

A velocidade areolar é constante

Leis de Kepler

3ª Lei do cadrado dos períodos:

Os cadrados dos períodos dos planetas, son proporcionais aos cubos das distancias medias ao Sol.

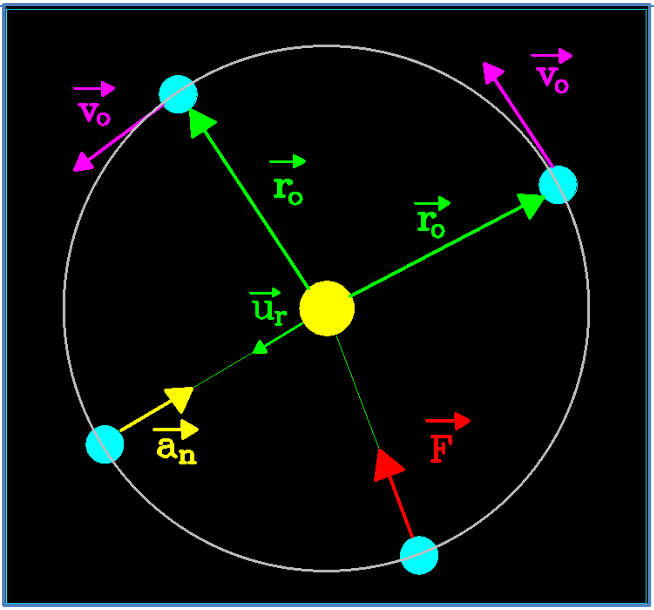
$$\frac{T_{Terra}^2}{R_{Terra}^3} = \frac{T_{Mercurio}^2}{R_{Mercurio}^3} = \frac{T_{Marte}^2}{R_{Marte}^3} = \frac{T_{Venus}^2}{R_{Venus}^3} = \frac{T_{Xúpiter}^2}{R_{Xúpiter}^3} = \frac{T_{Saturno}^2}{R_{Saturno}^3} = \frac{T_{Urano}^2}{R_{Urano}^3} = \frac{T_{Neptuno}^2}{R_{Neptuno}^3}$$

Ou de forma xeral:

$$\frac{T_{Planeta}^2}{R_{Planeta}^3} = constante$$

Esta lei pode ser aplicada a calquera agrupación de planetas arredor dunha estrela ou de satélites arredor dun planeta.

Forza que orixina o campo gravitatorio



Consideremos un astro (un planeta) que orbita arredor de outro astro maior (unha estrela). Aceitaremos que se move nunha circunferencia de raio **r_o** (raio orbital) completando cada órbita en **T_o** (período orbital). Realiza enton un M.C.U con velocidade $\overrightarrow{v_o}$ (velocidade orbital) de módulo constante.

Como : $\vec{a} = \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_n}$ e como $\overrightarrow{a_t} = 0$ enton $\vec{a} = \overrightarrow{a_n}$, ademais:

$\overrightarrow{a_n} = -\frac{v_0^2}{r_o}\overrightarrow{u_r}$ e aplicando o 2º Principio: $\vec{F} = -m_p \cdot \frac{v_0^2}{r_o}\overrightarrow{u_r}$

Esta expresa que a forza é unha forza central ou radial que ten de módulo: $F = m_p \cdot \frac{v_0^2}{r_o}$

Forza que orixina o campo gravitacional

- Como $v_o = r_o \cdot \omega$ enton podemos sustituír na expresión anterior, prescindindo xa da notación vetorial, e obtemos:

$F = m_p \cdot \frac{r_o^2 \cdot \omega^2}{r_o}$ e como: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ podemos sustituír e :

$$F = m_p \cdot r_o^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{1}{r_o}$$

- Multiplicamos e dividimos a anterior expresión por r_o :

$$F = m_p \cdot \frac{4\pi^2 \cdot r_o^3}{T^2 \cdot r_o^2}$$

- Esta expresión posúe dúas carateristicas claves.

1)A forza é inversamente proporcional ao cadrado da distancia.

2)Conten a 3ª Lei de Kepler : $\frac{r_o^3}{T^2} = constante$

Forza que orixina o campo gravitacional

- Sustituíndo todas as cantidades constantes por K_1 :

$$F = K_1 \cdot \frac{m_p}{r_o^2}$$

- Por mor do 3º Principio, se esa é a forza que o astro central exerce sobre o planeta, o planeta exercerá sobre o astro central unha forza igual de sentido contrario definida por:

$$F' = K_2 \cdot \frac{M_c}{r_o^2}$$

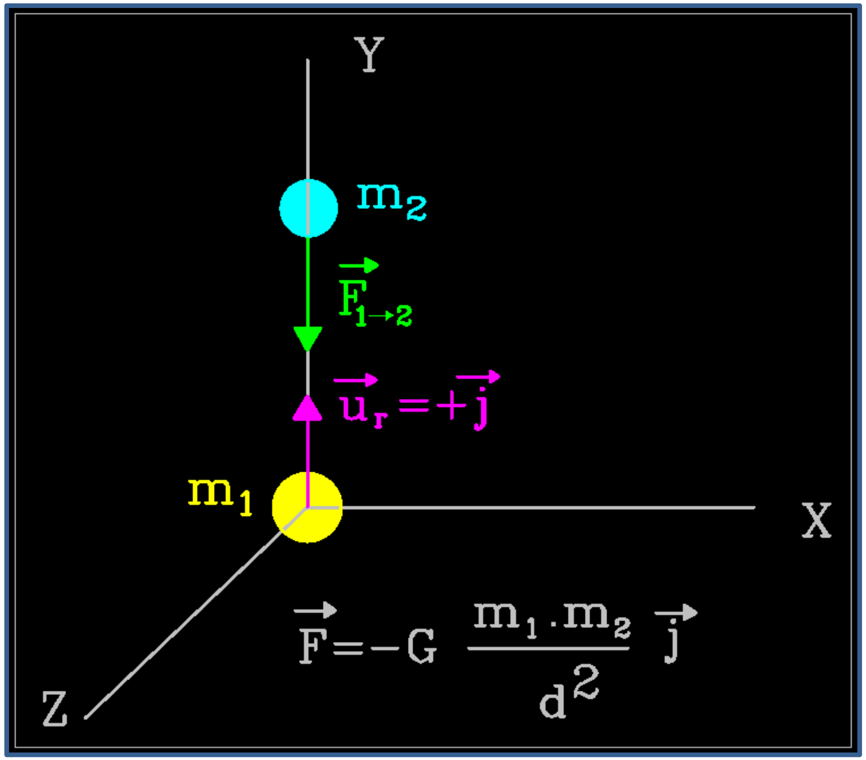
- E como F=F' podemos igualar e obtemos: $\frac{K_1}{M_c} = \frac{K_2}{m_p} = G$

