Cálculo de límites de funciones definidas ”a trozos”

Si las imágenes de todos los valores de x próximos a x_0 se calculan por medio de la misma expresión analítica

$$\lim_{x\to\infty} f(x)\ donde\ f(x) = \begin{cases} 2\ si\ x = 1 \\ \dfrac{x^3 - 7x^2 + 6x}{1 - x}\ si\ x \neq 1 \end{cases}$$

Para calcular la imagen de los valores de x próximos a 1, tanto por la izquierda como por la derecha, utilizamos una sola expresión analítica, la correspondiente a $x \neq 1$. Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^3 - 7x^2 + 6x}{1 - x} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2 - 6x)\cdot(x - 1)}{(-1)(x - 1)} = \frac{1 - 6\cdot 1}{-1} = 5$$

Si las imágenes de los valores de x próximos a x_0 por la izquierda se calculan por medio de una expresión analítica, y las de los valores próximos a x_0 por la derecha por medio de otra diferente

$$\lim_{x \to 1} f\,(x) \text{ y } \lim_{x \to 3} f(x) \text{ donde } f\,(x) = \begin{cases} 3 - x \; si \; x < 1 \\ 2 \; si \; 1 \leq x \;\leq 3 \\ x + 1 \; si \; x > 3 \end{cases}$$

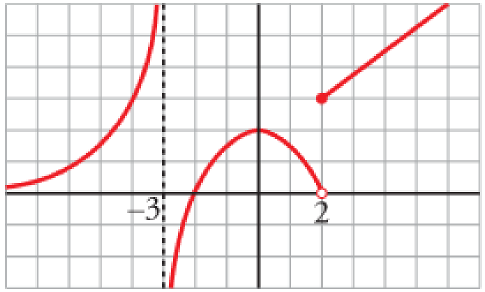
Para calcular la imagen de los valores de x próximos a 1, tanto por la izquierda como por la derecha, utilizamos expresiones analíticas diferentes. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to 1^-} f\,(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (3 - \; x) = 3 - 1 = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f\,(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 2 \; = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1^-} f\,(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \;\Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to 3^-} f\,(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \; 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f\,(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (\,x + 1\,) \; = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 3^-} f\,(x) \neq \lim_{x \to 3^+} f(x) \;\Rightarrow no \; existe \; \lim_{x \to 3} f(x)$$

Calculemos límites de funciones definidas a trozos:

Sobre la gráfica de la siguiente función, halla:

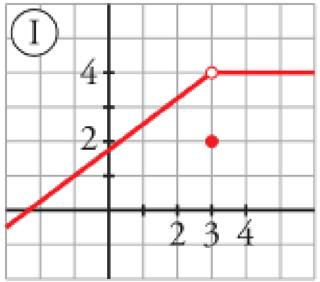


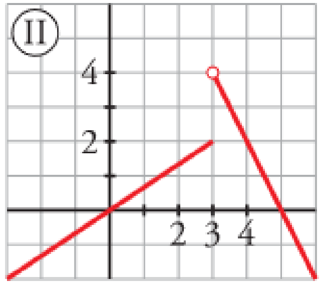
a) $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

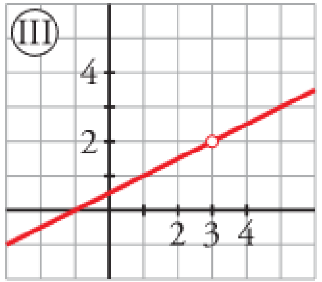
d) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ e) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ f) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

Relaciona cada una de estas expresiones con su gráfica:

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2$ b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$ c) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ no existe







Calcula también el límite de la función:

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \;\; x < 0 \\ 3x - 5 & si \;\; 0 \le x < 4 \\ 9x - x^2 & si \;\; x \ge 4 \end{cases}$$

hallar $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

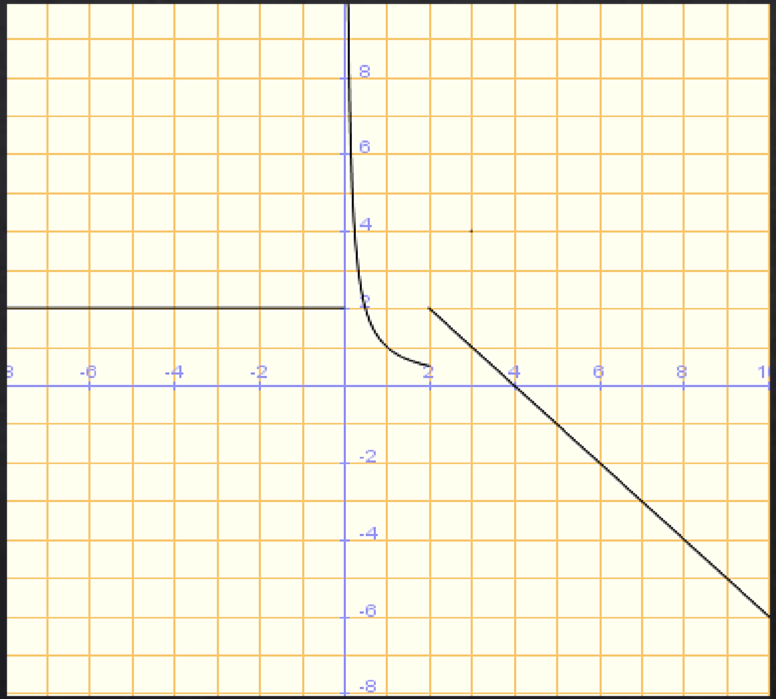
- Sabemos que $x \to +\infty$ significa que damos a x valores tan grandes como queramos (100, 1 000, …). Ten en cuenta en qué "trozo" de la función se calculan esos valores y halla el límite en esa expresión.
- Razona de modo análogo en el caso $x \to -\infty$.
- En el caso de $x = 0$ hay que estudiar los límites laterales.

Solución: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -5$

Continuidad de una función

La gráfica de **una función es continua** si la podemos dibujar sin levantar el lápiz del papel.

Consideremos $f(x) = \begin{cases} 2 & si\ x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & si\ 0 < x < 2 \\ -x+4 & si\ 2 \leq x < 3 \\ 4 & si\ x = 3 \\ -x+4 & si\ x > 3 \end{cases}$



esta función no es continua en x = 0, x = 2 y x = 3.

¿Qué ocurre en cada uno de esos puntos?

Veamos que ocurre en los puntos dónde cambia la forma de definir la función:

En x = 0

$$\left.\begin{array}{r} \exists \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 2 = 2 \\ \exists \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{+}{0} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Por tanto no existe el límite}$$

En x = 2

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (-x+4) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Por tanto tampoco existe el límite}$$

En x = 3

$$\left.\begin{array}{r} f(3) = 4 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (-x+4) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (-x+4) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 3} f(x) = 1 \text{ pero no coincide con el valor de } f \text{ en 3.}$$

Diremos entonces que:

Siendo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real, y siendo x_0 un punto del dominio de la función, **diremos que f es continua en x_0** si se verifica :

Que existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \; (con\ L\ un\ valor\ finito)$

Que existe $f(x_0)$

Que ambos valores sean iguales: $f(x_0) = L$

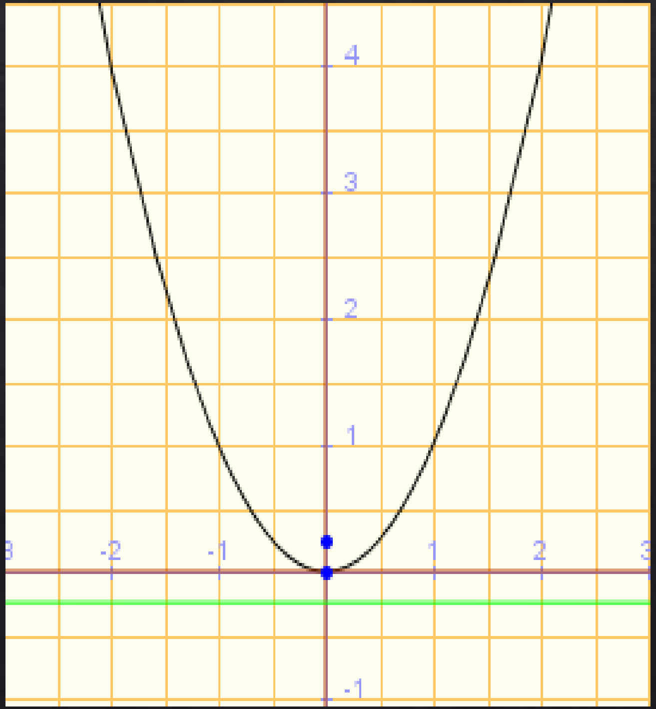
Diremos que:

Una **función es continua en un intervalo** si es continua en todos sus puntos.

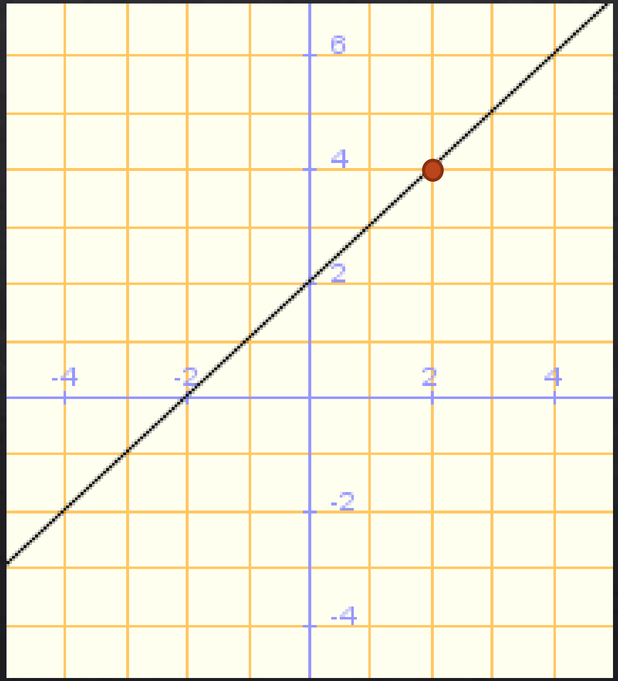
En los puntos donde la función no es continua se dice que es discontinua

Veamos algunos ejemplos:

$y = \ x^2$ es continua



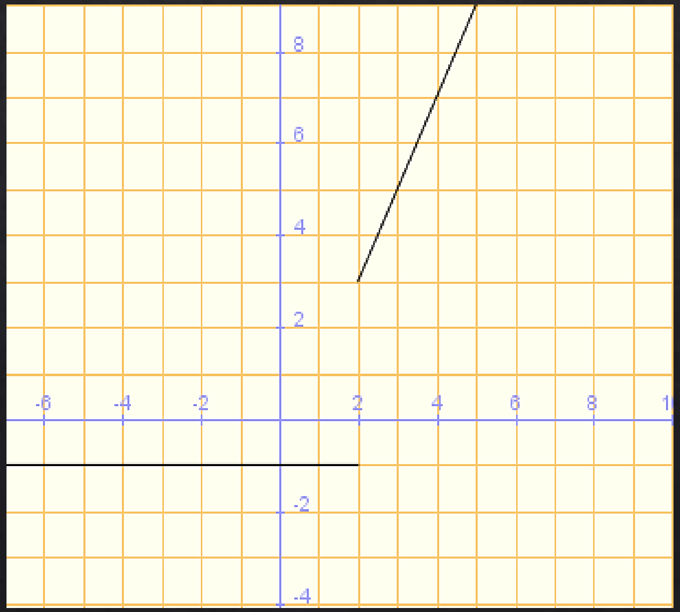
$y = \frac{x^2-4}{x-2}$ discontinuidad evitable en x = 2 ($\nexists\ f(2)$)



