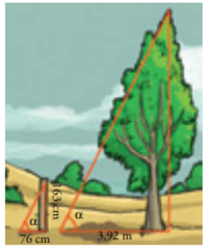
TRIGONOMETRÍA

1 Razones trigonométricas de un ángulo agudo



Como hemos visto en la página anterior, la razón entre la altura y la sombra de la estaca (163/76) es igual a la razón entre la altura y la sombra del árbol. De esta forma, podemos hallar la altura de un chopo multiplicando la longitud de su sombra, 3,92 m, por 163/76. Este cociente es lo que aquí estamos llamando tangente del ángulo α.

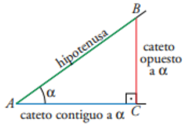
La trigonometría se basa en la semejanza de triángulos rectángulos:

La razón entre dos lados de un triángulo rectángulo es igual a la razón entre los lados correspondientes de cualquier otro triángulo semejante a él.

En adelante, nos disponemos a estudiar todas las posibles razones entre dos de los lados de un triángulo rectángulo.

Seno, coseno y tangente de un ángulo

Sobre un ángulo agudo, α, como el de la derecha, construimos un triángulo rectángulo, *ABC*.



Observa las siguientes relaciones llamadas **razones trigonométricas** del ángulo α.

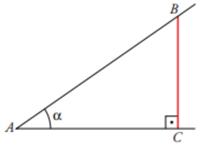
seno de $\alpha = \dfrac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}$ $\quad sen\ \alpha = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$

coseno de $\alpha = \dfrac{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}$ $\quad cos\ \alpha = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

tangente de $\alpha = \dfrac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha}$ $\quad tg\ \alpha = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$

En la web

Visualización de las razones trigonométricas de un ángulo agudo.



Cálculo gráfico (aproximado) de razones trigonométricas

La propia definición nos proporciona un método para calcular las razones trigonométricas de un ángulo agudo.

- Se dibuja un ángulo. Por ejemplo, 34°.
- Desde un punto, *B*, de uno de los lados se traza una perpendicular al otro lado. De este modo se forma un triángulo rectángulo *ABC*.
- Se miden los lados del triángulo. En nuestro ejemplo:
  $\overline{AC} = 41$ mm, $\overline{BC} = 28$ mm, $\overline{AB} = 50$ mm
- Con estos datos, calculamos las razones trigonométricas del ángulo, 34°:

$sen\ \alpha = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \dfrac{28}{50} = 0,56;\quad cos\ \alpha = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{41}{50} = 0,82;\quad tg\ \alpha = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \dfrac{28}{41} = 0,68$

Las medidas tomadas son aproximadas, por lo que las relaciones también lo son.

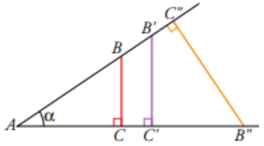
1. Dibuja sobre un ángulo como el anterior, 34°, un triángulo rectángulo de tal modo que $\overline{AB} = 100$ mm.

Halla sus razones trigonométricas y observa que obtienes, aproximadamente, los mismos valores que en el ejemplo de arriba.

Solución: $sen\ 34° = 0,56;\quad cos\ 34° = 0,83;\quad tg\ 34° = 0,67$

https://www.youtube.com/watch?v=--c9ANhFvv0&feature=youtu.be

Las razones trigonométricas dependen del ángulo, no del triángulo



¿Qué pasaría si sobre un mismo ángulo α trazáramos varios triángulos rectángulos distintos?

Ya vimos en el ejercicio 1 de la página anterior que las razones trigonométricas de 34° obtenidas son las mismas, salvo pequeñas diferencias debidas a imprecisiones en la medida. Demostremos, basándonos en la semejanza de triángulos, que lo mismo ocurre para cualquier ángulo α:

	EN *ABC*	EN *AB'C'*	EN *AB''C''*
sen α	$\overline{BC}/\overline{AB}$	$\overline{B'C'}/\overline{AB'}$	$\overline{B''C''}/\overline{AB''}$

Los triángulos *ABC*, *AB'C'* y *AB''C''* son semejantes, ya que son rectángulos y tienen un ángulo agudo igual. Por ello:

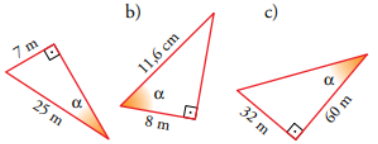
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{B''C''}}{\overline{AB''}}$$

Es decir, es indiferente calcular el *seno* sobre cualquiera de los triángulos.

Y lo mismo se puede decir para el *coseno* y para la *tangente*.

1. Halla las razones trigonométricas del ángulo α en cada uno de estos triángulos:

a) b) c)



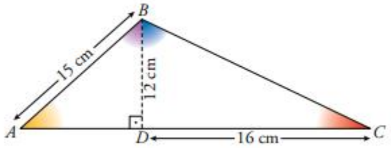
2. Halla las razones trigonométricas de los ángulos agudos de los siguientes triángulos rectángulos ($\hat{A} = 90°$):

a) $b = 56$ cm; $a = 62,3$ cm

b) $b = 33,6$ cm; $c = 4,5$ cm

c) $c = 16$ cm; $a = 36$ cm

3. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{C}$, $\widehat{ABD}$ y $\widehat{CBD}$.



Solución:

1

	sen α	cos α	tg α
a)	0,28	0,96	0,29
b)	0,724	0,69	1,05
c)	0,47	0,88	0,53

2 a) $sen\ \hat{B} = 0,90;\ cos\ \hat{B} = 0,438;\ tg\ \hat{B} = 2,051$

$sen\ \hat{C} = 0,438;\ cos\ \hat{C} = 0,90;\ tg\ \hat{C} = 0,4875$

b) $sen\ \hat{B} = 0,991;\ cos\ \hat{B} = 0,133;\ tg\ \hat{B} = 7,467$

$sen\ \hat{C} = 0,133;\ cos\ \hat{C} = 0,991;\ tg\ \hat{C} = 9,955$

c) $sen\ \hat{B} = 0,896;\ cos\ \hat{B} = 0,\hat{4};\ tg\ \hat{B} = 2,016$

$sen\ \hat{C} = 0,\hat{4};\ cos\ \hat{C} = 0,896;\ tg\ \hat{C} = 0,496$

3

	$\hat{A}$	$\hat{B}$	$\widehat{ABD}$	$\widehat{CBD}$
sen	0,8	0,6	0,6	0,8
cos	0,6	0,8	0,8	0,6
tg	$1,\hat{3}$	0,75	0,75	$1,\hat{3}$

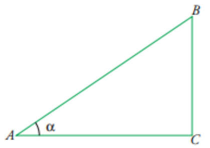
2 Relaciones trigonométricas fundamentales

Notación

En lugar de $(sen\ \alpha)^2$ se suele poner $sen^2\ \alpha$. Del mismo modo:

$(cos\ \alpha)^2 = cos^2\ \alpha$ y $(tg\ \alpha)^2 = tg^2\ \alpha$

A pesar de la costumbre, y para evitar confusiones, utilizaremos durante este curso la expresión con paréntesis.