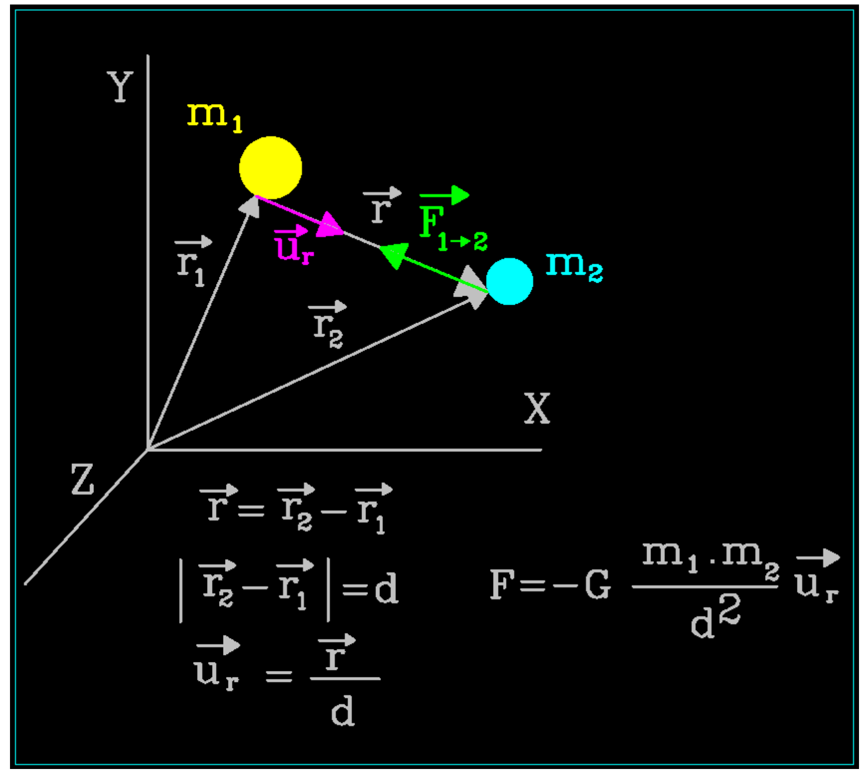
- Nesta expresión G é unha constante universal, e podemos obter unha expresión para : $K_1 = G \cdot M_c$ que sustituída na ecuación (1) da lugar :

$F = G \cdot \frac{m_p \cdot M_c}{r_o^2}$ que en forma vetorial: $\vec{\mathrm{F}} = -\mathrm{G} \cdot \frac{\mathrm{m_p} \cdot \mathrm{M_c}}{\mathrm{r_o^2}} \vec{\mathrm{u}}_\mathrm{r}$

Calculo da forza entre duas masas

Cando as masas estan aliñadas seguindo un dos eixes	**Cando as masas non estan aliñadas seguindo un dos eixes**





Campos de forzas

Carateríza-se de sempre, dous tipos de forzas, de contato (aquelas que atuan por contato sobre a materia) ou a distancia.

A ecuación de Newton ten duas dificultades.

1ª **<u>Non hai conexión material, a gravedade atúa a distancia</u>**.

"É inconcebíbel que a materia bruta opere e afete (sen mediación de algo mais que non sexa material) sobre outra materia sen contato mutuo"

"Que a gravedade sexa inata, inerente e esencial da materia, de xeito que un corpo pode atuar sobre outro a distancia, por medio do vazio, sen que interveña algo mais mediante o que a súa ación ou forza poida ser trasmitida de un ao outro, paréce-me un absurdo tan grande que non creio que poida caír xamais ningún home"

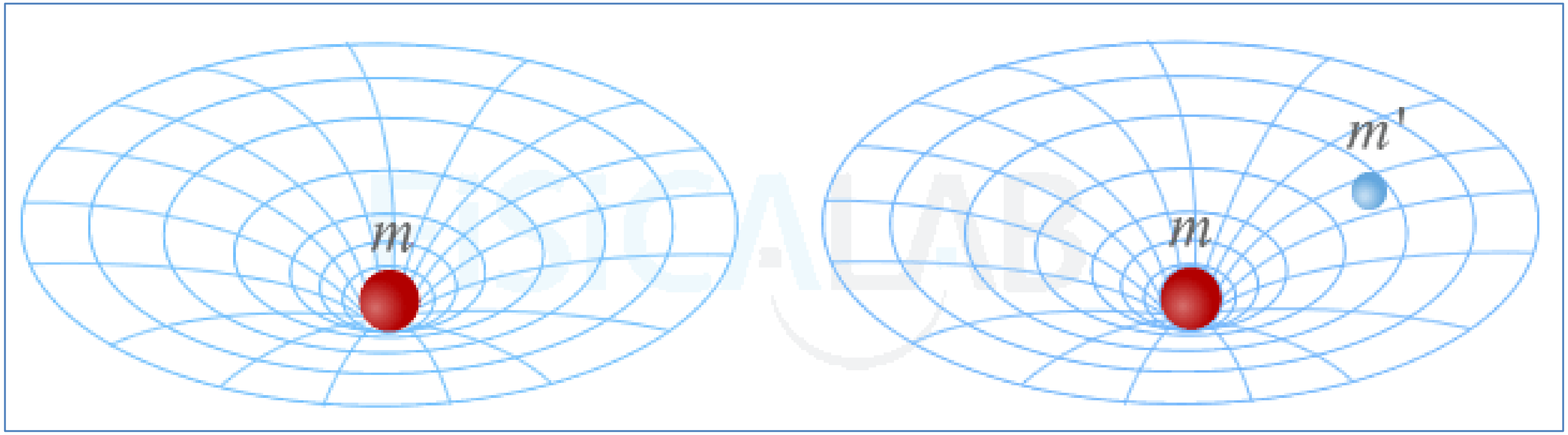
Carta de Newton a Richard Bentley (1693)

2ª **<u>Na ecuación de Newton non aparece a variabel "tempo"</u>**.

