T6: ECUACIONES

Un problema sobre Diofanto

Cuenta la leyenda que, al morir Diofanto, sus discípulos grabaron sobre la tumba un epitafio, en forma de acertijo, cuya interpretación permitía averiguar la edad que alcanzó a vivir el maestro. Rezaba así:

Su juventud ocupó la sexta parte de su vida. Durante la siguiente doceava parte, su mejilla se cubrió de vello. Pasó una séptima parte más antes de casarse. Cinco años después tuvo un hijo. Este murió a la mitad de la edad que su padre. Diofanto aún vivió cuatro años después de la muerte de su hijo.

¿Cuál de las siguientes ecuaciones resuelve el epitafio de Diofanto?

I $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$ II $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+\frac{5}{x}+\frac{x}{2}+\frac{4}{x}=1$

¿A qué edad murió?

1 Ecuaciones. Solución de una ecuación

Una **ecuación,**más que una igualdad, es una **propuesta de igualdad**en la que interviene una letra llamada **incógnita.**

Una **solución**de la ecuación es un valor de la incógnita que hace que la igualdad sea cierta.

Resolveruna ecuación es hallar su solución, o soluciones, o llegar a la conclusión de que no existe solución.

Tipos de ecuaciones

Te puedes encontrar con ecuaciones de muy diversos tipos. Por ejemplo:

- **Ecuaciones polinómicas.** En ellas, la incógnita aparece solamente en expresiones polinómicas. Las ecuaciones:

$$3(x-5)+\frac{x-3}{2}=15 \qquad x^2-2=2(x+3) \qquad x^3-9x=(x+1)^2+3$$

son polinómicas de primer, segundo y tercer grado, respectivamente.

- **Con radicales.** $\sqrt{x+17}+2=x-1$
- **Con la x en el denominador.** $\frac{x+2}{x+3}-\frac{3}{x-1}=\frac{1}{8}$
- **Con la x en el exponente.** $2^x=64$; $3^x=81$; $x^x=3125$

¿Es 5 solución de alguna de las siguientes ecuaciones? Justifica tu respuesta:

$8x+3=11x-12$

$x^4-x^3=500$

$3x-7=x^2-10$

) $x^3+x^2+2x+1=161$

) $10x+25=x^3$

$x^2-20=2x-5$

2 Ecuaciones de primer grado

Una **ecuación de primer grado** es una expresión que se puede reducir a la forma $ax + b = 0$, siendo $a \neq 0$. Tiene una única solución: $x = -\frac{b}{a}$

■ ECUACIONES EQUIVALENTES

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución o ambas carecen de solución. Así, las ecuaciones $5x - 9 = 51$ y $3x - 7 = 89 - 5x$ son equivalentes porque la solución de ambas es $x = 12$.

■ TRANSFORMACIONES QUE MANTIENEN LA EQUIVALENCIA DE ECUACIONES

Para resolver una ecuación, hemos de despejar la x mediante una serie de *pasos*. Cada *paso* consiste en transformar la ecuación en otra equivalente, en la que la x esté más próxima a ser despejada. Recordemos algunas reglas:

TRANSFORMACIÓN	REGLA PRÁCTICA
Sumar o restar la misma expresión en los dos miembros de la igualdad.	Lo que está sumando en un miembro pasa restando al otro miembro, y viceversa.
Multiplicar o dividir los dos miembros por el mismo número distinto de cero.	Lo que está multiplicando a todo lo demás de un miembro pasa dividiendo al otro, y viceversa.

■ ECUACIONES ANÓMALAS

Existen expresiones que parecen ecuaciones de primer grado y que, sin embargo, no tienen solución o tienen infinitas soluciones. Por ejemplo:

- $4x - 6 = 4(x + 3) \rightarrow 4x - 6 = 4x + 12 \rightarrow 0 \cdot x = 18$

  No puede ser $0 \cdot x = 18$. Por tanto, la ecuación **no tiene solución.**

- $4x - 6 = 4(x - 2) + 2 \rightarrow 4x - 6 = 4x - 6 \rightarrow 0 \cdot x = 0$

  $0 \cdot x = 0$ es cierto cualquiera que sea x, pues $0 = 0$. Por tanto, la ecuación **tiene infinitas soluciones.**

Solución ≡ raíz

La solución de una ecuación también se llama **raíz.**

Ejemplo

Resolvamos la ecuación:

$$\frac{3x-1}{20} - \frac{2(x+3)}{5} = \frac{4x+2}{15} - 5$$

$\boxed{1}$ mín.c.m. $(20, 5, 15) = 60$

Se multiplican por 60 los dos miembros.

