Indeterminación $\frac{0}{0}$

Para resolver esta indeterminación, si la función es racional, se divide numerador y denominador por *(x-a),* es decir, se simplifica la fracción para resolver la indeterminación.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{2x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+4)(x-1)}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+4}{2}=\frac{5}{2}$$

A veces aparece también este tipo de indeterminación en límites de funciones irracionales:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}=\frac{0}{0}\ indet=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{x+2}+2\right)=4$$

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{x^2 - 2x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 + 3x}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + x}$

e) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{x^2 - 4}$

f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

g) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}$

h) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

Halla $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$. Para ello, multiplica numerador y denominador por el binomio conjugado $(\sqrt{x} + 1)$ del denominador.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - \sqrt{2x}}{x - 2}$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{\sqrt{4 - x} - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{2x - 1} - 3}{x - 5}$

d) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x - 7}{\sqrt{3x + 4} - 5}$

e) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{6x + 1} - 5}{\sqrt{2x + 1} - 3}$

f) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{3x - 2} - 5}{\sqrt{2x + 7} - 5}$

Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Este tipo de indeterminación aparece al calcular el límite infinito de algunas funciones racionales. Para resolver esta indeterminación, dividiremos numerador y denominador por la mayor potencia de la variable que aparezca en el cociente. Obtenemos entonces:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\infty}{\infty} = \begin{cases} \infty, & si\ grado\ de\ P(x) > grado\ Q(x) \\ 0, & si\ grado\ de\ P(x) < grado\ Q(x) \\ \frac{k}{l} & si\ grado\ de\ P(x) = grado\ Q(x) \end{cases}$$

Siendo *k* y *l* los coeficientes de los términos de mayor grado de *P(x)* y *Q(x)* respectivamente.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{2\,x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

Veamos algunos ejemplos:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x + 12} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 2x}{x^3 + 2x - 1} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4 - 7}} = \frac{\infty}{\infty}\ indet \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4 - 7}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{\sqrt{x^4 - 7}}{x^2}} = \frac{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}}{\sqrt{\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - 7}{x^4}}} = \frac{0}{1} = +\infty$$

Notar que el cálculo de límites en $-\infty$ *reduce al caso de* $+\infty$, *considerando que si x tiende a* $-\infty$, $-x$ *tiende a* $+\infty$

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{(x-1)^2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x^2}{3-x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-1}{x^2-1}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{(2-x)^3}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{x+2}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+5}{1-x}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2-3x}{x+3}$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3-2x}{5-2x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x-1}{x^5}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(2x+3)}{x^2}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2^x - x^4)$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}75^x - x^2)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+3}}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{100x}{\sqrt[3]{x^2}}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x}{\sqrt{4-x^3}}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6-7x}}{4x-2}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x-2}$

Indeterminación $\infty - \infty$

Para resolver esta indeterminación, si f(x) es una resta de funciones racionales, se efectúa la diferencia obteniéndose una única función racional.

$$\lim_{x \to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2-1}\right) = \infty - \infty = \lim_{x \to 1}\frac{(x+1)-2x}{x^2-1} = \lim_{x \to 1}\frac{-x+1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1}\frac{-1}{x+1} = \frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x \to \infty}\left(\frac{x-1}{2} - \frac{x^2-1}{2x+3}\right) = \infty - \infty = \lim_{x \to \infty}\frac{(x-1)(2x+3)-2\left(x^2-1\right)}{2(2x+3)}$$

$$= \lim_{x \to \infty}\frac{\left(2x^2+x-3\right)-\left(2x^2-2\right)}{4x+6} = \lim_{x \to \infty}\frac{(x-1)}{4x+6} = \frac{1}{4}$$

Otro caso:

Si f(x) es una resta de funciones radicales cuadráticas se puede multiplicar y dividir por la expresión radical conjugada para que desaparezca la indeterminación o utilizar alguno de los métodos anteriores.

