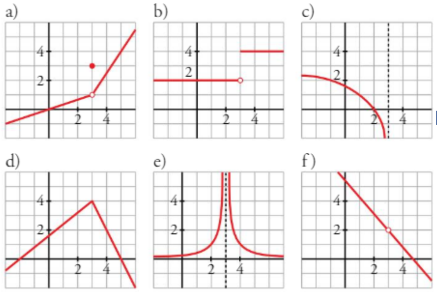
LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES

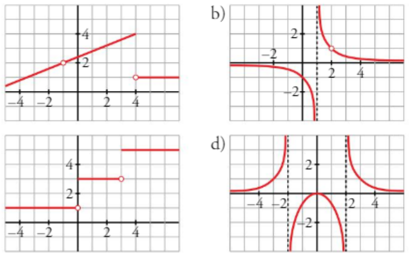
Para practicar

Continuidad y límite en un punto

1 ¿Cuál de estas funciones es continua en $x = 3$? Señala, en cada una de las otras, la razón de su discontinuidad.



2 Cada una de las siguientes funciones tiene uno o más puntos donde no es continua. Indica cuáles son esos puntos y el tipo de discontinuidad:



3 Comprueba que solo una de las siguientes funciones es continua en $x = 1$. Explica la razón de la discontinuidad en las demás:

a) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x<1 \\ 3 & \text{si } x>1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \neq 1 \\ -1 & \text{si } x=1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x<1 \\ x-3 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

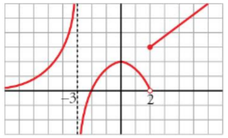
4 Indica para qué valores de $\mathbb{R}$ son continuas las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x^2+2}$ b) $y = \dfrac{2}{x^4+3x^3}$

c) $y = \sqrt{5-2x}$ d) $y = \ln(x+4)$

e) $y = 2^{3-x}$ f) $y = |x-5|$

5 Sobre la gráfica de la siguiente función $f(x)$, halla:

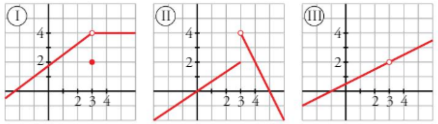


a) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ e) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

6 Relaciona cada una de estas expresiones con su gráfica correspondiente:

a) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2$ b) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 4$ c) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ no existe



¿Alguna de ellas es continua en $x = 3$?

7 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(5-\dfrac{x}{2}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to -1}(x^3-x)$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1-x}{x-2}$ d) $\lim\limits_{x\to 0,5} 2^x$

e) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{10+x-x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to 4}\log_2 x$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$ h) $\lim\limits_{x\to 2} e^x$

8 Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x<0 \\ x+1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$, halla:

a) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

9 Comprueba si las siguientes funciones son continuas en los puntos que se indican:

a) $f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si } x<-1 \\ x^2+3 & \text{si } x\geq -1 \end{cases}$ en $x=-1$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x<1 \\ 2^{x-1} & \text{si } x>1 \end{cases}$ en $x=1$

c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x} & \text{si } x<0 \\ x-2 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ en $x=0$

d) $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x<2 \\ 2x-6 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$ en $x=2$

e) $f(x) = \begin{cases} 5-x & \text{si } x<3 \\ \dfrac{2}{x-2} & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$ en $x=3$

10 Estas funciones, ¿son discontinuas en algún punto?:

a) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x<1 \\ x-1 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x\neq -1 \\ -1 & \text{si } x=-1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x} & \text{si } x<2 \\ x & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} 2^{x-3} & \text{si } x<3 \\ \sqrt{x-3} & \text{si } x>3 \end{cases}$

11 Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x\leq 3 \\ \dfrac{x^2-9}{x^2-3x} & \text{si } x>3 \end{cases}$ calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

12 En la función $f(x) = \begin{cases} x^2-2 & \text{si } x<-1 \\ 3x-1 & \text{si } -1\leq x<4 \\ 4\sqrt{x}+3 & \text{si } x\geq 4 \end{cases}$ halla:

a) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

13 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{x^2-2x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+3x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2+x}$

e) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^2-4}$ f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$

g) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2+4x+3}$ h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^2-1}$

14 Resuelve los siguientes límites y representa los resultados que obtengas:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2}{x^2+2x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x^4-10x^2}$

15 Calcula los siguientes límites y representa los resultados que obtengas:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-3x}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2x}{x^3+x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2}{x^2+2x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-8}{x^2-4x+4}$

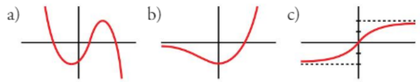
16 Calcula.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{7-5x}{x^2+1}\right)^{2-5x}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\log_2\left(\dfrac{3x+4}{x^2+1}\right)^5$

c) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{e^{\operatorname{sen} x}}{1+\cos x}$ d) $\lim\limits_{x\to 10}\log(2\sqrt{3x}-5)^3$

Límite cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$

17 Determina cuál es el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ en las siguientes gráficas:



18 Calcula el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ de cada una de las siguientes funciones. Representa los resultados que obtengas.

a) $f(x) = x^3 - 10x$ b) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

c) $f(x) = 7 - 3x$ d) $f(x) = -x^2 + 8x + 9$

e) $f(x) = 1 - (x-2)^2$ f) $f(x) = 7x^2 - x^3$

g) $f(x) = (5-x)^2$ h) $f(x) = (x+1)^3 - 2x^2$

19 Calcula estos límites y representa las ramas que obtengas:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3}{(x-1)^2}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-2x^2}{3-x}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-1}{x^2-1}$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{(2-x)^3}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x-1}{x+2}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+5}{1-x}$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2-3x}{x+3}$ h) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3-2x}{5-2x}$

