Límites de funciones

Estudio de la continuidad de una función

Límite de una función en un punto

Observa las siguientes gráficas:

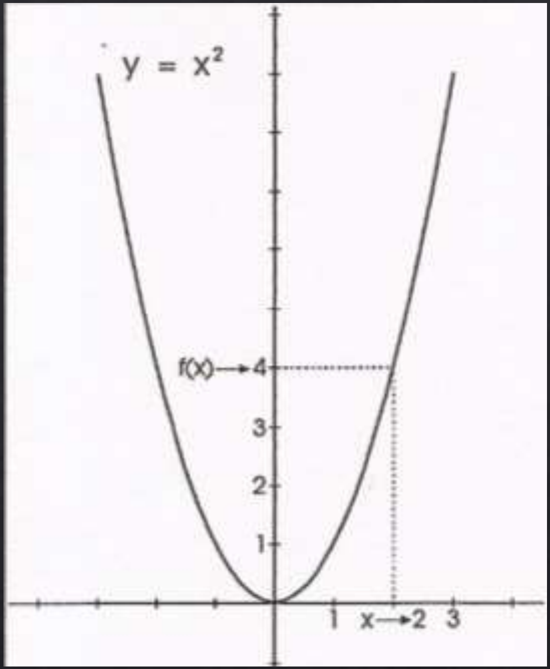
$$y = f(x) = x^2$$

¿Qué valores tomará y $= x^2$ cuando la variable x se acerque al punto 2?

o dicho de otro modo, ¿cuánto vale el límite de la función $f(x) = x^2$

cuando x tiende a 2? … hagamos una tabla de valores…

x	1,5	1,9	1,99	1,999	2,5	2,1	2,01	2,001
y	2,25	3,61	3,9601	3,996001	6,25	4,41	4,0401	4,004001



Las imágenes se aproximan a 4 que además es el valor que toma la función en 2

Por lo tanto, diremos : $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$

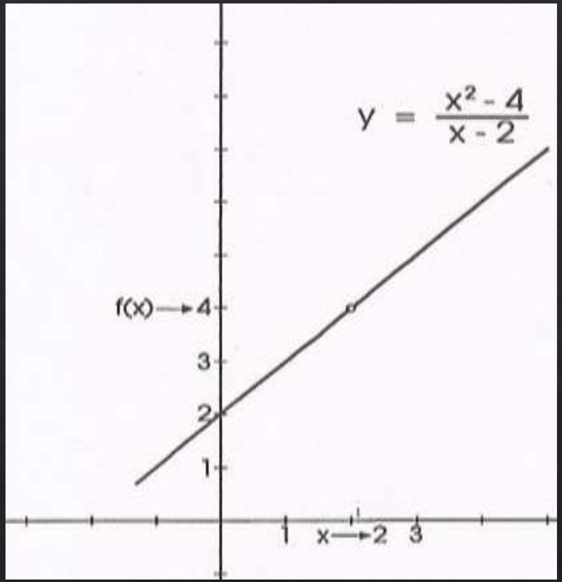
Consideramos ahora la función $\boldsymbol{y = f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}}$

Calculemos los valores que toma la función cuando x se aproxima a 2:

Igual que antes, construimos una tabla de valores:

x	**1,5**	**1,9**	**1,99**	**1,999**
y	3,5	3,9	3,99	3,999

x	**2,5**	**2,1**	**2,01**	**2,001**
y	4,5	4,1	4,01	4,001

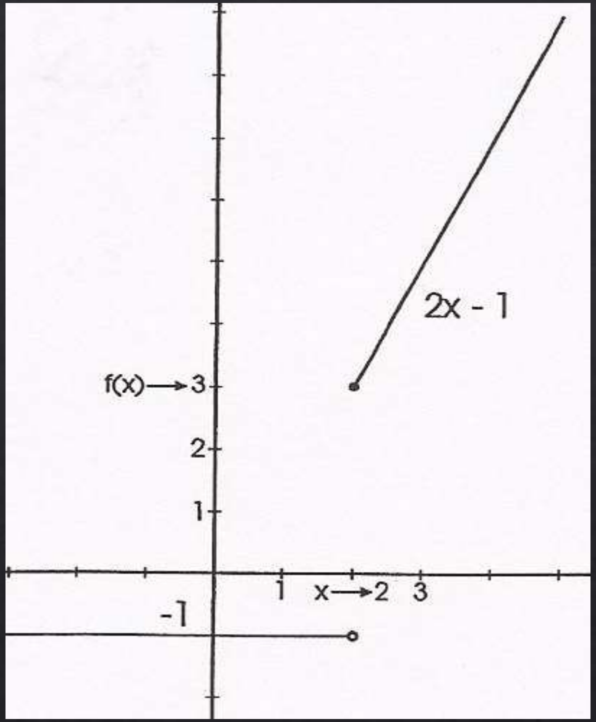


Al dar a x valores próximos a 2 (tanto mayores como menores)

las imágenes se van aproximando a 4, lo que significa que $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$

(aunque no existiría la función en 2)

Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} -1, si\ x < 2 \\ 2x - 1, si\ x \geq 2 \end{cases}$



Hagamos el mismo estudio en torno al punto 2

x	1,5	1,9	1,99	1,999
y	- 1	- 1	- 1	- 1

x	2,5	2,1	2,01	2,001
y	4	3,2	3,02	3,002

Obtenemos valores diferentes de la función según nos aproximemos a 2 por la derecha o por la izquierda.

En estas condiciones, decimos que la función no tiene límite cuando x tiende a 2.

Observa que $f(2)$ existe y vale 3; esto no influye para que no exista $\lim_{x \to 2} f(x)$. Si no existiera $f(2)$ sería lo mismo.

Diremos entonces que

El límite de una función *f* cuando x tiende a *a* es el valor ***l*** (cuando exista) al que se aproxima *f(x)* cuando la x se aproxima a *a*:

$$\boldsymbol{\lim_{x \to a} f\,(x) = l}$$

En general, para hallar el límite de una función en un punto, bastará con sustituir dicho punto en la función: $\boldsymbol{\lim_{x \to a} f\,(x) = f(a)}$

Por ejemplo:

$$\lim_{x \to 2} \left(2x^2 + 3\right) = 2 \cdot 2^2 + 3 = 11$$

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{x + 6} = \sqrt{3 + 6} = 3$$

Límites laterales

Al límite de una función *f(x)* en el punto *a*, cuando tomamos sólo valores inferiores a *a* se le denomina **<u>límite lateral por la izquierda</u>** y se representa por:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \text{ ó } \lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x)$$

De la misma forma, si la variable *x* sólo toma valores superiores a *a*, se le denomina **<u>límite lateral por la derecha</u>,** y se representa por:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \text{ ó } \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x)$$

<u>Una función tiene límite en un punto si y sólo si existen sus límites laterales y coinciden</u>.

Límites infinitos

Decimos que $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ si al aproximarse *x* a *a*, con *x* < *a*, entonces *f(x)* se hace mayor que cualquier número dado *K* (*f(x)* se va hacia + ∞).

Decimos que $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ si al aproximarse *x* a *a*, con *x* < *a*, entonces *f(x)* se hace menor que cualquier número dado *H* (*f(x)* se va hacia - ∞).

De la misma forma podemos definir los límites laterales por la derecha:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

En todos los casos se dice que $y = f(x)$ **tiene una *ASÍNTOTA VERTICAL***: la recta **x = *a***

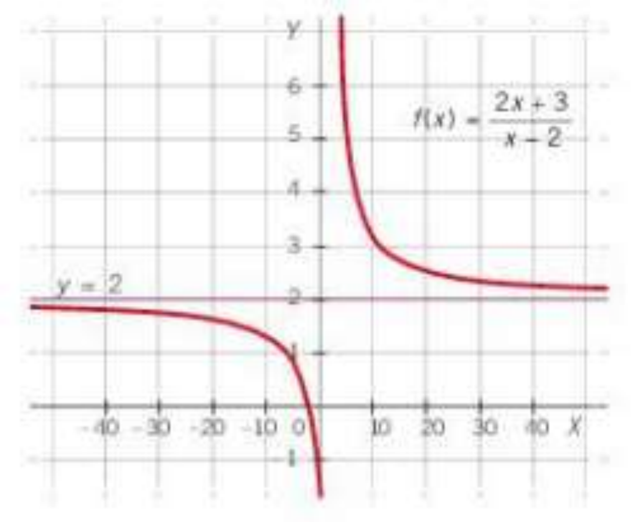
Límites en el infinito

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ si al dar a x valores cada vez más grandes (que se van hacia el infinito) entonces $f(x)$ se aproxima cada vez más a l

