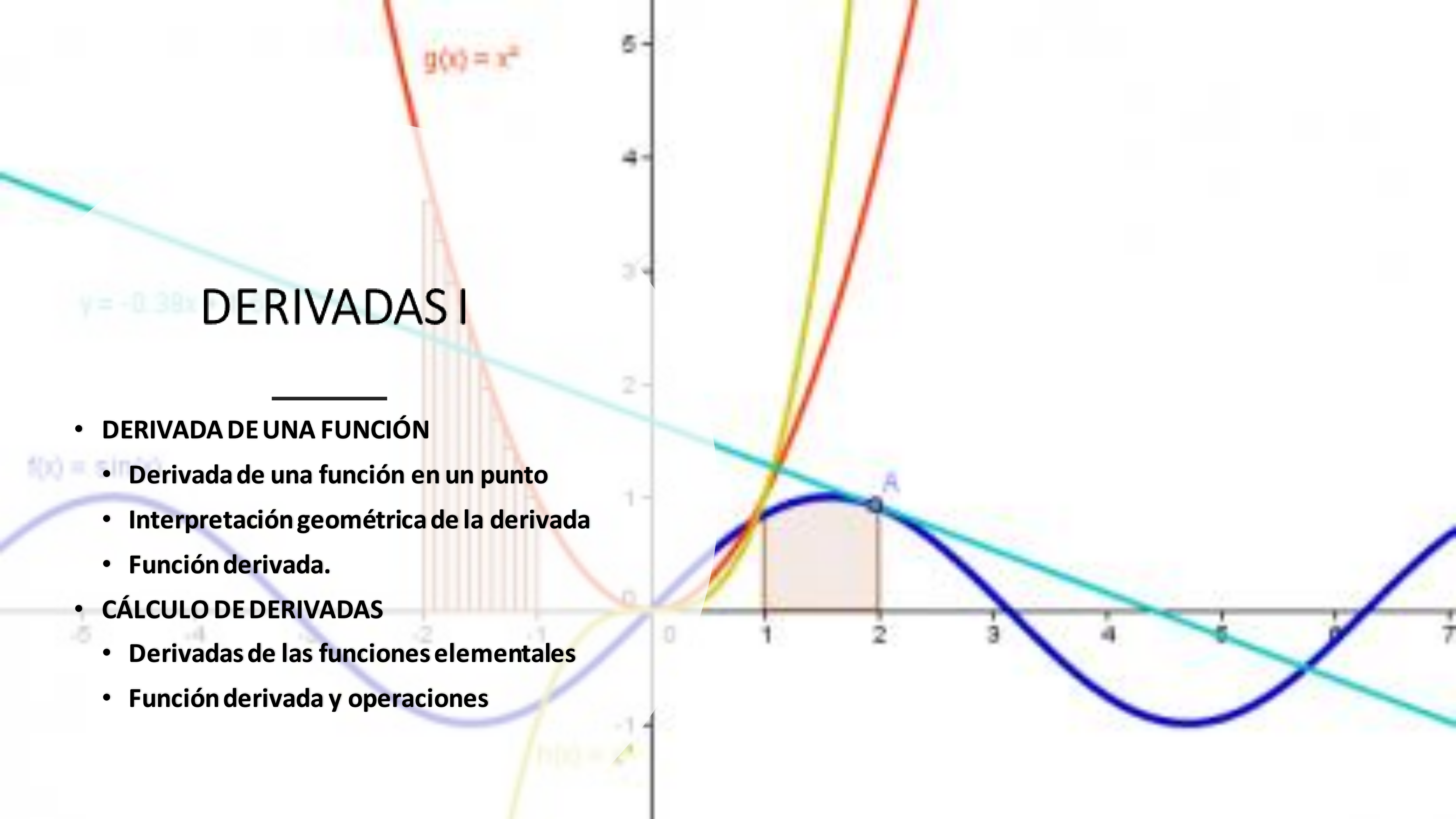



# DERIVADAS I

- **DERIVADA DE UNA FUNCIÓN**
  - **Derivada de una función en un punto**
  - **Interpretación geométrica de la derivada**
  - **Función derivada.**
- **CÁLCULO DE DERIVADAS**
  - **Derivadas de las funciones elementales**
  - **Función derivada y operaciones**

El cálculo de derivadas da respuesta a dos cuestiones importantes:

**Da solución al problema del cálculo de la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto.**
La solución de este problema da lugar al cálculo de derivadas, que es un conjunto de técnicas que tienen aplicaciones en multitud de campos de la ciencia.

**Nos permite estudiar variaciones que es frecuente observar en nuestro contorno.**
En economía, nos ayudan a estudiar variaciones del precio de un producto con respecto al tiempo.
En física, por ejemplo, dadas dos magnitudes, el tiempo y el espacio recorrido en ese tiempo por un móvil, la derivada nos indica cuál es la razón de cambio del espacio con respecto al tiempo, es decir, la velocidad.

# 1. Tasa de variación

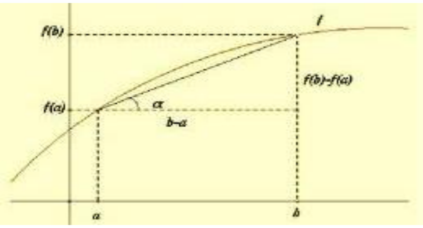
Observa las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x - 2$. En $x = 1$ ambas valen $-1$ si bien se comportan de forma muy distinta en torno a este punto. Para interpretar una función, no basta con analizar los valores de las variables, sino que debemos observar cómo crecen o decrecen y la rapidez con que lo hacen.