Como se trasmite a interación? Con que velocidade? Ten senso definir a interación gravitatoria de "instantanea"?

Campos de forzas

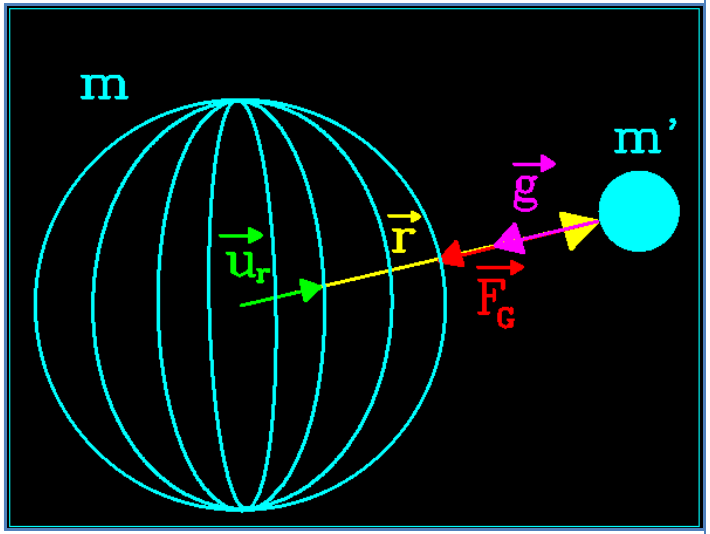
- Defínese campo de forzas como a perturbación que a presenza dun corpo produce no espazo circundante por causa da súa masa, a súa carga eletrica ou outra propiedade capaz de trasmitir interacións a distancia.
- Defínese CAMPO GRAVITACIONAL á perturbación que crea todo corpo material no seu espazo circundante polo mero feito de ter MASA.
- Na imaxe a masa **m** produce unha deformación, unha perturbación, no espazo circundante que provoca que a masa **m'** resulte "atraída".



Intensidade do campo gravitacional

- De acordo coa figura anterior, nun ponto do espazo que circunda á masa **m** a intensidade do seu campo é a forza gravitacional por unidade de masa.
- **A forza de atración entre m e m' será:**

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{m \cdot m'}{r^2}\, \vec{u}_r$$



- Enton, a forza por unidade de masa será:

$$\frac{\vec{F}}{m'} = \vec{g} = -G \cdot \frac{m}{r^2}\, \vec{u}_r$$

- É, polo tanto, un vetor dirixido hacia o centro do corpo creador do campo gravitatorio.
- As súas unidades no S.I serán, como é obvio, N/kg ou N.kg^{-1} e tamén, tendo en conta a definición da unidade de forza, pode ser identificada como unha aceleración (m/s^2 ou m.s^{-2}): a aceleración da gravedade.

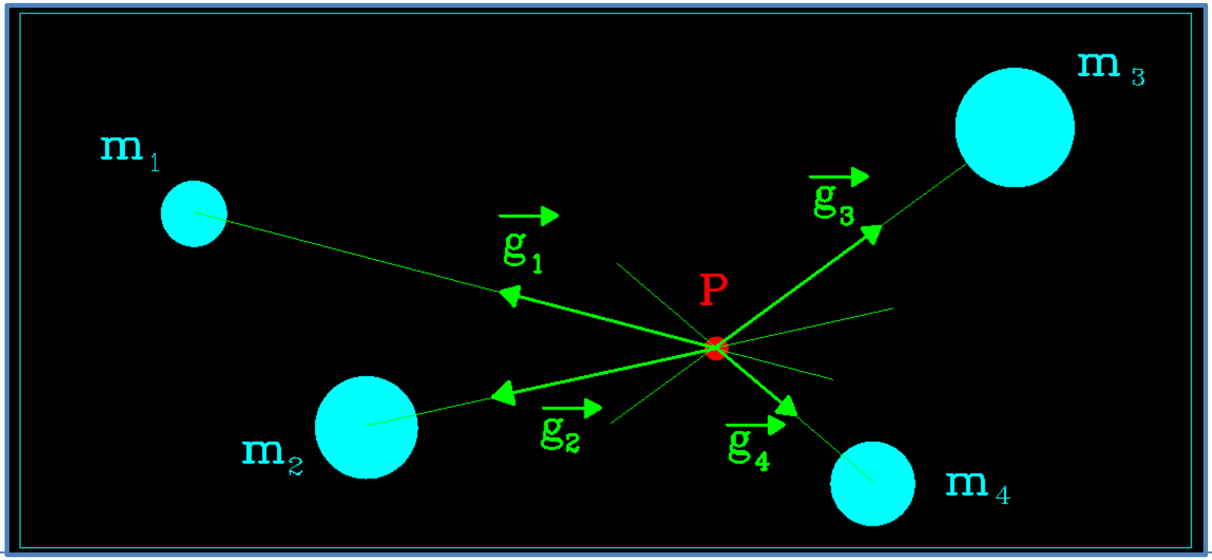
Intensidade do campo gravitacional: calculo

1) <u>Campo gravitatorio creado por unha masa nun ponto</u>.

Seguiremos as pautas do calculo vetorial , atendendo a se a direción coincide ou non con algún dos eixes de referencia.

2) <u>Campo gravitatorio creado por varias masas nun ponto</u>.