Los valores de *sen*, *cos* y *tg* de un mismo ángulo no son independientes, sino que están relacionados, de tal modo que *conociendo uno de ellos, podemos calcular los otros dos*. Las relaciones que los ligan son las siguientes (se las suele llamar **relaciones fundamentales**):

$$(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \quad [I] \qquad \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha \quad [II]$$

Estas igualdades son fáciles de demostrar:

$$[I]\ (sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right)^2 = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} \overset{(*)}{=} \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AB}^2} = 1$$

(*) Por el teorema de Pitágoras, se cumple que $\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$.

$$[II]\ \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} : \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = tg\ \alpha$$

En los siguientes ejercicios resueltos vemos cómo, conocida una razón trigonométrica de un ángulo, se pueden calcular las otras dos.

Ejercicios resueltos

1. ***Sabiendo que*** $cos\ \alpha = 0{,}63$***, calcular*** $s = sen\ \alpha$ ***y*** $t = tg\ \alpha$.

Mediante la igualdad I, conocido *sen* α obtenemos *cos* α, y viceversa.

$$s^2 + 0{,}63^2 = 1 \to s^2 = 1 - 0{,}63^2 = 0{,}6031 \to s = \sqrt{0{,}6031} = 0{,}777$$

(Solo tomamos la raíz positiva, porque *sen* α ha de ser positivo).

$$t = \frac{0{,}777}{0{,}63} = 1{,}23$$

Solución: $sen\ \alpha = 0{,}777 \quad tg\ \alpha = 1{,}23$

2. ***Sabiendo que*** $tg\ \alpha = 2$***, calcular*** $s = sen\ \alpha$ ***y*** $c = cos\ \alpha$.

Mediante las igualdades I y II, conocida *tg* α se obtienen, resolviendo un sistema de ecuaciones, los valores de *sen* α y *cos* α:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{s}{c} = 2 \\ s^2 + c^2 = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} s = 2c \\ (2c)^2 + c^2 = 1 \to 4c^2 + c^2 = 1 \to 5c^2 = 1 \end{array}$$

$$c^2 = \frac{1}{5} \xrightarrow[\text{la raíz positiva}]{\text{solo tomamos}} c = \frac{1}{\sqrt{5}} \xrightarrow{\text{racionalizando}} c = \frac{\sqrt{5}}{5};\ s = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Solución: $sen\ \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0{,}894 \qquad cos\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} = 0{,}447$

Piensa y practica

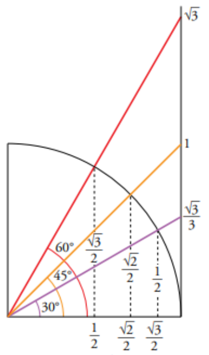
1. $sen\ \alpha = 0{,}6$. Calcula $cos\ \alpha$ y $tg\ \alpha$.

2. $tg\ \beta = 0{,}53$. Calcula $sen\ \beta$ y $cos\ \beta$.

1 $cos\ \alpha = 0{,}8;\ \ tg\ \alpha = 0{,}75$

2 $sen\ \beta = 0{,}47;\ \ cos\ \beta = 0{,}88$

https://www.youtube.com/watch?v=MxTuWI6NFi0&feature=youtu.be



Localiza en la gráfica las razones que aparecen en la tabla.

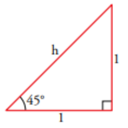
	sen	cos	tg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°

Los triángulos rectángulos cuyos ángulos agudos son 45°, 30° o 60° aparecen con mucha frecuencia, por lo que resultan especialmente interesantes en geometría. Vamos a hallar las razones trigonométricas de estos ángulos.

■ RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 45°

La hipotenusa de este triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden 1 es:



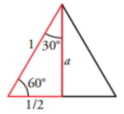
$$h = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Por tanto:

$$sen\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad tg\ 45° = 1$$

■ RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 30° Y DE 60°

Calculamos la altura de este triángulo equilátero de lado 1:



$$a = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por tanto:

$$sen\ 30° = \frac{1}{2} \qquad cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad tg\ 30° = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos\ 60° = \frac{1}{2} \qquad tg\ 60° = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

Piensa y practica

3. Teniendo en cuenta que $tg\ 45° = 1$, deduce el valor de $sen\ 45°$ y de $cos\ 45°$ mediante las relaciones fundamentales.

4. Teniendo en cuenta que $sen\ 30° = 1/2$, halla el valor de $cos\ 30°$ y de $tg\ 30°$ mediante las relaciones fundamentales.

5. Calcula el seno y la tangente de un ángulo cuyo coseno vale 0,8.

6. Halla el seno y el coseno de un ángulo cuya tangente vale 0,7.

7. Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla de razones trigonométricas:

sen α	0,94		4/5			
cos α		0,82			$\sqrt{3}/2$	
tg α				3,5		1

En las operaciones donde aparezcan fracciones o radicales, trabaja con ellos; no utilices su expresión decimal.

3 $cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \to sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4 $cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \ tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

5 $sen\ \alpha = 0{,}6;\ \ tg\ \alpha = 0{,}75$

6 $sen\ \alpha = 0{,}57;\ \ cos\ \alpha = 0{,}82$

7

sen α	cos α	tg α
0,94	0,67	2,76
0,57	0,82	0,69
$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{3}$

0,96	0,24	3,5
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

4. Si $sen\ \alpha = 0{,}28$, calcula $cos\ \alpha$ y $tg\ \alpha$ utilizando las relaciones fundamentales ($\alpha < 90°$).

5. Halla el valor exacto (con radicales) de $sen\ \alpha$ y $tg\ \alpha$ sabiendo que $cos\ \alpha = 2/3$ ($\alpha < 90°$).

6. Si $tg\ \alpha = \sqrt{5}$, calcula $sen\ \alpha$ y $cos\ \alpha$ ($\alpha < 90°$).

4 $cos\ \alpha = 0{,}96;\ \ tg\ \alpha = 0{,}292$

5 $sen\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3};\ \ tg\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$

6 $sen\ \alpha = \frac{\sqrt{30}}{6};\ \ cos\ \alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$

8. Calcula el valor de las siguientes expresiones sin utilizar la calculadora:

a) $sen\ 45° - cos\ 45°$ b) $sen\ 30° + cos\ 60°$

c) $sen\ 30° + cos\ 30°$ d) $tg\ 30° + tg\ 60°$

e) $tg\ 45° - cos\ 60°$ f) $tg\ 45° + sen\ 45°$

8 a) 0   b) 1

c) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

3 Utilización de la calculadora en trigonometría

Teclas trigonométricas

Para el cálculo y el manejo de las razones trigonométricas, hasta ahora solo hemos utilizado las operaciones aritméticas de la calculadora: [+] [−] [×] [÷] y [√].