20 Calcula el límite de todas las funciones del ejercicio anterior cuando $x \to -\infty$.

21 Calcula el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ y representa los resultados.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ b) $f(x) = \dfrac{3x^2}{(x-1)^2}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-10}$ d) $f(x) = \dfrac{1-12x^2}{3x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{5-2x}{x^2+1}$ f) $f(x) = \dfrac{1-x}{(2x+1)^2}$

g) $f(x) = \dfrac{x^3-x^2}{7-x^2}$ h) $f(x) = \dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2+4x-9}$

22 Di cuál es el límite de las siguientes funciones cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$:

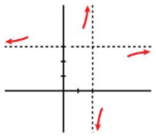
a) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x<3 \\ 5-x & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si } x<0 \\ \dfrac{2}{x+1} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

23 Di cuál es el límite de estas funciones cuando $x \to +\infty$:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ b) $f(x) = \dfrac{-3}{x^2+2x-4}$

c) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ d) $f(x) = 3 - \dfrac{1}{x^2}$

Asíntotas

24 

Esta gráfica muestra la posición de la curva $y = f(x)$ respecto de sus asíntotas.

Di cuáles son estas y describe su posición.

25 De una función $y = f(x)$ conocemos sus asíntotas y la posición de la curva respecto a ellas.

$$x = -1 \begin{cases} \text{si } x \to -1^-, \ f(x) \to +\infty \\ \text{si } x \to -1^+, \ f(x) \to +\infty \end{cases}$$

$$y = -2 \begin{cases} \text{si } x \to +\infty, \ f(x) > -2 \\ \text{si } x \to -\infty, \ f(x) < -2 \end{cases}$$

Representa esta información.

26 Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:

a) $y = \dfrac{2x}{x-3}$ b) $y = \dfrac{x-1}{x+3}$

c) $y = \dfrac{2x+3}{4-x}$ d) $y = \dfrac{2}{1-x}$

e) $y = \dfrac{1}{2-x}$ f) $y = \dfrac{4x+1}{2x-3}$

27 Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a ellas:

a) $y = \dfrac{x^2}{x^2+4}$ b) $y = \dfrac{3}{x^2+1}$

c) $y = \dfrac{2x^2-1}{x^2}$ d) $y = \dfrac{x^4}{x-1}$

e) $y = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$ f) $y = \dfrac{3x}{x^2-1}$

28 Cada una de las siguientes funciones tiene una asíntota oblicua. Hállala y estudia la posición de la curva respecto a ella:

a) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x+1}$ b) $f(x) = \dfrac{3+x-x^2}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{4x^2-3}{2x}$ d) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x-3}$

e) $f(x) = \dfrac{2x^3-3}{x^2-2}$ f) $f(x) = \dfrac{-2x^2+3}{2x-2}$

29 Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:

a) $y = \dfrac{(3-x)^2}{2x+2}$ b) $y = \dfrac{x^2}{x^2+x+1}$

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$ d) $y = \dfrac{3x^2}{x+2}$

Para resolver

30 Calcula, en cada caso, el valor de k para que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2-4 & \text{si } x \le 3 \\ x+k & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 6-(x/2) & \text{si } x < 2 \\ x^2+kx & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} (x^2+x)/x & \text{si } x \ne 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$

31 Calcula k para que las siguientes funciones sean continuas en el punto donde cambia su definición. Estudia después su continuidad:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x^2-5x} & \text{si } x \ne 5 \\ k & \text{si } x = 5 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x^2+x-2} & \text{si } x \ne 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$

32 Estudia la continuidad de las siguientes funciones. Represéntalas:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < 3 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} e^{2-\sqrt{x}} & \text{si } x < 4 \\ \log_2 (x-2) & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$

33 Determina a y b para que esta función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+b & \text{si } x < -2 \\ 4 & \text{si } -2 \le x \le 3 \\ ax-2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

34 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+3}}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{100x}{\sqrt[3]{x^2}}$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{4-x^3}}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^6-7x}}{4x-2}$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{x-2}$

35 Halla las ramas infinitas de las siguientes funciones exponenciales y logarítmicas:

a) $y = 2^{x+3}$ b) $y = 1{,}5^x - 1$

c) $y = 2 + e^x$ d) $y = e^{-x} + 1$

e) $y = \log (x-3)$ f) $y = 1 - \ln x$

g) $y = \ln (2x+4)$ h) $y = \ln (x^2+1)$

36 Halla el límite de las siguientes funciones en los puntos que anulan su denominador:

a) $f(x) = \dfrac{2x^3-13x^2+24x-9}{x^3-6x^2+9x}$

b) $g(x) = \dfrac{4x^3+3x^2-16x-12}{x^3-2x^2-4x+8}$

c) $h(x) = \dfrac{x^3+6x^2-32}{x^4+2x^3-8x^2}$

¿Cuáles son las asíntotas de f, de g y de h?

37 Halla las asíntotas de las siguientes funciones y estudia la posición de la curva respecto a ellas:

a) $f(x) = \dfrac{x^4+6x^2-7}{x(x^2+6)}$ b) $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2+3x-6}{2(x-2)^2}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^3+x^2-8x-1}{x^2-4}$ d) $f(x) = \dfrac{x^3-4x^2+8x-12}{x-3}$

38 Calcula el límite de la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x}$ cuando $x \to 0$, $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$. Di cuáles son sus asíntotas y sitúa la curva respecto a ellas.