O campo gravitacional correspondente a un sistema de varias masa é a suma vetorial dos campos producidos individualmente por cada masa (principio de superposición)



Forza e movemento no campo gravitacional

- Se nunha rexión do espazo existe un campo gravitacional producida por unha masa **M** e introducimos nesa rexión unha masa de proba **m** esta experimenta unha forza que ven dada por:

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \overrightarrow{u_r}$$

- A relación entre forza e movemento ven definida polo 2º Principio : $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ expresión que igualada á anterior, permete obter:

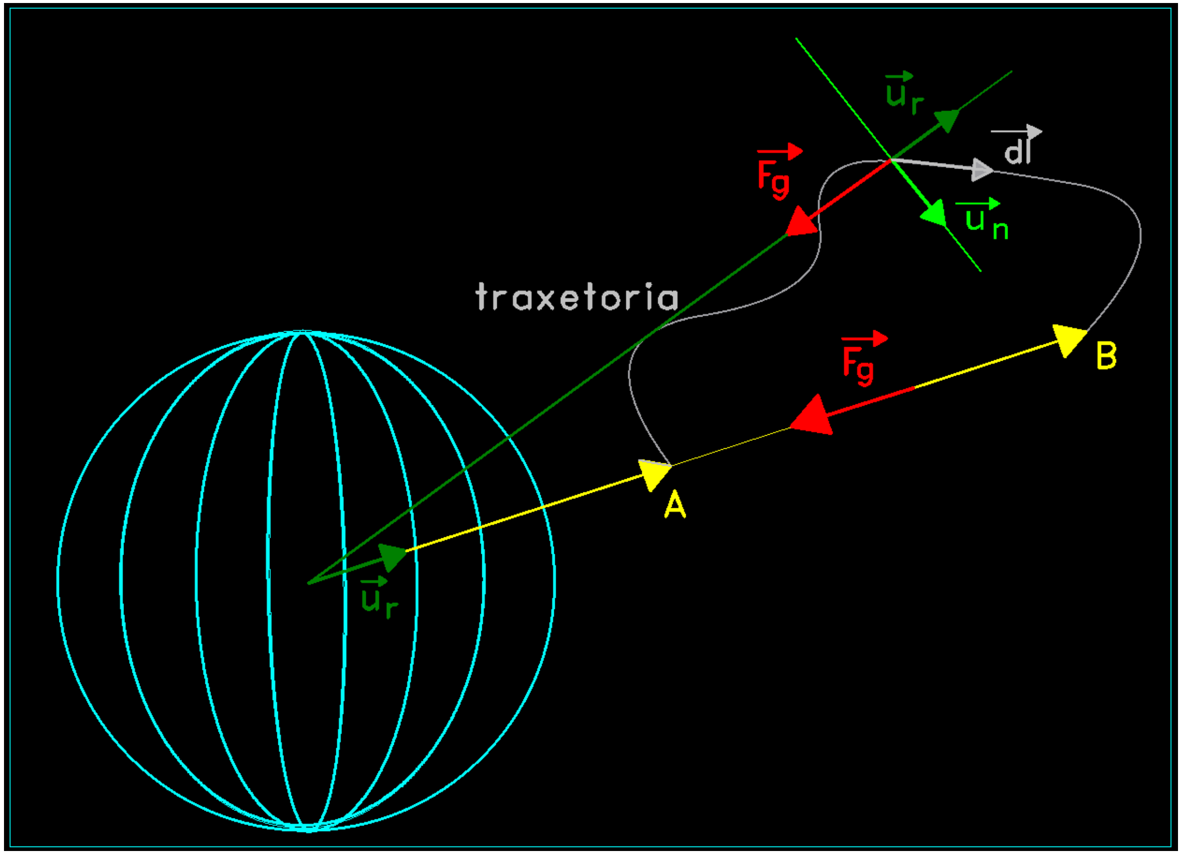
$$\vec{a} = -G \cdot \frac{M}{r^2} \overrightarrow{u_r} = \vec{g}$$

- Esta expresión confirma o carater de aceleración do vetor $\vec{g}$.
- Ao cabo podemos definir a forza **peso** como: $\vec{P} = \overrightarrow{F_g} = m \cdot \vec{g}$ que é a forza coa que **m** resulta atraída hacia o centro de **M**.
- A forza peso atúa como se toda a masa do corpo **M** estivera reunida nun único ponto: o seu centro.

Enerxía no campo gravitacional

O campo gravitatorio é un campo central e polo tanto é un campo conservativo.

1.-Recordemos que para comprobar que o campo é conservativo temos que demostrar que: $W_{ciclo} = W_{A\rightarrow B\rightarrow A} = 0$, ou tamén : $W_{A\rightarrow B} + W_{B\rightarrow A} = 0$



2.-Imos calcular :

$$W_{A\rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

Observa: cada percorrido $d\vec{l}$ pode ser descomposto en dúas componentes , unha seguindo o unitario $\vec{u}_r$, e outra en direción perpendicular normal á traxetoria seguindo $\vec{u}_n$, esta non realiza traballo. O resultado do produto escalar será:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dr \cdot \cos 180^0 = \\ = -F \cdot dr$$

Enerxía no campo gravitacional

2.-Resolto o produto escalar, só falta realizar a operación de integración:

$$W_{A\to B} = \int_A^B -\frac{G\cdot M\cdot m}{r^2}\cdot dr = -G\cdot M\cdot m\cdot\int_A^B \frac{dr}{r^2} = -G\cdot M\cdot m\cdot\left[-\frac{1}{r}\right]_A^B =$$

$$= -G\cdot M\cdot m\cdot\left[-\frac{1}{r_B}-\left(-\frac{1}{r_A}\right)\right] = -\left[-\frac{G\cdot M\cdot m}{r_b}-\left(-\frac{G\cdot M\cdot m}{r_A}\right)\right]$$

Definimos: $Ep_B = -\frac{G\cdot M\cdot m}{r_b}$ e $Ep_A = -\frac{G\cdot M\cdot m}{r_A}$