## Tasa de variación media

Un primer paso en el estudio de cómo crece o decrece una función es analizar su comportamiento entre dos puntos. La **tasa de variación media** relaciona la variación de una función en un intervalo con la amplitud de dicho intervalo.

**Si la función $f$ está definida en un intervalo $[a, b]$, la tasa de variación media de $f$ en $[a, b]$ es el cociente entre la variación de la función y la longitud del intervalo:**

$$TVM_{[a,\,b]}f(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$




Observa que la tasa de variación media coincide con la pendiente de la recta secante a la función que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

## Tasa de variación instantánea

Calculemos ahora la TVM de la función $f(x) = x^3 - x$ en el intervalo $[-1, 1]$:

$$TVM_{[-1,\,1]}f(x) = \frac{1^3 - 1 - [(-1)^3 - (-1)]}{1 - (-1)} = \frac{0}{2} = 0$$

Si dibujas la gráfica de la función observarás, sin embargo, que esta presenta importantes variaciones en este intervalo.

La TVM no deja de ser un promedio y, por lo tanto, interesa que los intervalos escogidos sean lo más pequeños posibles para conocer de forma precisa cómo se comporta la función cerca de cualquier punto. El límite en que los extremos de los intervalos de la TVM son infinitamente próximos se conoce como **tasa de variación instantánea.**

**La tasa de variación instantánea de una función $f$ en $x = a$ es el valor, en caso de que exista, al que tiende la tasa de variación media en los intervalos $[a, x]$ cuando $x \to a$. Es decir:**

$$TVI_a f(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

**LENGUAJE MATEMÁTICO**

Una forma equivalente de expresar la **TVI** de $f(x)$ en $x = a$ es:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Esta expresión puede resultar muy útil para realizar cálculos.

Ejercicios y problemas 6 a 12



# 2. Derivada de una función

El estudio de funciones experimentó una revolución con su sistematización en entornos cada vez más pequeños. El concepto de derivada es parte fundamental de esta sistematización, y de la rama de las matemáticas llamada cálculo diferencial.

## 2.1. Derivada de una función en un punto

La tasa de variación instantánea de una función en un punto es el concepto básico a partir del cual se desarrolla toda la teoría del cálculo diferencial, y se conoce con el nombre de **derivada de una función en un punto.**

**Se denomina derivada de la función $f$ en $x = a$, y se representa por $f'(a)$ al valor, en caso de que exista y sea finito:**

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

**En este caso, decimos que $f$ es derivable en $x = a$.**

Observa que si una función es derivable en un punto, puede demostrarse que es continua en él:

$$\lim_{x \to a}[f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) = f'(a) \cdot \lim_{x \to a}(x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0$$

Por lo tanto, la derivabilidad de una función $f$ en $x = a$ implica la continuidad en ese punto, si bien, tal como veremos en los siguientes ejemplos, el recíproco no es cierto.

**Derivadas laterales**

La ***derivada lateral por la izquierda*** se define como:

$$\boxed{f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

De la misma forma,

Se define la ***derivada lateral por la derecha*** de la función como: $\boxed{f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$

Sabemos que el límite de una función en un punto existe si y sólo si existen los dos límites laterales de dicha función en ese punto y coinciden, por tanto

**Una función es derivable en un punto si y sólo si existen la derivada por la izquierda y por la derecha en ese punto y coinciden.**

**INTERNET**

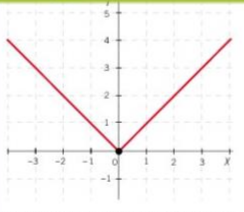
En este enlace, encontrarás una introducción al concepto de derivada de una función en un punto en la que se usa la llamada **notación incremental:**

http://links.edebe.com/hpbrd

**LENGUAJE MATEMÁTICO**

Si una función $f$ es derivable en todos los puntos de un intervalo, decimos que es derivable en ese intervalo.

**FÍJATE**

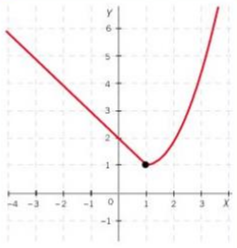



$f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$, pero su variación presenta una discontinuidad que gráficamente se manifiesta como un punto anguloso.

Problemas resueltos B

Ejercicios y problemas 13, 18 y 19

## AMPLÍA

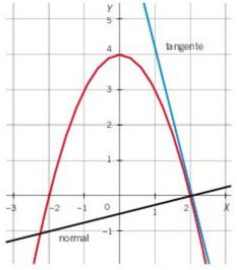


En el punto $a$, la pendiente de la recta tangente por la izquierda y la derecha son distintas. Por lo tanto, la función no es derivable en este punto.

## FÍJATE

La recta **normal** a la gráfica de una función en un punto es la perpendicular a la tangente. Por tanto, su ecuación es:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)} \cdot (x - a)$$



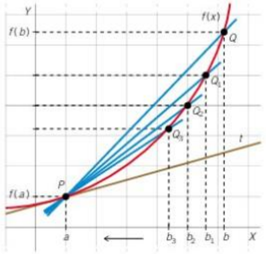

Necesitais tener en cuenta para ver la relación entre "normal" y "tangente", que dos rectas perpendiculares tienen pendientes opuestas e inversas

Problemas resueltos
C

Ejercicios y problemas
14, 16, 30 a 36 y 47 a 52

## 2.2. Interpretación geométrica de la derivada

Hemos visto que la tasa de variación media de una función $f$, en el intervalo $[a, b]$, es la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función por los puntos $P = (a, f(a))$ y $Q = (b, f(b))$.