$$\lim_{x \to +\infty}\left(x - \sqrt{x+2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x - \sqrt{x+2}\right)\left(x + \sqrt{x+2}\right)}{\left(x + \sqrt{x+2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x + \sqrt{x+2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2 - x - 2}{x^2}}{\frac{x + \sqrt{x+2}}{x^2}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

Indeterminación 1^{∞}

Las indeterminaciones del tipo 1^{∞} se resuelven teniendo en cuenta que $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$

Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \; y \; \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \; entonces \; \lim_{x \to +\infty} f(x)^{g(x)} (= 1^{\infty}) = e^{\lim_{x \to +\infty} g(x)[f(x)-1]}$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x+5}{3x+1}\right)^{\frac{x^2}{x+1}} = 1^{+\infty} = indeterminado$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3x+5}{3x+1} - 1\right)^{\frac{x^2}{x+1}} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{4}{3x+1}\right)^{\frac{x^2}{x+1}} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3x+1}{4}}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3x+1}{4}}\right)^{\frac{x^2}{x+1} \cdot \frac{3x+1}{4} \cdot \frac{4}{3x+1}} = e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x+1} \cdot \frac{4}{3x+1}} = e^{\frac{1}{3}}$$

Veamos algunos ejercicios:

Cálculo del límite de una función en un punto:

Calcular los límites siguientes:

a) $\lim_{x \to 0} e^{x+1}$

b) $\lim_{x \to 1} \frac{3x-2}{x^2-1}$

c) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3-3x^2}{x^2-x-6}$

Hazlo tú. Calcula:

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-2x+1}{2x^2-2x}$ b) $\lim_{x \to -2} \frac{x}{(x+2)^2}$

Cálculo de límites cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$:

Hallar, en cada caso, el límite de $f(x)$ cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, e interpretar gráficamente los resultados.

a) $f(x) = \sqrt[3]{9x+10}$

b) $f(x) = \frac{3x+1}{2-x}$

c) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2}$

Hazlo tú. Calcula $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ en los siguientes casos:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$

b) $f(x) = \frac{4x^2-1}{3-2x^2}$

c) $f(x) = \frac{x^2}{x-5}$

d) $f(x) = \frac{5x+3}{x^2-2}$

Más límites en el infinito:

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{5x}{\sqrt{4x^2+1}}$ b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{3x}}{x+1}$

c) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2+3}{x-2}}$

Veamos las soluciones:

Al cálculo del límite de una función en un punto:

a) $\lim\limits_{x \to 0} e^{x+1} = e^{0+1} = e$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x-2}{x^2-1} = \dfrac{1}{0} = \pm\infty$ Estudiamos el signo de f a la izquierda y a la derecha de 1.

$$\left.\begin{array}{l} x = 0{,}99;\ f(0{,}99) = \dfrac{3 \cdot 0{,}99 - 2}{0{,}99^2 - 1} < 0 \to \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{3x-2}{x^2-1} = -\infty \\ x = 1{,}01;\ f(1{,}01) = \dfrac{3 \cdot 1{,}01 - 2}{1{,}01^2 - 1} > 0 \to \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{3x-2}{x^2-1} = +\infty \end{array}\right\}$$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3-3x^2}{x^2-x-6} = \dfrac{0}{0}$ Es una indeterminación; para resolverla, hay que simplificar la fracción.

$$\frac{x^3-3x^2}{x^2-x-6} = \frac{x^2(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{x^2}{x+2};\ \lim_{x \to 3} \frac{x^3-3x^2}{x^2-x-6} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2}{x+2} = \frac{9}{5}$$

A los otros límites en el infinito:

Estudia, en cada caso, el grado del numerador y del denominador y aplica la misma regla que en el cociente de polinomios. Ten en cuenta que *grado* $\sqrt[n]{x^p} = p/n$.

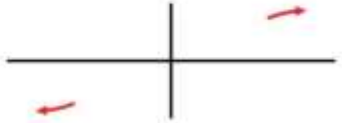
Solución: a) 5/2 b) 0 c) $+\infty$

Al Cálculo de límites cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$:

a) Podemos conseguir que $f(x)$ sea tan grande como queramos dando a x valores muy grandes.

