Resolución de ejercicios del boletín de repaso para el examen de Análisis

IES O Couto

curso 2019-2020

Ejercicio 15

Estudia la curvatura y la existencia de puntos de inflexión para las siguientes funciones:

a) $f(x) = (x^2 + x - 10)e^x$

b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

c) $f(x) = \dfrac{x^5}{20} + \dfrac{x^3 - x^4}{6}$

Apartado a)

1. Obtenemos la derivada segunda:

Apartado a)

1. Obtenemos la derivada segunda:
   $f(x) = (x^2 + x - 10)e^x \implies$

Apartado a)

1. Obtenemos la derivada segunda:
   $f(x) = (x^2 + x - 10)e^x \implies$
   $f'(x) = (2x+1)e^x + (x^2 + x - 10)e^x = (x^2 + 3x - 9)e^x \implies$

Apartado a)

1. Obtenemos la derivada segunda:

$$f(x) = (x^2 + x - 10)e^x \implies$$
$$f'(x) = (2x + 1)e^x + (x^2 + x - 10)e^x = (x^2 + 3x - 9)e^x \implies$$
$$f''(x) = (2x + 3)e^x + (x^2 + 3x - 9)e^x = (x^2 + 5x - 6)e^x$$

Apartado a)

1. Obtenemos la derivada segunda:
   $f(x) = (x^2 + x - 10)e^x \implies$
   $f'(x) = (2x+1)e^x + (x^2 + x - 10)e^x = (x^2 + 3x - 9)e^x \implies$
   $f''(x) = (2x+3)e^x + (x^2 + 3x - 9)e^x = (x^2 + 5x - 6)e^x$
2. Estudiamos el signo de la derivada segunda.

Apartado a)

1. Obtenemos la derivada segunda:
   $f(x) = (x^2 + x - 10)e^x \implies$
   $f'(x) = (2x + 1)e^x + (x^2 + x - 10)e^x = (x^2 + 3x - 9)e^x \implies$
   $f''(x) = (2x + 3)e^x + (x^2 + 3x - 9)e^x = (x^2 + 5x - 6)e^x$
2. Estudiamos el signo de la derivada segunda.
   $f''(x) = 0 \iff (x^2 + 5x - 6)e^x = 0 \iff x^2 + 5x - 6 = 0 \iff$

Apartado a)

1. Obtenemos la derivada segunda:
   $f(x) = (x^2 + x - 10)e^x \implies$
   $f'(x) = (2x + 1)e^x + (x^2 + x - 10)e^x = (x^2 + 3x - 9)e^x \implies$
   $f''(x) = (2x + 3)e^x + (x^2 + 3x - 9)e^x = (x^2 + 5x - 6)e^x$
2. Estudiamos el signo de la derivada segunda.
   $f''(x) = 0 \iff (x^2 + 5x - 6)e^x = 0 \iff x^2 + 5x - 6 = 0 \iff$
   $\iff x = 1, x = -6$

Apartado a)

1. Obtenemos la derivada segunda:
$f(x) = (x^2 + x - 10)e^x \implies$
$f'(x) = (2x+1)e^x + (x^2 + x - 10)e^x = (x^2 + 3x - 9)e^x \implies$
$f''(x) = (2x+3)e^x + (x^2 + 3x - 9)e^x = (x^2 + 5x - 6)e^x$

2. Estudiamos el signo de la derivada segunda.
$f''(x) = 0 \iff (x^2 + 5x - 6)e^x = 0 \iff x^2 + 5x - 6 = 0 \iff$
$\iff x = 1, x = -6$

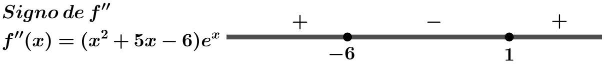
Signo de f''

$f''(x) = (x^2 + 5x - 6)e^x$

$(-\infty, -6)$	-6	$(-6, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$+$	0	$-$	0	$+$

Apartado a)

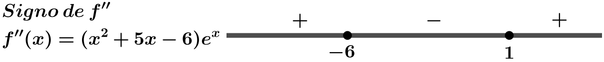
1. Obtenemos la derivada segunda:
   $f(x) = (x^2 + x - 10)e^x \implies$
   $f'(x) = (2x+1)e^x + (x^2 + x - 10)e^x = (x^2 + 3x - 9)e^x \implies$
   $f''(x) = (2x+3)e^x + (x^2 + 3x - 9)e^x = (x^2 + 5x - 6)e^x$
2. Estudiamos el signo de la derivada segunda.
   $f''(x) = 0 \iff (x^2 + 5x - 6)e^x = 0 \iff x^2 + 5x - 6 = 0 \iff$
   $\iff x = 1, x = -6$