$$3(3x - 1) - 24(x + 3) =$$
$$= 4(4x + 2) - 60 \cdot 5$$

$\boxed{2}$

$$9x - 3 - 24x - 72 = 16x + 8 - 300$$

$\boxed{3}$

$$9x - 24x - 16x = 8 - 300 + 3 + 72$$

$\boxed{4}$

$$-31x = -217$$

$\boxed{5}$

$x = \frac{-217}{-31}$. *Solución:* $x = 7$

$\boxed{6}$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{3\cdot 7-1}{20} - \frac{2(7+3)}{5} = -3 \\ &\frac{4\cdot 7+2}{15} - 5 = 2 - 5 = -3 \end{aligned}\right\}$$

Coinciden. La solución es correcta.

Pasos para resolver ecuaciones de primer grado

1. Quitar denominadores, si los hay. Para ello, se multiplican los dos miembros de la ecuación por un múltiplo común de los denominadores; preferiblemente, su mínimo común múltiplo.
2. Quitar paréntesis, si los hay.
3. Pasar los términos en x a un miembro y los números al otro miembro.
4. Simplificar cada miembro.
5. Despejar la x. Se obtiene, así, la solución.
6. Comprobación: sustituir la solución en cada miembro de la ecuación inicial para comprobar que coinciden los resultados.

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{3x}{15} - x = -\frac{3x}{3} + \frac{9}{5}$

b) $\frac{x}{3} + \frac{x}{9} - \frac{4x}{27} = \frac{11}{27} - \frac{x}{9}$

c) $\frac{x}{2} + \frac{x-3}{8} + \frac{2x+2}{16} = \frac{x-2}{2}$

d) $\frac{13+x}{20} - \frac{5x}{2} = \frac{10+x}{5} + \frac{1-12x}{10}$

e) $3x - \frac{x+3}{4} = 13$

f) $4 - \frac{x+2}{4} = x - 4$

g) $\frac{x}{2} - \frac{2(x+2)}{7} = \frac{x-3}{4}$

h) $\frac{1-x}{25} - \frac{x}{6} + \frac{x+7}{9} = \frac{2}{5} - \frac{3x}{15}$

i) $\frac{(1+x)^2}{5} = \frac{2x+4}{25} + \frac{x^2}{5} + \frac{1}{5}$

j) $\frac{x-4}{8} + \frac{9-x}{12} - \frac{2x-7}{24} + 5 = x - 8$

k) $x + \frac{9(5+x)}{5} = 9 - x$

l) $\frac{(2x-1)(2x+1)}{4} = \frac{3(4x^2+1)}{12} - x$

m) $(x-3)(x+3) = \frac{3(x-1)}{2} + x^2$

n) $\frac{x-7}{4} + \frac{25(x-2)}{3} = \frac{5x+35}{4} + \frac{5}{2}(x-7)$

Soluciones:

a) $x = 9$	b) $x = 1$	c) $x = -3$	d) $x = -1$
e) $x = 5$	f) $x = 6$	g) $x = 5$	h) $x = -4$
i) $x = 1/2$	j) $x = 13$	k) $x = 0$	l) $x = 1/2$
m) $x = -5$	n) $x = 2$		

https://www.youtube.com/watch?v=xJM1VSo6NMs&feature=youtu.be
https://www.youtube.com/watch?v=fEPHZuMWbHE&feature=youtu.be

3 Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de segundo grado es de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{con} \quad a \neq 0$$

Para despejar la x, se sigue un largo y complicado proceso que no vamos a ver aquí. El resultado final es la fórmula siguiente:

Soluciones de una ecuación de segundo grado

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Número de soluciones

La expresión que está dentro de la raíz en las soluciones de una ecuación de segundo grado, $\Delta = b^2 - 4ac$, se llama **discriminante** de la ecuación. El número de soluciones depende del signo de Δ:

- Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene **dos soluciones:**

  $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, solo hay una solución: $x = \frac{-b}{2a}$. Se dice que es una **solución doble.**
- Si $\Delta < 0$, $\sqrt{\Delta}$ carece de sentido. La ecuación **no tiene solución.**