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ si al dar a x valores cada vez más pequeños (que se van hacia el menos infinito) entonces $f(x)$ se aproxima cada vez más a l

Si alguno de estos límites existe, la gráfica de la función tiende a la recta y = *l sin llegar a tocarla.*

y = *l es una ASÍNTOTA HORIZONTAL para la función f*



Para valores muy elevados de x (positivos o negativos) las imágenes se acercan a y = 2, luego $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 2$*; y = 2 es una A.H.*

Pero también para valores de x, cuanto más nos aproximamos a 0 la función crece o decrece indefinidamente, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \pm\infty$*; x = 0 es una A.V.*

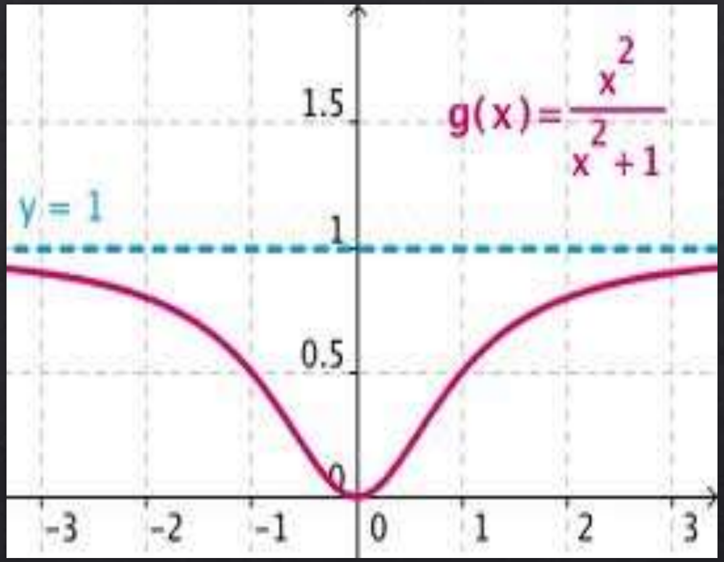
Veamos otro ejemplo:

Dándole valores a x cada vez más grandes o cada vez más pequeños se puede comprobar que las imágenes de la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ se aproximan cada vez más a 1.

Se cumple que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1 \ \ y \ \ que \ \ \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

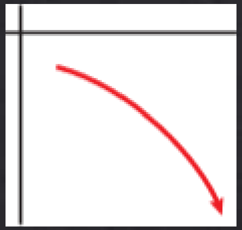
y consecuentemente la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ tiene como asíntota horizontal a la recta *y* = 1.



Diremos también que :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si al dar a *x* valores cada vez más grandes entonces los valores de *f(x)* también son cada vez más grandes .

Análogamente, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ si al dar a *x* valores cada vez más grandes entonces los valores de *f(x)* son cada vez más pequeños.



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ si al dar a *x* valores cada vez más pequeños , entonces los valores *de f(x)* también son cada vez más grandes.

Análogamente, decimos que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ si al dar a *x* valores cada vez más pequeños (que se van hacia menos infinito) entonces los valores de *f(x)* son cada vez más pequeños (se van hacia el menos infinito).