En este apartado vamos a aprender a manejar las teclas específicamente trigonométricas.

Las calculadoras científicas nos dan directamente el valor del seno, del coseno o de la tangente de cualquier ángulo. También nos dicen cuál es el ángulo del que conocemos el valor de una de sus razones trigonométricas.

Veamos, paso a paso, cómo se recurre a la calculadora para trabajar en trigonometría.

■ **SELECCIÓN DEL MODO DEG (GRADOS SEXAGESIMALES)**

Las calculadoras manejan tres unidades de medida de ángulos:

- Grados sexagesimales (DEG). Son los que utilizamos normalmente.
- Grados centesimales (GRA). Un ángulo recto tiene 100 grados centesimales. Nunca usaremos esta unidad de medida.
- Radianes (RAD). Esta unidad de medida de ángulos está relacionada con el estudio funcional de las razones trigonométricas (funciones trigonométricas).

En este curso utilizaremos, casi siempre, los grados sexagesimales. Por tanto, selecciona en la calculadora el modo DEG, a partir de la tecla [MODE] o [SETUP], según el modelo de calculadora.

■ **ANOTAR UN ÁNGULO. TECLA [°' "]**

Para escribir el ángulo 38° 25' 36'', se procede así:

38 [°' "] 25 [°' "] 36 [°' "] [38.42666667]   [SHIFT] [°' "] [38°25°36]

Se anota el ángulo en forma decimal   Se expresa el ángulo en forma sexagesimal

En las CALCULADORAS DE PANTALLA DESCRIPTIVA se procede del mismo modo (el ángulo sale directamente en forma sexagesimal):

38 [°' "] 25 [°' "] 36 [°' "] [=] [38°25°36° / 38°25'36'']

Atención

En algunas calculadoras antiguas, las teclas de las razones trigonométricas y sus inversas se pulsan después del número correspondiente.

Para hallar *sen* 47°:

47 [sin]

■ **CÁLCULO DE UNA RAZÓN TRIGONOMÉTRICA. TECLAS [sin] [cos] [tan]**

Para calcular *sen* (47° 25'), se procede así:

[sin] 47 [°' "] 25 [°' "] [47.41666667] [=] [0.736295121]

Es decir, *sen* 47° 25' = 0,736

Análogamente, se procede con coseno, [cos], y tangente, [tan].

Piensa y practica

1. Obtén las siguientes razones trigonométricas y escribe en tu cuaderno los resultados redondeando a las milésimas.

a) *sen* 86°   b) *cos* 59°   c) *tg* 22°   d) *sen* 15° 25' 43''   e) *cos* 59° 27'   f) *tg* 86° 52'   g) *sen* 10° 30'' (atención, 10° 0' 30'')

■ **FUNCIONES INVERSAS:** [sin^{-1}] ([SHIFT] [sin]), [cos^{-1}] ([SHIFT] [cos]), [tan^{-1}] ([SHIFT] [tan])

¿Cuál es el ángulo cuyo seno vale 0,5? Sabemos que es 30°. La forma de preguntárselo a la calculadora es esta:

[SHIFT] [sin] 0,5 [=] [30]

Análogamente:

cos α = 0,56 → ¿α? → [SHIFT] [cos] 0,56 [=] [SHIFT] [°' "] [55°56°39.13]

tg α = 3 → ¿α? → [SHIFT] [tan] 3 [=] [SHIFT] [°' "] [71°33°54.18]

Cálculo de una razón conociendo otra

Sabemos que cos α = 0,63. *¿Cuánto vale tg* α*?*

Para resolver este problema, tuvimos que recurrir a las igualdades fundamentales (página 146). Ahora podemos hacerlo directamente con las teclas trigonométricas de la calculadora:

[SHIFT] [cos] 0,63 [=] [50.9498774] [tan] [=] [1.23269068]

Ángulo cuyo coseno es 0,63   Su tangente es

Recuerda

[Ans] es un lugar de memoria donde se sitúa el último resultado obtenido.

Con las CALCULADORAS DE PANTALLA DESCRIPTIVA podemos proceder análogamente:

[SHIFT] [cos] 0,63 [=] [cos^{-1}(0.63 / 50.9498774] [tan] [Ans] [=] [TAN(Ans / 1.23269068]

Pero también se puede hacer directamente:

[tan] [SHIFT] [cos] 0,63 [=] [TAN(cos^{-1}(0.63 / 1.23269068]   La tangente del ángulo cuyo coseno es 0,63 vale 1,23269…

En la web

Refuerza el uso de la calculadora en trigonometría.

Ejercicio resuelto

Sabemos que tg* α *= 2. ¿Cuánto vale cos* α*?

[SHIFT] [tan] 2 [=] [63.4349488229] [cos] [=] [0.4472135955] → *cos* α = 0,447

El ángulo cuya tangente es 2   El coseno de ese ángulo

Con PANTALLA DESCRIPTIVA: [cos] [SHIFT] [tan] 2 [=] [COS(TAN^{-1}(2 / .4472135955]

Piensa y practica

2. Da el valor del ángulo α en forma sexagesimal, en cada caso:

a) *sen* α = 0,91   b) *tg* α = 5,83   c) *cos* α = 0,42   d) *tg* α = 0,34   e) *sen* α = 0,08   f) *cos* α = 0,88

3. a) Calcula *sen* α sabiendo que *cos* α = 0,91.

b) Calcula *cos* α sabiendo que *tg* α = 6,41.

c) Calcula *tg* α sabiendo que *cos* α = 0,06.

d) Calcula *tg* α sabiendo que *cos* α = 0,96.

e) Calcula *sen* α sabiendo que *tg* α = 0,1.

10. Halla el ángulo α < 90° en cada caso. Exprésalo en grados, minutos y segundos.

a) *sen* α = 0,58   b) *cos* α = 0,75   c) *tg* α = 2,5

d) *sen* α = $\frac{\sqrt{5}}{3}$ e) *cos* α = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ f) *tg* α = $3\sqrt{2}$

11. Halla, con la calculadora, las otras razones trigonométricas del ángulo α < 90° en cada uno de los casos siguientes:

a) *sen* α = 0,23   b) *cos* α = 0,74   c) *tg* α = 1,75

d) *sen* α = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e) *tg* α = $\sqrt{3}$ f) *cos* α = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Soluciones:

10 a) 35° 27' 2''   b) 41° 24' 35''
c) 68° 11' 55''   d) 48° 11' 23''
e) 54° 44' 8''   f) 76° 44' 14''

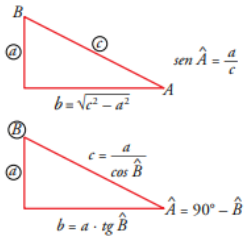
11 a) cos α = 0,97; tg α = 0,24   b) sen α = 0,67; tg α = 0,91
c) sen α = 0,87; cos α = 0,5   d) cos α = 0,71; tg α = 1
e) sen α = 0,87; cos α = 0,5   f) sen α = 0,5; tg α = 0,58

4 Resolución de triángulos rectángulos

En la web Hoja de cálculo para resolver triángulos rectángulos.