39 En una empresa se hacen montajes en cadena. El número de montajes realizados por un trabajador sin experiencia depende de los días de entrenamiento según la función $M(t) = \dfrac{30t}{t+4}$ (t en días).

a) ¿Cuántos montajes realiza el primer día? ¿Y el décimo?

b) Representa la función sabiendo que el periodo de entrenamiento es de un mes.

c) ¿Qué ocurriría con el número de montajes si el entrenamiento fuera mucho más largo?

40 El número de peces de una piscifactoría evoluciona según la función $f(t) = 50 + \dfrac{100t^2}{t^2+1}$ (t en días).

a) Comprueba que la población aumenta la primera semana.

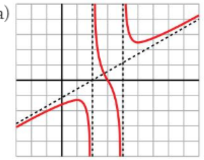
b) Averigua si el crecimiento será indefinido o tiende a estabilizarse.

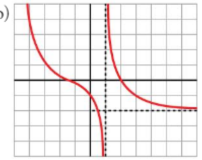
41 Determina el valor de a y de b de modo que las rectas $x = 3$ e $y = \dfrac{3}{2}$ sean asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{ax+3}{bx-4}$.

¿Puede tener asíntota oblicua?

42 Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2+ax+b & \text{si } x \le 2 \\ \ln (x-1) & \text{si } x > 2 \end{cases}$, calcula el valor de a y de b para que f sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas.

43 Observa la gráfica de las siguientes funciones y describe sus ramas infinitas, sus asíntotas y la posición de la curva respecto de ellas:

a) 

b) 

44 Representa, en cada caso, una función que cumpla las condiciones dadas.

a) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$, $f(x) < 3$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, $f(x) < 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$, $f(x) > -1$

c) Asíntota vertical: $x = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

Asíntota oblicua: $y = x + 2$

diferencia $[f(x) - y] < 0$ si $x \to \pm\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$, $f(x) > 2$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$, $f(x) < 2$

45 Considera las funciones $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ definidas en el intervalo $[0, 2\pi]$. Halla las asíntotas de las funciones $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$; $g(x) = \dfrac{1}{\cos x}$; $h(x) = \dfrac{1}{1 - 2\cos x}$ y sitúa la curva respecto a ellas.

46 Calcula el valor de a para que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x^2-5x}{x+1} - ax \right)$ sea un número real.

47 Halla los siguientes límites (utiliza la calculadora).

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{e^x}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x-1}{x^5}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln (2x+3)}{x^2}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2^x - x^4)$ f) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}75^x - x^2)$

48 La función $f(x) = \dfrac{x^3+mx^2+9}{x^2-9}$ es discontinua en $x = 3$ y $x = -3$.

Estudia el tipo de discontinuidad que presenta en esos puntos según los valores de m.

Cuestiones teóricas

49 ¿Verdadero o falso? Justifica la respuesta y pon ejemplos.

a) Si no existe $f(2)$, no se puede calcular $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

b) Si no existe $f(1)$, $f(x)$ no puede ser continua en $x = 1$.

c) Una función no puede tener más de dos asíntotas horizontales.

d) Una función puede tener cinco asíntotas verticales.

e) Si $g(a) = 0$ podemos afirmar que $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ tiene asíntota vertical.

f) La función $y = 2^{-x}$ no tiene asíntotas.

50 ¿Cuáles son los puntos de discontinuidad de $y = E(x)$ e $y = Mant(x)$?

51 Justifica por qué no existe $\lim\limits_{x \to +\infty} sen\, x$.

52 ¿Cuál de estos límites no existe?:

a) $\lim\limits_{x \to 4^-} \sqrt{4 - x}$ b) $\lim\limits_{x \to 4^+} \sqrt{4 - x}$

53 Dada la función $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + h$, justifica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Si $a > 0$ y n es par, entonces $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

b) Si $a > 0$ y n es impar, entonces $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

c) Si $a < 0$ y n es par, entonces $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

d) Si $a < 0$ y n es impar, entonces $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Para profundizar

54 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} |2x + 1|$ b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (|x| + x - 3)$

c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (|x + 4| + |x|)$ d) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (|x + 2| - |x|)$

55 Halla las asíntotas de las funciones siguientes:

a) $y = \dfrac{|x|}{2 - x}$ b) $y = \dfrac{|2x + 1|}{x - 1}$

56 La función $y = 2^{1/x}$, ¿tiene límite cuando $x \to 0$?

57 Halla $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$. Para ello, multiplica numerador y denominador por el binomio conjugado $(\sqrt{x} + 1)$ del denominador.

58 Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - \sqrt{2x}}{x - 2}$ b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{\sqrt{4 - x} - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{2x - 1} - 3}{x - 5}$ d) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x - 7}{\sqrt{3x + 4} - 5}$

e) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{6x + 1} - 5}{\sqrt{2x + 1} - 3}$ f) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{3x - 2} - 5}{\sqrt{2x + 7} - 5}$

59 Calcula las asíntotas verticales de $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$ y estudia la posición de la función respecto de ellas. ¿Tiene asíntota horizontal?

Autoevaluación

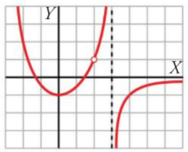
En la web Resoluciones de estos ejercicios.

1 Calcula el límite de $f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \le 3 \\ x^2 - x - 7, & x > 3 \end{cases}$ en los puntos de abscisas 0, 3 y 5. Di si la función es continua en esos puntos.

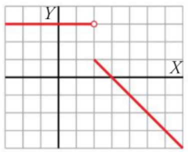
2 Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} 2^{x-1}$ b) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{1}{\sqrt{x + 4}}$ c) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x}{(x - 4)^2}$

3 a)



b)



Sobre la gráfica de estas dos funciones, halla, en cada caso, los siguientes límites:

$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

4 Halla las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 - 2x}$ y estudia la posición de la curva respecto a ellas.