Ecuaciones de segundo grado incompletas

Ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$

Para resolver las ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$ no es necesario aplicar la fórmula general, pues se puede despejar x con toda sencillez:

$$x^2 = -\frac{c}{a} \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$

Para resolver las ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$ no es necesario aplicar la fórmula general, pues se puede sacar la x como factor común e igualar a cero cada uno de los dos factores:

$$x \cdot (ax + b) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Soluciones: } x_1 = 0, \; x_2 = -\frac{b}{a}$$

https://www.youtube.com/watch?v=l-r0vDRscKc&feature=youtu.be

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$
e) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ f) $6x^2 - 5x + 1 = 0$
c) $9x^2 - 6x + 1 = 0$ d) $5x^2 - 7x + 3 = 0$
g) $x^2 - 3x + 15 = 0$ h) $x^2 - 0{,}1x + 0{,}2 = 0$

Soluciones:

a) $x_1 = 3, \; x_2 = 2$ b) $x = -1/3$, solución doble.
c) $x = 1/3$, solución doble. d) $x = \frac{7 \pm \sqrt{-11}}{2}$, sin solución.
e) $x_1 = \frac{1}{2}, \; x_2 = -3$ f) $x_1 = \frac{1}{2}, \; x_2 = \frac{1}{3}$
g) $x = \frac{3 \pm \sqrt{-51}}{2}$, sin solución h) $x = \frac{0{,}1 \pm \sqrt{-0{,}79}}{2}$, no tiene solución.

---

a) $7x^2 - 28 = 0$ b) $7x^2 + 28 = 0$
e) $3x^2 = 42x$ f) $11x^2 - 37x = 0$
c) $4x^2 - 9 = 0$ d) $3x^2 + 42x = 0$
g) $2(x + 5)^2 + (x - 3)^2 = 14(x + 4)$ h) $7x^2 + 5 = 68$

a) $x_1 = 2, \; x_2 = -2$ b) $x^2 = \frac{-28}{7} = -4$, no tiene solución.
c) $x_1 = \frac{3}{2}, \; x_2 = \frac{-3}{2}$ d) $x_1 = 0, \; x_2 = -14$
e) $x_1 = 0, \; x_2 = 14$ f) $x_1 = 0, \; x_2 = \frac{37}{11}$
g) No tiene solución. h) $x_1 = 9, \; x_2 = -9$

Reglas para resolver ecuaciones de segundo grado

- Si la ecuación de segundo grado está completa (tiene todos sus términos), aplica la fórmula.
- Si es una ecuación incompleta, tal como hemos visto en el apartado anterior, podrás resolverla con facilidad sin aplicar la fórmula.
- Si tiene una fisonomía complicada, arréglala: quita denominadores, suprime paréntesis, agrupa términos y pásalos todos al primer miembro.

  Solo cuando esté simplificada, aplica uno de los consejos anteriores.
- Comprueba las soluciones. Si la ecuación proviene de un problema con enunciado, haz la comprobación sobre él, pues es posible que alguna de las soluciones carezca de sentido real, como veremos en la página 112.

  Si la ecuación de partida tiene la x en el denominador cuida no dar como solución ningún valor que anule a algún denominador. Si se diera este caso, hay que rechazar esa solución.

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x(x + 1) - \frac{(x - 2)^2}{2} = (x + 1)(x - 1) + 15$

b) $\frac{(x + 1)^2}{2} - \frac{3(x - 1)}{4} + \frac{3x(x + 1)}{2} = \frac{3}{2}$

c) $\frac{3x}{2} - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$

d) $\frac{x}{3} - 1 + \frac{1}{x} = 1 - \frac{2}{3x}$

Soluciones:

a) $3x^2 + 10x - 32 = 0 \rightarrow x_1 = 2, \; x_2 = -\frac{16}{3}$
b) $8x^2 + 7x - 1 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{1}{8}, \; x_2 = -1$
c) $3x^2 - 3x - 2 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{3 + \sqrt{33}}{6}, \; x_2 = \frac{3 - \sqrt{33}}{6}$
d) $x^2 - 6x + 5 = 0 \rightarrow x_1 = 5, \; x_2 = 1$