3. f es convexa en $(-\infty, -6) \cup (1, +\infty)$

Apartado a)

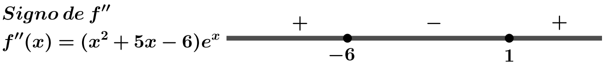
1. Obtenemos la derivada segunda:
   $f(x) = (x^2 + x - 10)e^x \implies$
   $f'(x) = (2x+1)e^x + (x^2 + x - 10)e^x = (x^2 + 3x - 9)e^x \implies$
   $f''(x) = (2x+3)e^x + (x^2 + 3x - 9)e^x = (x^2 + 5x - 6)e^x$
2. Estudiamos el signo de la derivada segunda.
   $f''(x) = 0 \iff (x^2 + 5x - 6)e^x = 0 \iff x^2 + 5x - 6 = 0 \iff$
   $\iff x = 1, x = -6$



3. f es convexa en $(-\infty, -6) \cup (1, +\infty)$
   f es cóncava en $(-6, 1)$

Apartado a)

1. Obtenemos la derivada segunda:
   $f(x) = (x^2 + x - 10)e^x \implies$
   $f'(x) = (2x + 1)e^x + (x^2 + x - 10)e^x = (x^2 + 3x - 9)e^x \implies$
   $f''(x) = (2x + 3)e^x + (x^2 + 3x - 9)e^x = (x^2 + 5x - 6)e^x$
2. Estudiamos el signo de la derivada segunda.
   $f''(x) = 0 \iff (x^2 + 5x - 6)e^x = 0 \iff x^2 + 5x - 6 = 0 \iff$
   $\iff x = 1, x = -6$



3. f es convexa en $(-\infty, -6) \cup (1, +\infty)$
   f es cóncava en $(-6, 1)$
   f tiene puntos de inflexión en $x = -6$ y $x = 1$

Apartado b)

1. Obtenemos la derivada segunda:

Apartado b)

1. Obtenemos la derivada segunda:
$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \Longrightarrow$

Apartado b)

1. Obtenemos la derivada segunda:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \Longrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{-1(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1-x)(1+x)} = -\frac{2}{1-x^2}$$

Apartado b)

1. Obtenemos la derivada segunda:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \Longrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{-1(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1-x)(1+x)} = -\frac{2}{1-x^2}$$

$$f''(x) = -\frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

Apartado b)

1. Obtenemos la derivada segunda:
$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \implies$$
$$f'(x) = \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{-1(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1-x)(1+x)} = -\frac{2}{1-x^2}$$
$$f''(x) = -\frac{4x}{(1-x^2)^2}$$
2. Estudiamos el signo de la derivada segunda.

Apartado b)

1. Obtenemos la derivada segunda:
$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \implies$$
$$f'(x) = \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{-1(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1-x)(1+x)} = -\frac{2}{1-x^2}$$
$$f''(x) = -\frac{4x}{(1-x^2)^2}$$
2. Estudiamos el signo de la derivada segunda.
Tenemos que tener en cuenta el dominio de f: $Dom\, f = (-1, 1)$

Apartado b)

1. Obtenemos la derivada segunda:
$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \implies$$
$$f'(x) = \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{-1(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1-x)(1+x)} = -\frac{2}{1-x^2}$$
$$f''(x) = -\frac{4x}{(1-x^2)^2}$$
2. Estudiamos el signo de la derivada segunda.
Tenemos que tener en cuenta el dominio de f: $Dom\, f = (-1, 1)$
$f''(x) = 0 \iff x = 0$

Apartado b)

1. Obtenemos la derivada segunda:
   $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \Longrightarrow$
   $f'(x) = \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{-1(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1-x)(1+x)} = -\frac{2}{1-x^2}$
   $f''(x) = -\frac{4x}{(1-x^2)^2}$
2. Estudiamos el signo de la derivada segunda.
   Tenemos que tener en cuenta el dominio de f: $Dom\, f = (-1,1)$
   $f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
3. f es convexa en $(-1,0) \cup (1,+\infty)$

Apartado b)

1. Obtenemos la derivada segunda:
$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \implies$$
$$f'(x) = \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{-1(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1-x)(1+x)} = -\frac{2}{1-x^2}$$
$$f''(x) = -\frac{4x}{(1-x^2)^2}$$
2. Estudiamos el signo de la derivada segunda.
Tenemos que tener en cuenta el dominio de f: $Dom\, f = (-1, 1)$
$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
3. f es convexa en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
f es cóncava en $(0, 1)$

Apartado b)