Por ejemplo, si queremos que $f(x) > 10^3$, debe ser $x > \dfrac{10^9 - 10}{9}$. Por tanto:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{9x+10} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{9x+10} = -\infty \end{array}\right.$$



b) Como el grado del numerador es igual al del denominador, el límite es el cociente entre los coeficientes de los términos de mayor grado.

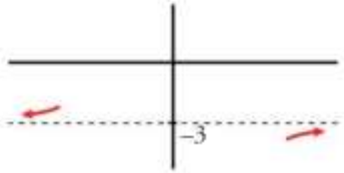
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x+1}{2-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{-x} = -3 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x+1}{2-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x}{-x} = -3 \end{array}\right\}\ y = -3 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Estudiamos la posición de la curva con respecto a la asíntota:

$x = 100$, $f(100) = -3{,}07 < -3$

$x = -100$, $f(-100) = -2{,}93 > -3$

La curva está bajo la asíntota cuando $x \to +\infty$ y sobre la asíntota cuando $x \to -\infty$.



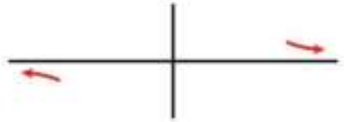
c) Como el grado del numerador es menor que el del denominador, el límite es 0.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x^2} = 0;\quad \lim_{x \to -\infty} \frac{2x+1}{x^2} = 0$$

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal. Estudiamos la posición de la curva respecto a la asíntota.

Si $x = 100$, $f(100) = \dfrac{201}{100^2} > 0$; si $x = -100$, $f(-100) = \dfrac{-199}{100^2} < 0$

Cuando $x \to +\infty$, la curva está sobre la asíntota y cuando $x \to -\infty$, la curva está bajo ella.



Ramas infinitas y asíntotas:

1 *Hallar las ramas infinitas de las funciones siguientes. Si hay asíntotas, estudia la posición de la curva respecto a ellas.*

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 4}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-3}$

Hazlo tú. Estudia las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

2 *Hallar a, b y c en* $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx}{x - c}$ *para que tenga como asíntotas* $x = 2$ *e* $y = 2x - 1$.

3 *Estudiar y representar las ramas infinitas de las funciones siguientes:*

a) $f(x) = 1,5^x$

b) $f(x) = 0,4^x$

c) $f(x) = \ln(2x - 4)$

4 *¿Tiene alguna asíntota la siguiente función?:*

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 3}$$

¿Qué relación hay entre su gráfica y la de $g(x) = x^2 - 4$*?*

Soluciones a las ramas infinitas y asíntotas:

1

a) • **Asíntotas verticales.** Buscamos las raíces del denominador.

En este caso no hay asíntotas verticales porque no hay ningún valor que anule el denominador $(x^2 + 4 \neq 0)$.

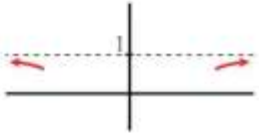
• **Asíntotas horizontales.** Hallamos los límites en el infinito.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{x^2+4} = 1; \ \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-1}{x^2+4} = 1 \ \rightarrow \ y = 1$ es asíntota horizontal.

Para ver la posición de la curva respecto a esta asíntota estudiamos el signo de la diferencia entre la curva y la asíntota.

$d = f(x) - 1 = \frac{x^2-1}{x^2+4} - 1 = \frac{-5}{x^2+4}$; $d < 0$ para cualquier valor de x.

Por tanto, $f(x) < 1$ tanto si $x \rightarrow +\infty$, como si $x \rightarrow -\infty$; la curva se aproxima a la asíntota por debajo.