Al tomar valores $b_1$, $b_2$, $b_3$... cada vez más próximos a $a$, las correspondientes rectas secantes $PQ_1$, $PQ_2$, $PQ_3$... se van aproximando a una recta $t$, a la que llamamos recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $a$.

La pendiente de esta recta será el límite de las pendientes de las rectas secantes $PQ_n$, es decir, el límite de las TVM de $f$ en los intervalos $[a, b_n]$. Pero este límite es lo que hemos definido como $f'(a)$.

Pendiente de la recta secante $PQ_n$ = TVM $[a, b_n]$.

Pendiente de la recta tangente en $P = f'(a)$.

Por tanto, podemos afirmar que:

**La derivada de la función $f$ en el punto de abscisa $x = a$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(a, f(a))$.**

### *Ecuación de la recta tangente*

Recuerda que la ecuación punto-pendiente de una recta es:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

donde $(x_0, y_0)$ es un punto de la recta y $m$, su pendiente. Puesto que $f'(a)$ nos da la pendiente de la recta tangente a $f$ en el punto $(a, f(a))$, se tiene:

**La ecuación de la recta tangente en el punto $(a, f(a))$ es:**

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

### 4 EJEMPLO

**Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ en $x = 1$.**

*Solución*

**COMPRENSIÓN:** Para determinar la ecuación de la recta, necesitamos calcular $f(1)$ y $f'(1)$, en caso de que exista.

**RESOLUCIÓN:** $f(1) = 3 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1 + 2 = 1$

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{3x^3 - 4x + 2 - (3 - 4 + 2)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{3(x^3 - 1) - 4(x - 1)}{x - 1} =$$
$$= \lim_{x\to 1} 3 \cdot (x^2 + x + 1) - 4 = 9 - 4 = 5$$

La ecuación de la recta es, por lo tanto: $y - 1 = 5 \cdot (x - 1) \rightarrow y = 5x - 4$.

## 2.3. Función derivada

Hemos visto que si una función $f$ es derivable en $x = a$, el valor de la derivada $f'(a)$ es un número real. De esta forma, podemos definir una nueva función $f'$ que asigne a cada punto de abscisa $x$ el valor de la derivada de $f$ en este punto.

$$f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La función así definida recibe el nombre de **función derivada** de $f$ o, simplemente, **derivada.**

El cálculo de la función derivada simplifica el proceso del cálculo del valor de la derivada de $f$ en diferentes puntos.

### 5 EJEMPLO

**Halla la función derivada de las siguientes funciones y calcula sus valores en los puntos $x = 1$ y $x = 2$:**

**a)** $f(x) = \dfrac{2}{x}$ **b)** $g(x) = \sqrt{x + 1}$

*Solución*

**COMPRENSIÓN:** Hallaremos en cada caso la función derivada y, a continuación, calcularemos su valor para los puntos $x = 1$ y $x = 2$.

**RESOLUCIÓN:**

a) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{x+h} - \frac{2}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2x - 2x - 2h}{x \cdot (x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2}{x \cdot (x+h)} = \frac{-2}{x^2}$$

$$f'(1) = \frac{-2}{1^2} = -2 \qquad f'(2) = \frac{-2}{2^2} = -0{,}5$$

b) $$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+1} - \sqrt{x+1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x + h + 1 - x - 1}{h \cdot \sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$g'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1+1}} = 0{,}35 \qquad g'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2+1}} = 0{,}29$$

**COMPROBACIÓN:** Si aplicamos la definición de derivada en un punto a cada una de las funciones, comprobaremos que el resultado obtenido es el mismo.

### *Derivadas sucesivas*

La función derivada $f'$ es una herramienta muy útil para estudiar la función $f$, pero, además, al ser a su vez una función, puede resultar útil también su estudio. Repitiendo el proceso desarrollado a partir de la función $f$, podemos definir la **derivada segunda** de $f$:

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Análogamente podemos definir las funciones $f'''$, $f^{(4)}$, $f^{(5)}$..., denominadas derivadas tercera, cuarta, quinta...

## FÍJATE

Observa que el dominio de la función $f'$ es el conjunto de valores del dominio de $f$ para los que la función es derivable, es decir:

$$D(f') \subseteq D(f)$$

## INTERNET

El matemático alemán K. T. Weierstrass dio un ejemplo de función continua en todos los puntos y no derivable en ningún punto. Para más información sobre la función de Weierstrass, consulta el siguiente enlace:

http://links.edebe.com/rca

## FÍJATE

El orden de las derivadas sucesivas se podría confundir con un exponente, de forma que se pone entre paréntesis o se indica con números romanos.

Ejercicios y problemas
15, 17 y 20

# 3. Cálculo de derivadas

Para hallar la función derivada de una función dada, es útil conocer las derivadas de las funciones más habituales y cómo afectan las operaciones entre funciones al proceso de derivación.