Polo tanto : $W_{A\to B} = -(Ep_B - Ep_A) = -\Delta Ep_A^B$

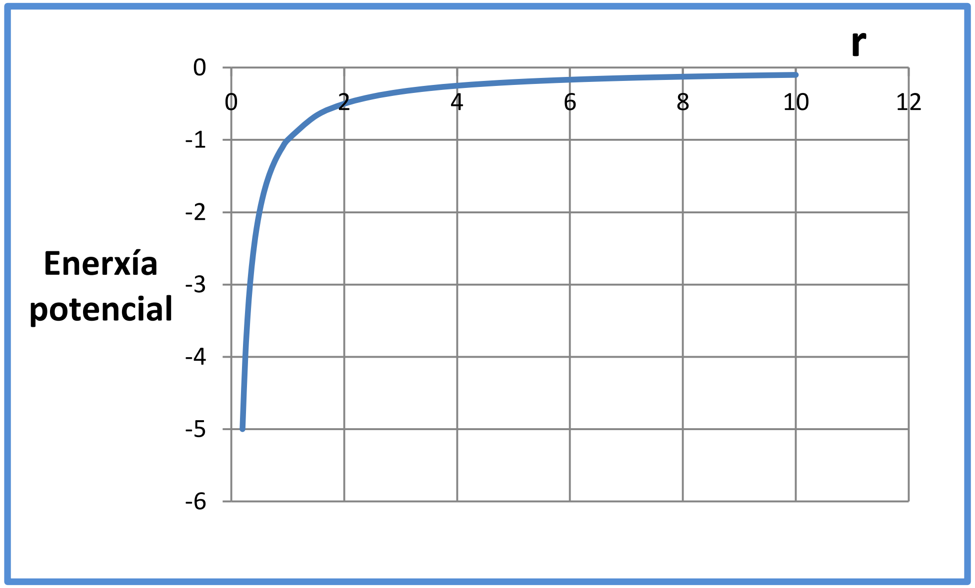
3.-É evidente que $W_{B\to A} = -(Ep_A - Ep_B) = -\Delta Ep_B^A$ e polo tanto :

$$W_{A\to B\to A} = 0$$

o campo gravitacional é conservativo

Variación da enerxía potencial coa distancia

- De acordo coa ecuación de definición, a enerxía potencial entre duas masas, cambia segundo a gráfica da figura:



- A gráfica indica que cando a distancia entre as masas é pequena a enerxía faise moi negativa, e cando a distancia é moi grande ("no infinito") a enerxía potencial acada o valor máximo: o valor cero.
- Ademais, como $W_{B\to A} = -(Ep_A - Ep_B) = -\Delta Ep_B^A$ acontecerá que se aumenta a enerxía potencial ($\Delta Ep_B^A > 0$) o traballo é negativo. E viceversa, se diminúe a enerxía potencial o traballo é positivo.

Potencial gravitacional

- Se temos un sistema formado por duas masas, m e m' ,enton podemos definir a súa enerxía potencial como:

$$Ep = -\frac{G \cdot m \cdot m'}{r}$$

- Agora ben, o valor desta magnitude non define o campo con exatitude por canto depende do valor de m'.
- Podemos definir unha nova magnitude, o potencial gravitacional (V_g) como:

$$V_g = \frac{Ep}{m'} \rightarrow V_g = -\frac{G \cdot m}{r}$$

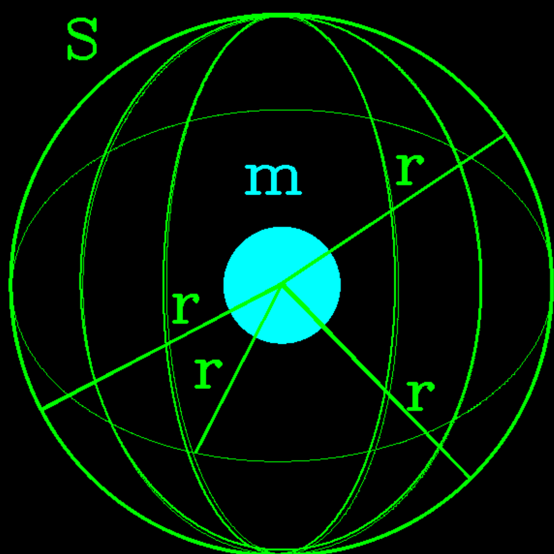
Que terá por unidades J/kg

- Esta magnitude só depende da masa que crea o campo e da distancia.
- A súa gráfica de variación coa distancia, será do mesmo tipo que a gráfica da enerxía potencial, é dicer, se a distancia é moi pequena, o potencial é moi negativo e se a distancia é moi grande, acada o valor cero, seu valor máximo.

Potencial gravitacional e superficies equipotenciais

A masa **m** crea arredor de si un campo gravitacional

A unha distancia **r** o potencial gravitacional:



$$V = -\frac{G.m}{r}$$

Todos os pontos da superficie **S** estan situados a mesma distancia, esa distancia e o raio **r** da esfera de superficie **S** .

Todos os pontos da superficie **S** teran polo tanto o mesmo potencial.

S e unha superficie equipotencial.

Conservación da enerxía nun campo gravitacional

- Vimos que nun campo gravitacional, para un corpo :

$W_{A\to B} = -(Ep_B - Ep_A) = -\Delta Ep_A^B$ que expresa a variación da enerxía potencial no campo.

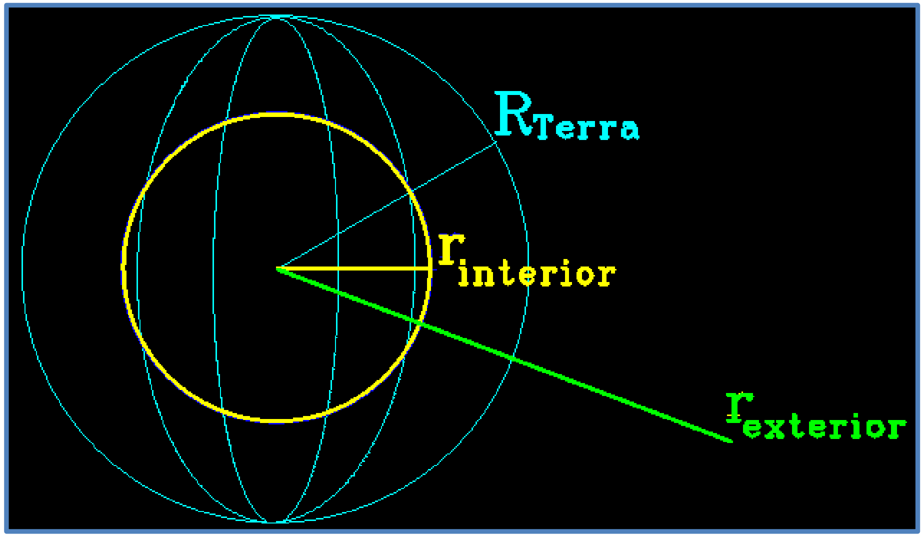
- Por outra banda: $W_{A\to B} = (Ec_B - Ec_A) = \Delta Ec_A^B$ que indica a variación da enerxía cinética do corpo.
- E igualando: $-\Delta Ep_A^B = \Delta Ec_A^B$

$$-(Ep_B - Ep_A) = (Ec_B - Ec_A)$$

$$Ec_A + Ep_A = Ec_B + Ep_B = E_{Mecánica}$$

Se un corpo se move dentro dun campo conservativo sometido ás súas forzas, a súa enerxía mecánica, suma das súas enerxías cinética e potencial, é constante.