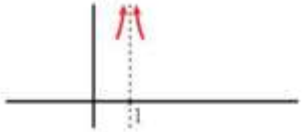
• No puede tener **asíntotas oblicuas** porque los grados del numerador y del denominador son iguales.

b) • **Asíntotas verticales**

$(x-1)^2 = 0 \ \rightarrow \ x = 1; \ \lim_{x \to 1} \frac{x}{(x-1)^2} = \infty; \ x = 1$ es asíntota vertical.

Si $x \rightarrow 1^-$, $\left(f(x) = \frac{+}{+} > 0\right)$ $f(x) \rightarrow +\infty$

Si $x \rightarrow 1^+$, $\left(f(x) = \frac{+}{+} > 0\right)$ $f(x) \rightarrow +\infty$

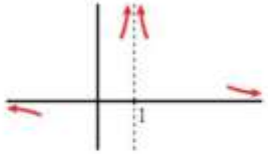


• **Asíntotas horizontales**

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = 0; \ y = 0$ es asíntota horizontal.

Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$. La curva está sobre la asíntota.

Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0$. La curva está bajo la asíntota.



• No hay **asíntota oblicua.**

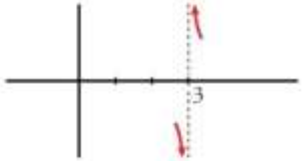
c) • **Asíntotas verticales**

$x - 3 = 0 \ \rightarrow \ x = 3; \ \lim_{x \to 3} \frac{2x^2}{x-3} = \pm\infty; \ x = 3$ es asíntota vertical.

Posición:

Si $x \rightarrow 3^-$, $\left(f(x) = \frac{+}{-} < 0\right)$ $f(x) \rightarrow -\infty$

Si $x \rightarrow 3^+$, $\left(f(x) = \frac{+}{+} > 0\right)$ $f(x) \rightarrow +\infty$



• **Asíntotas horizontal u oblicua**

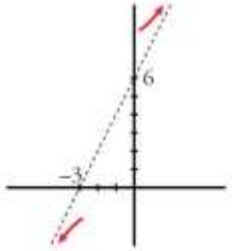
Como el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador, hay asíntota oblicua. Para hallarla, dividimos y expresamos la función como:

$\frac{\text{Dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}} \ \rightarrow \ \frac{2x^2}{x-3} = 2x + 6 + \frac{18}{x-3}$

$y = 2x + 6$ es asíntota oblicua.

Estudiamos el signo de la diferencia para ver la posición.

$d = f(x) - y = \frac{18}{x-3}$ $\begin{cases} \text{Si } x \rightarrow +\infty \ (d > 0) \ f(x) > y \\ \text{Si } x \rightarrow -\infty \ (d < 0) \ f(x) < y \end{cases}$



2

- Halla c utilizando la asíntota vertical.
- Obtén la ecuación de la asíntota oblicua en función de a y de b e iguala los coeficientes que obtengas a los de la recta $y = 2x - 1$.

Solución: $c = 2$; $a = 2$; $b = -5$

3

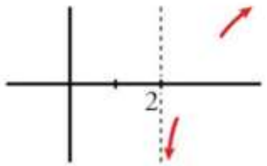
a) y b) Recuerda que las funciones exponenciales son continuas en $\mathbb{R}$. Para hallar su límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, utiliza la calculadora dando a x valores "grandes" positivos y negativos y analiza los resultados que obtengas.

c) Recuerda cómo es la gráfica de la función logarítmica. Determina el dominio de definición de f: $(a, +\infty)$. Estudia el valor de $f(x)$ en las proximidades de a y para valores grandes de x.

Solución:

a) 

b) 

c) 

4

- Justifica por qué no tiene asíntota horizontal ni oblicua.
- Calcula el límite de f en el punto que anula el denominador y deduce si tiene asíntota vertical.
- Simplifica f y representa f y g. ¿Cuál es el dominio de cada una?

Solución: No tiene asíntotas. La gráfica de f es idéntica a la de g salvo en el punto $(3, 5)$. $Dom\, f = \mathbb{R} - \{3\}$; $Dom\, g = \mathbb{R}$.