Resolver un triángulo es hallar uno o más elementos desconocidos (lados o ángulos) a partir de algunos elementos conocidos.

Las razones trigonométricas nos permiten resolver cualquier triángulo rectángulo.



■ **CONOCIDOS DOS LADOS**

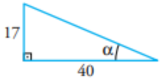
- El tercer lado se obtiene mediante el teorema de Pitágoras.
- Cada uno de los ángulos agudos se halla a partir de la razón trigonométrica que lo relaciona con los dos lados conocidos.

■ **CONOCIDOS UN LADO Y UN ÁNGULO**

- Otro lado se halla mediante la razón trigonométrica que lo relaciona con el lado y el ángulo conocidos.
- El otro ángulo agudo es complementario del que conocemos.

Ejercicios resueltos

1. ***Los dos catetos de un triángulo miden 17 cm y 40 cm. Hallar los ángulos del triángulo.***



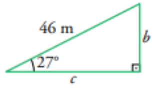
El ángulo α se relaciona con los dos catetos mediante su tangente: $tg\ \alpha = \frac{17}{40} = 0,425$

Hallamos con la calculadora el ángulo cuya tangente es 0,425:

SHIFT tan 0,425 = SHIFT °'" 23°1°31.77. Es decir, $\alpha = 23°\ 1'\ 32''$.

El otro ángulo es su complementario: $90° - 23°\ 1'\ 32'' = 66°\ 58'\ 28''$

2. ***En un triángulo rectángulo, un ángulo agudo mide 27° y la hipotenusa, 46 m. Hallar los dos catetos.***

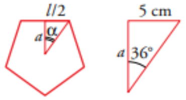


b es el cateto opuesto al ángulo de 27°. Por tanto:

$sen\ 27° = \frac{b}{46} \to b = 46 \cdot sen\ 27° = 20,88$ m

Análogamente: $cos\ 27° = \frac{c}{46} \to c = 46 \cdot cos\ 27° = 40,99$ m

3. ***¿Cuánto mide la apotema de un pentágono regular de lado 10 cm?***



$\alpha = 360° : 10 = 36°$

$tg\ 36° = \frac{5}{a} \to a = \frac{5}{tg\ 36°} = 6,88$

La apotema mide 6,9 cm.

Piensa y practica

En la web Refuerza la resolución de triángulos rectángulos.

1. Los dos catetos de un triángulo rectángulo miden 48 cm y 71 cm. Halla los dos ángulos agudos.
2. En un triángulo rectángulo, un ángulo agudo mide 37°, y el cateto opuesto, 87 m. Halla el otro cateto y la hipotenusa.
3. Calcula el radio de un octógono regular de 20 cm de lado. ¿Cuánto mide su apotema?
4. Halla la apotema de un heptágono regular de 10 cm de radio. Calcula también la longitud del lado.

13. Cuando los rayos del sol forman 40° con el suelo, la sombra de un árbol mide 18 m. ¿Cuál es su altura?

14. Una escalera de 3 m está apoyada en una pared. ¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo si su base está a 1,2 m de la pared?

15. Calcula el perímetro y el área de un triángulo isósceles en el que el ángulo desigual mide 72° y la medida del lado opuesto a ese ángulo es de 16 m.

19. Una cometa está sujeta al suelo mediante un hilo que mide 50 m y que forma con la horizontal un ángulo de 60°. ¿A qué altura está la cometa?

24. El lado de un rombo mide 8 cm y el ángulo menor es de 38°. ¿Cuánto miden las diagonales del rombo?

26. En una carretera de montaña, una señal indica una altitud de 785 m. Tres kilómetros más adelante, la altitud es de 1 065 m. Halla la pendiente media de la carretera y el ángulo que forma con la horizontal.

1 $\alpha = 34°\ 3'\ 39{,}27''$; $\beta = 55°\ 86'\ 51{,}73''$

2 Otro cateto → 115,45 m

Hipotenusa → 144,56 m

3 $r = 26,13$ cm

apotema = 24,14 cm

4 El lado mide 8,68 cm y la apotema mide 9 cm.

13 El árbol mide 1,51 m.

14 $\alpha = 66°\ 25'\ 19''$

15 Perímetro = 43,2 m

Área = 88,1 m^2

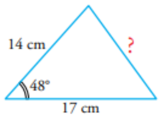
19 Está a $25\sqrt{3}$ m de altura.

24 La diagonal menor mide 5,2 cm, y la mayor, 15,12 cm.

26 9,3%

Comprueba tus resultados!

5 Resolución de triángulos oblicuángulos



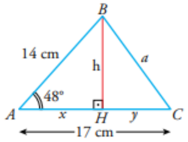
■ **PROBLEMA 1**

El triángulo del margen no es rectángulo. Para obtener el lado desconocido, lo partimos, mediante la altura, en dos triángulos rectángulos con un lado común:

- El triángulo ABH es rectángulo. En él conocemos la hipotenusa y un ángulo agudo. Podemos calcular los dos catetos:

$sen\ 48° = \frac{h}{14} \to h = 14 \cdot sen\ 48° = 10{,}4$ cm

$cos\ 48° = \frac{x}{14} \to x = 14 \cdot cos\ 48° = 9{,}37$ cm



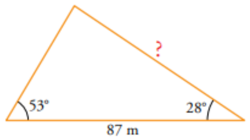
- En el triángulo rectángulo BHC conocemos $\overline{BH} = h = 10{,}4$ cm y podemos calcular muy fácilmente $\overline{HC} = y = 17 - x = 17 - 9{,}37 = 7{,}63$ cm.

Conocidos los dos catetos, calculamos la hipotenusa:

$$a = \sqrt{h^2 + y^2} = \sqrt{10{,}4^2 + 7{,}63^2} = 12{,}9 \text{ cm}$$

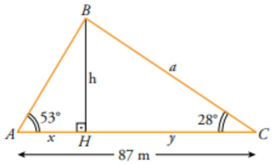
Reflexión del problema 1

La altura, h, ha partido el triángulo oblicuángulo en dos triángulos rectángulos. En el primero se hallan elementos que sirven para obtener, en el otro triángulo, el lado a.



■ **PROBLEMA 2**

En este caso, para resolver el triángulo del margen, hacemos como en el caso anterior: la altura h determina dos triángulos rectángulos. Con ellos vamos a relacionar x e y.