## 3.1. Derivadas de las funciones elementales

Aplicando la definición de la función derivada, obtenemos la siguiente tabla de derivadas para las funciones más comunes:

| | FUNCIÓN | FUNCIÓN DERIVADA |
|---|---|---|
| FUNCIÓN CONSTANTE | $f(x) = k,\ k \in \mathbb{R}$ | $f'(x) = 0$ |
| FUNCIÓN POTENCIAL | $f(x) = ax^n$ | $f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$ |
| FUNCIÓN EXPONENCIAL | $f(x) = e^x$ | $f'(x) = e^x$ |
| | $f(x) = a^x$ | $f'(x) = a^x \cdot \ln a$ |
| FUNCIÓN LOGARÍTMICA | $f(x) = \ln x$ | $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ |
| | $f(x) = \log_a x$ | $f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$ |
| FUNCIÓN SENO | $f(x) = \operatorname{sen} x$ | $f'(x) = \cos x$ |
| FUNCIÓN COSENO | $f(x) = \cos x$ | $f'(x) = -\operatorname{sen} x$ |

**CALCULADORA**

Las calculadoras programables disponen normalmente de una función para obtener la expresión analítica de la derivada de una función.

**RECUERDA**

El número $e$ es un número irracional: $e = 2{,}718281\ldots$

**AMPLÍA**

La inversa de la función $x^n$:

$$f(x) = \left(\frac{1}{x^n}\right)$$

puede escribirse de la siguiente forma:

$$f(x) = x^{-n}$$

Se trata, por lo tanto, de una función potencial y su derivada es la siguiente:

$$f'(x) = -nx^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

— ¿Cuál es la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$?

### 6 EJEMPLO

**Demuestra que las derivadas de las siguientes funciones son las que aparecen en la tabla:**

**a)** $f(x) = k$ **b)** $g(x) = kx$ **c)** $h(x) = \dfrac{1}{x}$ **d)** $j(x) = ax^n$

Solución

**COMPRENSIÓN:** Aplicaremos la definición de derivada en todos los casos y comprobaremos que el resultado coincide con el de la tabla.

**RESOLUCIÓN:**

a) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{k-k}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = 0$

b) $g'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{k(x+h)-kx}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{kh}{h} = k$

c) $h'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{x-x-h}{x\cdot(x+h)}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{x\cdot(x+h)} = \dfrac{-1}{x^2}$

d) $j'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a(x+h)^n - ax^n}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a\left(x^n + \frac{n}{1!}\cdot x^{n-1}\cdot h + \frac{n\cdot(n-1)}{2!}\cdot x^{n-2}\cdot h^2 + \ldots\right) - ax^n}{h} = a \cdot nx^{n-1}$$

**COMPROBACIÓN:** Las derivadas $f'$, $g'$ y $j'$ coinciden con las funciones derivadas de la tabla correspondientes. Por su parte, $h$ puede expresarse como una función potencial con $a = 1$ y $n = -1$; según la tabla, su derivada debería ser $h'(x) = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -1/x^2$, que es el resultado que hemos obtenido.

Ejercicios y problemas
21, 39 a 43 y 46

## 3.2. Función derivada y operaciones

Veamos, a continuación, las reglas que hay que tener en cuenta para hallar las expresiones de las derivadas de funciones que se obtienen operando y componiendo las de la tabla de la página anterior.

### *Derivada de la función suma*

La derivada de la función suma de funciones será la suma de sus derivadas. Lo mismo ocurre con la resta:

$$f(x) = g(x) + h(x) \rightarrow \boxed{f'(x) = g'(x) + h'(x)}$$
$$f(x) = g(x) - h(x) \rightarrow \boxed{f'(x) = g'(x) - h'(x)}$$

Ten en cuenta que para que la derivada de la $f$ esté definida deberán estarlo las derivadas de las funciones $g$ y $h$, es decir:

$$D(f') = D(g') \cap D(h')$$

Por lo tanto, $f$ es derivable para los valores en los que $g$ y $h$ lo son.

**FÍJATE**

La derivada de un polinomio no es más que la suma de funciones potenciales de los diferentes monomios, así que podemos calcularla derivando cada monomio y sumándolos.

### 7 EJEMPLO

**Calcula la derivada de la función $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 1$.**

Solución

**COMPRENSIÓN:** La función $f$ es una suma de tres funciones ($f = f_1 + f_2 + f_3$). Así, $f'$ será la suma de las derivadas de estas tres funciones: $f' = f'_1 + f'_2 + f'_3$.

**RESOLUCIÓN:**

$$f_1(x) = 2x^3 \rightarrow f'_1(x) = 3 \cdot 2x^2 = 6x^2$$
$$f_2(x) = 4x^2 \rightarrow f'_2(x) = 2 \cdot 4x^1 = 8x$$
$$f_3(x) = 1 \rightarrow f'_3(x) = 0$$
$$f'(x) = f'_1 + f'_2 + f'_3 = 6x^2 + 8x + 0 = 6x^2 + 8x$$

### *Derivada del producto de dos funciones*

La derivada del producto de dos funciones viene dado por la siguiente expresión:

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \rightarrow \boxed{f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)}$$

Como en el caso de la suma, el producto de funciones es derivable para los valores de $x$ en los que lo son los factores.

Observa que, en el caso de que $g(x) = k$, constante, $f'(x) = k \cdot h'(x)$.

### 8 EJEMPLO

**Calcula la derivada del producto entre $g(x) = x^2$ y $h(x) = \ln x$.**

Solución

**COMPRENSIÓN:** Hallaremos las derivadas de las funciones para, a continuación, aplicar la fórmula de la derivada del producto de dos funciones.

