Resolución de ejercicios del boletín de repaso para el examen de Análisis

Matemáticas I

IES O Couto

curso 2019-2020

BY NC SA
Silvia Fdez. Carballo

INFO ABOUT RIGHTS
2 003143 305368
www.safecreative.org/work

Ejercicio 9

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + bx + 3 & si \quad x < -1 \\ ax - \dfrac{1}{x+2} & si \quad -1 \leq x < 0 \\ 3 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

a) Encuentra el valor de los parámetros a y b para que sea derivable en $x = -1$

b) Para los valores de a y b encontrados, estudiar la derivabilidad de f, y obtener la expresión de la función derivada.

c) Escribe la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = -2$.

Apartado a)

1. Para que f sea continua en $x = -1$:

Apartado a)

1. Para que f sea continua en $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + 3 = 2 + a - b \\ \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x^3 + ax^2 + bx + 3) = 2 + a - b \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \left(ax - \dfrac{1}{x+2} \right) = -a - 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Apartado a)

1. Para que f sea continua en $x=-1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=(-1)^3+a(-1)^2+b(-1)+3=2+a-b \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x^3+ax^2+bx+3)=2+a-b \\ \lim\limits_{x\to -1^+}\left(ax-\dfrac{1}{x+2}\right)=-a-1 \end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2+a-b=-a-1 \Longrightarrow 2a-b=-3$$

Apartado a)

1. Para que f sea continua en $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + 3 = 2 + a - b \\ \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x^3 + ax^2 + bx + 3) = 2 + a - b \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \left(ax - \dfrac{1}{x+2} \right) = -a - 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2 + a - b = -a - 1 \Longrightarrow 2a - b = -3$$

2. Supuesto que f sea continua en $x = -1$, para que f sea derivable en $x = -1$:

Apartado a)

1. Para que f sea continua en $x=-1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=(-1)^3+a(-1)^2+b(-1)+3=2+a-b \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x^3+ax^2+bx+3)=2+a-b \\ \lim\limits_{x\to -1^+}\left(ax-\dfrac{1}{x+2}\right)=-a-1 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\ 2+a-b=-a-1 \ \Longrightarrow\ 2a-b=-3$$

2. Supuesto que f sea continua en $x=-1$, para que f sea derivable en $x=-1$:

$$f'(-1^-)=\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} \overset{\text{f. cont}}{=} \frac{0}{0} \overset{\text{L'Hôp.}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to -1^-}\frac{f'(x)}{1}=$$

Apartado a)

1. Para que f sea continua en $x=-1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=(-1)^3+a(-1)^2+b(-1)+3=2+a-b \\[2ex] \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x^3+ax^2+bx+3)=2+a-b \\[2ex] \lim\limits_{x\to -1^+}\left(ax-\dfrac{1}{x+2}\right)=-a-1 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\ 2+a-b=-a-1 \Longrightarrow\ 2a-b=-3$$

2. Supuesto que f sea continua en $x=-1$, para que f sea derivable en $x=-1$:

$$f'(-1^-)=\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} \overset{\text{f. cont}}{=} \frac{0}{0} \overset{\text{L'Hôp.}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to -1^-}\frac{f'(x)}{1}=$$

$$=\lim_{x\to -1^-}(3x^2+2ax+b)=3-2a+b$$

$$f'(-1^+) = \lim_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} \overset{\text{f. cont}}{=} \frac{0}{0} \overset{\text{L'Hôp.}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to -1^+} \frac{f'(x)}{1} =$$

$$f'(-1^+) = \lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} \overset{\text{f. cont}}{=} \frac{0}{0} \overset{\text{L'Hôp.}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to -1^+} \frac{f'(x)}{1} =$$

$$\lim_{x\to -1^+} \left(a + \frac{1}{(x+2)^2} \right) = a+1$$

$$f'(-1^+) = \lim_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} \overset{\text{f. cont}}{=} \frac{0}{0} \overset{\text{L'Hôp.}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to -1^+} \frac{f'(x)}{1} =$$

$$\lim_{x \to -1^+} \left(a + \frac{1}{(x+2)^2} \right) = a + 1$$

Por tanto, para que $f'(-1^-) = f'(-1^+)$:

$$f'(-1^+) = \lim_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} \overset{\text{f. cont}}{=} \frac{0}{0} \overset{\text{L'Hôp.}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to -1^+} \frac{f'(x)}{1} =$$

$$\lim_{x \to -1^+} \left(a + \frac{1}{(x+2)^2} \right) = a + 1$$

Por tanto, para que $f'(-1^-) = f'(-1^+)$:

$$3 - 2a + b = a + 1 \implies -3a + b = -4$$

$$f'(-1^+) = \lim_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} \overset{\text{f. cont}}{=} \frac{0}{0} \overset{\text{L'Hôp.}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to -1^+} \frac{f'(x)}{1} =$$

$$\lim_{x \to -1^+} \left(a + \frac{1}{(x+2)^2} \right) = a + 1$$

Por tanto, para que $f'(-1^-) = f'(-1^+)$:

$$3 - 2a + b = a + 1 \implies -3a + b = -4$$

- Es decir, f es derivable en $x = -1$ para los valores que resuelven el sistema lineal $\left\{ \begin{array}{l} 2a - b = -3 \\ -3a + b = -2 \end{array} \right.$:

$$f'(-1^+) = \lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} \overset{\text{f. cont}}{=} \frac{0}{0} \overset{\text{L'Hôp.}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to -1^+} \frac{f'(x)}{1} =$$

$$\lim_{x\to -1^+} \left(a + \frac{1}{(x+2)^2} \right) = a+1$$

Por tanto, para que $f'(-1^-) = f'(-1^+)$:

$$3-2a+b = a+1 \implies -3a+b=-4$$

- Es decir, f es derivable en $x=-1$ para los valores que resuelven el sistema lineal $\begin{cases} 2a-b=-3 \\ -3a+b=-2 \end{cases}$:

$$\begin{cases} 2a-b=-3 \\ -3a+b=-2 \end{cases} \overset{F_1+F_2}{\Longrightarrow} -a=-5 \implies a=5 \overset{b=2a+3}{\Longrightarrow} b=13$$

Apartado b)

Para $a = 5$ y $b = 13$, $f(x) = \begin{cases} x^3 + 5x^2 + 13x + 3 & si \quad x < -1 \\ 5x - \dfrac{1}{x+2} & si \quad -1 \leq x < 0 \\ 3 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

Apartado b)

Para $a = 5$ y $b = 13$, $f(x) = \begin{cases} x^3 + 5x^2 + 13x + 3 & si \quad x < -1 \\ 5x - \dfrac{1}{x+2} & si \quad -1 \leq x < 0 \\ 3 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

La función f es derivable al menos en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Hay que estudiar puntualmente la derivabilidad en $x = 0$:

Apartado b)

Para $a = 5$ y $b = 13$, $f(x) = \begin{cases} x^3 + 5x^2 + 13x + 3 & si \quad x < -1 \\ 5x - \dfrac{1}{x+2} & si \quad -1 \leq x < 0 \\ 3 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

La función f es derivable al menos en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Hay que estudiar puntualmente la derivabilidad en $x = 0$:

1. Continuidad en $x = 0$:

Apartado b)

Para $a=5$ y $b=13$, $f(x)=\begin{cases} x^3+5x^2+13x+3 & si \quad x<-1 \\ 5x-\dfrac{1}{x+2} & si \quad -1\leq x<0 \\ 3 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

La función f es derivable al menos en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Hay que estudiar puntualmente la derivabilidad en $x=0$:

1. Continuidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=3 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(5x-\dfrac{1}{x+2}\right)=-\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 3=3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} f \text{ no es continua} \\ \text{en } x=0 \\ \text{(disc. salto finito)} \end{array}$$

Apartado b)

Para $a = 5$ y $b = 13$, $f(x) = \begin{cases} x^3 + 5x^2 + 13x + 3 & si \quad x < -1 \\ 5x - \dfrac{1}{x+2} & si \quad -1 \leq x < 0 \\ 3 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

La función f es derivable al menos en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Hay que estudiar puntualmente la derivabilidad en $x = 0$:

1. Continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(5x - \dfrac{1}{x+2}\right) = -\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 3 = 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} f \text{ no es continua} \\ \text{en } x = 0 \\ \text{(disc. salto finito)} \end{array}$$

2. Al no ser continua en $x = 0$, f no es derivable en $x = 0$.

3. Obtención de la función derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 10x + 13 & si \quad x < -1 \\ 5 + \dfrac{1}{(x+2)^2} & si \quad -1 \leq x < 0 \\ 0 & si^* \quad x > 0 \end{cases}$$

*Importante!: Dado que f no es derivable en $x = 0$, en la definición de la función $f'(x)$ no puede ponerse $x \geq 0$

Apartado c)

La ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = -2$ es $y - f(-2) = f'(-2)(x + 2)$:

Apartado c)

La ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = -2$ es $y - f(-2) = f'(-2)(x + 2)$:

- $f(-2) = (-2)^3 + 5 \cdot (-2)^2 + 13 \cdot (-2) + 3 = -8 + 20 - 26 + 3 = -11$

Apartado c)

La ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = -2$ es $y - f(-2) = f'(-2)(x+2)$:

- $f(-2) = (-2)^3 + 5 \cdot (-2)^2 + 13 \cdot (-2) + 3 = -8 + 20 - 26 + 3 = -11$
- $f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + 10 \cdot (-2) + 13 = 5$

Apartado c)

La ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = -2$ es $y - f(-2) = f'(-2)(x+2)$:

- $f(-2) = (-2)^3 + 5 \cdot (-2)^2 + 13 \cdot (-2) + 3 = -8 + 20 - 26 + 3 = -11$
- $f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + 10 \cdot (-2) + 13 = 5$
- Por tanto:

$$y + 11 = 5(x+2) \implies y = 5x - 1$$