En $\widehat{ABH}$, $tg\ 53° = \frac{h}{x} \to h = x\ tg\ 53°$

En $\widehat{BHC}$, $tg\ 28° = \frac{h}{y} \to h = y\ tg\ 28°$

$x\ tg\ 53° = y\ tg\ 28°$

$1{,}33x = 0{,}53y$

Como $x + y = 87$, tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 87 \\ 1{,}33x = 0{,}53y \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 87 - y \\ 1{,}33(87 - y) = 0{,}53y \to y = 62{,}2 \text{ m} \end{array}$$

Conocido y, podemos calcular a:

En $\widehat{BHC}$, $cos\ 28° = \frac{y}{a} \to a = \frac{62{,}2}{cos\ 28°} = 70{,}4$ m

Reflexión del problema 2

En este caso hemos tenido que resolver simultáneamente los dos triángulos rectángulos. Relacionando algebraicamente las conclusiones (con un sistema de ecuaciones), se obtienen los segmentos buscados.

Cualquier triángulo no rectángulo puede ser resuelto mediante la **estrategia de la altura.** Consiste en elegir una de las alturas del triángulo de modo que, al trazarla, se obtengan dos triángulos rectángulos resolubles por separado o conjuntamente.

En la web

Ampliación teórica: teoremas de los senos y del coseno.

Piensa y practica

1. En un triángulo ABC, halla $\overline{BC}$ conociendo $\overline{AB} = 37$ cm, $\overline{AC} = 50$ cm y $\hat{A} = 32°$.

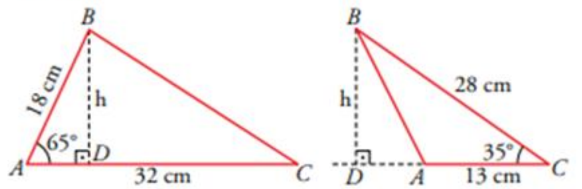
1 $\overline{BC} = 27{,}04$ cm

2. Halla los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo ABC en el que sabemos $\overline{AC} = 100$ cm, $\hat{A} = 42°$ y $\hat{C} = 18°$.

2 $\overline{AB} = 35{,}7$ cm

$\overline{BC} = 77{,}3$ cm

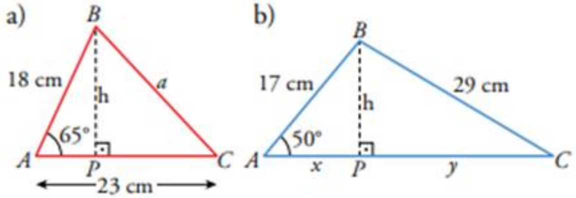
17. Calcula la altura, h, y el área de los siguientes triángulos:



17 h = 16,3 cm; $A = 260{,}8$ cm^2

h = 16,1 cm; $A = 104{,}61$ cm^2

28. Halla, en cada triángulo, la altura y el lado desconocido:



28 a) h = 16,31 cm; a = 22,42 cm

b) $x = 10{,}93$ cm; h = 130,2 cm; $y = 25{,}91$ cm

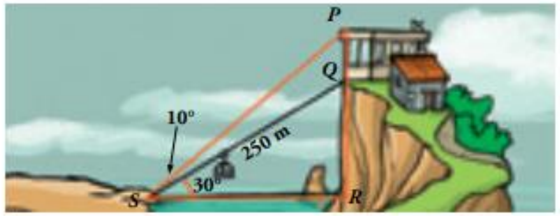
33. Desde el punto donde estoy, la visual al punto más alto del edificio que tengo en frente forma un ángulo de 28° con la horizontal. Si me acerco 20 m, el ángulo es de 40°. ¿Cuál es la altura del edificio?

33 El edificio mide 29,02 m.

35. Un avión P vuela entre dos ciudades A y B que distan entre sí 50 km. Desde el avión se miden los ángulos $\widehat{PAB} = 20°$ y $\widehat{PBA} = 30°$. ¿A qué altura está el avión?

35 El avión está a 11,16 km de altura.

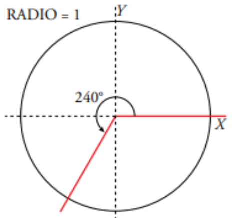
37. Para calcular la altura del edificio, $\overline{PQ}$, hemos medido los ángulos que indica la figura. Sabemos que hay un funicular para ir de S a Q, cuya longitud es de 250 m. Halla $\overline{PQ}$.



37 La altura del edificio es de 56,67 m.

6 Razones trigonométricas de 0° a 360°

RADIO = 1



Circunferencia goniométrica

Sobre un sistema de coordenadas, trazamos, con centro en el origen, una circunferencia de radio 1. La llamamos **circunferencia goniométrica.** En ella, es sencillo definir y visualizar las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.

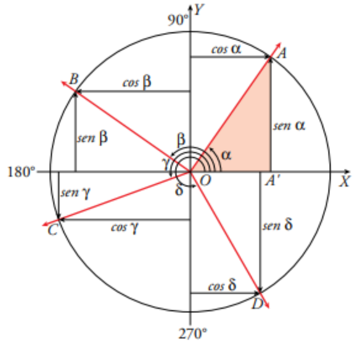
Los ángulos se sitúan sobre la circunferencia goniométrica del siguiente modo:

- Su vértice en el centro.
- Uno de los lados se hace coincidir con el semieje positivo de las *X*.
- El otro lado se sitúa donde corresponda, abriéndose el ángulo en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj.

Seno y coseno de un ángulo entre 0° y 360°

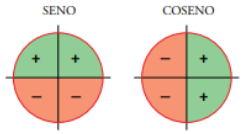
Si situamos un ángulo cualquiera, ϕ, sobre la circunferencia goniométrica, definimos $(cos\ \phi, sen\ \phi)$ como las coordenadas del punto en el que el segundo lado del ángulo lo corta a la circunferencia.

Observa que esta definición es compatible con los conceptos de $sen\ \alpha$ y $cos\ \alpha$ para ángulos agudos. De este modo, las coordenadas de *A* son $(cos\ \alpha, sen\ \alpha)$.



Signo del seno y del coseno

Al igual que las coordenadas de un punto, los signos del seno y del coseno de un ángulo dependen del cuadrante en el que se sitúe el segundo lado del ángulo.

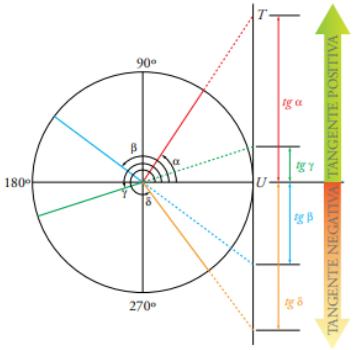


Tangente de un ángulo entre 0° y 360°

Situamos un ángulo cualquiera, α, sobre la circunferencia goniométrica. Trazamos la recta *t*, tangente a la circunferencia en *U*.