**RESOLUCIÓN:** $g(x) = x^2 \rightarrow g'(x) = 2x \qquad h(x) = \ln x \rightarrow h'(x) = \dfrac{1}{x}$

$$f(x) = g(x)\cdot h(x) \rightarrow f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x \cdot (2 \ln x + 1)$$

**AMPLÍA**

La regla de la derivación en el caso de sumas y productos de dos funciones se puede generalizar:

Dadas las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$:

— $(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)'(x) = f'_1(x) + f'_2(x) + \ldots + f'_n(x)$

— $(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)'(x) = f'_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) + \ldots + f_1(x) \cdot f'_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) + \ldots \ldots + f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)$

También puede demostrarse que la derivada enésima del producto de dos funciones, $u$ y $v$, es:

$$f^{(n)}(x) = (u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)}$$

Esta fórmula es conocida como fórmula de Leibniz.

### *Derivada del cociente de dos funciones*

La derivada del cociente de dos funciones viene dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}}$$

En este caso, la función $f$ es derivable en los valores de $x$ para los que lo son las funciones $g$ y $h$, con excepción de aquellos para los que la función $h(x)$ se anule.

**9 EJEMPLO**

**Calcula la derivada de la función $f(x) = \text{tg}\, x$.**

*Solución*

**COMPRENSIÓN:** Escribimos $f(x)$ como cociente de funciones y aplicamos la expresión anterior.

**RESOLUCIÓN:** $f(x) = \text{tg}\,(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \dfrac{g(x)}{h(x)} \qquad g'(x) = \cos x \qquad h'(x) = -\text{sen}\, x$

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \text{sen}\, x \cdot (-\text{sen}\, x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

**FÍJATE**

La **composición** de funciones es asociativa y tiene elemento neutro en la función identidad. Sin embargo, no es conmutativa.

### *Derivada de la función compuesta: regla de la cadena*

Multitud de funciones se obtienen por composición, es decir, por aplicación sucesiva de otras funciones. Así, por ejemplo, la función $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ es la composición de $h(x) = \ln x$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$, pues:

$$f(x) = g(h(x)) = g(\ln x) = \frac{1}{\ln x}$$

Para derivar funciones compuestas, utilizamos la llamada **regla de la cadena:**

$$\boxed{f(x) = (g \circ h)(x) \rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)}$$

En este caso, para que $f(x)$ sea derivable, $h(x)$ también debe serlo y $g(x)$ tiene que serlo en la imagen de $h$.

**AMPLÍA**

La derivada de la composición de más de dos funciones es una ampliación de la de dos funciones. Por ejemplo, para tres funciones $f$, $g$ y $h$, tenemos:

$j(x) = (h \circ g \circ h)(x) = h(g(f(x)))$

$j'(x) = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)$

**10 EJEMPLO**

**Calcula la derivada de las siguientes funciones: a) $f(x) = \text{sen}\, x^2$ b) $g(x) = \ln(\cos x)$**

*Solución*

**COMPRENSIÓN:** Identificaremos en cada caso a partir de la composición de qué funciones se obtienen $f$ y $g$, luego, aplicaremos la regla de la cadena.

**RESOLUCIÓN:** a) $f(x)$ es composición de $g(x) = \text{sen}\, x$ y $h(x) = x^2$, pues:

$$f(x) = g(h(x)) = g(x^2) = \text{sen}\, x^2$$

Como $g'(x) = \cos x$ y $h'(x) = 2x$, aplicando la regla de la cadena:

$$f'(x) = 2x \cos(x^2)$$

b) $g(x)$ es composición de las funciones $r(x) = \ln x$ y $s(x) = \cos x$, pues:

$$g(x) = r(s(x)) = r(\cos x) = \ln(\cos x)$$

Como $r'(x) = 1/x$ y $s'(x) = -\text{sen}\, x$, aplicando la regla de la cadena obtenemos:

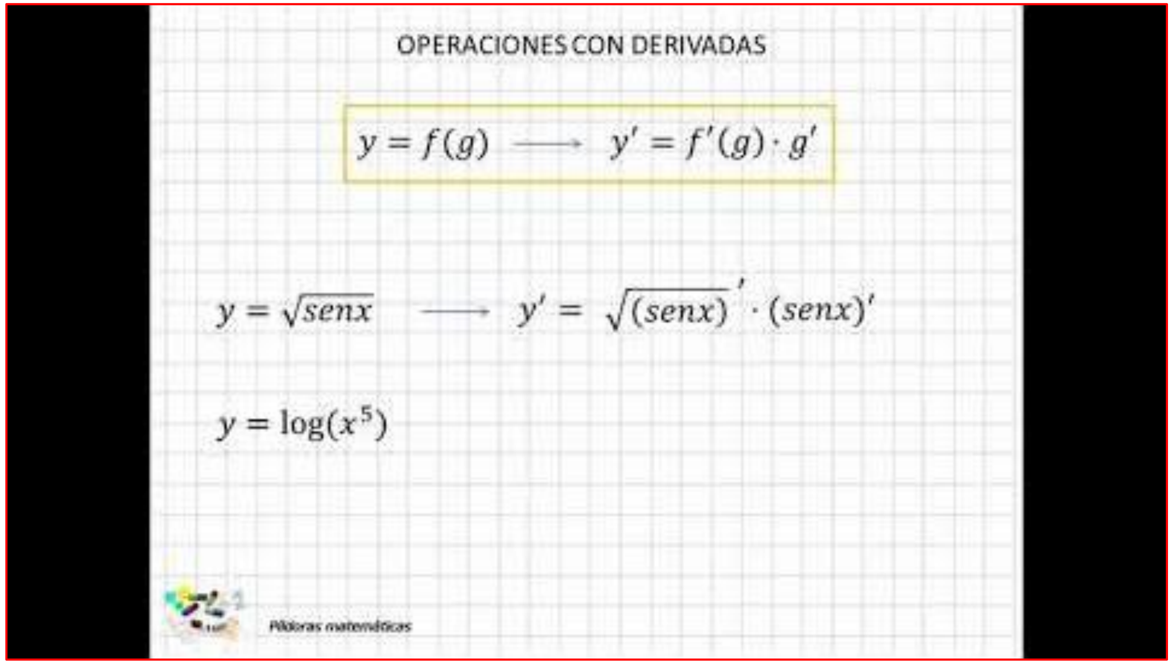
$$g(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\text{sen}\, x) = \frac{-\text{sen}\, x}{\cos x} = -\text{tg}\, x$$