En estos casos diremos que la función tiene ***<u>ramas parabólicas</u>***

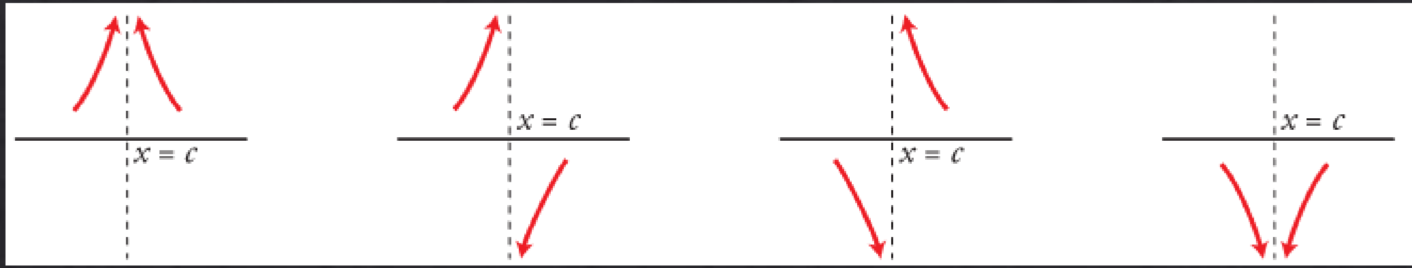
Ramas infinitas. Asíntotas

Ramas infinitas son tramos de curva que se alejan indefinidamente. Para que haya un rama infinita una de las variables, x o y, o ambas, tienden a infinito.

Cuando una rama infinita se ciñe a una recta, a esta se le llama **asíntota** de la curva.

Si $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$ entonces

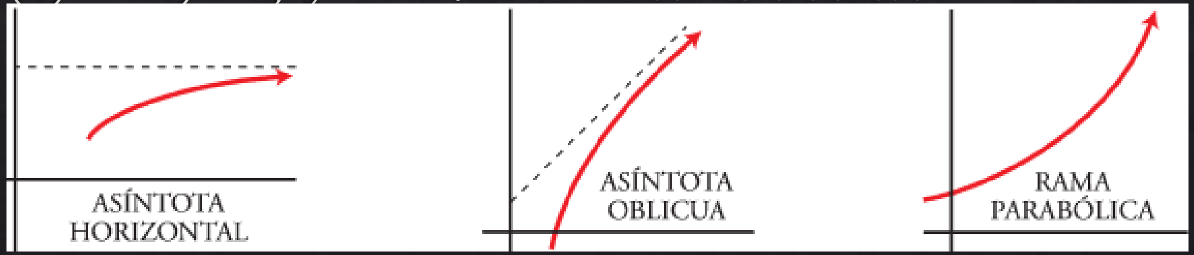
$x = c$ es una **asíntota vertical**



Si $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$, entonces la recta $\boldsymbol{y = l}$ **es una asíntota horizontal**

Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a, a \neq 0$ y $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = b$, $y = ax + b$ es una **asíntota oblícua**

Si $\lim_{x \to +\infty} \boldsymbol{f(x)} = \pm\infty$ y la curva no tiene asíntota oblícua, entonces presenta una **rama parabólica**



Cálculo de límites

Si existen $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$, entonces se verifican las siguientes propiedades:

- $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$
- Si K $\in \mathbb{R}$, k $\neq 0$, $\lim_{x \to a} \big(k \cdot f(x) \big) = k \cdot \lim_{x \to a} f(x)$
- $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$
- $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$
- $\lim_{x \to a} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x \to a} f(x)^{\lim_{x \to a} g(x)}$
- $\lim_{x \to a} \log_b f(x) = \log_b(\lim_{x \to a} f(x)), si \lim_{x \to a} f(x) > 0$

Estas propiedades también son válidas cuando $x \to \infty$

Veamos algunos ejemplos de cálculo de límites:

- ✓ $\lim_{x \to -1} \left(2x^2 - x + 4\right) = 2\,(-1)^2 - (\,-1) + 4 = 7$
- ✓ $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+3x+\ 4}{2x-2} = \frac{6}{3} = 2$
- ✓ $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+3x+\ 4}{2x-2} = \infty$, *aunque conviene calcular los límites laterales para saber si existe límite o no*
- ✓ $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+3x-\ 4}{2x-2} = \ \frac{0}{0}?$ *Indeterminado… el resultado depende de las funciones que intervengan*

Los tipos de indeterminación que pueden aparecer son: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty \cdot 0, \infty - \infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$