5 Justifica qué valor debe tomar a para que la función $f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \le 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua en $\mathbb{R}$.

6 Halla el límite de $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6}$ cuando $x \to 3$; $x \to 2$; $x \to +\infty$; $x \to -\infty$ y representa la información que obtengas.

7 Representa una función que cumpla las siguientes condiciones:

a) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$ b) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

8 Estudia las ramas infinitas de $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2 + 4}$ y sitúa la curva respecto a su asíntota.

Aquí teneis ejercicios para repasar el tema. Os recomendaría hacer como mínimo, los que teneis marcados con la flecha y los apartados que teneis encuadrados.

Cuando terminéis, la autoevaluación os ayudará a saber cómo llevais preparado el tema.

A partir de ahí, podeis hacer todos los que queráis de los que faltan

1 a) Discontinuidad de tipo IV en $x = 3$, porque el valor de la función no coincide con el límite en el punto.

b) Discontinuidad de salto finito (tipo II). La función existe en $x = 3$, pero los límites laterales, aunque existen, son distintos.

c) Discontinuidad de salto infinito (tipo I). Tiene un asíntota vertical por la izquierda en $x = 3$.

d) Continua.

e) Discontinuidad de salto infinito (tipo I). Tiene una asíntota vertical en $x = 3$.

f) Discontinuidad de tipo III. La función no está definida en $x = 3$, pero existe el límite en dicho punto.

2 a) Discontinuidad de tipo III en $x = -1$.

Discontinuidad de salto finito en $x = 4$ (tipo II).

b) Discontinuidad de salto infinito en $x = 1$ (tipo I).

Discontinuidad de tipo III en $x = 2$.

c) Discontinuidades de salto finito en $x = 0$ y $x = 3$ (tipo II).

d) Discontinuidades de salto infinito en $x = -2$ y $x = 2$ (tipo I).

3 a) La función tiene una discontinuidad de tipo III.

b) Tiene una discontinuidad de tipo IV.

c) Esta función es continua.

d) La función tiene una discontinuidad de salto infinito (tipo I).

4 a) Continua en $\mathbb{R}$.

b) La función es continua en su dominio de definición, es decir, en $\mathbb{R} - \{-3, 0\}$.

c) La función es continua en $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$.

d) La función es continua en $(-4, +\infty)$.

e) La función es continua en $\mathbb{R}$.

f) La función es continua en $\mathbb{R}$.

5 a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 2

d) 0 e) 3 f) 0

6 a) III b) I c) II

Ninguna es continua en $x = 3$.

7 a) 5 b) 0 c) -2 d) $\sqrt{2}$

e) 2 f) 2 g) 1 h) e^2

8 a) 5 b) 4 c) 1

9 a) La función es continua en $x = -1$.

b) La función tiene una discontinuidad de tipo III en $x = 1$.

c) La función tiene una discontinuidad de salto finito (tipo II) en $x = 0$.

d) La función es continua en $x = 2$.

e) La función es continua en $x = 3$.

10 a) La función no es discontinua en ningún punto.

b) Esta función tiene una discontinuidad de tipo IV en $x = -1$.

c) La función no tiene discontinuidades.

d) En el punto $x = 3$ hay una discontinuidad de salto finito (tipo II).

11 a) 0

b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ no existe.

c) $\frac{8}{5}$

12 a) No existe el límite. b) 11 c) 15

13 a) -2 b) 3

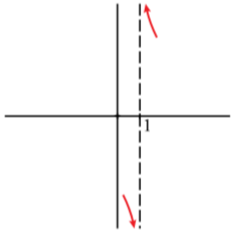
c) 2 d) -3

e) $-\frac{1}{4}$ f) 3

g) $-\frac{1}{2}$ h) 2

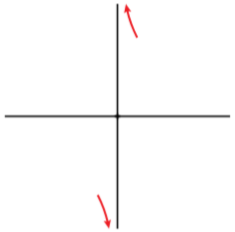
14 a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{1}{0} = \pm\infty$

- Si $x \to 1^- \to f(x) \to -\infty$
- Si $x \to 1^+ \to f(x) \to +\infty$



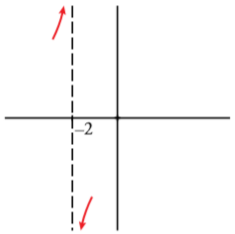
b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x}{x^2} = \infty$

- Si $x \to 0^- \to f(x) \to -\infty$
- Si $x \to 0^+ \to f(x) \to +\infty$

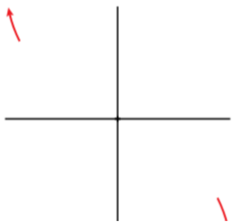


c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2}{x^2 + 2x} = \dfrac{4}{0} = \pm\infty$

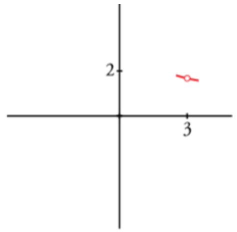
- Si $x \to -2^- \to f(x) \to +\infty$
- Si $x \to -2^+ \to f(x) \to -\infty$



d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x^4 - 10x^2} = 0$

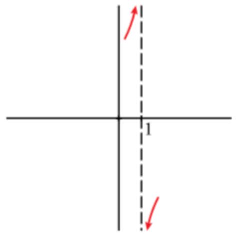


15 a) $\dfrac{5}{3}$



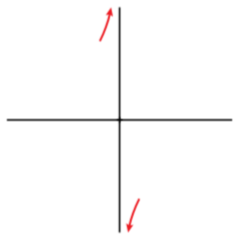
b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \infty$