1. Obtenemos la derivada segunda:
   $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) \implies$
   $f'(x) = \dfrac{1+x}{1-x} \cdot \dfrac{-1(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = -\dfrac{2}{(1-x)(1+x)} = -\dfrac{2}{1-x^2}$
   $f''(x) = -\dfrac{4x}{(1-x^2)^2}$
2. Estudiamos el signo de la derivada segunda.
   Tenemos que tener en cuenta el dominio de f: $Dom\, f = (-1, 1)$
   $f''(x) = 0 \iff x = 0$
3. f es convexa en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
   f es cóncava en $(0, 1)$
   f tiene un punto de inflexión en $x = 0$

Apartado c)

1. Obtenemos la derivada segunda:

Apartado c)

1. Obtenemos la derivada segunda:

$$f(x) = \frac{x^5}{20} + \frac{x^3 - x^4}{6} \implies$$

Apartado c)

1. Obtenemos la derivada segunda:

$$f(x) = \frac{x^5}{20} + \frac{x^3 - x^4}{6} \implies$$

$$f'(x) = \frac{5x^4}{20} + \frac{3x^2 - 4x^3}{6} = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \implies$$

Apartado c)

1. Obtenemos la derivada segunda:

$$f(x) = \frac{x^5}{20} + \frac{x^3 - x^4}{6} \implies$$
$$f'(x) = \frac{5x^4}{20} + \frac{3x^2 - 4x^3}{6} = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \implies$$
$$f''(x) = x^3 + x - 2x^2 = x(x-1)^2$$

Apartado c)

1. Obtenemos la derivada segunda:

$$f(x) = \frac{x^5}{20} + \frac{x^3 - x^4}{6} \implies$$

$$f'(x) = \frac{5x^4}{20} + \frac{3x^2 - 4x^3}{6} = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \implies$$

$$f''(x) = x^3 + x - 2x^2 = x(x-1)^2$$

2. Estudiamos el signo de la derivada segunda.

Apartado c)

1. Obtenemos la derivada segunda:
$$f(x) = \frac{x^5}{20} + \frac{x^3 - x^4}{6} \implies$$
$$f'(x) = \frac{5x^4}{20} + \frac{3x^2 - 4x^3}{6} = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \implies$$
$$f''(x) = x^3 + x - 2x^2 = x(x-1)^2$$
2. Estudiamos el signo de la derivada segunda.

Apartado c)

1. Obtenemos la derivada segunda:
$f(x) = \dfrac{x^5}{20} + \dfrac{x^3 - x^4}{6} \implies$
$f'(x) = \dfrac{5x^4}{20} + \dfrac{3x^2 - 4x^3}{6} = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2x^3}{3} \implies$
$f''(x) = x^3 + x - 2x^2 = x(x-1)^2$
2. Estudiamos el signo de la derivada segunda.
$f''(x) = 0 \iff x(x-1)^2 = 0 \iff x = 0,\ x = 1$

Apartado c)

1. Obtenemos la derivada segunda:
$$f(x) = \frac{x^5}{20} + \frac{x^3 - x^4}{6} \Longrightarrow$$
$$f'(x) = \frac{5x^4}{20} + \frac{3x^2 - 4x^3}{6} = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \Longrightarrow$$
$$f''(x) = x^3 + x - 2x^2 = x(x-1)^2$$
2. Estudiamos el signo de la derivada segunda.
$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x(x-1)^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0,\ x = 1$$
$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 0$$
3. f es convexa en $(0, +\infty)$

Apartado c)

1. Obtenemos la derivada segunda:
   $f(x) = \dfrac{x^5}{20} + \dfrac{x^3 - x^4}{6} \implies$
   $f'(x) = \dfrac{5x^4}{20} + \dfrac{3x^2 - 4x^3}{6} = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2x^3}{3} \implies$
   $f''(x) = x^3 + x - 2x^2 = x(x-1)^2$
2. Estudiamos el signo de la derivada segunda.
   $f''(x) = 0 \iff x(x-1)^2 = 0 \iff x = 0,\ x = 1$
   $f''(x) > 0 \iff x > 0$
3. f es convexa en $(0, +\infty)$
   f es cóncava en $(-\infty, 0)$

Apartado c)

1. Obtenemos la derivada segunda:
$$f(x) = \frac{x^5}{20} + \frac{x^3 - x^4}{6} \Longrightarrow$$
$$f'(x) = \frac{5x^4}{20} + \frac{3x^2 - 4x^3}{6} = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \Longrightarrow$$
$$f''(x) = x^3 + x - 2x^2 = x(x-1)^2$$
2. Estudiamos el signo de la derivada segunda.
$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x(x-1)^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0,\ x = 1$$
$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 0$$
3. f es convexa en $(0, +\infty)$
f es cóncava en $(-\infty, 0)$
f tiene un punto de inflexión en $x = 0$