Campo gravitacional da Terra: variación en función da posición



O campo gravitacional creado polo noso planeta, virá dado pola aplicación da expresión:

$$\vec{g} = -G \cdot \frac{m}{r^2}\, \vec{u}_r$$

<u>Nun ponto situado no exterior</u>, o seu valor virá dado, na expresión anterior pola simple sustitución dos valores da masa da Terra e a distancia r= R_{terra} + h

$$\vec{g} = -G \cdot \frac{m}{r^2}\, \vec{u}_r = -G\, \frac{M_T}{(R_T+h)^2}\vec{u}_r$$

E vemos que o valor do campo redúce-se coa distancia á superficie do planeta. <u>Na superficie da Terra </u>a distancia r é o raio da Terra, R e a masa é a masa total M_T. Ou sexa que na superficie: $\vec{g}_0 = -\frac{G \cdot M_T}{R_T^2}\vec{u}_r$, que considerando R=6370 km como constante, e o valor da masa da Terra, da o resultado ben coñecido de 9,8 N/kg ou 9,8 m/s^2.

<u>Nota</u>: o raio da Terra non é constante pois é maior no Ecuador que nos Polos, pero a diferenza é irrelevante

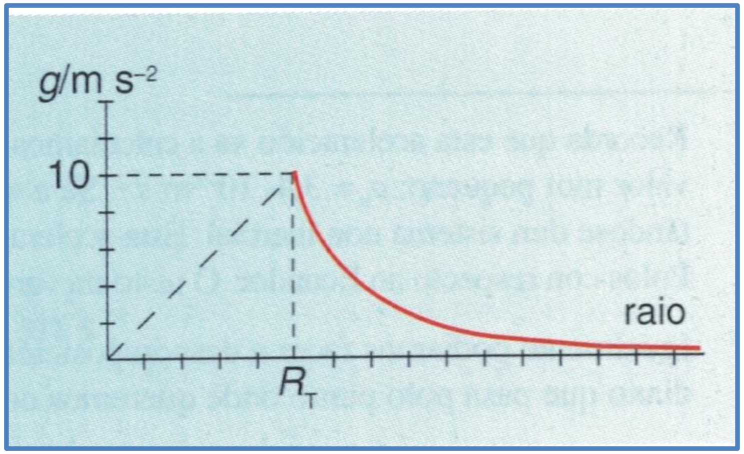
Campo gravitacional da Terra: variación en función da posición

Para estudar a variación do campo no interior do planeta, consideraremos o seu valor a unha distancia r_i do seu centro e aceitaremos que a densidade do planeta é constante . Nesas condicións :

$$\vec{g}_i = -G\,\frac{m_i}{r_i^2}\,\vec{u}_r (1)$$

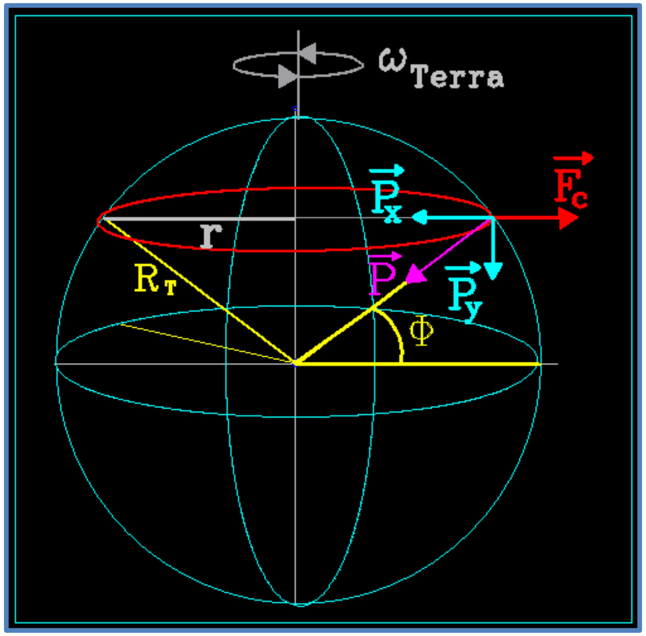
Se a densidade é constante: $\rho = \frac{m_i}{\frac{4}{3}\pi r_i^3} = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} \rightarrow \frac{m_i}{\frac{4}{3}\pi r_i^3} = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3}$ e simplificando esta expresión, obtemos: $\frac{m_i}{r_i^2} = \frac{M_T}{R_T^3} \cdot r_i$ e sustituíndo en (1):

$$\vec{g}_i = -G\,\frac{M_T}{R_T^3} \cdot r_i \cdot \vec{u}_r = -K \cdot r_i \cdot \vec{u}_r$$



A gráfica expresa a variación do módulo do campo gravitatorio dende o centro da Terra ate a superficie (valor máximo 10) e logo a súa redución paulatina a medida que aumenta a altura h.

Campo gravitacional da Terra: variación coa latitude



Sobre un corpo de masa **m** situado sobre a superficie da Terra, nun ponto de latitude **ϕ**, Atua unha forza resultante:

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{F}_c$$

que, descompoñendo a forza peso:

$$\vec{F} = \vec{P}_x + \vec{P}_y + \vec{F}_c$$

Se dividimos as forzas pola masa **m** obtemos unha expresión con aceleracións:

$$\vec{g}_T = \vec{g}_x + \vec{g}_y + \vec{a}_c \quad (1)$$

Nesa expresión teremos en conta:

1.- $\vec{a}_c = \frac{v^2}{r}\vec{\imath}$, na que $v = \frac{2\cdot\pi\cdot r}{T}$ e ademais $r = R_T \cdot cos\phi$,polo tanto : $\vec{a}_c = \frac{4\cdot\pi^2\cdot R_T\cdot cos\phi}{T^2}\vec{\imath}$