Algún ejemplo más:

$$f(x) = \begin{cases} -1, si\ x < 2 \\ 2x - 1, si\ x \geq 2 \end{cases}$$

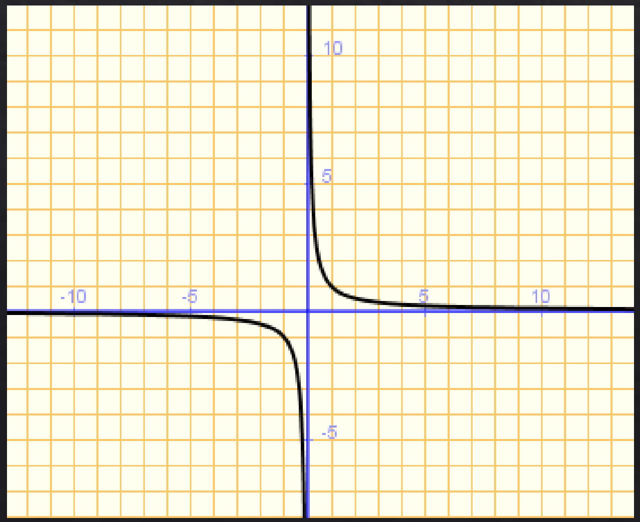
Discontinuidad de salto $\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Discontinuidad de salto infinito

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$



Continuidad de las funciones más usuales:

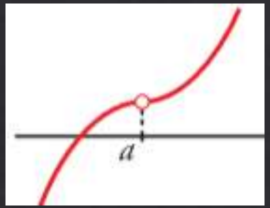
Teniendo en cuenta la definición de continuidad se puede asegurar que:

- ✓ *Las funciones constantes y las funciones polinómicas son siempre continuas*
- ✓ *Las funciones racionales* $f(x) = \frac{P\ (x)}{Q\ (x)},\ donde\ P(x) y\ Q(x)\ son\ polinomios$ *, son continuas para todo punto de su dominio de definición, es decir, para todos los puntos excepto las raíces del denominador, Q(x)*
- ✓ *Las funciones definidas a trozos son continuas si cada trozo es una función continua, y además si son continuas en los puntos de unión.*

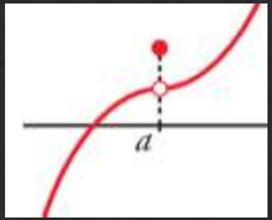
En general, una función es discontinua en todos los puntos que no pertenezcan a su dominio, ya que en esos puntos no existe la imagen de la función.

Tipos de discontinuidades:

<u>Evitable</u> si existe $\lim_{x \to x_0} f\ (x) = L$ pero $f\ (x_0) \neq L$ (es lo que ocurre en x = 3)

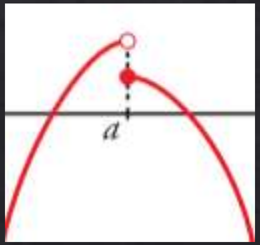


Bastaría definir $f\ (x_0)$ como el propio límite para que la función sea continua

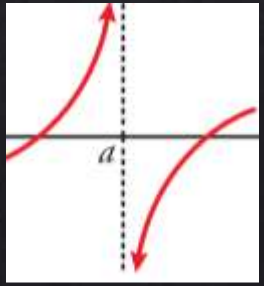


<u>De salto finito</u> si no existe $\lim_{x \to x_0} f\ (x)$

(si existen los límites laterales y son finitos pero no coinciden, es lo que ocurre en x = 2)



<u>De salto infinito</u> si no existe $\lim_{x \to x_0} f\ (x)$ (si alguno de los límites laterales es infinito) (es lo que ocurre en x = 0)



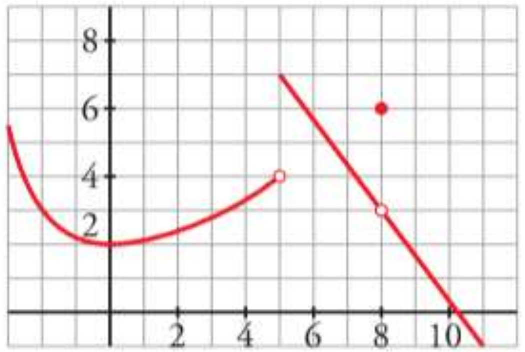
Límites y continuidad

Calcular, sobre la gráfica de $f(x)$, los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ *b)* $\lim_{x \to 5} f(x)$

c) $\lim_{x \to 8} f(x)$

¿Es f continua en esos puntos?