El segundo lado del ángulo, o su prolongación, corta a la recta *t* en un punto, *T*. La tangente del ángulo es igual a la medida del segmento *UT*, con el signo correspondiente, positivo hacia arriba y negativo hacia abajo.

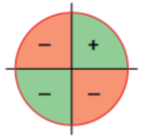
Los ángulos de 90° y 270° no tienen tangente.



Signo de la tangente

La tangente es positiva en los cuadrantes primero y tercero, y negativa en los cuadrantes segundo y cuarto.

TANGENTE



https://www.youtube.com/watch?v=kTtgsLAOGj0&feature=youtu.be

https://www.youtube.com/watch?v=-8vs4L8z-Ys&feature=youtu.be

20. Sitúa en la circunferencia goniométrica los siguientes ángulos e indica el signo de sus razones trigonométricas.

a) 128° b) 198° c) 87°

d) 98° e) 285° f) 305°

Compruébalo con la calculadora.

21. Explica en qué cuadrante está el ángulo α en cada caso y calcula las razones trigonométricas que faltan:

a) $sen\ \alpha = 0{,}6;\ cos\ \alpha < 0$ b) $cos\ \alpha = -1/3;\ tg\ \alpha > 0$

c) $tg\ \alpha = -2;\ sen\ \alpha > 0$ d) $sen\ \alpha = -2/3;\ tg\ \alpha < 0$

Representa el ángulo α en una circunferencia goniométrica en cada caso.

22. Justifica en qué cuadrante está α, en cada caso, y calcula las restantes razones trigonométricas:

a) $sen\ \alpha = 4/5;\ \alpha < 90°$ b) $cos\ \alpha = 2/3;\ \alpha > 270°$

c) $tg\ \alpha = 3;\ \alpha > 180°$ d) $cos\ \alpha = -3/4;\ \alpha < 180°$

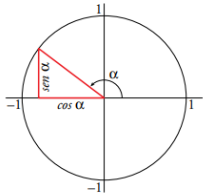
20

	128°	198°	87°	98°	285°	305°
sen	+	–	+	+	–	–
cos	–	–	+	–	+	+
tg	–	+	+	–	–	–

21 a) Cuadrante II

$cos\ \alpha = -0{,}8$

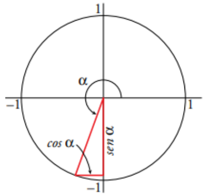
$tg\ \alpha = -0{,}75$



b) Cuadrante III

$sen\ \alpha = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

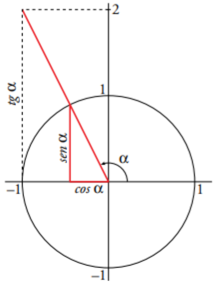
$tg\ \alpha = 2\sqrt{2}$



c) Cuadrante II

$cos\ \alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

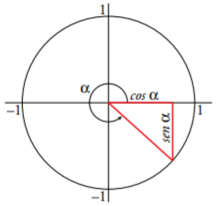
$sen\ \alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$



d) Cuadrante IV

$cos\ \alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$sen\ \alpha = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$



22 a) $\alpha \in$ Cuadrante I

$cos\ \alpha = \dfrac{3}{5};\ tg\ \alpha = \dfrac{4}{3}$

b) $\alpha \in$ Cuadrante IV

$sen\ \alpha = \dfrac{-\sqrt{5}}{3};\ tg\ \alpha = \dfrac{-\sqrt{5}}{2}$

c) $\alpha \in$ Cuadrante III

$cos\ \alpha = -\dfrac{\sqrt{10}}{10};\ sen\ \alpha = -\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

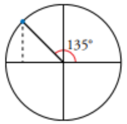
d) $\alpha \in$ Cuadrante II

$sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{4};\ tg\ \alpha = \dfrac{-\sqrt{7}}{3}$

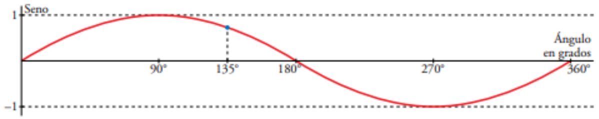
Te ayudará visualizar las representaciones en el siguiente enlace:

http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/Razones_trig_2.html

8 Funciones trigonométricas. El radián



Construimos una función que asocia a cada ángulo del intervalo [0°, 360°] su seno.



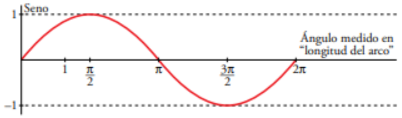
El dominio de definición de esta función es [0°, 360°]. Observa que, para representarla, hemos tenido que utilizar escalas muy distintas en los dos ejes. Con el fin de corregir este defecto, vamos a construir otra función, muy parecida a esta, en la que cambiamos la forma de medir los ángulos:

Tomamos como medida de un ángulo la longitud de su arco en la circunferencia goniométrica (recordamos que en ella, $r = 1$).

Una vuelta completa (360°) tiene una longitud de 2π: $360° \to 2\pi$

Por tanto, a un ángulo de $\alpha°$ le corresponde $\frac{2\pi}{360}\alpha$ como nueva medida.

Con esta unidad de medida de ángulos podemos representar la función tomando la misma escala en los dos ejes:



La función $y = sen\ x$ definida en $[0, 2\pi]$.

Expresión de un ángulo α en la nueva unidad

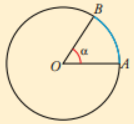
$$\left.\begin{array}{l} 360° \to 2\pi \\ \alpha \to x \end{array}\right\} \to x = \frac{2\pi}{360}\alpha$$

En la web

Significado y uso del radián como medida de ángulos.

El radián

La unidad de medida de ángulos que acabamos de ver es el *radián* y se define así:



Se llama **radián** a un ángulo tal que el arco que abarca tiene la misma longitud que el radio con el que se ha trazado. Es decir, α es un radián porque la longitud del arco AB es igual a la del radio:

Longitud de $\widehat{AB} = \overline{OA}$

Para pasar de grados a radianes se utiliza la igualdad $\alpha° = \frac{2\pi}{360}\alpha$ rad.

El valor de un radián es: 1 rad ≈ 57° 17' 45''

Recuerda

1 rad es un ángulo un poco menor que 60°.

Piensa y practica

1. Pasa a radianes los siguientes ángulos:

a) 25° b) 100° c) 150° d) 250°

Expresa el resultado en función de π y, luego, en forma decimal. Por ejemplo: $180° = \pi$ rad $= 3,14$ rad.