- Si $x \to 1^- \to f(x) \to +\infty$
- Si $x \to 1^+ \to f(x) \to -\infty$



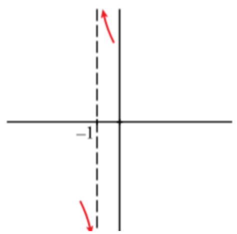
c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} = \pm\infty$

- Si $x \to 0^- \to f(x) \to +\infty$
- Si $x \to 0^+ \to f(x) \to -\infty$

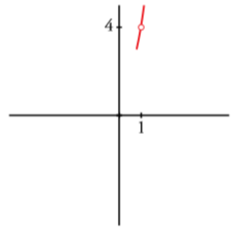


d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1} = \pm\infty$

- Si $x \to -1^- \to f(x) \to -\infty$
- Si $x \to -1^+ \to f(x) \to +\infty$

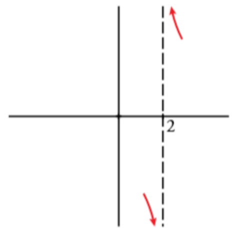


e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} = 4$



f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4} = \pm\infty$

- Si $x \to 2^- \to f(x) \to -\infty$
- Si $x \to 2^+ \to f(x) \to +\infty$



16 a) 1 b) 5 c) e d)3

17 a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

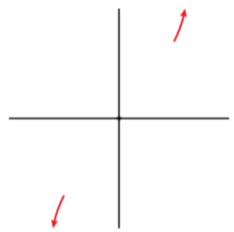
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

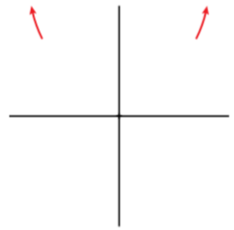
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$

18 a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 10x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 10x) = -\infty$



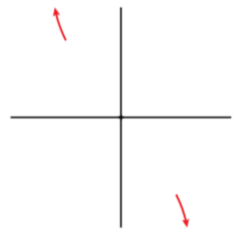
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 4} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 4} = +\infty$



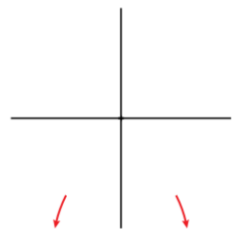
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7 - 3x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (7 - 3x) = +\infty$



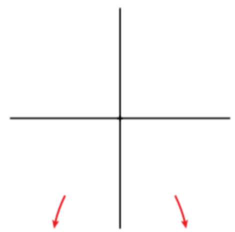
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2 + 8x + 9) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2 + 8x + 9) = -\infty$



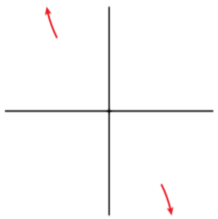
e) $\lim\limits_{x \to +\infty} [1 - (x-2)^2] = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [1 - (x-2)^2] = -\infty$



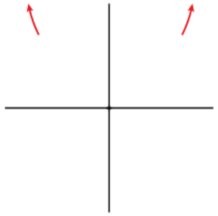
f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7x^2 - x^3) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (7x^2 - x^3) = +\infty$



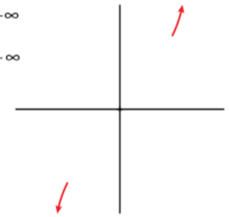
g) $\lim\limits_{x \to +\infty} (5 - x)^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (5 - x)^2 = +\infty$



h) $\lim\limits_{x \to +\infty} [(x+1)^3 - 2x^2] = +\infty$

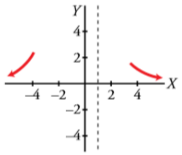
$\lim\limits_{x \to -\infty} [(x+1)^3 - 2x^2] = -\infty$



Resuelto en el siguiente ejercicio 20.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

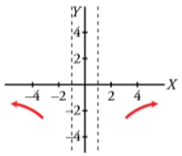


b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

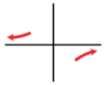
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$



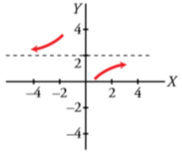
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$



e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

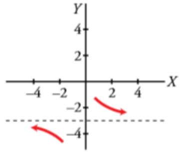


f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

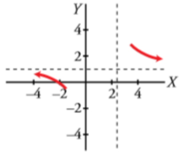
g) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -3$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -3$



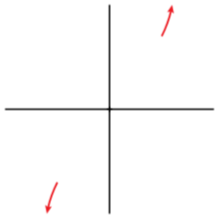
h) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$



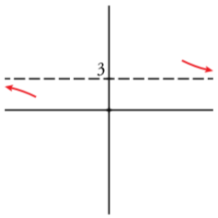
21 a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



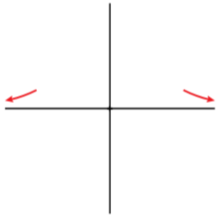
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$



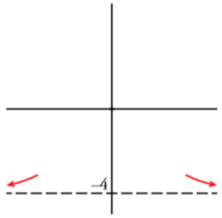
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$



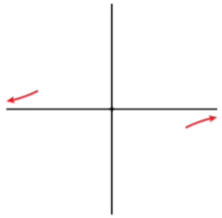
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -4$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -4$



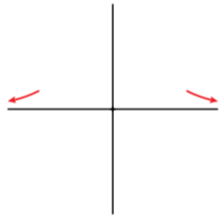
e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$