Cálculo del límite en un punto sobre la gráfica de una función

Límite y continuidad de una función definida a “trozos”

Considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si \ x < -2 \\ 2 & si \ -2 \le x < 1 \\ 3x-1 & si \ x > 1 \end{cases}$$

a) Hallar el límite en $x = -2$; $x = 0$; $x = 1$.

b) Estudiar su continuidad.

Hazlo tú. Halla el límite de la función $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & \text{si } x < 3 \\ x-2, & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$ en $x = 0$ y en $x = 3$. Estudia su continuidad.

Hallar, en cada caso, el valor de k para que las funciones siguientes sean continuas en $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2+6x}{x+2} & si \ x \ne -2 \\ k & si \ x = -2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 2^{x-2} & si \ x \le 3 \\ \sqrt{x+k} & si \ x > 3 \end{cases}$

Hazlo tú. Halla el valor de k para que la función $f(x) = \begin{cases} 2x-5 & \text{si } x \le 1 \\ x+k & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

Función continua en un punto

Solucionemos los ejercicios anteriores:

a) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2$. Además, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 2 \to f$ es continua en $x = 0$.

b) Observamos que la función se aproxima a números distintos si damos a x valores menores o mayores que 5.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 5^-} f(x)=4\\ \lim_{x\to 5^+} f(x)=7\end{array}\right\} \quad \text{No existe } \lim_{x\to 5} f(x) \text{ porque } \lim_{x\to 5^-} f(x) \neq \lim_{x\to 5^+} f(x)$$

f es discontinua en $x = 5$; tiene un salto finito.

c) La situación es similar al caso a) pero el límite no coincide con el valor de la función en el punto: $\lim_{x\to 8} f(x) = 3$ y $f(8) = 6$, luego $\lim_{x\to 8} f(x) \neq f(8)$.

f es discontinua en $x = 8$. Tiene un punto desplazado.

a) Para que f sea continua en $x = c$ debe ser $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Si $c \neq -2$, f es continua porque $\lim_{x\to c} f(x) = \dfrac{3c^2+6c}{c+2} = f(c)$.

Si $c = -2$, $\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \dfrac{3x^2+6x}{x+2} = \dfrac{0}{0} \to \lim_{x\to -2} \dfrac{3x(x+2)}{x+2} = -6$

Como $f(-2) = k$, debe ser $k = -6$ para que f sea continua en $x = -2$. Por tanto, para $k = -6$ f es continua en $\mathbb{R}$. Su gráfica coincide con la de $y = 3x$.

b) Estudiamos la continuidad en el punto de ruptura $x = 3$. $f(3) = 2^{3-2} = 2$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \begin{cases}\lim_{x\to 3^-} 2^{x-2} = 2\\ \lim_{x\to 3^+} \sqrt{x+k} = \sqrt{3+k}\end{cases} \quad \text{Para que exista } \lim_{x\to 3} f(x), \text{ debe ser } 2 = \sqrt{3+k} \to k = 1$$

Para $k = 1$, f es continua en $x = 3$. Además, f es continua en $\mathbb{R}$, porque lo son $g_1(x) = 2^{x-2}$ y $g_2(x) = \sqrt{x+1}$ en los intervalos en los que están definidas.

a) • $x = -2$ es un "punto de ruptura". Por ello hay que estudiar los límites laterales.

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \begin{cases}\lim_{x\to -2^-} (2x+1) = -3\\ \lim_{x\to -2^+} 2 = 2\end{cases} \quad \text{No coinciden; por tanto, no existe } \lim_{x\to -2} f(x).$$

• En $x = 0$, como $-2 < 0 < 1$, $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 2 = 2$

• $x = 1$ es un "punto de ruptura". Calculamos los límites laterales.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases}\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2 = 2\\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (3x-1) = 2\end{cases} \quad \text{Coinciden. } \lim_{x\to 1} f(x) = 2.$$

b) f es discontinua en $x = -2$ porque no existe $\lim_{x\to -2} f(x)$; en ese punto la función tiene un salto finito.

También es discontinua en $x = 1$ porque no existe $f(1)$; le falta un punto, es una discontinuidad evitable.