Aplicaciones de la derivada: Recta tangente a una curva en un punto

Recuerda

La ecuación de la recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y tiene pendiente m es:

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

Recta normal a una curva

Se llama recta normal a una curva en un punto a la perpendicular a la recta tangente en ese punto. Según esto, la ecuación de la recta normal a $y = f(x)$ en el punto de abscisa a es:

$$y = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) + f(a)$$

Teniendo en cuenta que hemos visto que la derivada de una función y = f(x) en el punto x=a, era la pendiente de la tangente a la curva en (a, f(a)), entonces:

Ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto de abscisa a: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

La ordenada del punto de abscisa a es $f(a)$. La pendiente de la recta es $f'(a)$.

https://www.youtube.com/watch?v=7tU2EZdVlmo

https://www.youtube.com/watch?v=217bHpdLKF8

Ecuación de la recta tangente en un punto

Escribir la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \log_2(\operatorname{sen} x)$ en el punto de abscisa $\frac{\pi}{6}$.

Calculamos la ordenada:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \log_2\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = -1$$

Hallamos la pendiente de la recta tangente, $m = f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$:

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,\frac{1}{\ln 2} \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\cos(\pi/6)}{\operatorname{sen}(\pi/6)}\,\frac{1}{\ln 2} = \frac{\sqrt{3}}{\ln 2}$$

Con el punto $P\left(\frac{\pi}{6}, -1\right)$ y la pendiente $m = \frac{\sqrt{3}}{\ln 2}$ escribimos la ecuación:

$$y = -1 + \frac{\sqrt{3}}{\ln 2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Hazlo tú. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \operatorname{tg} x$ en $x = \frac{3\pi}{4}$.

$$y = 2x - \frac{3}{2}\pi - 1$$

Recta tangente paralela a una recta

Dada la parábola $y = x^2 - 2x - 2$, se traza la cuerda que une los puntos de la parábola de abscisas $x = 1$ y $x = 3$.

Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola que es paralela a esa cuerda.

La pendiente de la recta tangente, $f'(a)$, debe ser igual a la pendiente de la cuerda, m.

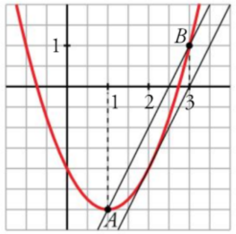
Hallamos los extremos de la cuerda: $\begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow y_1 = -3;\ A(1, -3) \\ x_2 = 3 \rightarrow y_2 = 1;\ B(3, 1) \end{cases}$

Pendiente de la cuerda: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4}{2} = 2$

$$f'(a) = 2a - 2 = 2 \rightarrow a = 2,\ f(2) = -2$$

La tangente en el punto (2, –2) es paralela a la cuerda que une los puntos A y B. Por tanto, su ecuación, en forma punto-pendiente, es:

$$y = -2 + 2(x - 2) \rightarrow y = 2x - 6$$



Hazlo tú. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 3x^2 - 4x$ que sea paralela a la recta $2x - y + 5 = 0$.

$y = 2x - 3$.

Puntos de tangente horizontal

Hallar los puntos de tangente horizontal de la función $f(x) = \frac{-x^3}{3} + 3x^2 - 8x + 16$.

Con ayuda de las ramas infinitas, decir si son máximos o mínimos.

- Hallamos las abscisas de los puntos singulares resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = -x^2 + 6x - 8 \rightarrow -x^2 + 6x - 8 = 0 \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 4$$

Calculamos las ordenadas de estos puntos:

$$f(2) = \frac{-8}{3} + 12 - 16 + 16 = \frac{28}{3} \qquad f(4) = \frac{-64}{3} + 48 - 32 + 16 = \frac{32}{3}$$

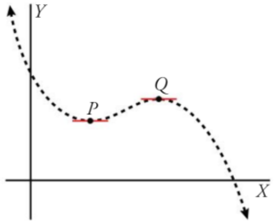
Los puntos pedidos son $P\left(2, \frac{28}{3}\right)$ y $Q\left(4, \frac{32}{3}\right)$.

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^3}{3} + 3x^2 - 8x + 16 = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^3}{3} + 3x^2 - 8x + 16 = +\infty$$

Por tanto $P\left(2, \frac{28}{3}\right)$ es un mínimo y $Q\left(4, \frac{32}{3}\right)$ es un máximo.



Hazlo tú. Halla los puntos singulares de la función $f(x) = x^3 - 6x^2$ y di si son máximos o mínimos.

Los puntos singulares son (0, 0) y (4, –32).

(4, –32) es un mínimo.

(0, 0) es un máximo.

Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la función f en el punto de abscisa indicado en cada caso.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ **en** $x = 2$ **b)** $f(x) = \sqrt{x+1}$ **en** $x = 3$ **c)** $f(x) = \dfrac{2-x}{x^3}$ **en** $x = -1$

La recta tangente es $y = -1(x-2) + 0$, es decir, $y = -x + 2$

La recta normal es $y = \dfrac{-1}{-1}(x-2) + 0$, es decir, $y = x - 2$

Halla los puntos en los que la pendiente de la recta tangente a cada una de las siguientes funciones es igual a 2:

a) $y = x^2 - 2x$ **c)** $y = 4\sqrt{x+3}$ $x = 2$ $x = -2$

b) $y = \dfrac{x}{x+2}$ **d)** $y = ln\,(4x-1)$ $x_1 = -1,\ x_2 = -3$ $x = \dfrac{3}{4}$

Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta tangente a f, que sea paralela a la recta dada.

a) $f(x) = x^2 + 4x + 1$ **paralela a** $2x + y + 1 = 0$ $y = -2(x+3) - 2.$

b) $f(x) = x^3 - 3x$ **paralela a** $y = 6x + 10$ $y = 6(x - \sqrt{3})$

Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes y de las rectas normales a la función $y = 4 - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.

La recta tangente en $x = -2$ es $y = 4(x+2)$ La recta tangente en $x = 2$ es $y = -4(x-2)$

Las rectas normales son: en $x = -2$, $y = -\dfrac{1}{4}(x+2)$ y en $x = 2$, $y = \dfrac{1}{4}(x-2)$

Obtén los puntos donde la recta tangente es horizontal y escribe su ecuación.

$y = x^3 - 12x$ $y = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

La ecuación de la recta tangente en $x = -2$ es $y = 16$. La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

La ecuación de la recta tangente en $x = 2$ es $y = -16$.

Ahora un poco más complicado...

Determina la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = 2x - 3$ en el punto $A(2, 1)$ y que pasa por el punto $B(5, -2)$.

La función es $f(x) = -x^2 + 6x - 7.$

Halla el valor de x para el que las tangentes a las curvas $y = 3x^2 - 2x + 5$ e $y = x^2 + 6x$ sean paralelas y escribe las ecuaciones de esas tangentes.

$y = 10(x-2) + 16 \rightarrow y = 10x - 4$

Halla a, b y c en $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ de modo que la gráfica de f tenga tangente horizontal en $x = -4$ y en $x = 0$ y que pase por $(1, 1)$.

La función es $f(x) = x^3 + 6x^2 - 6.$

La ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ es $4x - 3y + 1 = 0$. ¿Cuál es el valor de $f'(2)$? ¿Y el de $f(2)$?

$f'(2) = \dfrac{4}{3}.$ $f(2) = \dfrac{4}{3} \cdot 2 + \dfrac{1}{3} = 3.$

Halla una función de segundo grado sabiendo que pasa por (0, 1) y que la pendiente de la recta tangente en el punto (2, –1) vale 0.

La función es $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 1.$