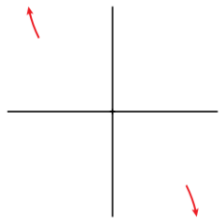
f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$



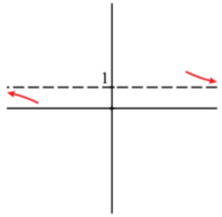
g) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



h) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$



22 a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

23 a) 0 b) 0 c) 0 d) 3

Página 297

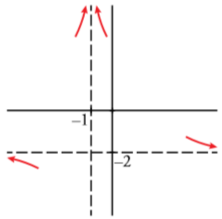
24 • Asíntota vertical: $x = 2$

Si $x \to 2^-$, $f(x) \to +\infty$ Si $x \to 2^+$, $f(x) \to -\infty$

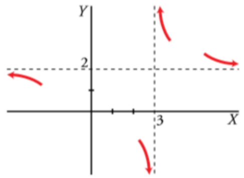
• Asíntota horizontal: $y = 3$

Si $x \to -\infty$, $f(x) - 3 > 0$ Si $x \to +\infty$, $f(x) - 3 < 0$

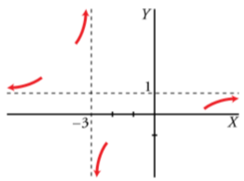
25



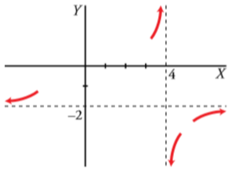
26 a) Asíntotas: $x = 3$; $y = 2$



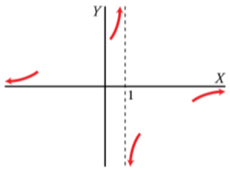
b) Asíntotas: $x = -3$; $y = 1$



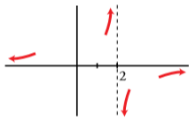
c) Asíntotas: $x = 4$; $y = -2$



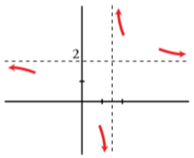
d) Asíntotas: $x = 1$; $y = 0$



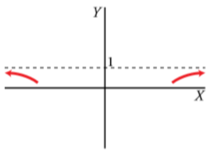
e) Asíntotas: $x = 2$; $y = 0$



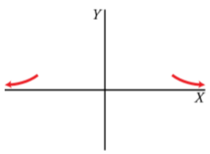
f) Asíntotas: $x = \frac{3}{2}$; $y = 2$



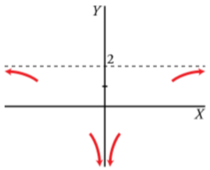
27 a) Asíntota: $y = 1$



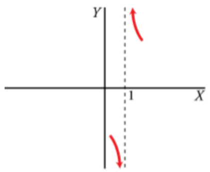
b) Asíntota: $y = 0$



c) Asíntotas: $x = 0$; $y = 2$

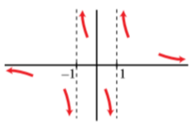


d) Asíntota: $x = 1$

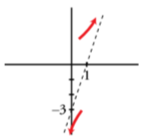


e) Asíntotas: $x = -2$; $y = 0$

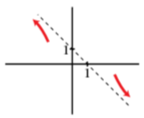
f) Asíntotas: $x = 1$, $x = -1$; $y = 0$



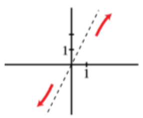
28 a) $y = 3x - 3$



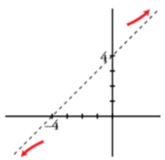
b) $y = -x + 1$



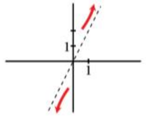
c) $y = 2x$



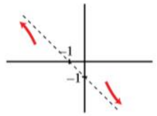
d) $y = x + 4$



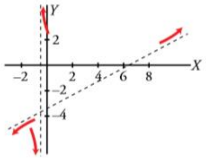
e) $y = 2x$



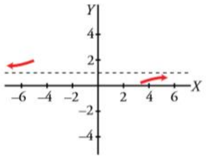
f) $y = -x - 1$



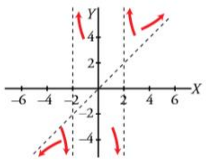
29 a) Asíntotas: $x = -\frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2}x - \frac{13}{4}$



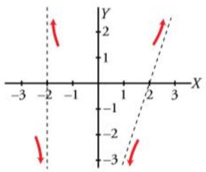
b) Asíntotas: $y = 1$



c) Asíntotas: $y = x$; $x = -2$, $x = 2$



d) Asíntotas: $x = -2$; $y = 3x - 6$



30 a) $k = 2$ b) $k = 1/2$ c) $k = 1$

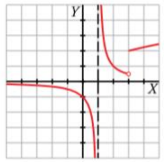
31 a) Si $k = 2$, la función es continua en $x = 5$.

En $x = 0$ tiene una discontinuidad de salto infinito (tipo I). En el resto de los puntos es continua.

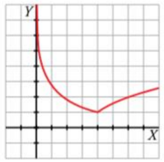
b) Si $k = \frac{1}{3}$, la función es continua en $x = 1$.

En $x = -2$ tiene una discontinuidad de salto infinito (tipo I). En el resto de los puntos es continua.