$3x^2 - 2(x + 5) = (x + 3)^2 - 19$

$(2x + 4)(x - 1) + (3x + 5)^2 = 3(2x + 5)^2 + x$

$(3x + 4)(5x - 7) = (2x + 7)^2 + 53$

$(x - 2)(4x + 2) + (3 - 3x)^2 = 4(5x + 1)^2 - (x - 1)$

Soluciones:

a) $2x^2 - 8x = 0 \rightarrow x_1 = 0, \; x_2 = 4$
b) $11x^2 - 29x - 130 = 0 \rightarrow x_1 = 0, \; x_2 = -\frac{26}{11}$
c) $x^2 + 29x + 54 = 0 \rightarrow x_1 = -2, \; x_2 = -27$
d) $87x^2 + 63x = 0 \rightarrow x_1 = 0, \; x_2 = -\frac{21}{29}$

https://www.youtube.com/watch?v=BN30sFJX5kc&feature=youtu.be

4 Resolución de problemas con ecuaciones

1. Identificar los datos conocidos y lo que deseamos conocer. Dar nombre a la incógnita.
2. Relacionar mediante una igualdad (ecuación) lo conocido con lo desconocido.
3. Resolver la ecuación.
4. Interpretar la solución ajustándola al enunciado.

1. La base de un rectángulo es 9 cm mayor que su altura. Su área mide 400 cm^2. Calcula las dimensiones de este rectángulo.

2. Al aumentar 10 m de radio, una finca circular aumenta unos 3456 m^2 de superficie. ¿Qué diámetro tiene la finca ampliada?

3. Se ha fundido un lingote de oro de 3 kg de peso y 80 % de pureza, junto con otro lingote de oro de 1 kg de peso. ¿Cuál era la pureza del segundo, si la de la mezcla resultante es del 67 %?

4. Un coche tarda 5 h en cubrir el trayecto entre A-B. Un camión, que ha salido a la misma hora, y realiza el trayecto B-A, tarda 2 h y 55 min en cruzarse con el coche. ¿Cuánto durará el viaje completo del camión?

5. Dos albañiles que trabajan asociados reciben 1 400 € como pago de cierto trabajo. ¿Cuánto debe cobrar cada uno si el primero trabajó las dos quintas partes de lo que trabajó el otro?

6. Un grifo tarda el triple que otro en llenar un depósito. Abriendo los dos a la vez tardan una hora. ¿Cuánto tardará cada uno de ellos por separado en llenar el depósito?

Resuelve problemas

29. Del dinero de una cuenta bancaria retiramos 1/7; ingresamos después 2/15 de lo que quedó y aún faltan 12 € para tener la cantidad inicial. ¿Cuánto dinero había en la cuenta?

30. Un padre de 43 años tiene dos hijos de 9 y 11 años. ¿Cuántos años han de transcurrir para que entre los dos hijos igualen la edad del padre?

31. Estamos haciendo bocadillos de chorizo para llevar de excursión. Si ponemos 4 rodajas en cada uno, sobran 12, y si ponemos 5, nos faltan 8. ¿Cuántos bocadillos queremos preparar?

33. ¿Cuántos litros de aceite de orujo de 1,60 €/*l* tenemos que añadir a 60 *l* de aceite de oliva de 2,80 €/*l* para obtener una mezcla de 2,50 €/*l*?

34. Al mezclar 30 kg de pintura con 50 kg de otra de calidad inferior, obtenemos una mezcla a 3,30 €/kg. Si el precio de la barata es la mitad que el de la otra, ¿cuál es el precio de cada pintura?

35. Una marca de café de 14,15 €/kg se elabora con un 30 % de café colombiano de 18 €/kg, y el resto, con otro. ¿Cuál es el precio de ese otro?

36. Un centro escolar contrató un autobús para una salida al campo. Con todas las plazas ocupadas, el precio del billete es de 12 €; pero quedaron 4 plazas libres, por lo que el viaje costó 13,5 €. ¿Cuántas plazas tiene el autobús?

37. Un grupo de amigos se van a repartir un premio y les toca a 15 € a cada uno. Deciden compartirlo con cuatro amigos más y de esta forma les toca a 3 € menos a cada uno. ¿Cuántos son en total a repartir?

38. Si un número aumenta en un 10 %, resulta 42 unidades mayor que si disminuye en un 5 %. ¿Cuál es ese número?

39. Un inversor, que dispone de 28 000 €, coloca parte de su capital en un banco al 4 %, y el resto, en otro banco al 3,5 %. Si la primera parte le produce anualmente 220 € más que la segunda, ¿cuánto colocó en cada banco?

40. Dos ciudades, A y B, distan 250 km. Un camión sale de A hacia B a 90 km/h. A la misma hora sale de B hacia A un coche que tarda una hora y cuarto en encontrarse con el camión. ¿Qué velocidad lleva el coche?

41. Un ciclista que va a 21 km/h tarda tres cuartos de hora en alcanzar a otro que le lleva una ventaja de 2,25 km. ¿Qué velocidad lleva el que va delante?