2. Pasa a grados los siguientes ángulos:

a) 0,5 rad b) 1,5 rad c) $\frac{\pi}{3}$ rad

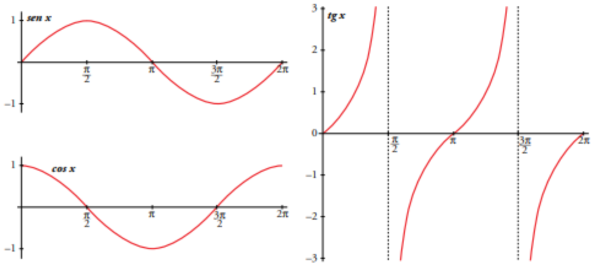
d) $\frac{3\pi}{4}$ rad e) 4,8 rad f) 3π rad

1 a) 0,44 rad b) 1,74 rad
c) 2,62 rad d) 4,36 rad

2 a) 28° 39' 36" b) 85° 59' 24"
c) 60° d) 135°
e) 275° 8' 36" f) 540°

Las funciones trigonométricas en $[0, 2\pi]$

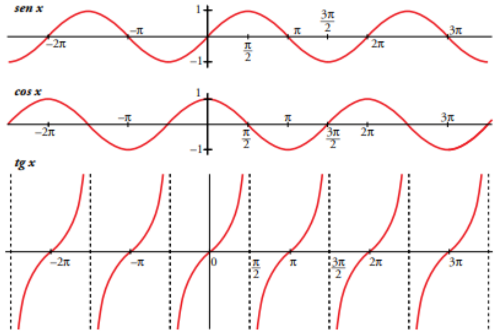
Al igual que hemos construido la función seno tomando como unidad de medida de ángulos el radián, podemos construir las funciones coseno y tangente. Veámoslas:



Estas tres funciones, $y = sen\ x$, $y = cos\ x$, $y = tg\ x$, definidas en $[0, 2\pi]$ en las que la abscisa es la medida del ángulo en radianes y la ordenada el valor de la razón trigonométrica correspondiente, se llaman **funciones trigonométricas.**

Las funciones trigonométricas definidas en todo $\mathbb{R}$

Si extendemos periódicamente estas tres funciones a toda la recta real, obtenemos:



3. ¿Verdadero o falso?

a) El radián es una medida de longitud equivalente al radio.

b) Un radián es un ángulo algo menor que 60°.

c) Puesto que la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, un ángulo completo (360°) tiene 2π radianes.

d) 180° es algo menos de 3 radianes.

e) Un ángulo recto mide $\pi/2$ radianes.

f) Las funciones trigonométricas son periódicas.

g) Las funciones $sen\ x$ y $cos\ x$ tienen un periodo de 2π.

h) La función $tg\ x$ tiene periodo π.

i) La función $cos\ x$ es como $sen\ x$ desplazada $\pi/2$ a la izquierda.

1 a) F b) V c) V
d) F e) V f) V
g) V h) V i) V

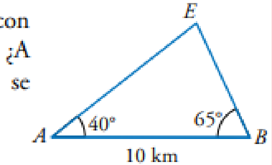
Aquí podrás visualizar las funciones trigonométricas:

http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/FuncTrig.html

Te propongo algunos ejercicios más…

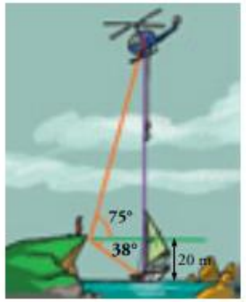
38. Para localizar una emisora clandestina, dos receptores, A y B, que distan entre sí 10 km, orientan sus antenas hacia el punto donde está la emisora.

Estas direcciones forman con AB ángulos de 40° y 65°. ¿A qué distancia de A y B se encuentra la emisora?

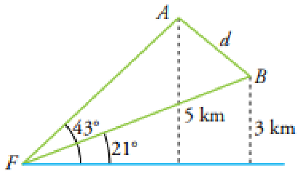


39. Desde un acantilado a 20 m sobre el nivel del mar, se observa un helicóptero en prácticas de salvamento.

Una persona desciende verticalmente hasta un barco en el que alguien está en peligro. Si los ángulos de observación son de 75° para el helicóptero y 38° para el barco, ¿cuánto medirá el cable que va desde el helicóptero al barco?



41. Desde un faro F se observa un barco A bajo un ángulo de 43° con respecto a la línea de la costa; y un barco B, bajo un ángulo de 21°. El barco A está a 5 km de la costa, y el B, a 3 km. Calcula la distancia entre los barcos.



44. Sobre la circunferencia goniométrica señalamos un ángulo α en el primer cuadrante y a partir de él dibujamos los ángulos:

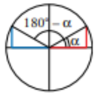
$180° - \alpha$ $\qquad 180° + \alpha$ $\qquad 360° - \alpha$

Busca la relación que existe entre:

a) $sen\,(180° - \alpha)$ y $sen\,\alpha$

$cos\,(180° - \alpha)$ y $cos\,\alpha$

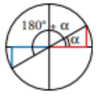
$tg\,(180° - \alpha)$ y $tg\,\alpha$



b) $sen\,(180° + \alpha)$ y $sen\,\alpha$

$cos\,(180° + \alpha)$ y $cos\,\alpha$

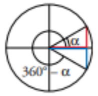
$tg\,(180° + \alpha)$ y $tg\,\alpha$



c) $sen\,(360° - \alpha)$ y $sen\,\alpha$

$cos\,(360° - \alpha)$ y $cos\,\alpha$

$tg\,(360° - \alpha)$ y $tg\,\alpha$



https://www.youtube.com/watch?v=3Nh-Jynv46E

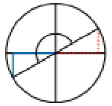
45. Sitúa el ángulo dado sobre la circunferencia goniométrica y expresa sus razones trigonométricas utilizando un ángulo agudo como en el ejemplo:

- **Ángulo: 215°**

$\mathbf{sen\,215° = -sen\,35°}$

$\mathbf{cos\,215° = -cos\,35°}$

$\mathbf{tg\,215° = tg\,35°}$



a) 150° $\qquad$ b) 240° $\qquad$ c) 300°

d) 225° $\qquad$ e) 100° $\qquad$ f) 320°

46. Halla los ángulos comprendidos entre 0° y 360° que verifican las siguientes ecuaciones, como en el ejemplo:

- $\mathbf{1 - 2cos\,x = 0 \rightarrow cos\,x = 1/2 \rightarrow x = 60°;\ x = 300°}$

a) $2sen\,x = \sqrt{3}$ $\qquad$ b) $2sen\,x = -\sqrt{2}$

c) $3tg\,x + 3 = 0$ $\qquad$ d) $(sen\,x)^2 = 1$

e) $(sen\,x)^2 - sen\,x = 0$ $\qquad$ f) $4(sen\,x)^2 - 1 = 0$

g) $2(cos\,x)^2 - cos\,x - 1 = 0$

https://www.youtube.com/watch?v=nK6kcwbVsGE

47. Usando las relaciones fundamentales, demuestra estas igualdades:

a) $(sen\,\alpha + cos\,\alpha)^2 + (sen\,\alpha - cos\,\alpha)^2 = 2$

b) $\dfrac{(sen\,\alpha)^3 + sen\,\alpha \cdot (cos\,\alpha)^2}{sen\,\alpha} = 1$

c) $\dfrac{(sen\,\alpha)^3 + sen\,\alpha \cdot (cos\,\alpha)^2}{cos\,\alpha} = tg\,\alpha$

d) $1 + (tg\,\alpha)^2 = \dfrac{1}{(cos\,\alpha)^2}$

https://www.youtube.com/watch?v=iFBbS2Nt4BQ&feature=youtu.be

48. ¿Verdadero o falso? Justifica y pon ejemplos.