32 a) El límite no existe en el punto $x = 3$ y tiene una discontinuidad de salto finito (tipo II).



b) La función es continua



33 $a = 2$ y $b = 10$

34 a) 0 b) 3 c) $-\infty$

d) 0 e) $+\infty$ f) $\sqrt{2}$

35 a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$

d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ $\quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

e) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to 3^+} \log f(x) = -\infty$

f) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

g) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

h) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Página 298

36 a) $\lim_{x \to 0} f(x) = \pm\infty \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \end{cases}$; $\lim_{x \to 3} f(x) = \frac{5}{3}$

b) $\lim_{x \to -2} g(x) = \frac{5}{4}$ $\quad \lim_{x \to 2} g(x) = \pm\infty \begin{cases} \lim_{x \to 2^-} g(x) = -\infty \\ \lim_{x \to 2^+} g(x) = +\infty \end{cases}$

c) $\lim_{x \to -4} h(x) = 0$ $\quad \lim_{x \to 0} h(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to 2} h(x) = \frac{3}{2}$

Las asíntotas verticales son:

- De $f(x)$, la recta $x = 0$.
- De $g(x)$, la recta $x = 2$.
- De $h(x)$, la recta $x = 0$.

37 a) • La recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

Si $x \to 0^-$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to 0^+$, $f(x) \to -\infty$

• La recta $y = x$ es la asíntota oblicua.

Si $x \to +\infty$, $f(x)$ va por debajo de la asíntota.

Si $x \to -\infty$, $f(x)$ va por encima de la asíntota.

b) • La recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Si $x \to 2^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2^+$, $f(x) \to +\infty$

• La recta $y = \frac{x}{2} + 1$ es la asíntota oblicua.

Si $x \to +\infty$, $f(x)$ va por encima de la asíntota.

Si $x \to -\infty$, $f(x)$ va por debajo de la asíntota.

c) • La recta $x = -2$ es una asíntota vertical.

Si $x \to -2^-$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to -2^+$, $f(x) \to -\infty$

• La recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Si $x \to 2^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2^+$, $f(x) \to +\infty$

• La recta $y = 2x + 1$ es la asíntota oblicua.

Si $x \to +\infty$, $f(x)$ va por encima de la asíntota.

Si $x \to -\infty$, $f(x)$ va por encima de la asíntota.

d) • La recta $x = 3$ es una asíntota vertical.

Si $x \to 3^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 3^+$, $f(x) \to +\infty$

• Tiene ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido y ambas son hacia arriba.

38 • $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{0} = \pm\infty$

La recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

Si $x \to 0^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 0^+$, $f(x) \to +\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x} = 1$. La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal por la derecha.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x} = -1$. La recta $y = -1$ es una asíntota horizontal por la izquierda.

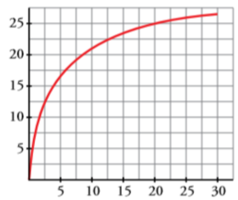
Si $x \to +\infty$, $f(x) - 1 = \dfrac{\sqrt{x^2+3} - x}{x} > 0$, la función está encima de la asíntota.

Si $x \to -\infty$, $f(x) - (-1) = \dfrac{\sqrt{x^2+3} + x}{x} < 0$, la función está debajo de la asíntota.

39 a) Realiza 6 montajes el primer día.

Realiza 21 montajes el décimo día.

b)



c) Se aproxima a 30, pues $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{30t}{t+4} = 30$.

40 a)

t	0	1	2	3	4	5	6
f(t)	50	100	130	140	144	146	147

El número crece pero de una forma cada vez más lenta.

b) El crecimiento tiende a estabilizarse.

41 $a = 2$, $b = \dfrac{4}{3}$

No puede tener asíntota oblicua.

42 $a = -4$, $b = 0$

43 a) Asíntotas verticales: $x = 2$ y $x = 4$.

Posición:

Si $x \to 2^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2^+$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to 4^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 4^+$, $f(x) \to +\infty$

Asíntota oblicua: $y = \dfrac{x}{2} - 1$

Posición:

Si $x \to +\infty$, $f(x) > \dfrac{x}{2} - 1$

Si $x \to -\infty$, $f(x) < \dfrac{x}{2} - 1$

b) Asíntotas verticales: $x = 1$

Si $x \to 1^+$, $f(x) \to +\infty$

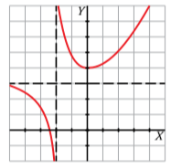
Si $x \to 1^-$, $f(x) \to -\infty$

Asíntota horizontal: $x = -2$

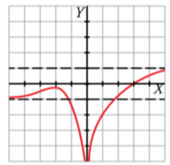
Si $x \to +\infty$, $f(x) > 2$

Rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más rápido en $-\infty$.

44 a)

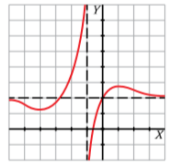


b)



c)

d)



45 Solo tiene sentido el estudio de las asíntotas verticales.

• $f(x) = \dfrac{1}{sen\, x}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

$x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$ son asíntotas verticales.

Posición:

Si $x \to 0^+$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to \pi^-$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to \pi^+$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2\pi^-$, $f(x) \to -\infty$

• $g(x) = \dfrac{1}{cos\, x}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

$x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{3\pi}{2}$ son asíntotas verticales.

Posición:

Si $x \to \dfrac{\pi}{2}^-$, $g(x) \to +\infty$

Si $x \to \dfrac{\pi}{2}^+$, $g(x) \to -\infty$

Si $x \to \dfrac{3\pi}{2}^-$, $g(x) \to -\infty$

Si $x \to \dfrac{3\pi}{2}^+$, $g(x) \to +\infty$

• $h(x) = \dfrac{1}{1 - 2\,cos\, x}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

$x = \dfrac{\pi}{3}$, $x = \dfrac{5\pi}{3}$ son asíntotas verticales.