42. Ana sale en su coche a 80 km/h. Se para 15 min para echar gasolina y después conduce un buen rato a 100 km/h. Cuando llega a su destino, comprueba que hizo 250 km en 3 horas, contando la parada. ¿Cuánto tiempo condujo a 80 km/h?

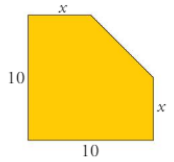
43. Calcula los lados de un rectángulo cuya diagonal mide 10 cm y en el que la base mide 2 cm más que la altura.

44. Los catetos de un triángulo rectángulo suman 18 cm y su área es de 40 cm^2. Halla las medidas de los catetos de este triángulo.

45. La base de un rectángulo mide 5 cm más que la altura. Si disminuimos la altura en 2 cm, el área del nuevo rectángulo será de 60 cm^2. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo?

46. Un patio rectangular, que mide 8 m menos de ancho que de largo, tiene un estanque central, también rectangular, rodeado por una zona de paso de 2 m de ancho. Si sabemos que el área de esa zona es de 112 m^2, ¿cuáles serán las dimensiones del patio y del estanque?

47. ¿Cuánto debe valer x para que el área de esa figura sea 82 cm^2?



48. Calcula dos números naturales que sumen 85 y tales que al dividir el cuadrado del mayor entre el cuadrado del menor se obtenga 5 de cociente y 475 de resto.

49. Si a un número de dos cifras le restamos el que resulta de invertir el orden de estas, el resultado es 18. Averigua cuál es el número sabiendo que la cifra de las unidades es 2.

50. Un depósito de agua para riego tiene un grifo de abastecimiento y un desagüe. El grifo llena el depósito en 9 horas. Si además del grifo se abre el desagüe, el depósito tarda 36 horas en llenarse. Averigua cuánto tarda el desagüe en vaciar el depósito lleno, estando cerrado el grifo.

51. Un grifo tarda el doble que otro en llenar un depósito. Abriendo los dos a la vez, tardan 8 horas. ¿Cuánto tardará cada uno de ellos en llenarlo?

52. Un albañil tarda 9 horas en poner los azulejos de una cocina, mientras que otro tarda 10 horas. Se sabe que si trabajan juntos, entre los dos ponen 6 azulejos menos que si trabajan por separado. Un día que reformaron otra cocina trabajando juntos completaron el trabajo en 5 horas. ¿Cuántos azulejos hay que poner en cada cocina?

Soluciones:

1 La altura mide 16 cm, y la base, 25 cm.

2 El diámetro actual es, aproximadamente, de 120 cm.

3 La pureza del segundo lingote es del 28 %.

4 El viaje completo del camión dura 7 horas.

5 Uno de los albañiles debe cobrar 1 000 €, y el otro, 400 €.

6 Uno de los grifos tarda 1 h 20 min, y el otro, 4 horas.

29 En la cuenta había 420 €.

30 Han de transcurrir 23 años.

31 Queremos preparar 20 bocadillos.

32 Había 60 personas.

33 Tenemos que añadir 20 litros.

34 La pintura cara vale 4,80 €/kg, y la pintura barata, 2,40 €/kg.

35 El precio es de 12,50 €/kg.

36 El autobús tiene 36 plazas.

37 En total son 20 personas.

38 El número es 280.

39 Colocó 14 072,30 € en un banco y 13 927,70 € en el otro.

40 La velocidad del coche es de 110 km/h.

41 Lleva una velocidad de 18 km/h.

42 Ana condujo 1,25 h a 80 km/h.

43 La altura mide 6 cm, y la base, 8 cm.

44 Los catetos miden 8 cm y 10 cm.

45 La altura mide 7 cm, y la base, 12 cm.

46 Patio → 20 m de largo y 12 m de ancho.

Estanque → 16 m de largo y 8 m de ancho.

47 $x = 4$ cm (x debe ser menor que 10).

48 Los números son 25 y 60.

49 El número es 42.

50 Tarda 12 horas.

51 Uno de los grifos tarda 12 horas, y el otro, 24 horas.

52 Infinitas soluciones.

Ejemplo 1: El primer albañil pone 10 azulejos cada hora, y el segundo, 9. La primera cocina tiene 90 azulejos, y la segunda, 65.

Ejemplo 2: El primer albañil pone 20 azulejos cada hora, y el segundo, 18. La primera cocina tiene 180 azulejos, y la segunda, 160.