a) En un ángulo agudo, el seno es siempre mayor que la tangente.

b) No existe ningún ángulo α tal que $sen\,\alpha = 3/5$ y $tg\,\alpha = 1/4$.

c) El coseno de un ángulo de π radianes es igual a -1.

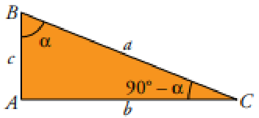
d) El valor máximo de la tangente de un ángulo es 1.

e) Si $270° < \alpha < 360°$, entonces $tg\,\alpha < 0$ y $cos\,\alpha > 0$.

f) No existe ningún ángulo α tal que: $sen\,\alpha + 2cos\,\alpha = 0$

g) La altura de un triángulo es igual al producto de uno de sus lados por el seno del ángulo que forma dicho lado con la base.

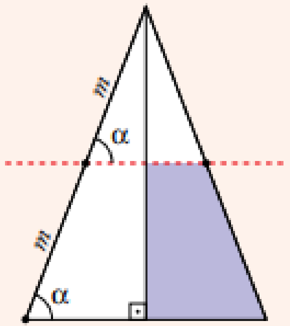
49. Los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo se llaman complementarios porque su suma es uno recto. Observa la figura, copia y completa la tabla, y expresa simbólicamente lo que obtienes:



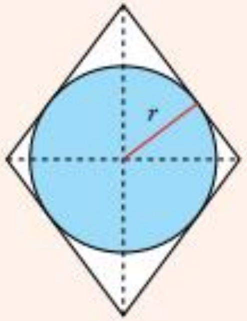
	α	$90° - \alpha$
sen		
cos		
tg		

Y para terminar... Entrénate resolviendo problemas...

¿Qué fracción de la superficie del triángulo se ha coloreado?



- El rombo tiene una superficie de 24 cm², y su diagonal menor es igual a los tres cuartos de la mayor. Calcula el área del círculo inscrito.



38 La emisora se encuentra a 9,38 km de *A* y 6,64 km de *B*.

39 El cable tiene una longitd de 115,5 m.

41 La distancia entre los barcos es de 3,16 km.

44 a) $\text{sen}\,(180° - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$

$\cos\,(180° - \alpha) = -\cos\,\alpha$

$\text{tg}\,(180° - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$

b) $\text{sen}\,(180° + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$

$\cos\,(180° + \alpha) = -\cos\,\alpha$

$\text{tg}\,(180° + \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$

c) $\text{sen}\,(360° - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$

$\cos\,(360° - \alpha) = \cos\,\alpha$

$\text{tg}\,(360° - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$

45 a) $\text{sen}\,150° = \text{sen}\,30°$

$\cos\,150° = -\cos\,30°$

$\text{tg}\,150° = -\text{tg}\,30°$

b) $\text{sen}\,240° = -\text{sen}\,60°$

$\cos\,240° = -\cos\,60°$

$\text{tg}\,240° = \text{tg}\,60°$

c) $\text{sen}\,300° = -\text{sen}\,60°$

$\cos\,300° = \cos\,60°$

$\text{tg}\,300° = -\text{tg}\,60°$

d) $\text{sen}\,225° = -\text{sen}\,45°$

$\cos\,225° = -\cos\,45°$

$\text{tg}\,225° = \text{tg}\,45°$

e) $\text{sen}\,100° = \text{sen}\,80°$

$\cos\,100° = -\cos\,80°$

$\text{tg}\,100° = -\text{tg}\,80°$

f) $\text{sen}\,320° = -\text{sen}\,40°$

$\cos\,320° = \cos\,40°$

$\text{tg}\,320° = -\text{tg}\,40°$

46 a) $x_1 = 60°$; $x_2 = 120°$

b) $x_1 = 225°$; $x_2 = 315°$

c) $x_1 = 135°$; $x_2 = 315°$

d) $x_1 = 90°$; $x_2 = 270°$

e) $x_1 = 0°$; $x_2 = 180°$; $x_3 = 90°$

f) $x_1 = 30°$; $x_2 = 150°$; $x_3 = 210°$; $x_4 = 330°$

g) $x_1 = 0°$; $x_2 = 120°$; $x_3 = 240°$

47 a) $(\text{sen}\,\alpha + \cos\,\alpha)^2 + (\text{sen}\,\alpha - \cos\,\alpha)^2 =$

$= (\underbrace{\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha}_{1} + 2\,\text{sen}\,\alpha\,\cos\,\alpha) + (\underbrace{\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha}_{1} - 2\,\text{sen}\,\alpha\,\cos\,\alpha) =$

$= 1 + 2\,\text{sen}\,\alpha\,\cos\,\alpha + 1 - 2\,\text{sen}\,\alpha\,\cos\,\alpha = 2$

b) $\dfrac{\text{sen}^3\alpha + \text{sen}\,\alpha \cdot \cos^2\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \dfrac{\text{sen}\,\alpha\,(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)}{\text{sen}\,\alpha} = \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha = 1$

c) $\dfrac{\text{sen}^3\alpha + \text{sen}\,\alpha \cdot \cos^2\alpha}{\cos\,\alpha} = \dfrac{\text{sen}\,\alpha\,(\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha)}{\cos\,\alpha} = \dfrac{\text{sen}\,\alpha \cdot 1}{\cos\,\alpha} =$

$= \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\,\alpha} = \text{tg}\,\alpha$

d) $1 + \text{tg}^2\,\alpha = 1 + \dfrac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\,\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha}{\cos^2\,\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\,\alpha}$

48 a) F b) V c) V d) F

e) V f) F g) V

49

	α	$90° - \alpha$
sen	*b/a*	*c/a*
cos	*c/a*	*b/a*
tg	*b/c*	*c/b*

$\text{sen}\,\alpha = \cos\,(90° - \alpha)$

$\cos\,\alpha = \text{sen}\,(90° - \alpha)$

$\text{tg}\,\alpha = 1/\text{tg}\,(90° - \alpha)$