**AMPLÍA**

A partir de la derivada del producto de dos funciones, y de la regla de la cadena, demuestra la expresión de la derivada del cociente de dos funciones.

Ejercicios y problemas
22 a 29, 44, 45, 53 y 54

**Todo sobre derivadas**… aquí teneis una colección de vídeos que os explican todo el tema paso a paso (en este tema entrarían hasta el 21)




https://www.youtube.com/watch?v=s5QJAEYwgKU&list=PLwCiNw1sXMSC8-MgHpDRjIsMzs9qVJSwU

## Operaciones con derivadas y reglas de derivación

1. **La derivada de una función constante es 0:** $\boldsymbol{f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0}$
   $f(x) = 4 \Rightarrow f'(x) = 0$

2. **La derivada de una potencia:** $\boldsymbol{f(x) = x^k \Rightarrow f'(x) = k\,x^{k-1}}$
   $f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5\,x^{5-1} = 5x^4$

3. **Derivada de una raíz:** $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[n]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}}$

4. **Derivada de la suma de funciones:** $\boldsymbol{(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)}$
   $f(x) = \sqrt{x^5} + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{2}\,x^{\frac{3}{2}} + (-1)\,x^{-2} = \frac{5}{2}\sqrt{x^3} - \frac{1}{x^2}$

5. **Derivada de la resta de funciones:** $\boldsymbol{(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)}$

6. **Derivada de un número por una función:** $\boldsymbol{[k\,f]'(x) = k\,f'(x)}$
   $f(x) = 8x^7 \Rightarrow f'(x) = 8 \cdot 7 \cdot x^{7-1} = 56\,x^6$

7. **Derivada de un producto de funciones:** $\boldsymbol{(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$
   $f(x) = x^3 \cdot x^{-25} \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \cdot x^{-25} + x^3 \cdot (-25)x^{-26} = \frac{3}{x^{23}} - \frac{25}{x^{23}} = \frac{-22}{x^{23}}$
   $f(x) = \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\,x^{\frac{-1}{2}} \cdot \frac{1}{x^2} + x^{\frac{1}{2}} \cdot (-2)x^{-3} = \frac{x^{\frac{-1}{2}}}{2\,x^2} - 2x^{-3} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{2\sqrt{x}}{x^3}$

8. **Derivada de un cociente de funciones:** $\boldsymbol{(f/g)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}}$
   $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$
   $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^{25}} \Rightarrow f'(x) = \frac{(3x^2-1) \cdot x - x^3 \cdot 1}{(x^{25})^2}$
   $f(x) = \frac{1-6x}{23} \Rightarrow f'(x) = \frac{(0-6) \cdot 23 - (1-6x) \cdot 0}{(23)^2} = \frac{-6}{23}$

9. **Derivada de una composición de funciones (Regla de la cadena):** $\boldsymbol{(f \circ g)'(x) = f'([g(x)] \cdot g'(x)}$
   $f(x) = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)^3 \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot \left(\frac{x^2}{1-x}\right)^{3-1} \cdot \frac{2x \cdot (1-x) - x^2 \cdot (-1)}{(1-x)^2}$
   *derivamos primero el exponente ( que es lo que afecta a todo) y luego, el cociente*
   $f(x) = (x^2+2)^{12} \cdot (6x-1)^8 \Rightarrow f'(x) = 12\,(x^2+2)^{11} \cdot 2x \cdot (6x-1)^8 + (x^2+2)^{12} \cdot 8(6x-1)^7 \cdot 6$
   *lo que tengo es un producto de dos factores, entonces aplico la fórmula del producto*

10. **Derivada de una función exponencial:** $\boldsymbol{f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a}$
    $f(x) = 2^x \Rightarrow f'(x) = 2^x \cdot ln\,2$
    $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot ln\,\frac{1}{2}$
    **Caso particular:** $\boldsymbol{f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x}$
    $f(x) = e^{x(1-x)^{73}}$ https://www.youtube.com/watch?v=uWwgtNpZPX8

11. **Derivada de la función logarítmica:** $\boldsymbol{f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{ln\,a}}$
    $f(x) = log\,x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{ln\,10}$

https://www.youtube.com/watch?v=hAGuorwVhqY&t=1s
**Derivada de la función logaritmo**

https://www.youtube.com/watch?v=vOSkQ8HF7SM&t=14s
**Derivada de la función logaritmo neperiano**