Posición:

Si $x \to \dfrac{\pi}{3}^-$, $h(x) \to -\infty$

Si $x \to \dfrac{\pi}{3}^+$, $h(x) \to +\infty$

Si $x \to \dfrac{5\pi}{3}^-$, $h(x) \to +\infty$

Si $x \to \dfrac{5\pi}{3}^+$, $h(x) \to -\infty$

46 $a = 3$, resultando ser el límite igual a -8.

47 a) 0 b) $+\infty$ c) $+\infty$

d) 0 e) $+\infty$ f) $-\infty$

48 • Si $m = -4$, $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 - 9} = \dfrac{1}{2}$

La discontinuidad en $x = 3$ es evitable del tipo III.

Para $m = -4$, en $x = -3$ hay una discontinuidad de salto infinito (tipo I) porque $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 - 9} = \pm\infty$.

• Si $m = 2$, $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + 2x^2 + 9}{x^2 - 9} = \dfrac{-5}{2}$ y tenemos una discontinuidad evitable de tipo III en $x = -3$.

Para $m = 2$, en $x = 3$ hay una discontinuidad de salto infinito (tipo I) porque $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 + 2x^2 + 9}{x^2 - 9} = \pm\infty$

• Si $m \neq -4$ y $m \neq 2$, las discontinuidades en $x = 3$ y en $x = -3$ son de salto infinito (tipo I) porque el numerador de la función no se anula.

Página 299

49 a) Falso. En una discontinuidad evitable de tipo III no existe la función en un punto pero sí existe el límite.

b) Verdadero, ya que no se cumple una de las condiciones de la continuidad.

c) Verdadero. Si tuviera tres o más asíntotas horizontales, dos de ellas coincidirían por uno de los extremos del eje *OX* y esto es imposible porque la función no puede tender simultáneamente a dos resultados diferentes.

d) Verdadero. Incluso puede tener infinitas asíntotas verticales, como ocurre con la función $y = tg\, x$.

e) Falso. Si $f(a) = 0$, puede ocurrir que la función tenga una discontinuidad evitable en $x = a$.

f) Falso. Porque $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2^x} = 0$ y la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

50 Son los puntos de la forma $x = k$ con k número entero.

51 Como la función $y = sen\, x$ es periódica, los valores que toma y oscilan cuando $x \to +\infty$ y, además, lo hacen sin acercarse a ningún número concreto. Por tanto, el límite no puede existir.

52 El límite b), porque cuando $x \to 4^+$, $x > 4$. Entonces, $4 - x < 0$ y la raíz cuadrada no existe.

53 a) Falso.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = +\infty$ porque $ax^n > 0$ al ser n par y $a > 0$.

b) Falso.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = -\infty$ porque $ax^n < 0$ al ser n impar y $a > 0$.

c) Verdadero.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = -\infty$ porque $ax^n < 0$ al ser n par y $a < 0$.

d) Verdadero.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = +\infty$ porque $ax^n > 0$ al ser n impar y $a < 0$.

54 a) $\lim\limits_{x \to +\infty} |2x + 1| = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} |2x + 1| = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (|x| + x - 3) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} (|x| + x - 3) = -3$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (|x + 4| + |x|) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} (|x + 4| + |x|) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (|x + 2| - |x|) = 2 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} (|x + 2| - |x|) = -2$

55 a) • Verticales: $x = 2$

Posición:

Si $x \to 2^-$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to 2^+$, $f(x) \to -\infty$

• Horizontales:

La recta $y = -1$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

b) • Verticales: $x = 1$

Posición:

Si $x \to 1^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 1^+$, $f(x) \to +\infty$

• Horizontales:

La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

La recta $y = -2$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

56 $\lim\limits_{x \to 0^+} 2^{1/x} = 2^{+\infty} = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to 0^-} 2^{1/x} = 2^{-\infty} = 0$

No existe el límite.

57 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = 2$

58 a) $\dfrac{1}{2}$ b) 2 c) $\dfrac{1}{3}$

d) $\dfrac{10}{3}$ e) $\dfrac{9}{5}$ f) $\dfrac{3}{2}$

59 Las asíntotas verticales son las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Posición:

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \dfrac{1}{0} = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \dfrac{1}{0} = +\infty$

No tiene asíntotas horizontales.

Autoevaluación

Página 299

1 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -5$

No tiene límite en $x = 3$.

$\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 13$

Es continua en $x = 0$ y en $x = 5$. No es continua en $x = 3$ porque no tiene límite en ese punto.

2 a) $\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{1}{3}$

c) $+\infty$

3 a) No tiene límite en $x = 3$.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$

No tiene límite en $x = 2$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

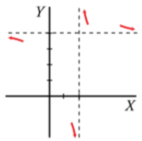
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

4 • Asíntota vertical: $x = 2$

Posición $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{4x}{x - 2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{4x}{x - 2} = +\infty \end{cases}$

• Asíntota horizontal: $y = 4$

Posición: $\begin{cases} x \to +\infty, \ y > 4 \\ x \to -\infty, \ y < 4 \end{cases}$



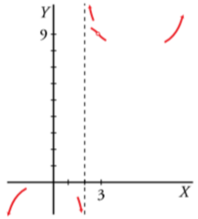
5 $a = 2$

6 $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 9$

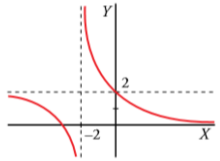
$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



7



8 No tiene asíntotas verticales.

No tiene asíntotas horizontales.

Asíntota oblicua: $y = 2x$

Posición $\begin{cases} x \to +\infty \text{ curva} < \text{asíntota} \\ x \to -\infty \text{ curva} > \text{asíntota} \end{cases}$