2.- $\vec{g}_x = -\frac{G\cdot M_T}{R_T^2}\cdot cos\phi\,\vec{\imath}$ e a outra componente: $\vec{g}_y = -\frac{G\cdot M_T}{R_T^2}\cdot sen\phi\,\vec{\jmath}$

Polo tanto a ecuación (1) : $\vec{g}_T = (\frac{4\cdot\pi^2\cdot R_T\cdot}{T^2} - \frac{G\cdot M_T}{R_T^2})\cdot cos\phi\,\vec{\imath} - \frac{G\cdot M_T}{R_T^2}\cdot sen\phi\,\vec{\jmath}$

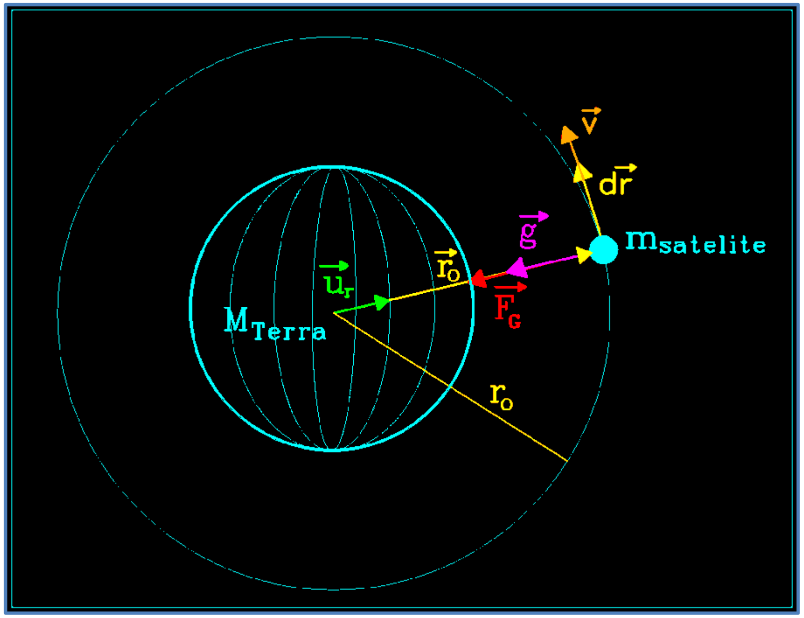
- Nos Polos como ϕ=90º , cos 90º=0 , sen 90º= 1 : $\vec{g}_T = -\frac{G\cdot M_T}{R_T^2}\cdot sen\phi\,\vec{\jmath}$ **máximo**
- No Ecuador: $\vec{g}_T = (\frac{4\cdot\pi^2\cdot R_T\cdot}{T^2} - \frac{G\cdot M_T}{R_T^2})\cdot cos\phi\,\vec{\imath}$ **mínimo**

Movemento de satélites arredor da Terra

1.- Dinámica dun satélite en órbita arredor da Terra.

Cando un satélite orbita arredor da Terra, nunha órbita circular de raio r_o e ademais a velocidade orbital será constante.

A forza gravitatoria proporciona aceleración centrípeta:



$\vec{F}_g = -G\frac{M_T \cdot m_s}{r_o^2}\vec{u}_r$ e $\vec{F}_c = -m_s\frac{v_o^2}{r_o}\vec{u}_r$

E igualando: $G\frac{M_T \cdot m_s}{r_o^2} = m_s\frac{v_o^2}{r_o}$ e podemos obter unha expresión para a velocidade orbital: $v_o^2 = \frac{G \cdot M_T}{r_o} = \frac{G \cdot M_T}{R_T + h}$ e tamén: $v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}}$ (1)

E tamén como $G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2$ enton tamén: $v_o = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{R_T + h}}$ (2)

Movemento de satélites arredor da Terra

Nesas condicións realiza un movemento circular e uniforme e a velocidade orbital é constante, a cantidade de movemento é constante e o momento angular tamén é constante.

$$v_o = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_o}{T_o} = \frac{2\pi \cdot (R_T + h)}{T_o} \quad (3)$$

Se combinamos (1) con (3) : $\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_o^2}{T_o^2} = \frac{G \cdot M_T}{r_0} \rightarrow \frac{r_o^3}{T_o^2} = \frac{G \cdot M_T}{4 \cdot \pi^2}$ 3ª Lei de Kepler

Ademais $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \rightarrow$ a forza non realiza traballo ($E_{cin.}$=constante)

Podemos calcular a velocidade areolar: $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2 \cdot m_s}$ e $L = m_s \cdot v_o \cdot r_o$ e enton obtemos: $\frac{dA}{dt} = \frac{v_o \cdot r_o}{2}$ e como $v_o = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_o}{T_o}$ enton: $\frac{dA}{dt} = \frac{\pi \cdot r_o^2}{T_0}$ (ver nota)

A Enerxía mecánica na órbita: $E_M = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot v_o^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{r_o}$ e se temos en conta a ecuación (1): $E_M = -\frac{1}{2} G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{r_o} = -\frac{1}{2} G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R_T + h}$

Nota: se a órbita é elíptica nin a velocidade nin o raio da órbita son constantes, máis si o momento angular e polo tanto: $L_{apoxeo} = L_{perixeo} \rightarrow r_{ap.} \cdot m \cdot v_{ap.} = r_{pe} \cdot m \cdot v_{pe}$

Movemento de satélites arredor da Terra

2.-Velocidade de escape da Terra, é a velocidade mínima necesaria para que un corpo escape do campo gravitacional terrestre.

- Na superficie da Terra: $E_M = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{escape}^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T}$
- Nun ponto lonxe do campo gravitacional: $E_M = 0$ e igualando:

$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{escape}^2 = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T}$ e velai enton: $v_{escape} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R_T}}$

3.-Velocidade de posta en órbita, é a velocidade mínima precisa para situar ao satélite nunha órbita de raio r_o.

- Na superficie da Terra: $E_M = E_c + E_p = W_{exterior} - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T}$
- Na órbita: $E_{M.órbita} = -\frac{1}{2} G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{r_o} = -\frac{1}{2} G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R_T + h}$
- E polo tanto: $W_{exterior} = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T} - \frac{1}{2} G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R_T + h}$
- E claro: $W_{exterior} = E_{c.lanzamento} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{lanzamento}^2$

Movemento de satélites arredor da Terra

4.-Enerxía de escape dende unha órbita.