**12. Derivada de las funciones trigonométricas**

| |
|---|
| $f\,(x) = sen\,x \Rightarrow f'(x) = cos$ |
| $f\,(x) = cos\,x \Rightarrow f'(x) = -\,sen\,x$ |
| $f\,(x) = tg\,x \Rightarrow f'(x) = 1 + tg^2\,x = \dfrac{1}{cos^2\,x}$ |

https://www.youtube.com/watch?v=D9dljxA3koE&t=1s

| |
|---|
| $f\,(x) = cotan\,x \Rightarrow f'(x) = -\,cosec^2\,x = -1 - cotan^2 x$ |
| $f\,(x) = sec\,x \Rightarrow f'(x) = sec\,x \cdot tan\,x$ |
| $f\,(x) = cosec\,x \Rightarrow f'(x) = -\,cosec\,x \cdot cotan\,x$ |

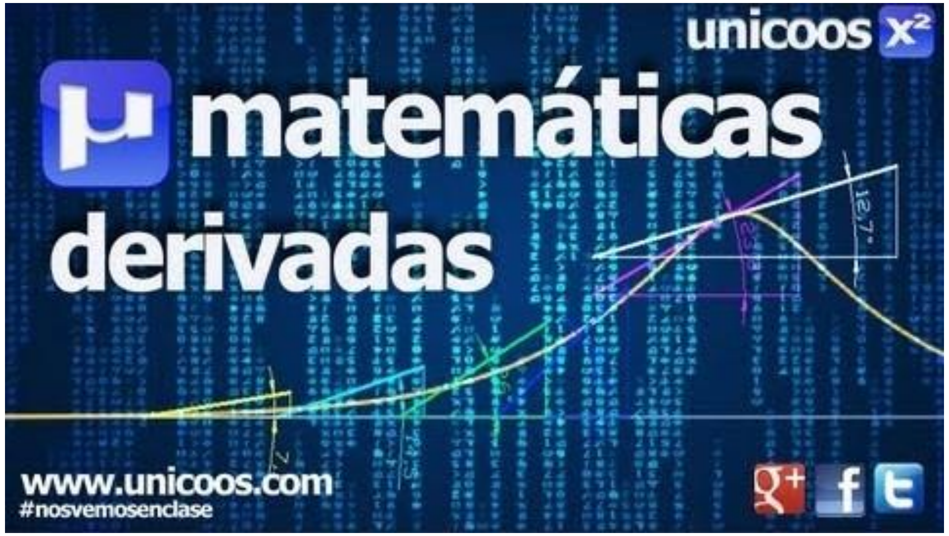
https://www.youtube.com/watch?v=X-6uk7BbtsA&t=7s

**13. Derivadas de las funciones trigonométricas inversas:**

| | |
|---|---|
| $f\,(x) = arcsen\,x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ | $f\,(x) = arccotan\,x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{1 + x^2}$ |
| $f\,(x) = arccos\,x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$ | $f\,(x) = arcsec\,x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ |
| $f\,(x) = arctan\,x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ | $f\,(x) = arccosec\,x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ |

https://www.youtube.com/watch?v=p_MTjOHhrFk

*¿Aún no tienes clara del todo como derivamos?... Fíjate en los ejemplos de los videos y luego resuelve los ejercicios que te propongo*




https://www.youtube.com/watch?v=m_APcwjkup8&t=193s

https://www.youtube.com/watch?v=pz8yjIEL6jg&t=129s

*Calcula las siguientes derivadas*

$f(x) = \log\,(x^3 - 3x)^5$

$f(x) = \ln 3x$

$f(x) = \ln\,(x^2 - x)^4$

$f(x) = \ln\,(3x+6)^5$

$f(x) = \ln x^3 + 5x$

$f(x) = \ln\,[x^3 \cdot (2x+6)^3]$

$f(x) = \ln\,(x^3 + 5x)$

$f(x) = -3x^5 + 2x^3 - x$

$f(x) = \dfrac{x^3}{5} - \dfrac{5}{x^3} + \sqrt{5}\,x^3 + \sqrt{5x^3} - 5x$

$f(x) = \ln\,(-x)$

$f(x) = \ln\,(x^3 + 5x)$

$f(x) = \ln\,(x^3 + 2x^2)^5$

$f(x) = x^2 \cdot \ln\,(x^3 + 1)$

$f(x) = \ln\,(x^3 + \dfrac{1}{x})$

$f(x) = e^{-x}$

$f(x) = e^{x^2 - x}$

$f(x) = e^{(x^3+x)^{43}}$

$f(x) = e^{-x^2} \cdot \ln(x^3 + 1)^2$

$f(x) = \dfrac{2\ln\,(1 + x^2)}{x - \dfrac{e^{-x}}{3}}$

$f(x) = sen\,(x^2 + 5x)$

$f(x) = sen^2\,(x^2 + 5x)$

$f(x) = sen^2\,(x^2 + 5x)^2$

$f(x) = \dfrac{x^{900} \cdot (2x^3 - 1)^{47}}{(1-x)^{73}}$

$f(x) = x^3 \cdot (1-x)^7$

$f(x) = (2x^2 + 3)^4 \cdot (3x - 1)^5$

$f(x) = \dfrac{x^3}{(2-x)^3}$

$f(x) = \dfrac{(3x^2 + 6)^2}{(1-x)^{78}}$

$f(x) = \dfrac{(1-x)^5 \cdot x^6}{(3x^2+1)^2 \cdot (6 + x^3)}$

# Ya lo tienes todo claro?... Pues vamos a practicar...

## Tasa de variación media

**1** Halla la tasa de variación media de estas funciones en el intervalo [1, 3] e indica si dichas funciones crecen o decrecen en ese intervalo:

a) $f(x) = 1/x$ b) $f(x) = (2 - x)^3$

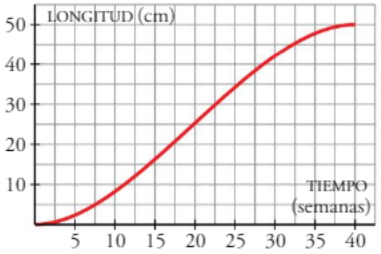
c) $f(x) = x^2 - x + 1$ d) $f(x) = 2^x$

**2** a) Halla la T.V.M. de las funciones $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ y $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ en el intervalo [1, 1 + h].