É a enerxía necesaria para dende unha órbita, lanzar un satélite hacia o infinito, é dicer, ata outro ponto no que a enerxía potencial é 0 e ademais chega alí con velocidade igual a 0, en sma: $E_M = 0$.

Na órbita: $E_M = -\frac{1}{2} G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{r_o} = -\frac{1}{2} G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R_T + h}$, á que teremos que sumar a enerxía de escape que será un traballo exterior, $W_{escape} = W_{exterior}$.

Polo tanto: $-\frac{1}{2} G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{r_o} + W_{exterior} = 0 \rightarrow W_{exterior} = \frac{1}{2} G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{r_o}$

Como o traballo de escape é enerxía cinética que hai que proporcionar ao satélite, podemos igualar:

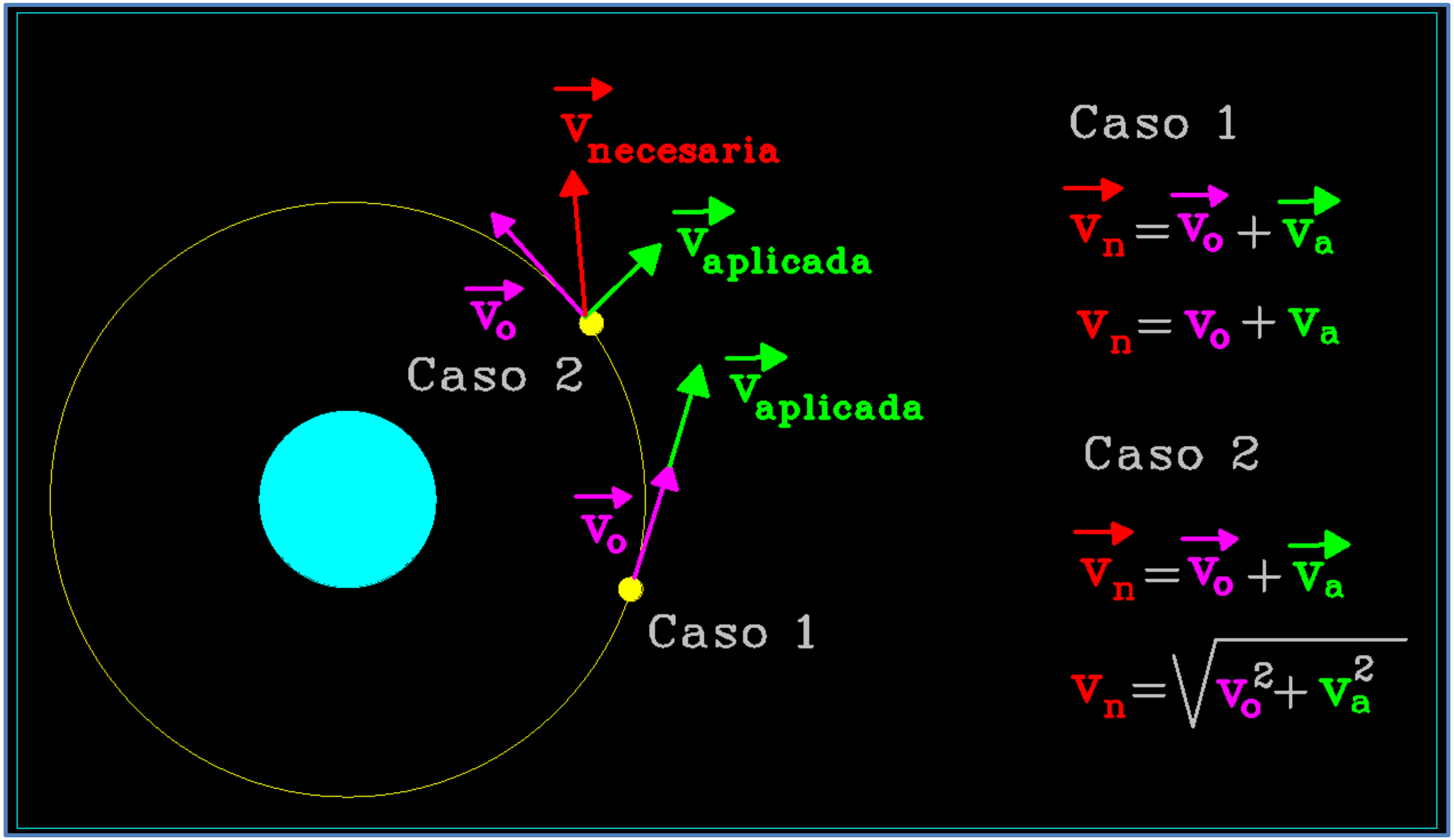
$$\frac{1}{2} G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{r_o} = E\ cinética = W_{exterior}$$

Deste xeito calculamos a enerxía que temos que aplicar.

Pero, cal debe ser a direción de aplicación da velocidade? Ate que ponto podemos prescindir da direción dos vetores?

Movemento de satélites arredor da Terra

Para determinar a dirección da velocidade a aplicar, teremos que tomar en conta que o satélite está xa en movemento na órbita coa súa propia velocidade. Podemos considerar os dous casos límite da figura.



Movemento de satélites arredor da Terra

5.- Enerxía de cambio de órbita.

É a enerxía necesaria para levar un satélite dende unha primeira órbita de raio r_1 a outra órbita de raio r_2.

- Na órbita 1 : $E_{M.órbita\ 1} = E_{M1} = -\frac{1}{2} G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{r_1}$
- Na órbita 2 : $E_{M.órbita\ 2} = E_{M2} = -\frac{1}{2} G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{r_2}$
- O traballo exterior: $W_{Ext} = E_{M2} - E_{M1} = -\frac{1}{2} G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{r_2} + \frac{1}{2} G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{r_1}$

Que tamén podemos expresar como:

$$W_{Ext} = \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{2} \cdot (\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$$

- O W_{ext} será a enerxía cinética necesaria. En canto á direción da velocidade aplicada, estaremos no mesmo caso que o anterior e poderíamos aplicar os mesmos critérios do apartado anterior.