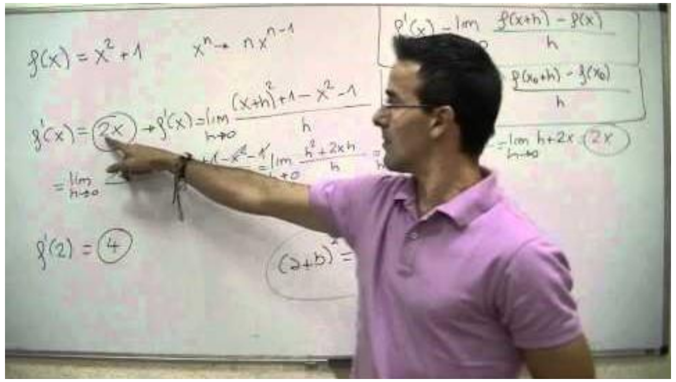
b) Calcula la T.V.M. de esas funciones en el intervalo [1; 1,5] utilizando las expresiones obtenidas en el apartado anterior.

**3** Compara la T.V.M. de las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3^x$ en los intervalos [2, 3] y [3, 4], y di cuál de las dos crece más en cada intervalo.

**4** Esta gráfica muestra la longitud de un feto durante el embarazo. Estudia el crecimiento medio en los intervalos [5, 15] y [20, 30] y di en qué periodo es mayor el crecimiento:




Fíjate!!!El crecimiento medio, sería la tasa de variación



## Definición de derivada

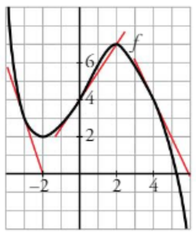
**5** Halla la derivada de las siguientes funciones en $x = 1$, utilizando la definición de derivada:

a) $f(x) = 3x^2 - 1$ b) $f(x) = (2x + 1)^2$

c) $f(x) = 3/x$ d) $f(x) = 1/(x + 2)^2$

**6** Aplica la definición de derivada para hallar la pendiente de la tangente en $x = 2$ de las curvas $f(x) = 4x - x^2$ y $g(x) = \dfrac{1}{3x-7}$.

**7**




Observa la gráfica de $f$ en la que se han trazado las tangentes en $x = -3$, $x = 0$ y $x = 4$ y responde.

a) ¿Cuál es el valor de $f'(-3)$, $f'(0)$ y $f'(4)$?

b) ¿En qué puntos es $f'(x) = 0$?

c) En $x = 1$, ¿la derivada es positiva o negativa? ¿Y en $x = 3$?

**8** Halla la función derivada de las siguientes funciones, aplicando la definición:

a) $f(x) = \dfrac{(5x-3)}{2}$ b) $f(x) = x^2 + 7x - 1$

c) $f(x) = x^3 - 5x$ d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$

## Reglas de derivación

**9** Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + 7x^2 - 4x$ b) $f(x) = 3\cos(2x + \pi)$

c) $f(x) = \dfrac{1}{3x} + \sqrt{x}$ d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{7x+1} + \dfrac{\sqrt{2x}}{3}$ f) $f(x) = x \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-4}}$ h) $f(x) = \ln 3x + e^{-x}$

i) $f(x) = \dfrac{tg\, x}{2}$ j) $f(x) = \sqrt{3}\, arc\, sen\, 2x$

**10** Aplica las reglas de derivación y simplifica si es posible.

a) $f(x) = (5x - 2)^3$ b) $f(x) = \left(\dfrac{1}{3x} + \dfrac{x}{3}\right)^4$

c) $f(x) = \sqrt[3]{(6-x)^2}$ d) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x^2-4}}$ f) $f(x) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^3 \cdot e^{2x+1}$

g) $f(x) = x^3 \cos^2 3x$ h) $f(x) = tg^3\, x^2$

i) $f(x) = \sqrt{7 \cdot \ln x}$ j) $f(x) = arc\, tg\, \dfrac{x^2}{3}$

**11** Deriva las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{arc\, cos\, e^x}$ b) $f(x) = \log(\operatorname{sen} x^2)$

c) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + e^{\cos x}$ d) $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{2x}}{2^{x-1}}$

e) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x} \cdot \ln tg\, x$ f) $f(x) = 3\cos(\ln x)$

g) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ h) $f(x) = arc\, tg\, \dfrac{1-x}{1+x}$

i) $f(x) = 7^{\sqrt{x}} + \dfrac{\cos x}{x^2}$ j) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

**12** Aplica las propiedades de los logaritmos antes de aplicar las reglas de derivación, para obtener la derivada de estas funciones:

a) $f(x) = \ln \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ b) $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$

c) $f(x) = \ln(x \cdot e^{-x})$ d) $f(x) = \log \dfrac{(3x-5)^3}{x}$

e) $f(x) = \log(tg\, x)^2$ f) $f(x) = \log \dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$